О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов

УНИФИЦИРОВАННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕЙЛОРА–ИТО

1. Введение

Настоящая статья посвящена проблеме разложения процессов Ито в ряды Тейлора–Ито. Эта проблема является достаточно новой в теории случайных процессов, так как первые работы, посвященные ей, относятся к 70–80 годам (Мильштейн (1974), Вагнер и Платен (1978, 1982), Платен (1981,1982)). Разложение Тейлора–Ито, представляющее собой разложение гладкого безынерционного нелинейного преобразования решения стохастического дифференциального уравнения Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам с использованием формулы Ито, было впервые получено и использовано в работах [3, 4] Вагнером и Платеном.

Настоящая статья посвящена построению, на основе результатов, полученных авторами в [7, 9, 10] унифицированного разложения Тейлора–Ито. Поясним, что здесь имеется в виду. Дело в том, что повторные стохастические интегралы, входящие в разложение Тейлора–Ито из [3, 4], могут быть преобразованы к системе канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности с полиномиальными подынтегральными функциями. Эти преобразования осуществляются в [7, 10] на основе формул замены порядка интегрирования для повторных стохастических интегралов Ито, полученных авторами [9]. Результат, получающийся после приведения подобных слагаемых и является упомянутым выше унифицированным разложением Тейлора–Ито. Важно отметить, что коэффициенты унифицированного разложения Тейлора–Ито определяются рекуррентными соотношениями. Другой важной особенностью унифицированного разложения Тейлора–Ито является то, что оно содержит

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 96-01-00929 и гранта ведущих научных школ No. 96-15-96199.

значительно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена [3, 4]. Для сравнения отметим, что унифицированное разложение Тейлора–Ито до членов третьего порядка малости содержит 12 различных повторных стохастических интегралов, в то время, как аналогичное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена содержит 17 различных повторных стохастических интегралов. При этом, чем больше удерживается членов в разложении, тем существеннее проявляется это различие. Это преимущество унифицированного разложения Тейлора–Ито является особенно важным, поскольку аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной проблемой [5, 6, 8, 11].

2. Определения и соглашения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностное пространство, а $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t,\omega) \in R_m$ измеримый для всех $t \in [0, \infty)$ винеровский процесс такой, что:

$$M\{d\mathbf{f}_t d\mathbf{f}_t^T\} = \Sigma_f^2 dt,$$

$$\Sigma_f^2 = \mathrm{diag}\{\sigma_{f_1}^2,\ \sigma_{f_2}^2, \ldots, \sigma_{f_m}^2\}; \quad \sigma_{f_i}^2 < \infty; \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания;

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t;\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t,\omega) \in R_n$ решение уравнения (1); функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in R_n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) \in R_{n\times m}$ многократно непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам и удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (1).

Случайный процесс $g_t \in R_1$ будем называть неупреждающим к винеровскому процессу $\mathbf{f}_t \in R_m$ на $[a, b]$, если для любых моментов $\tau, t, s \in [a, b]$ таких, что: $\tau \leqslant t < s$ значения процесса g_τ стохастически независимы с приращениями $\mathbf{f}_s^{(i)} - \mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \ldots, m)$, где $\mathbf{f}_t^{(i)} - i$-я компонента винеровского процесса $\mathbf{f}_t$.

Будем говорить, что процесс g_t непрерывен в среднем степени m на $[a, b]$ если для любых моментов $t, \tau \in [a, b]$ справедливо следующее условие:

$$\lim_{t\to\tau} M\{|\ g_t - g_\tau\ |^m\} = 0$$

Пусть $a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N = b$ разбиение промежутка $[a, b]$ такое, что: $t_i < t_{i+1}$; $0 \leqslant i \leqslant N-1$ и $\Delta_N = \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} |t_{i+1} - t_i|$.

Обобщенным стохастическим интегралом Ито от случайных процессов g_t и q_t по винеровскому процессу $\mathbf{f}_t^{(i)} \in R_1 (i = 1, \ldots, m)$ называется (Р. Л. Стратонович [1]) следующий среднеквадратический предел:

$$\int\limits_a^b g_t d\mathbf{f}_t^{(i)} q_t = \underset{\Delta_N \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{N-1} g_{t_k} \left(\mathbf{f}_{t_{k+1}}^{(i)} \text{-} \mathbf{f}_{t_k}^{(i)} \right) q_{t_{k+1}}. \tag{2}$$

Пусть процессы q_t и g_t удовлетворяют следующим условиям:

A1. $q_t \equiv 1$.

A2. Процесс g_t является неупреждающим к винеровскому процессу $\mathbf{f}_t^{(i)} \in R_1 (i = 1, \ldots, m)$.

A3. Процесс g_t среднеквадратически непрерывен на $[a, b]$.

A4. $M\left\{g_t^2\right\} < \infty$ для всех $t \in [a, b]$.

Нетрудно показать, что в этих условиях стохастический интеграл (2) существует. Нетрудно также показать, что в этих же условиях существует стохастический интеграл вида

$$\int\limits_a^b g_t dt q_t = \underset{\Delta_N \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{N-1} g_{t_k} \left(t_{k+1} \text{-} t_k \right) q_{t_{k+1}}. \tag{3}$$

Определение 1. *Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ называется непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на $s \in [0, T]$ на траекториях уравнения (1), если для всех $s, t \in [0, T]$ таких, что $s \geqslant t$ следующее представление:*

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s B_0 \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^s B_1^{(i)} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \tag{4}$$

справедливо с вероятностью 1 и интегралы в правой части (4) существуют в среднеквадратическом смысле.

