А. А. Андрианов, В. А. Андрианов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСС СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ В ЭФФЕКТИВНЫХ КВАРКОВЫХ МОДЕЛЯХ, МОТИВИРОВАННЫХ КХД

1. Введение

Мотивированные Квантовой хромодинамикой (КХД) кварковые модели с притягивающим 4-фермионным взаимодействием часто применяются для аппроксимации низкоэнергетической области КХД в режиме адронизации [1–9]. Как правило, в таких моделях [1, 2] именно локальное 4-фермионное взаимодействие индуцирует динамическое нарушение киральной симметрии (ДНКС) благодаря сильному притяжению в скалярном канале. Вследствие этого, возникает динамическая масса кварка m_{dyn} , появляются безмассовые пионы (в киральном пределе, $m_{\mathrm{current}} = 0$) и массивный скалярный мезон с массой $m_\sigma = 2m_{\mathrm{dyn}}$, а характерная для линейной σ-модели [2] остаточная киральная симметрия содержится в константах взаимодействия (см. ниже). С другой стороны, эффективное низкоэнергетической действие КХД для кварков содержит, вообще говоря, остаточное взаимодействие с низкоэнергетическими фоновыми глюонами (калибровочная НЙЛ), ответственными за конфайнмент и свойства адронов при промежуточных энергиях, в частности, за формирование возбужденных мезонных состояний [10]. Таким образом, калибровочную модель НЙЛ, в которой удерживаются низкоэнергетические фоновые глюонные поля, можно сичтать лучшим приближением для низкоэнергетического эффективного действия КХД [5]. Так как в такой модели также имеет место ДНКС, то появление динамической массы кварка дает возможность вычислять непертурбативные глюонные поправки к адронным параметрам в конденсатном приближении [3–6].

При сравнении двух моделей в описании свойств адронов,

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 95-02-05346а, гранта INTAS-93-283 и гранта GRACENAS (КЦФЕ) 95-06. 3-13.

необходимо выяснить, в какой степени калибровочная модель НЙЛ воспроизводит тот же адронный лагранжиан, что и обычная НЙЛ после соответствующей перенормировки ее основных характеристик [4]. Одной из целей нашей работы является доказательство того, что эти две модели качественно отличаются друг от друга, т.к. связь с фоновыми глюонами нарушает соотношения линейной σ-модели для масс и констант связи, которые имеют место в некалибровочной модели.

Чтобы пояснить различие этих моделей, мы рассматриваем качественные особенности адронного спектра КХД в пределе большого числа цветов-N_c (планарном пределе). В этом приближении корреляторы скалярных и псевдоскалярных синглетных по цвету кварковых токов насыщаются узкими мезонными резонансами. В частности, двухточечные корреляторы скалярных и псевдоскалярных плотностей представляются суммой соответствующих мезонных полюсов:

$$
\begin{aligned}
\Pi^S(Q) &= -\int d^4x \exp(iqx)\langle T(\bar\psi\psi(x)\bar\psi\psi(0))\rangle_{\mathrm{planar}} \\
&= \sum_n \frac{Z_n^S}{Q^2+M_{S,n}^2} + C_0^S + C_1^S Q^2; \\
\Pi^P(Q) &= \int d^4x \exp(iqx)\langle T(\bar\psi\gamma_5\psi(x)\bar\psi\gamma_5\psi(0))\rangle_{\mathrm{planar}} \\
&= \sum_n \frac{Z_n^P}{Q^2+M_{P,n}^2} + C_0^P + C_1^P Q^2,
\end{aligned} \tag{1}
$$

в области евклидовых импульсов $q^2 = -Q^2 < 0$. Отсутствие физических порогов при $q^2 > 0$ в пределе большого N_c обеспечивается конфайнментом цветных промежуточных состояний. Высокоэнергетические асимптотики корреляторов определяются [11] теорией возмущений о операторным разложением, благодаря асимптотической свободе КХД. Поэтому, те же корреляторы при больших Q^2 имеют степенную зависимость вида:

$$
\Pi^S(Q)|_{Q^2\to\infty} \cong \Pi^P(Q)|_{Q^2\to\infty} \cong \frac{N_c}{8\pi^2} Q^2 \ln\frac{Q^2}{\mu^2}. \tag{2}
$$

Сравнивая (1) и (2), приходим к заключению, что для того чтобы воспроизвести пертурбативную асимптотику (2), ряд резонансов с одинаковыми квантовыми числами (1) должен быть бесконечным. Кроме того, можно доказать [12], что

$$(\Pi^S(Q) - \Pi^P(Q))_{Q^2\to\infty} = O\left(\frac{1}{Q^6}\right), \tag{3}$$

т.е., при высоких энергиях восстанавливается киральная симметрия.

Таким образом, мы ожидаем, что в кварковых моделях, мотивированных КХД, в планарном пределе воспроизводится часть мезонного спектра КХД, и при высоких энергиях асимптотически восстанавливается киральная симметрия. В частности, обычная модель НЙЛ описывает одно скалярное и одно псевдоскалярное (мультиплет) состояния, в то время как калибровочная модель НЙЛ должна содержать дополнительные возбужденные мезонные состояния с теми же квантовыми числами. Именно появление дополнительных полюсов в корреляторах делает эти две модели различными в режиме с динамически нарушенной киральной симметрией.

В основной части работы содержится вывод двухточечных корреляторов в калибровочной и обычной моделях НЙЛ, доказательство нарушения соотношений для линейной σ-модели и определение параметров скалярного мезона в области мягких импульсов. В конце представлен двухрезонансный анзатц, который насыщает отклонение обычной модели НЙЛ от ее калибровочного аналога. Используя асимптотические правила сумм, основанные на восстановлении киральной симметрии, получены резонансные характеристики скалярных и псевдоскалярных мезонов.

2. Определения

Рассмотрим модель НЙЛ без глюонов и введем вспомогательные скалярное, $\tilde{\sigma} = \sigma(x) + m_{\text{dyn}}$; ($m_{\text{dyn}} \equiv m$), и псевдоскалярное, $\pi(x)$, поля. Соответственно, плотность лагранжиана может быть представлена в двух формах (в евклидовом пространстве):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \bar{\psi}(i\hat{\partial} + iS(x) + \gamma_5 P(x))\psi + \frac{g^2}{4N_c}[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] \\ &\Longleftrightarrow \bar{\psi}(\hat{D} + iS(x) + \gamma_5 P(x))\psi + \frac{N_c}{g^2}((\sigma(x)+m)^2 + \pi^2(x)),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\psi \equiv \psi_i$ – цветные фермионные поля с N_c компонентами, $S(x)$, $P(x)$ – внешние скалярный и псевдоскалярный источники, а оператор Дирака имеет следующий вид:

$$\hat{D} = i\hat{\partial} + im + i\sigma(x) + \pi(x)\gamma_5; \quad \hat{\partial} \equiv i\gamma^\mu \cdot \partial_\mu \tag{5}$$

Векторное и аксиально-векторное поля не включены нами в рассмотрение, т.к. главные особенности модели определяются в скалярном и псевдоскалярном каналах. Для простоты анализа число флейворов $N_F = 1$, а токовая масса кварка $m_q = 0$.

Сделаем замену переменных полей $\sigma \to \sigma - S$; $\pi \to \pi - P$. Тогда регуляризованный фермионный вакуумный функционал $Z^F_{\rm reg}$ описывается следующим соотношением:

$$\ln Z^F_{\rm reg}(\sigma, \pi) = \ln \left\langle \exp\left(-\int d^4x \mathcal{L}_F(\sigma(x), \pi(x)) \right) \right\rangle_{\bar\psi\psi} = N_c {\rm Tr}\, \ln \hat{D}|_{\rm reg} \tag{6}$$

Соответствующее эффективное действие для вспомогательных полей имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{\rm eff} &= -N_c {\rm Tr}\, \ln \hat{D}|_{\rm reg} \\ &+ \frac{N_c}{g^2} \int d^4x (\sigma^2 + 2m\sigma + \pi^2 - 2\sigma S - 2mS - 2\pi P + S^2 + P^2 + m^2), \end{aligned} \tag{7}$$

где мы используем регуляризацию с помощью обрезания по импульсам. Параметр g является 4-фермионной константой взаимодействия и, сравнивая с определениями в [8], находим что: $g^2 = 8\pi^2 G_s/\Lambda^2$.

3. Параметры скалярного и псевдоскалярных мезонов в модели НЙЛ

Как обычно, динамическая масса определяется из уравнения на массовую щель, в котором Λ характеризует $O(4)$-инвариантное обрезание,

$$m\left(\Lambda^2 - \frac{8\pi^2}{g^2} - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + O\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) = 0. \tag{8}$$

Здесь и далее в работе мы опускаем члены порядка $1/\Lambda^2$, которые не оказывают существенного влияния на результат. Это уравнение обеспечивает сокращение линейного по σ члена в (7), соответствующим вкладом из фермионного детерминанта:

$$\begin{aligned}\frac{2N_cM}{g^2} &= i\langle\bar\psi\psi\rangle = \frac{iN_c}{(V\mathrm{ol.})}\mathrm{Tr}\,(\hat D^{-1})_{\mathrm{reg}}\big|_{\sigma,\pi=0} = \\ &= 4N_c\int\limits_{p<\Lambda}\frac{p^2d(p^2)}{16\pi^2}\,\frac{m}{p^2+m^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Квадратичная по полям часть S_{eff} определяет обратный пропагатор (“кинетический член”) для мезонных полей,

$$S_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\int\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}[\sigma(Q)\Gamma_\sigma(Q^2)\sigma(-Q)+\pi(Q)\Gamma_\pi(Q^2)\pi(-Q), \tag{10}$$

где в обычной модели НЙЛ (без глюонов) имеем:

$$\begin{aligned}\Gamma_\sigma &= \frac{2N_c}{g^2} - N_c\int\limits_{p<\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\,\Delta\left(-\frac{Q}{2}\right)\Delta\left(\frac{Q}{2}\right), \\ \Gamma_\pi &= \frac{2N_c}{g^2} - N_c\int\limits_{p<\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\,i\gamma_5\Delta\left(\frac{Q}{2}\right)i\gamma_5\left(\frac{-Q}{2}\right),\end{aligned} \tag{11}$$