В (4) $\mathbf{x}_\tau$ – решение уравнения (1); $B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$; $i = 1, \ldots, m$ непрерывные в среднеквадратическом смысле процессы на $[0, T]$, называемые систематической и диффузионными прозводными процесса η_s по Ито.

Лемма 1 (Формула Ито). *Пусть*

1°. *Частные производные* $\frac{\partial}{\partial t}R(\mathbf{x},t)$; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}R(\mathbf{x},t)$; $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}R(\mathbf{x},t)$; $i,j=1,2,\ldots,n$ *существуют и непрерывны на* $R_n\times[0,T]$.

2°. *Функции* $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x},t)$ *и процессы* $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_t,t)$, $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}_t,t)$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m)$ *таковы, что для процессов* $L\{R(\mathbf{x}_t,t)\}$, $G_0^{(j)}\{R(\mathbf{x}_t,t)\}$; $j=1,\ldots,m$ *выполнены условия* A3, A4.

Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s,s)$ *непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на [0,T] и его производные* $B_0\{R(\mathbf{x}_t,t)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t,t)\}$; $i=1,\ldots,m$ *имеют вид:*

$$B_0\{R(\mathbf{x}_t,t)\}=L\{R(\mathbf{x}_t,t)\}; B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x},t)\}=G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x},t)\},$$

где

$$L\{\cdot\}=\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}a^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,i=1}^{n}\sigma_{f_j}^2\Sigma^{(lj)}(\mathbf{x},t)\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)}\partial \mathbf{x}^{(i)}}; \tag{6}$$

$$G_0^{(i)}\{\cdot\}=\sum_{j=1}^{n}\Sigma^{(ji)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}; i=1,\ldots,m \tag{7}$$

и для всех $s,t\in[0,T]$ *таких, что* $s\geqslant t$ *равенство*

$$\eta_s=\eta_t+\int_t^s L\left\{R(\mathbf{x}_\tau,\tau)\right\}d\tau+\sum_{i=1}^{m}\int_t^s G_0^{(i)}\left\{R(\mathbf{x}_\tau,\tau)\right\}d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$$

справедливо с вероятностью 1 *и интегралы в правой части существуют в среднеквадратическом смысле.*

Будем называть совокупность k-индексных элементов матрицей k-го ранга ${}^{(k)}A$: ${}^{(k)}A=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m_1,\ldots,m_k}$. Ясно, что ${}^{(0)}A$ скаляр; ${}^{(1)}A$ матрица размера $m_1\times 1$; ${}^{(2)}A$ матрица размера $m_1\times m_2$ и т.д. Обозначение ${}^{(k)}A=\left\|{}^{(k-1)}A^{(i_1)}\right\|_{i_1=1}^{m_1}$, где ${}^{(k-1)}A^{(i_1)}=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_2,\ldots,i_k=1}^{m_2,\ldots,m_k}$ следует понимать как блочную матрицу с элементами $k-1$-го ранга. В дальнейшем иногда у скаляров и матриц-столбцов ранг указывать не будем.

Будем называть матрицу ${}^{(k)}C$ сверткой матриц ${}^{(k+l)}A$ и ${}^{(l)}B$ и обозначать ее в виде: ${}^{(k)}C = {}^{(k+l)}A^{(l)}_{\cdot}{}^{(l)}B$, где

$$
{}^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1,\dots,i_l=1}^{m_1,\dots,m_l} A^{(i_1\dots i_{k+l})} B^{(i_1\dots i_l)} \right\|_{i_{l+1},\dots,i_{l+k}=1}^{m_{l+1},\dots,m_{l+k}}
$$

Определение 2. *Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ называется N раз непрерывно дифференцируемым по Ито среднеквадратическом смысле на $[0,T]$ на траекториях уравнения (1) если для всех $l = 0, 1, \dots, N-1$; $s, t \in [0,T]$ таких, что $s \geqslant t$ справедливо с вероятностью 1 представление*

$$
{}^{(r_l)}B_{\gamma_l\dots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_s, s)\} = {}^{(r_l)}B_{\gamma_l\dots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} + \int\limits_t^s {}^{(r_l)}B_{0\gamma_l\dots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}d\tau +
$$

$$
+ \int\limits_t^s {}^{(r_l+1)}B_{1\gamma_l\dots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau,
$$

где интегралы в правой части существуют в среднеквадратическом смысле; $\gamma_q = 0, 1$; $r_l = \sum\limits_{i=1}^{l} \gamma_i$; ${}^{(r_q)}B_{\gamma_q\dots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $q = 1, 2, \dots N$ непрерывные в среднеквадратическом смысле матричные случайные процессы, называемые q-ми производными процесса η_s по Ито в среднеквадратическом смысле на траекториях системы (1): ${}^{(0)}B_{\underbrace{0\dots0}_{q}}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ систематической составляющей q-й производной, ${}^{(q)}B_{\underbrace{1\dots1}_{q}}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ диффузионной составляющей, а все другие ${}^{(r_q)}B_{\gamma_q\dots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$ смешанными составляющими q-й производной. Для $q = 0$ полагаем: $r_q \equiv 0$; ${}^{(r_q)}B_{\gamma_q\dots\gamma_1}\{\cdot\} \overset{\text{def}}{=} \cdot$; ${}^{(r_q)}B_{0\gamma_q\dots\gamma_1}\{\cdot\} \overset{\text{def}}{=} {}^{(0)}B_0\{\cdot\}$; ${}^{(r_q+1)}B_{1\gamma_q\dots\gamma_1}\{\cdot\} \overset{\text{def}}{=} {}^{(1)}B_1\{\cdot\}$.