а фермионный пропагатор дается выражением: $\Delta(Q/2) = (\hat p + \hat Q/2 + im)^{-1}$. Данные величины связаны с определениями из [8] следующим образом:

$$\begin{aligned}&\bar\Pi_S = \frac{1}{g_S} - \Gamma_\sigma; \quad \bar\Pi = \frac{1}{g_S} - \Gamma_\pi; \\ &\frac{1}{g_S} = \frac{N_c\Lambda^2}{4\pi^2G_S} = \frac{2N_c}{g^2} = -\frac{\langle\bar qq\rangle}{m} = i\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle_E}{m}.\end{aligned} \tag{12}$$

Оба интеграла в (11) расходятся, однако с учетом уравнения на массовую щель они имеют лишь логарифмическую расходимость. Преобразуем подынтегральное выражение в (11):

$$\mathrm{tr}\,(1, i\gamma_5)\left(\hat{p} + \frac{\hat{Q}}{2} + im\right)(1, i\gamma_5)\left(\hat{p} - \frac{\hat{Q}}{2} + im\right)^{-1}$$
$$= 4\left(\left(p_\mu + \frac{Q_\mu}{2}\right)^2 + m^2\right)^{-1}\left(p^2 - \frac{Q^2}{4} \mp m^2\right)\left(\left(p_\mu - \frac{Q_\mu}{2}\right)^2 + m^2\right)^{-1}$$
$$= 2\left[\left(p_\mu + \frac{Q_\mu}{2} + m^2\right)^{-1} + \left(\left(p_\mu - \frac{Q_\mu}{2}\right)^2 + m^2\right)^{-1}\right]$$
$$-2(Q^2 + 2m^2 \pm 2m^2)\left(\left(p_\mu + \frac{Q_\mu}{2}\right)^2 + m^2\right)^{-1}\left(\left(p_\mu - \frac{Q_\mu}{2}\right)^2 + m^2\right)^{-1}. \tag{13}$$

Сумма знаменателей равняется $2p^2 + 2m^2 + (Q^2/2)$ и, выделив в явном виде эту сумму из числителя в (13), приходим к требуемому разложению петлевых интегралов. Два первых члена в (13) после интегрирования при нулевых внешних импульсах представляют собой интеграл (9) и поэтому в точности сокращают первые члены в (11). Сокращение подобных вкладов обеспечивается уравнением на массовую щель (8). Таким образом, в зависимости от регуляризации получаем обратные пропагаторы σ-модели,

$$\begin{aligned}\Gamma_\sigma &= (4m^2 + Q^2)I(Q^2) + \xi Q^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \equiv (m_\sigma^2 + Q^2)I_\sigma(Q^2),\\ \Gamma_\pi &= Q^2 I(Q^2) + \xi Q^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \equiv Q^2 I_\pi(Q^2),\end{aligned} \tag{14}$$

где параметр ξ – конечная константа, характеризующая способ регуляризации (например, при симметричном обрезании по импульсам в (11) имеем $\xi = N_c/32\pi^2$). Соответственно, формфактор распада определяется последним слагаемым в (13):

$$I(Q^2) = 2N_c \int\limits_{p<\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)}\,\frac{1}{(p + \frac{1}{2}Q)^2 + m^2}\,\frac{1}{(p - \frac{1}{2}Q)^2 + m^2}. \tag{15}$$

Он является регуляризационно независимым с точностью до переопределения Λ, если пренебречь величинами порядка $1/\Lambda^2$.

Для удобства приведем аналитическое представление для $I(Q^2)$:

$$
\begin{aligned}
I(Q^2) &= \frac{N}{8\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 - \int\limits_0^1 dx \ln\left(1 + x(1-x)\frac{Q^2}{m^2}\right)\right) = \\
&= \frac{N_c}{8\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 + \sqrt{1+\frac{4m^2}{Q^2}}\,\ln\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{Q^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{Q^2}}+1}\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

для евклидовых импульсов $Q^2 > 0$. Если взять регуляризацию, в которой $\xi = 0$ (или обеспечить вычитание ξ-члена в произвольной регуляризации), то получаем остаточную киральную симметрию и, таким образом, обобщенную линейную σ-модель:

$$
I_\sigma(Q^2) = I_\pi(Q^2) \equiv I(Q^2). \tag{17}
$$

Далее, как следствие механизма динамического нарушения симметрии в НЙЛ мы имеем в точности $m_\sigma = 2m$. Производящий функционал для корреляторов скалярных и псевдоскалярных полей может быть найден интегрированием по σ, π полям, когда в эффективном действии удерживаются только квадратичные по полям члены (основной вклад при больших N_c). Вычисляя гауссов интеграл в точке экстремума,

$$
\begin{aligned}
\sigma_c(Q) &= \frac{2N_c}{g^2}\,\Gamma_\sigma^{-1} S(Q) = \frac{2N_c}{g^2 I(Q)}\,\frac{1}{Q^2+4m^2}\,S(Q) \\
\pi_c(Q) &= \frac{2N_c}{g^2}\Gamma_\pi^{-1} P(Q) = \frac{2N_c}{g^2 I(Q)}\,\frac{1}{Q^2}\,P(Q)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

приходим к производящему функционалу $W = -\ln Z(S,P)$,

$$
\begin{aligned}
W^{(2)} = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\Bigg[\frac{1}{2}\,S(-Q)\left(\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle^2}{m^2}\,\Gamma_\sigma^{-1} - i\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle}{m}\right) S(Q) + \\
+\frac{1}{2}\,P(-Q)\left(\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle^2}{m^2}\Gamma_\pi^{-1} - i\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle}{m}\right) P(Q) - S(0)(2\pi^4)\delta^{(4)}(Q) i\langle\bar\psi\psi\rangle\Bigg].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Вычисление двухточечных корреляторов соответствует взятию второй вариационной производной от этого действия с вычитанием несвязного произведения конденсатов (это соответствует исключению последнего члена $\sim S(0)$ в (19)).

$$\int d^4x \exp(iQx)[\langle T(\bar\psi\psi(x)\bar\psi\psi(0))\rangle - \langle\bar\psi\psi\rangle\langle\bar\psi\psi\rangle] =$$
$$= -\int d^4x \exp(iQx)\frac{\delta^2}{\delta S(x)\delta S(0)}\left(W^{(2)} + \int d^4y S(y) i\langle\bar\psi\psi\rangle\right).$$

В итоге, мы имеем полюс для скалярного мезона и аддитивную константу, которая играет некоторую роль [8] при редукции линейной σ-модели к киральной. Аналогично выводится коррелятор для псевдоскаляров, который также содержит полюс и аддитивную константу. Сравнивая их с корреляторами (124)–(127) и (152) из работы [8] и перейдя в пространство Минковского ($-i\langle\bar\psi\psi\rangle_E \to \langle\bar\psi\psi\rangle_M \equiv \langle\bar q q\rangle$), находим взаимооднозначное соответствие.

4. Параметры σ-модели в области мягких импульсов

Проведем разложение вышеприведенных кинетических членов в области мягких импульсов:

$$\Gamma^0_\sigma = a^\sigma_0 + Q^2 a^\sigma_1 + \ldots, \quad \Gamma^0_\pi = Q^2 a^\pi_1 + Q^4 a^\pi_2 + \ldots. \tag{20}$$

Коэффициенты $a_j^{\sigma,\pi}$ соответствуют коэффициентам разложения (14) в ряд Тейлора следующим образом:

$$\begin{aligned} &a^\sigma_0 = m^2_\sigma I_\sigma(0), \quad a^\sigma_1 = I_\sigma(0) + m^2_\sigma I'_\sigma(0)\\ &a^\pi_1 = I_\pi(0), \quad a^\pi_2 = I'_\pi(0). \end{aligned} \tag{21}$$

Мы видим, что в окрестности $Q^2 \sim 0$ константа распада скалярного мезона a^σ_1 и пионная константа a^π_1 не совпадают. Более того, их разность конечна и представляет собой постоянную, слабо зависящую от регудяризации, $a^\sigma_1 - a^\pi_1 = 4m^2 I'(0)$. Заметим, что интеграл $I'(0)$ сходится и в пределе $\Lambda \to \infty$ принимает значение: $I'(0) = -N_c/48\pi^2 m^2$. С другой стороны, когда имеется (для $\xi = 0$) остаточная киральная симметрия (17), последняя проявляется в ряде тождеств для коэффициентов мягкоимпульсного разложения:

$$\frac{a^\sigma_0}{a^\pi_1} = m^2_\sigma, \quad a^\pi_1 a^\sigma_1 = (a^\pi_1)^2 + a^\pi_2 a^\sigma_0, \ldots \tag{22}$$

Подчеркнем, что первое соотношение является осмысленным, если только выполняются следующие. Если $I_\sigma = I_\pi$, то первое равенство в (22) может быть использовано как определение массы скалярного мезона. В противном случае это не так. Очевидно, что в модели НЙЛ масса скалярного мезона определяется из мягкоимпульсного разложения (разложения по производным). В следующем разделе мы увидим, что совсем иная ситуация в случае калибровочной модели НЙЛ.

5. Калибровочная модель НЙЛ и статус σ-модели

Переход к калибровочной модели НЙЛ осуществлянтся заменой обычной производной на длинную производную в операторе Дирака, $i\partial_\mu \to D_\mu = i\partial_\mu + G_\mu$, где $G_\mu \equiv g_S T^a G_\mu^a$ – мягкоимпульсное глюонное поле. Это приводит к следующей модификации кварковых пропагаторов в однопетлевых интегралах, (14):

$$\Delta\left(\pm\frac{Q}{2}\right) = \left(\pm\frac{\hat{Q}}{2} + i\hat{\partial} + \hat{G} + im\right)^{-1}. \tag{23}$$

Далее, мы исследуем в приближении больших N_c основной вклад в эффективное действие, получаемое усреднением по глюонам функционалов $\Gamma_{\sigma,\pi}(\Delta)$:

$$\Gamma_{\sigma,\pi} \equiv \langle \Gamma_{\sigma\pi}(\Delta) \rangle_G. \tag{24}$$

Мы предполагаем, что основной причиной динамического нарушения симметрии является сильное 4-кварковое взаимодействие, а мягкие глюоны вносят поправки, сосредоточенные в конденсатах. Поэтому, разложение в ряд по производным или по обратной большой массе представляется нам вполне пригодным для вычисления глюонных поправок в спектральные характеристики модели.