Пусть ${}^{(1)}D_j\{\cdot\} = \left\| D_j^{(i)}\{\cdot\} \right\|_{i=1}^{m}$; $j = 1, \dots, k$ – векторные дифференциальные операторы,

$$
A_p\{\cdot\} = \begin{cases} C_p\{\cdot\} \\ \cdot \end{cases}; \quad p = 1, \dots, k+1,
$$

где $C_p\{\cdot\}$ – скалярный дифференциальный оператор. Далее будем обозначать:

$$\left\|A_{k+1}\left\{D_k^{(i_k)}\left\{A_k\left\{\ldots\left\{D_1^{(i_1)}\left\{A_1\left\{\cdot\right\}\right\}\right\}\ldots\right\}\right\}\right\}\right\|_{i_1,\ldots i_k=1}^{m} \stackrel{\rm def}{=}$$

$$\stackrel{\rm def}{=} {}^{(k)}A_{k+1}D_kA_k\ldots D_1A_1\{\cdot\} = A_{k+1}\left\{{}^{(k)}D_kA_k\ldots D_1A_1\{\cdot\}\right\} =$$

$$A_{k+1}\left\{{}^{(1)}D_k\left\{{}^{(k-1)}A_k\ldots D_1A_1\{\cdot\}\right\}\right\} = \ldots$$

$$\ldots = A_{k+1}\left\{{}^{(1)}D_k\left\{A_k\ldots\left\{{}^{(1)}D_1\left\{A_1\{\cdot\}\right\}\ldots\right\}\right\}\right\}.$$

Лемма 2. *Пусть условия леммы 1 выполнены. Пусть для всех $l = 0, 1, \ldots, N-2$ процессы ${}^{(r_l+1)}H_{l+1}H_l\ldots H_1\{R(\mathbf{x}_s, s)\}$ и функции ${}^{(r_l+1)}H_{l+1}H_l\ldots H_1\{R(\mathbf{x}, s)\}$ покомпонентно удовлетворяют условиям 1°, 2° леммы 1. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на $[0, T]$ и его производные имеют вид:*

$${}^{(r_{l+1})}B_{\gamma_{l+1}\ldots\gamma_1}\{R(\mathbf{x}_s, s)\} = {}^{(r_{l+1})}H_{l+1}H_l\ldots H_1\{R(\mathbf{x}_s, s)\},$$

где $H_p\{\cdot\} = {}^{(1)}G_0\{\cdot\}, L\{\cdot\}$; $r_{l+1} = \sum\limits_{p=1}^{l+1}\gamma_p$; $\gamma_p = 1$ при $H_p\{\cdot\} = {}^{(1)}G_0\{\cdot\}$ и $\gamma_p = 0$ при $H_p\{\cdot\} = L\{\cdot\}$; дифференциальные операторы ${}^{(1)}G_0\{\cdot\}$ и $L\{\cdot\}$ такие же, как в лемме 1; $l = 0, 1, \ldots, N-1$.

3. Повторные стохастические интегралы и их свойства

Рассмотрим некоторые свойства повторных стохастических интегралов, необходимые для дальнейшего изложения. Доказательства этих утверждений можно найти в [9, 11].

Согласно (2), (3) рассмотрим повторный стохастический интеграл вида:

$$J_{ab}^{(k)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_a^b \psi_{k-1}(t_1)\ldots\int\limits_a^{t_{k-2}}\psi_1(t_{k-1})\int\limits_a^{t_{k-1}}\phi_{t_k}dW_{t_k}^{(i_k)}dW_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\ldots dW_{t_1}^{(i_1)},$$

где $\psi_j(t); j = 1, \ldots, k-1$ – некоторые функции, ϕ_t некоторый случайный процесс, а $W_t^{(q)} = \mathbf{f}_t^{(q)}$ при $q = 1, \ldots, m$ и $W_t^{(q)} = t$ при $q = 0$; $\mathbf{f}_t^{(q)}$ – независимые скалярные винеровские процессы.

Сформулируем достаточные условия существования в среднеквадратическом смысле повторных стохастических интегралов $J_{ab}^{(k)}$ [9, 11].

Лемма 3. *Пусть функции* $\psi_j(t); j=1,\ldots,k-1$ *непрерывны на* $[a,b]$, *а процесс* ϕ_t *является неупреждающим к винеровским процессам* $\mathbf{f}_t^{(q)}(q=1,\ldots,m)$ *и непрерывен в среднеквадратическом смысле на* $[a,b]$. *Пусть также* $M\left\{\phi_t^2\right\}<\infty$ *для всех* $t\in[a,b]$. *Тогда повторный стохастический интеграл* $J_{ab}^{(k)}; k=1,\ 2,\ldots$ *существует в среднеквадратическом смысле.*

Рассмотрим свойство замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах.