Проанализируем общую структуру действия $\Gamma_{\sigma,\pi}$, которое определяет обратные пропагаторы для σ- и π-полей, в соответствии с (10). С этой целью сначала оценим подынтегральное выражение в (11), (24):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,(1,i\gamma_5)\left(\frac{\hat{Q}}{2}+i\hat{\partial}+\hat{G}+im\right)^{-1}(1,i\gamma_5)\left(-\frac{\hat{Q}}{2}+i\hat{\partial}+\hat{G}+im\right)^{-1}=\\
&\quad=\mathrm{Tr}\,\left(\left(\frac{Q_\mu}{2}+i\partial_\mu+G_\mu\right)^2+\hat{F}+m^2\right)^{-1}\\
&\quad\times\left(i\partial_\mu+G_\mu)+\hat{F}-\frac{Q^2}{4}\mp m^2+\frac{1}{2}[\hat{q},\hat{D}]\right)\\
&\quad\times\left(\left(-\frac{Q_\mu}{2}+i\partial_\mu+G_\mu\right)^2+\hat{F}+m^2\right)^{-1},
\end{aligned} \tag{25}$$

где $\hat{F}\equiv(1/4)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\cdot[D_\mu,D_\nu]$. Сумма знаменателей равна

$$\sum\equiv 2(D_\mu)^2+2\hat{F}+\frac{Q^2}{2}+2m^2 \tag{26}$$

и, выделив ее явно в числителе (25), можно получить представление для петлевых интегралов (срав. с ур. (14)):

$$\begin{aligned}
\Gamma_\sigma&=(Q^2+4m^2)I_G(Q^2)+Q^2\Xi(Q^2)+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right),\\
\Gamma_\pi&=Q^2(I_G(Q^2)+\Xi(Q^2))+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right),
\end{aligned} \tag{27}$$

где использованы функции, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_G(Q^2)&=\frac{1}{2}\left\langle\mathrm{tr}\,<x|\left(\left(\frac{Q_\mu}{2}+i\partial_\mu+G_\mu\right)^2+\hat{F}+m^2\right)^{-1}\right.\\
&\quad\times\left.\left(\left(-\frac{Q_\mu}{2}+i\partial_\mu+G_\mu\right)^2+\hat{F}+m^2\right)^{-1}|x>\right\rangle_G;\\
&=\frac{1}{2}\int\limits_{p<\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\langle\mathrm{tr}\,\left(\left(p_\mu+\frac{Q_\mu}{2}+i\partial_\mu+G_\mu\right)^2+\hat{F}+m^2\right)^{-1}\right.\\
&\quad\times\left.\left(\left(p_\mu-\frac{Q_\mu}{2}+i\partial_\mu+G_\mu\right)^2+\hat{F}+m^2\right)^{-1}\right\rangle_G;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi(Q^2) &= \xi - \frac{1}{2}\Big\langle \mathrm{tr}\ < x| \left(\left(\frac{Q_\mu}{2} + i\partial_\mu + G_\mu \right)^2 + \hat{F} + m^2 \right)^{-1} \\ &\times \frac{1}{Q^2}[\hat{q}, \hat{D}] \left(\left(-\frac{Q_\mu}{2} + i\partial_\mu + G_\mu \right)^2 + \hat{F} + m^2 \right)^{-1} |x> \Big\rangle_G \\ &= \xi - \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Big\langle \mathrm{tr}\ \left(\left(p_\mu + \frac{Q_\mu}{2} + i\partial_\mu + G_\mu \right)^2 + \hat{F} + m^2 \right)^{-1} \\ &\times \frac{1}{Q^2}[\hat{q}, \hat{p} + \hat{D}] \left(\left(p_\mu - \frac{Q_\mu}{2} + i\partial_\mu + G_\mu \right)^2 + \hat{F} + m^2 \right) \Big\rangle_G . \end{aligned} \tag{28}$$

Интеграл для Ξ не расходится. Мы воспользовались модифицированным уравнением на массовую щель и разложением в ряд по $1/\Lambda^2$, что дает независимость параметра ξ от глюонных конденсатов ($\xi = N_c/32\pi^2$ в регуляризации с импульсным обрезанием). В соотношениях (28) подразумевается след по спинорным и цветным индексам. Во втором, интегральном, представлении данных функций *производные действуют на глюонные поля*, когда, например, эти функционалы раскладываются в ряд по теории возмущений. Другими словами, нам необходимо вычислить смешанный матричный элемент $\langle x|\ldots|k = 0\rangle$. Очевидно, соотношение (17) для линейной σ-модели имело бы место, если бы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{aligned}(Q^2 + 4m^2)I_G(Q^2) + Q^2\Xi(Q^2) &\stackrel{?}{=} (Q^2 + m_\sigma^2)(I_G(Q^2) + \Xi(Q^2)) \\ \text{или} \quad \Xi(Q^2) &\stackrel{?}{=} \frac{4m^2 - m_\sigma^2}{m_\sigma^2}\, I_G(Q^2).\end{aligned} \tag{29}$$

Сравнивая интегралы в (28), можно убедиться, что для произвольных импульсов эти функции не совпадают и соотношение (29) не выполняется, а вместе с ним не выполняются и соотношения линейной σ-модели (17), (22). Таким образом, мы не можем эффективно использовать мугкоимпульсное разложение для вычисления массы скалярного мезона и его константы распада.