Определение 3. *Среднеквадратический предел*

$$\underset{\Delta_N\to 0}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{N-1}\phi_{\tau_j}\left(W_{\tau_{j+1}}^{(i_k)}-W_{\tau_j}^{(i_k)}\right)S_{\tau_{j+1}b}^{(k-1)},$$

где

$$S_{t_1 b}^{(k-1)}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\int_{t_1}^{b}\psi_1(t_2)dW_{t_2}^{(i_{k-1})}\ldots\int_{t_{k-1}}^{b}\psi_{k-1}(t_k)dW_{t_k}^{(i_1)} & \text{при } k>1\\ 1 & \text{при } k=1\end{cases}$$

называется интегралом

$$I_{ab}^{(k)}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_a^b\phi_{t_1}dW_{t_1}^{(i_k)}\int\limits_{t_1}^b\psi_1(t_2)dW_{t_2}^{(i_{k-1})}\ldots\int\limits_{t_{k-1}}^b\psi_{k-1}(t_k)dW_{t_k}^{(i_1)}.$$

Существование интеграла $I_{ab}^{(k)}$ *и свойство замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах устанавливается следующей теоремой.*

Теорема 1. *Пусть функции* $\psi_l(t); l=1,\ldots,k-1$ *и процесс* ϕ_t *удовлетворяют условиям леммы 3, тогда интеграл* $I_{ab}^{(k)}$ *существует в среднеквадратическом смысле и равенство*

$$I_{ab}^{(k)}=J_{ab}^{(k)}$$

справедливо с вероятностью 1.

Из теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *справедливо с вероятностью* 1 *равенство*

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^{t_1} \phi_\tau dW_\tau^{(j)} dW_{t_1}^{(i_k)} S_{t_1 b}^{(k-1)} = \int\limits_a^b \phi_\tau dW_\tau^{(j)} \int\limits_\tau^b dW_{t_1}^{(i_k)} S_{t_1 b}^{(k-1)},$$

где$j = 0, \ldots, m$.

Доказательство. Рассмотрим процесс $F_{at} = \int_a^t \phi_\tau dW_\tau^{(j)}$. Тогда в условиях теоремы 1 имеем

$$\int\limits_a^b F_{at_1} dW_{t_1}^{(i_k)} S_{t_1 b}^{(k-1)} =$$

$$= \int\limits_a^b \psi_{k-1}(t_1) \ldots \int\limits_a^{t_{k-2}} \psi_1(t_{k-1}) \int\limits_a^{t_{k-1}} F_{at_k} dW_{t_k}^{(i_k)} dW_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \ldots dW_{t_1}^{(i_1)}.$$

Далее остается лишь применить теорему 1 к правой части последнего равенства.

Далее будет использоваться следующее свойство повторных стохастических интегралов.

Лемма 4. *Пусть условия теоремы* 1 *выполнены и* $h(t)$ *непрерывная на* $[a, b]$ *функция. Тогда справедливо с вероятностью* 1 *следующее равенство*

$$\int\limits_a^b \phi_t dW_t^{(i_k)} h(t) S_{tb}^{(k-1)} = \int\limits_a^b \phi_t h(t) dW_t^{(i_k)} S_{tb}^{(k-1)},$$

где $k > 1$ *и интегралы* $\int_a^b \phi_t dW_t^{(i_k)} h(t) S_{tb}^{(k-1)}$, $\int_a^b \phi_t h(t) dW_t^{(i_k)} S_{tb}^{(k-1)}$ *существуют в среднеквадратическом смысле.*

Рассмотрим в условиях леммы 3 некоторые свойства интегралов $J_{ab}^{(k)}$:

$$M\{J_{ab}^{(k)}\} = 0. \tag{8}$$

$$M\{\left(J_{ab}^{(k)}\right)^2\} = \sigma_{f_{i_1}}^2 \sigma_{f_{i_2}}^2 \ldots \sigma_{f_{i_k}}^2 \times$$
$$\times \int\limits_a^b \psi_{k-1}^2(t_1) \ldots \int\limits_a^{t_{k-2}} \psi_1^2(t_{k-1}) \int\limits_a^{t_{k-1}} M\{\phi_{t_k}^2\} dt_k dt_{k-1} \ldots dt_1. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t} =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_t^s (s-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{\tau_1} \int\limits_{\tau_1}^s (s-\tau_2)^{l_2} d\mathbf{f}^{(i_2)}_{\tau_2} \ldots \int\limits_{\tau_{k-1}}^s (s-\tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}^{(i_k)}_{\tau_k}, & k>0 \\ 1, & k=0 \end{cases}$$

и

$$^{(k)}J_{l_1\ldots l_k\,s,t} = \left\| J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t} \right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}.$$

Из теоремы 1 и свойств (8) и (9) вытекают существование и следующие свойства интегралов $J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t}$ при $k>0$:

$$M\{J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t}\} = 0;$$

$$M\left\{\left(J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2_{f_{i_1}}\sigma^2_{f_{i_2}}\ldots\sigma^2_{f_{i_k}}(s-t)^{2(l_1+\ldots+l_k)+k}}{(2l_k+1)(2(l_k+l_{k-1})+2)\ldots(2(l_k+\ldots+l_1)+k)}; \qquad (10)$$

$$\int\limits_t^s (s-\tau)^j d\mathbf{f}^{(p)}_\tau J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,\tau} = J^{(pi_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k\,s,t}; \quad p=1,\ldots,m; \qquad (11)$$

$$\int\limits_t^s (s-\tau)^j d\tau J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,\tau} = \frac{(s-t)^{j+1}}{j+1} J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t} - \frac{1}{j+1} J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1+j+1 l_2\ldots l_k\,s,t}; \quad (12)$$

$$J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t} = \int\limits_t^s (s-\tau_1)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{\tau_{k-1}} (s-\tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{\tau_k} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{\tau_1}.$$

Введем в рассмотрение матрицу k-го ранга вида:

$$^{(k)}(s\ominus t)_{jl_1\ldots l_k} = \left\|(s\ominus t)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1} = \left\|\frac{(s-t)^j}{j!} J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\,s,t}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}.$$

Рассмотрим совокупность матриц k-го ранга:

$$C^B = \left\{{}^{(k)}C_{jl_1\ldots l_k} : (k,j,l_1,\ldots,l_k)\in B\right\},$$

$$B = \left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k) : k,j,l_1,\ldots,l_k \in Z_1 \subset \mathcal{N}\bigcup\{0\}\right\}$$

и введем следующую операцию над множеством матриц k-го ранга

$$\left(C^B \odot D^B\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k)\in B} {}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}D_{jl_1\dots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами. Далее будем обозначать

$$(s\ominus t)^B = \{{}^{(k)}(s\ominus t)_{jl_1\dots l_k}:\ (j,l_1,\dots,l_k,k)\in B\}$$

4. Разложение процессов Ито

Докажем теорему о рзложении процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Теорема 2. *Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, порожденный решением уравнения* (1), *$r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на $[0,T]$ на траекториях уравнения* (1). *Тогда он разлагается в окрестности фиксированного момента $t\in[0,T]$ в ряд вида:*

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r}\left(C^{A_q}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{A_q}\right) + D_{r+1_{s,t}}, \tag{13}$$

причем равенство справедливо с вероятностью 1, *правая часть* (13) *существует в среднеквадратическом смысле и в* (13) *введены обозначения:*

$$D_{r+1_{s,t}} = \int_t^s \left(Q^{A_r}\{\eta_\tau\}d\tau\odot(s\ominus\tau)^{A_r}\right) +$$

$$+\int_t^s\left(\left(H^{A_r}\{\eta_\tau\}\stackrel{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\odot(s\ominus\tau)^{A_r}\right), \tag{14}$$

где

$$C^{A_q}\{\eta_\tau\} = \left\{{}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k}\{\eta_t\} : (j,l_1,\dots,l_k)\in A_q\right\};$$

$$Q^{A_q}\{\eta_\tau\} = \left\{L\left\{{}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\}\right\} : (j,l_1,\dots,l_k)\in A_q\right\};$$

$$H^{A_q}\{\eta_\tau\} = \left\{{}^{(1)}G_0\left\{{}^{(k)}C_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\}\right\} : (j,l_1,\dots,l_k)\in A_q\right\};$$

$$^{(k)}C_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_t\} = \begin{cases} ^{(k)}L^j G_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_t\} & \textit{при} \ \ k>0 \\ L^j\{\eta_t\} & \textit{при} \ \ k=0 \end{cases};$$

$$A_q = \{(k,j,l_1,\ldots,l_k) : k+j+l_1+\ldots+l_k = q; k,j,l_1,\ldots,l_k = 0,1,\ldots\};$$

$$L^j\{\cdot\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L\{L\{\ldots\{L}_{j}\{\cdot\}\}\ldots\}\} & \textit{при} \ \ j>0 \\ \cdot & \textit{при} \ \ j=0 \end{cases};$$

$$^{(1)}G_p\{\cdot\} = \frac{1}{p}\left(^{(1)}G_{p-1}L\{\cdot\} - {}^{(1)}LG_{p-1}\{\cdot\}\right); \quad p=1,2,\ldots;$$

$^{(1)}G_0\{\cdot\}$ *и* $L\{\cdot\}$ *определены соотношениями* (6) *и* (7).

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Применим к процессу η_s формулу Ито:

$$\eta_s = \eta_t + D_{1_{s,t}} = \left(C^{A_0}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{A_0}\right) + D_{1_{s,t}}, \tag{15}$$

где

$$D_{1_{s,t}} = \int\limits_t^s L\{\eta_\tau\}d\tau + \int\limits_t^s G_0\{\eta_\tau\}\dot{\cdot}d\mathbf{f}_\tau =$$

$$= \int\limits_t^s (Q^{A_0}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s\ominus\tau)^{A_0}) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{A_0}\{\eta_\tau\}\dot{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s\ominus\tau)^{A_0}\right). \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) являются частными случаями (13) и (14) при $r=0$. Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в $D_{1_{s,t}}$:

$$D_{1_{s,t}} = D^*_{1_{s,t}} + D_{2_{s,t}}; \tag{17}$$

$$D^*_{1_{s,t}} = (s-t)L\{\eta_t\} + G_0\{\eta_t\}\dot{\cdot}J_{0_{s,t}} = (C^{A_1}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{A_1}); \tag{18}$$

$$D_{2_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(\int\limits_t^{s_1} L^2\{\eta_\tau\}d\tau + \int\limits_t^{s_1} G_0L\{\eta_\tau\}\dot{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)ds_1 +$$

$$+ \int\limits_t^s \left(\int\limits_t^{s_1} LG_0\{\eta_\tau\}d\tau + \int\limits_t^{s_1} {}^{(2)}G_0G_0\{\eta_\tau\}\dot{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\dot{\cdot}d\mathbf{f}_{s_1}. \tag{19}$$