Рассмотрим теперь разложение по мягким импульсам и по обратной массе, которое приводит к разложению по глюонным конденсатам. Подчеркнем, что коэффициенты в разложении по обратной большой массе, содержащие глюонные конденсаты, не имеют ультрафиолетовых расходимостей, и поэтому они не зависят от способа регуляризации, если пренебречь членами порядка $O(1/\Lambda^2)$. Новое уравнение на массовую щель имеет следующий вид (в приближении глюонных конденсатов низшей размерности):

$$\Lambda^2 - \frac{8\pi^2}{g^2} - m^2 \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{12 N_c m^2} = 0 \tag{30}$$

Первые коэффициенты в разложении для Γ_σ и Γ_π (см. (21)) после применения уравнения на массовую щель таковы:

$$\begin{aligned}
a_0^\sigma &\cong \frac{N_c}{2\pi^2}\left(m^2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 1\right) + \frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{12N_c m^2}\right);\\
a_1^\sigma &\cong \frac{N_c}{8\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{5}{3} + \tilde{\xi} - \frac{7\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{120N_c m^4}\right);\\
a_1^\pi &\cong \frac{N_c}{8\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 + \tilde{\xi} + \frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{24N_c m^4}\right);\\
a_2^\pi &\cong \frac{N_c}{48\pi^2 m^2}\left(-1 - \frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{20N_c m^4}\right),
\end{aligned} \tag{31}$$

где $\langle G^2_{\mu\nu}\rangle \equiv g^2_{QCD}\langle (G^a_{\mu\nu})^2\rangle$, $\tilde{\xi} = 1/4 = \xi \cdot 8\pi^2/N_c$. Можно явно убедиться, что соотношения (20), (21), характерные для линейной σ-модели, не выполняются даже после нормировки на кирально-симметричную точку, $a_1^{\sigma,\pi} \to a_1^{\sigma,\pi} - \xi$; $\xi = N_c/32\pi^2$. Для полноты мы приводим также мягкоимпульсное разложение функций $I_G(Q), \Xi(Q)$:

$$\begin{aligned}
I_G(Q) &\cong \frac{N_c}{8\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 + \tilde{\xi} + \frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{24N_c m^4} - \frac{Q^2}{m^2}\left(\frac{1}{6} + \frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{40N_c m^4}\right)\right);\\
\Xi(Q) &\cong -\frac{1}{8\pi^2}\,\frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{24m^4} + \frac{Q^2}{8\pi^2 m^2}\,\frac{\langle G^2_{\mu\nu}\rangle}{60m^4}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом видно, что соотношения (29) не выполняются ни при каком разумном выборе $\tilde{\xi}$ (который дает $I(0) \neq 0$).

Проведем анализ тождеств (199)–(201) из [8] для однопетлевых фермионных поляризационных операторов: скалярного, $\bar{\Pi}_S$, псевдоскалярного, $\bar{\Pi}_P$, и продольного аксиально-векторного,

$\bar{\Pi}_A^{(0)}$. Они выполняются в некалибровочной модели НЙЛ для $\xi = 0$. Соотношения ЧСАТ (199), (200) связывают однопетлевой псевдоскалярный коррелятор, $\bar{\Pi}_P$, с однопетлевым продольным асксиально-векторным коррелятором, $\bar{\Pi}_A^{(0)}$. В калибровочной модели НЙЛ выживают только два первых соотношения, в то время как равенство (201) нарушается глюонными поправками. В самом деле, вследствие (27), (12) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_S &= -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{m} - (Q^2 + 4m^2) I_G(Q^2) - Q^2 \Xi(Q^2) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right), \\ \bar{\Pi}_P &= -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{m} - Q^2 (I_G(Q^2) + \Xi(Q^2)) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Тождество Уорда для аксильного тока (для $\xi = 0$) позволяет найти $\bar{\Pi}_A^{(0)}(Q)$:

$$\begin{aligned} 4m^2 \bar{\Pi}_P(Q) &= -4m\langle \bar{q}q \rangle + Q^4 \bar{\Pi}_A^{(0)}(Q); \\ \bar{\Pi}_A^{(0)}(Q) &= -\frac{4m^2}{Q^2}(I_G(Q^2) + \Xi(Q^2)). \end{aligned} \tag{34}$$

Поэтому, отличие с (201) из [8] возникает только из-за ненулевого Ξ:

$$\bar{\Pi}_P(Q) + Q^2 \bar{\Pi}_A^{(0)}(Q) - \bar{\Pi}_S(Q) = -4m^2 \Xi(Q^2) \neq 0. \tag{35}$$

Используя мягкоимпульсное разложение ($\xi = 0$) получим:

$$\begin{gathered} -\bar{\Pi}_A^{(0)}(Q) = \\ = \frac{N_c}{2\pi^2}\left[\frac{1}{Q^2}\left(m^2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - 1\right) + \frac{\langle G_{\mu\nu}^2 \rangle}{24 N_c m^2}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{\langle G_{\mu\nu}^2 \rangle}{120 N_c m^4}\right)\right]; \\ 4m^2 \bar{\Pi}_P(Q) = -4m\langle \bar{q}q \rangle + Q^4 \bar{\Pi}_A^{(0)}(Q); \\ \bar{\Pi}_P(Q) + Q^2 \bar{\Pi}_A^{(0)}(Q) - \bar{\Pi}_S(Q) = \frac{\langle G_{\mu\nu}^2 \rangle}{48\pi^2 m^2} + O\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) \neq 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Таким образом, из этих тождеств следует, что результаты, полученные в [8], требуют пересмотра.