Заменим порядки интегрирования в (19) в соответствии с теоремой 1:

$$D_{2_{s,t}}=\int\limits_t^s L^2\{\eta_\tau\}d\tau(s-\tau)+\int\limits_t^s LG_0\{\eta_\tau\}d\tau\overset{1}{\cdot}J_{0_{s,\tau}}+$$

$$+\int\limits_t^s G_0L\{\eta_\tau\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau(s-\tau)+\int\limits_t^s\left({}^{(2)}G_0G_0\{\eta_\tau\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\overset{1}{\cdot}J_{0_{s,\tau}}=$$

$$=\int\limits_t^s\left(Q^{A_1}\{\eta_\tau\}d\tau\odot(s\ominus\tau)^{A_1}\right)+\int\limits_t^s\left(\left(H^{A_1}\{\eta_\tau\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\odot(s\ominus\tau)^{A_1}\right). \quad (20)$$

Обьединяя соотношения (15)–(20) придем к представлению:

$$\eta_s=\sum_{q=0}^{1}\left(C^{A_q}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{A_q}\right)+D_{2_{s,t}}, \quad (21)$$

$$D_{2_{s,t}}=\int\limits_t^s\left(Q^{A_1}\{\eta_\tau\}d\tau\odot(s\ominus\tau)^{A_1}\right)+$$

$$+\int\limits_t^s\left(\left(H^{A_1}\{\eta_\tau\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\odot(s\ominus\tau)^{A_1}\right). \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что (21) и (22) являются частными случаями (13) и (14) при $r=1$. Таким образом утверждение теоремы справедливо для $r=0,1$. Продолжая начатый процесс разложения получим на следующем шаге соотношения:

$$\eta_s=\sum_{q=0}^{1}\left(C^{A_q}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{A_q}\right)+\frac{1}{2}(s-t)^2L^2\{\eta_t\}+$$

$$+\left(G_0L\{\eta_t\}-LG_0\{\eta_t\}\right)\overset{1}{\cdot}J_{1_{s,t}}+{}^{(2)}G_0G_0\{\eta_t\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{00_{s,t}}+$$

$$+(s-t)LG_0\{\eta_t\}\overset{1}{\cdot}J_{0_{s,t}}+D_{3_{s,t}}=$$

$$=\sum_{q=0}^{1}\left(C^{A_q}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{A_q}\right)+\left(C^{A_2}\{\eta_t\}\odot(s\ominus t)^{A_2}\right)+D_{3_{s,t}}$$

$$= \sum_{q=0}^{2} \left(C^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q} \right) + D_{3_{s,t}}, \tag{23}$$

где

$$D_{3_{s,t}} = \int_t^s L^3\{\eta_\tau\}\, d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \int_t^s L^2 G_0\{\eta_\tau\}\, d\tau \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}}(s-\tau) +$$

$$+ \int_t^s \left(LG_0L\{\eta_\tau\} - L^2 G_0\{\eta_\tau\} \right) d\tau \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} +$$

$$+ \int_t^s {}^{(2)}LG_0G_0\{\eta_\tau\}\, d\tau \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \int_t^s \left(G_0L^2\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 +$$

$$+ \int_t^s \left({}^{(2)}G_0LG_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}}(s-\tau) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left({}^{(2)}G_0G_0L\{\eta_\tau\} - {}^{(2)}G_0LG_0\{\eta_\tau\} \right) \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} +$$

$$+ \int_t^s \left({}^{(3)}G_0G_0G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} =$$

$$= \int_t^s \left(Q^{A_2}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_2} \right) + \int_t^s \left(\left(H^{A_2}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_2} \right). \tag{24}$$

Следовательно утверждение теоремы справедливо и при $r = 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $n = r$ и докажем его справедливость при $n = r + 1$. Применяя формулу Ито к подынтегральным процесам в (14) получим

$$D_{r+1_{s,t}} = D^*_{r+1_{s,t}} + D_{r+2_{s,t}};$$

$$D^*_{r+1_{s,t}} = \left(Q^{A_r}\{\eta_t\} \odot \int_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{A_r} \right) +$$

$$+\left(\left(H^{A_r}\{\eta_t\}^1_\cdot\int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau\right)\odot(s\ominus\tau)^{A_r}\right);$$

$$D_{r+2_{s,t}}=\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^{\tau_1}dU^{A_r}\{\eta_\tau\}d\tau_1\odot(s\ominus\tau_1)^{A_r}\right)+$$

$$+\int\limits_t^s\left(\left(\int\limits_t^{\tau_1}dV^{A_r}\{\eta_\tau\}^1_\cdot d\mathbf{f}_{\tau_1}\right)\odot(s\ominus\tau_1)^{A_r}\right), \qquad (25)$$

где

$$dU^{A_r}\{\eta_\tau\}=$$

$$=\left\{{}^{(k)}X_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}d\tau+{}^{(k+1)}Y_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}^1_\cdot d\mathbf{f}_\tau:(j,l_1,\ldots,l_k,k)\in A_r\right\};$$

$$dV^{A_r}\{\eta_\tau\}=$$

$$=\left\{{}^{(k+1)}Z_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}d\tau+{}^{(k+2)}W_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}^1_\cdot d\mathbf{f}_\tau:(j,l_1,\ldots,l_k,k)\in A_r\right\},$$

$${}^{(k)}X_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}={}^{(k)}L^{j+2}G_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

$${}^{(k+1)}Z_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\}={}^{(k+1)}LG_0L^jG_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

$${}^{(k+1)}Y_{jl_1\ldots l_{k\,\tau}}={}^{(k+1)}G_0L^{j+1}G_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

$${}^{(k+2)}W_{jl_1\ldots l_{k\,\tau}}={}^{(k+2)}G_0G_0L^jG_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

Заменим, согласно следствию из теоремы 1, порядки интегрирования в повторных стохастических интегралах в (25):

$$D_{r+2_{s,t}}=\int\limits_t^s\left(\left(dU^{A_r}\{\eta_\tau\}\int\limits_\tau^s d\tau_1\right)\odot(s\ominus\tau_1)^{A_r}\right)+$$

$$+\int\limits_t^s\left(\left(dV^{A_r}\{\eta_\tau\}^1_\cdot\int\limits_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}\right)\odot(s\ominus\tau_1)^{A_r}\right). \qquad (26)$$

Рассмотрим $\int_\tau^s d\tau_1(s\ominus\tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}$ и $\int_\tau^s d\mathbf{f}^{(q)}_{\tau_1}(s\ominus\tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}d\tau_1$; $q=1,\ldots,m$.

Согласно свойствам (11) и (12) имеем

$$\int\limits_{\tau}^{s} d\tau_1 (s\ominus\tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k} =$$

$$= \begin{cases} (s\ominus\tau)^{(i_1\ldots i_k)}_{j+1l_1\ldots l_k} - \frac{1}{(s-\tau)^{j+1}}(s\ominus\tau)^{(i_1\ldots i_k)}_{j+1,l_1+j+1,l_2\ldots l_k} & \text{при} \quad k>0 \\ \frac{(s-\tau)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при} \quad k=0 \end{cases}; \tag{27}$$

$$\int\limits_{\tau}^{s} d\mathbf{f}^{(q)}_{\tau_1}(s\ominus\tau_1)^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k} = \frac{1}{(s-\tau)^j}(s\ominus\tau)^{(qi_1\ldots i_k)}_{jjl_1\ldots l_k}; k=0,1,\ldots. \tag{28}$$

Подставим (27) и (28) в (26) и заметим, что получающийся результат эквивалентен записи:

$$D_{r+2_{s,t}} = \int\limits_{t}^{s} \left(Q^{A_{r+1}}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s\ominus\tau)^{A_{r+1}}\right) +$$

$$+ \int\limits_{t}^{s} \left(\left(H^{A_{r+1}}\{\eta_\tau\}\overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s\ominus\tau)^{A_{r+1}}\right).$$

Таким образом (14) доказано. Из (14) следует, что

$$D_{r+1_{s,t}} = D^*_{r+1_{s,t}} + D_{r+2_{s,t}};$$

$$D^*_{r+1_{s,t}} = \left(Q^{A_r}\{\eta_t\}\int\limits_{t}^{s} d\tau \odot (s\ominus\tau)^{A_r}\right) +$$

$$+ \left(\left(H^{A_r}\{\eta_t\}\overset{1}{\cdot}\int\limits_{t}^{s} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s\ominus\tau)^{A_r}\right). \tag{29}$$

После подстановки (27) и (28) при $\tau = t$ в (29) получим

$$D^*_{r+1_{s,t}} = \left(C^{A_{r+1}}\{\eta_t\} \odot (s\ominus t)^{A_{r+1}}\right).$$

Таким образом соотношение (13) доказано. Теорема доказана.

5. Унифицированный ряд Тейлора–Ито

Нетрудно видеть, что часть членов в сумме в правой части (13) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \to t$, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1_{s,t}}$. Это заключение вытекает из свойства (10). Следующая теорема показывает, как необходимо видоизменить разложение (13) чтобы упорядочить его члены по порядкам малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь наибольший порядок малости.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 справедливо с вероятностью 1 следующее унифицированное разложение Тейлора–Ито процесса* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s), s \in [0,T]$ *в окрестности фиксированного момента* $t \in [0,T]$*:*

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \left(C^{D_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{D_q} \right) + H_{r+1_{s,t}},$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(C\{\eta_t\}^{U_r} \odot (s \ominus t)^{U_r} \right) + D_{r+1_{s,t}};$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{A_q}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r} \right) + $$

$$+ \int\limits_t^s \left(\left(H^{A_q}\{\eta_\tau\} \vdots d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r} \right);$$

$$D_q = \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \ldots + l_k) = q;$$
$$k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\},$$

$$U_r = \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + j + l_1 + \ldots + l_k \leqslant r;$$
$$k + 2(j + l_1 + \ldots + l_k) \geqslant r + 1; k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\};$$

$$\sqrt{M\left\{(H_{r+1_{s,t}})^2\right\}} \leqslant C_r (s-t)^{(r+1)/2};\ C_r = \text{const} < \infty; r = 0, 1, \ldots,$$

а другие обозначения такие же как в теореме 2.