6. Определение масс мезонов

Из-за невыполнения соотношений для σ-модели мы не можем в достаточной степени надежно вычислить двухточечные корреляторы в калибровочной модели НЙЛ для импульсов $\sim 1GeV$, но все же хотелось бы получить информацию о мезонном спектре из мягкоимпусльного разложения. Механизм нарушения киральной симметрии, идущий из КХД [7], включает радиальные возбуждения пионов и скаляров с неодинаковыми массами и константами взаимодействия, что является дополнительным проявлением нарушения киральной симметрии. Рассмотрим две схемы интерполяции такого спектра масс.

1. В соответствии с планарным пределом КХД, можно составить двухрезонансный анзатц для скалярных и псевдоскалярных корреляторов в калибровочной модели НЙЛ, (19):

$$\begin{aligned} \Pi^S(Q) &= \frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{m^2}\,\Gamma_\sigma^{-1} + \frac{\langle\bar{q}q\rangle}{m} = \frac{Z_0^\sigma}{Q^2+M_\sigma^2} + \frac{Z_1^\sigma}{Q^2+M_{\sigma'}^2} + C^\sigma; \\ \Pi^P(Q) &= \frac{\langle\bar{q}q\rangle^2}{m^2}\,\Gamma_\pi^{-1} + \frac{\langle\bar{q}q\rangle}{m} = \frac{Z_0^\pi}{Q^2} + \frac{Z_1^\pi}{Q^2+M_{\pi'}^2} + C^\pi. \end{aligned} \tag{37}$$

Отметим, что для моделей типа НЙЛ константы $C_1^{S,P} = 0$. Из требования асимптотического восстановления киральной симметрии (3) следует, что:

$$C^\sigma = C^\pi \equiv C = \frac{\langle\bar{q}q\rangle}{m} < 0; \tag{38}$$

$$Z_0^\sigma + Z_1^\sigma = Z_0^\pi + Z_1^\pi; \tag{39}$$

$$Z_0^\sigma M_\sigma^2 + Z_1^\sigma M_{\sigma'}^2 = Z_1^\pi M_{\pi'}^2. \tag{40}$$

Первые два соотношения выполняются в обычной модели НЙЛ, которая отвечает однорезонансному анзатцу, $Z_1^{\sigma,\sigma} = 0$, в то время как последнее (40) насыщается только в двухрезонансной модели, включающей по крайней мере один π'-мезон.

В пределе мягких импульсов корреляторы связаны со структурными константами кирального лагранжиана [8, 13]:

$$\begin{aligned} &\frac{Z_0^\sigma}{M_\sigma^2} + \frac{Z_1^\sigma}{M_{\sigma'}^2} + C = 8B_0^2(2L_8 + H_2); \\ &\frac{Z_1^\pi}{M_{\pi'}^2} + C = 8B_0^2(-2L_8 + H_2). \end{aligned} \tag{41}$$

Если мы исключим ненаблюдаемую константу H_2, то в пределе больших N_c получим правила сумм для мезонных параметров, в которые входит константа L_8 [13].

$$\frac{Z_0^\sigma}{M_\sigma^2} + \frac{Z_1^\sigma}{M_{\sigma'}^2} - \frac{Z_1^\pi}{M_{\pi'}^2} = 32 B_0^2 L_8. \tag{42}$$

Интерполяция разложения по мягким импульсам (20) для $\Gamma_{\sigma,\pi}$ в калибровочной модели НЙЛ (31) с помощью двухрезонансного анзатца (37) дает:

$$\begin{aligned} a_0^\sigma &= C^2 \frac{M_\sigma^2 M_{\sigma'}^2}{Z_0^\sigma M_{\sigma'}^2 + Z_1^\sigma M_\sigma^2}; \quad a_1^\sigma = C^2 \frac{Z_0^\sigma M_{\sigma'}^4 + Z_1^\sigma M_\sigma^4}{Z_0^\sigma M_{\sigma'}^2 + Z_1^\sigma M_\sigma^2}; \\ a_1^\pi &= C^2 \frac{1}{Z_0^\pi}; \qquad a_2^\pi = -C^2 \frac{Z_1^\pi}{(Z_0^\pi)^2 M_{\pi'}^2}. \end{aligned} \tag{43}$$

В результате, семь мезонных параметров $M_{\sigma,\sigma',\pi'}$; $Z_{0,1}^{\sigma,\pi}$ определяются параметрами калибровочной модели НЙЛ Λ, m, $\langle G_{\mu\nu}^2 \rangle$. Предварительные оценки показывают, что глюонный конденсат в калибровочной НЙЛ следует брать меньшим, чем подобный ему непертурбативный параметр в высокоэнергетическом операторном разложении [11, 12]. И это не удивительно, т.к. частично, непертурбативные глюонные эффекты учитываются 4-кварковым взаимодействием.