Доказательство. Нетрудно видеть, что разложение (13) может быть представлено в следующей форме:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \left(C^{D_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{D_q} \right) + H_{r+1_{s,t}},$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(C^{U_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{U_r}\right) + D_{r+1_{s,t}}.$$

с помощью неравенства Минковского имеем:

$$\sqrt{M\left\{(H_{r+1_{s,t}})^2)\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M\left\{\left(C^{U_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{U_r}\right)^2\right\}} + \sqrt{M\left\{(D_{r+1_{s,t}})^2\right\}}. \qquad (30)$$

Рассмотрим величины в правой части (30). Поскольку

$$\left(C^{U_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{U_r}\right) =$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in U_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)}\{\eta_t\} J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)},$$

то в малой окрестности момента t из свойства (10) и неравенства Минковского получаем

$$\sqrt{M\left\{\left(C^{U_r}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{U_r}\right)^2\right\}} \leqslant C_r^{'}(s-t)^z, C_r^{'} = \text{const} < \infty,$$

где

$$z = \min_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in U_r} \left\{\frac{k}{2} + j + l_1 + \ldots + l_k\right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\sqrt{M\left\{\left(C\{\eta_t\}^{U_r} \odot (s \ominus t)^{U_r}\right)^2\right\}} \leqslant C_r^{'}(s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \qquad (31)$$

$$C_r^{'} = \text{const} < \infty.$$

Рассмотрим $D_{r+1_{s,t}}$:

$$D_{r+1_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{A_r}\{\eta_\tau\}d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r}\right) +$$

$$+ \int\limits_t^s \left(\left(H^{A_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r}\right) =$$

$$
= \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in A_r} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \Biggl(\int_t^s L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} \times
$$

$$
\times \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\tau J_{l_1\ldots l_{k\,s,\tau}}^{(i_1\ldots i_k)} +
$$

$$
+ \sum_{p=1}^{m} \int_t^s G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1\ldots l_{k\,s,\tau}}^{(i_1\ldots i_k)} \Biggr).
$$

В малой окрестности момента t с помощью теоремы 1, свойства (10) и неравенства Минковского имеем:

$$
\sqrt{M\left\{(D_{r+1_{s,t}})^2\right\}} \leqslant C_r^{''}(s-t)^{z^{'}},\; C_r^{''} = \text{const} < \infty,
$$

где

$$
z^{'} = \min_{k+j+l_1+\ldots+l_k=r;\,0\leqslant k\leqslant r} \Biggl\{ 1 + \frac{k}{2} + j + l_1 + \ldots + l_k;
$$

$$
\frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + l_1 + \ldots + l_k \Biggr\} = \frac{r+1}{2}.
$$

Таким образом

$$
\sqrt{M\left\{(D_{r+1_{s,t}})^2\right\}} \leqslant C_r^{''}(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\; C_r^{''} = \text{const} < \infty. \qquad (32)
$$

Из (30)–(32) получаем

$$
\sqrt{M\left\{(H_{r+1_{s,t}})^2\right\}} \leqslant C_r(s-t)^{\frac{r+1}{2}},\; C_r = \text{const} < \infty.
$$

Теорема доказана.

Литература

1. Р. Л. Стратонович, *Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.* Москва: Издательство Московского Университета, 1966.
2. G. N. Milstein, *Approximate integration of stochastic differential equations.* Theor. Prob. Appl. **19** (1974) 557–562.
3. W. Wagner, E. Platen, *Approximation of Ito integral equations.* Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978.
4. E. Platen, W. Wagner, *On a Taylor formula for a class of Ito processes.* Prob. Math. Statist. **3** (1982), 37–51.

5. Г. Н. Мильштейн, *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* Свердловск: Издательство Уральского Университета, 225 с., 1988.
6. P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1992.
7. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Разложение процессов Ито в ряд Тейлора–Ито в окрестности фиксированного момента времени.* ВИНИТИ, 1993, No. 2637–В93.
8. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито.* ВИНИТИ, 1994, No. 1678–В94.
9. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Повторные стохастические интегралы и их свойства.* ВИНИТИ, 1996, No. 3506–В96.
10. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Обобщение разложения Тейлора на класс случайных процессов, порожденных решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито.* ВИНИТИ, 1996, No. 3507–В96.
11. Д. Ф. Кузнецов, *Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций.* Электронный журнал: Дифференциальные уравнения и процессы управления, 1997, No. 1.

Kulchitski O. Yu., Kuznetsov D. F. The unified Taylor–Ito Expansion.

The problem of the Taylor–Bnj expansion of Ito processes in vicinity of a fized moment of the time is considered. The Taylor–Ito expansion, which is known in a literature is transformed to the unified Taylor–Ito expansion using the system of the special repeated stohastic Ito integrals with polynomial weight functions. The unified Taylor–Ito expansion include a smaller number of different types of repeated stohastic integrals, than the Taylor–Ito expansion, which is known in a literature. There are the recurrent relations between the coefficients of the unified Taylor–Ito expansion. Therefore the unified Taylor–Ito expansion is more convenient for synthesis of algorithms of numerical solution of stochastic differential Ito equations.

С.-Петербургский государственный
технический университет

Поступило 15 декабря 1997 г.