2. В недавних работах были выдвинуты некоторые предположения [4, 8, 10], касающиеся выполнимости соотношений σ-модели, таких как: $I_\pi = I_\sigma$ (см. (14)) и $m_\sigma = 2m_{\rm dyn}$ для случая модели НЙЛ с внешними векторными полями. В частности, в обзоре [10] было рассмотрено влияиние внешних электрического и магнитного полей с постоянной напряженностью и направлением на двухточечные корреляторы. Такие конфигурации, как представляется, формируют такой же фоновый конденсат, как и глюоны в низших порядках по полям и внешним импульсам. Однако, можно убедиться, что восстановление лоренцевой симметрии для конденсата векторных полей (после усреднения по лоренцевым поворотам) приводит к смешиванию продольной и поперечной компонент векторного поля. В результате соотношения (14) линейной σ-модели нарушаются.

Тем не менее, можно развить схему для определения масс скалярного мезона в приближении мягких импульсов, на основе аппроксимации:

$$\Gamma_\sigma \cong q^2(I_G(0)+\Xi(0))+4m^2 I_G(0); \quad \Gamma_\pi \cong q^2(I_G(0)+\Xi(0));$$
$$m_\sigma^2 \cong \frac{4m^2 I_G(0)}{I_G(0)+\Xi(0)} = \frac{a_0^\sigma}{a_1^\pi}, \tag{44}$$

которую необходимо сравнить с аддиабатическими соотношениями для σ-модели (22). Соотношение Намбу не выполняется для данной схемы $m_\sigma^2 > 4m^2$.

Если привлечь двухрезонансный анзатц в адиабатическом приближении можно получить замечательное условие для массы скалярного мезона:

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 \frac{Z_0^\pi - Z_0^\sigma}{Z_1^\sigma}, \tag{45}$$

которое гарантирует допустимость приведенного приближения. Поскольку $Z_0^\pi > Z_0^\sigma$, то можно ожидать, что в киральном пределе константы распада пиона и σ модели отличаются, т.е. $F_\pi < F_\sigma$.

Авторы благодарят J. Bijnens и М. К. Волкова за обсуждение, а также В. Л. Юдичева за полезные замечания. Один из авторов (В. А.) использует данную работу как методическое пособие в курсе лекций.

Литература

1. Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, — Phys. Rev. **122** (1961), 345.
2. T. Eguchi, — Phys. Rev. **D14** (1976), 2755; M. K. Volkov, – Ann. Phys. (N. Y.) 157 (1984) 282; T. Hatsuda, T. Kunihiro, – Phys. Lett. B145 (1984) 7; A. Dhar, R. Shankar, S. R. Wadia, – Phys. Rev. D3 (1985) 3256; D. Ebert, H. Reinhard, – Nucl. Phys. B271 (1986) 188; V. Bernard, R. L. Jaffe, U.-G. Meissner, – Nucl. Phys. B308 (1988) 753; M. Wakamatsu, W. Weise, – Z. Phys. A331 (1988) 173.
3. D. Espriu, E. de Rafael, J. Taron, — Nucl. Phys. **B345** (1990), 22.
4. D. Ebert, M. Volkov, — Phys. Lett. **B272** (1991), 86.
5. A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, — Z. Phys. **C55** (1992), 435, Russ. J. Theor. Math. Phys. 93 (1992) 67 (Engl. transl. 93 (1993) 1126).
6. J. Bijnens, C. Bruno, E. de Rafael, — Nucl. Phys. **B390** (1993), 501.
7. A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, — Int. Mod. Phys. **8** (1993), 1981, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 39B, C (1995) 257 A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, V. L. Yudichev, – Russ. J. Theor. Math. Phys. (1996), to be published.
8. J. Bijnens, E. de Rafael, H. Zheng, — Z. Phys. **C62** (1994), 437.
9. S. Klevansky, — Rev. Mod. Phys. **64** (1992), 649.
10. Particle Data Group, Montanet L. et al.:, — Phys. Rev. **D50** (1994), (Part 1).
11. M. A. Shifman, A. I. Vainstein, V. I. Zakharov, — Nucl. Phys. **B147** (1979), 385, 447.

12. L. J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki, — Phys. Rep. **127** (1985), 1 and references therein.
13. J. Gasser, H. Leutwyler, — Nucl. Phys. **B250** (1985), 465.

Andrianov A. A., Andrianov V. A. Determination of scalar meson masses in QCD-inspired quark models.

We compare two QCD-inspired quark models with four-fermion interaction, without and with the remnant coupling to low-energy gluons, in the regime of dynamical chiral symmetry breaking (DCSB). The first one, the Nambu–Jona–Lasinio (NJL) model ensures the factorization of scalar and pseudoscalar meson poles in correlators, the well-known Nambu relation between the scalar meson mass and the dynamical quark mass, $m_\sigma = 2m_{\rm dyn}$, and the residual chiral symmetry in coupling constants characteristic for the linear σ-model. The second one, the Gauged NJL model, happens to be qualitatively different from the NJL model, namely the Nambu relation is not valid and the factorization of light meson poles does not entail the residual chiral symmetry, i.e., it does not result in a linear σ-model. The more complicated DCSB pattern in the GNJL model is fully explained in terms of excited meson states with the same quantum numbers. The asymptotic restrictions on parameters of scalar and pseudoscalar meson states are derived from the requirement of chiral symmetry restoration at high energies.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 13 июня 1995 г.