Р. С. Сакс

О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

§1. Введение

В заметке [11] мы рассмотрели множество классических псевдодифференциальных операторов (ПДО) весового порядка $(s;t)$, действующих между сечениями векторных расслоений E и F на замкнутом многообразии X. Его мы обозначили $L^{(s,t)}(X;E,F)$. В этом множестве мы выделили два класса операторов: 1) класс обобщенно эллиптических на X, обозначенный нами $GEL^{(s,t)}(X)$, и 2) класс ПДО, приводимых в окрестности каждой точки (x,ξ) из $T'(X)$ к (микро)-локально эллиптическим операторам порядка $(s;t)$, который мы обозначили $REL^{(s,t)}(X)$. Мы анонсировали следующее утверждение ([11], Теорема 5).

Теорема 5. *Для оператора A из $L^{(s,t)}(X;E,F)$ следующие условия эквивалентны*

1) *оператор A принадлежит классу $GEL^{(s,t)}(X)$,*
2) *оператор A принадлежит классу $REL^{(s,t)}(X)$.*

Целью данной работы является доказательство этой теоремы и других утверждений из [11]. Для простоты мы ограничимся случаем тривиальных расслоений E и F (диффеоморфных $X\times\mathbb{C}^l$) и когда $E=F$. Этот случай составляет основу для доказательства общего случая. Ниже в п.1.5 мы приведем эти утверждения, но вначале напомним наши основные обозначения из [11] и их соответствие общепринятым в [3–5]. Определения из [4, 5] мы приводить не будем.

1.1. Обозначения. X — вещественное n-мерное замкнутое (то есть, компактное и без края) C^∞-многообразие. $T^*(X)$ — его кокасательное расслоение; для сокращения мы будем писать $T'(X)$ вместо $T^*(X)\backslash\{0\}$. Всюду ниже U — это коническая область в $T'(X)$, а U_q — коническая окрестность точки $q=(x_0,\xi_0)$ из $T'(X)$, например, $U_q = V_0 \times \Gamma_0$, где V_0-окрестность точки X_0, лежащая в координатной окрестности V, а Γ_0 — конус, содержащий ковектор ξ_0.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, а $m \in \mathbb{Z}$.

$H^s(X, \mathbb{C}^l) = W_2^s(X, \mathbb{C}^l)$ есть соболевское пространство функций на X со значениями в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^l$. $L^m(X; E, E)$ — множество классических ПДО, действующих в $H^s(X; \mathbb{C}^l)$.

Отметим, что множество $L^m(X; E, F)$ составляет часть класса стандартных ПДО, который обозначается через $\Psi^m(X; E, F)$ (см. [4], Определение 18.1.32, или [5], §7). Мы оставили прежнюю букву L в обозначении класса, чтобы выделить рассматриваемый подкласс $L^m(X; E, F)$, $m \in \mathbb{Z}$, в классе $\Psi^r(X; E, F)$, $r \in \mathbb{R}$.

Пусть оператор $A \in L^m(X; E; E)$. Через $\sigma_m(A)$ обозначается главный символ оператора A в классе $L^m(X; E, E)$, а через $\sigma(A)$ — его полный символ.

Отметим, что если матрица $\sigma_m(A)(x, \xi)$ отлична от нулевой матрицы хотя бы в одной точке (x, ξ) из $T'(X)$, то число m совпадает с истинным порядком оператора A. Но в классе $L^m(X) \equiv L^m(X; E, E)$ (для сокращения мы часто будем опускать индекс E в этом обозначении) содержатся и операторы B, у которых $\sigma_m(B) \equiv 0$ всюду в $T'(X)$.

Пусть U — коническая область в $T'(X)$, $k \le m$, $A \in L^m(X)$. Мы скажем, что оператор A принадлежит $L^k(U)$, если для ограничения полного символа $\sigma(A)$ на координатную окрестность V, его главный символ $\sigma_m(A)$ и последующие члены $\sigma_j(A)$ (однородные по ξ степени j) тождественно равны нулю при $j > k$. Если же весь полный символ $\sigma(A) \equiv 0$ в U, то A принадлежит $L^{-\infty}(U)$.

Прописными буквами $l_k(U)$, $l_m(X)$ будем обозначать соответствующие множества скалярных операторов; через $el_k(U)$ и $el_m(X)$ — классы операторов из $l_k(U)$ и $l_m(X)$ эллиптических в U и всюду на X: $a \in el_k(U)$, если и только если $\sigma_k(a) \neq 0$ в $U \subset\subset T'(X)$, и $a \in el_m(X)$, если и только если $\sigma_m(a) \neq 0$ всюду в $T'(X)$. Ясно, что $el_m(X) \subset el_m(U)$. Аналогично, через $EL^m(U)$ и $EL^m(X)$ обозначаются классы операторов из $L^m(X; E, E)$ эллиптических в конической области U или в $T'(X)$:

$$A \in EL^m(U) \Leftrightarrow \det \sigma_m(A) \neq 0 \text{ в } U,$$

$$A \in EL^m(X) \Leftrightarrow \det \sigma_m(A) \neq 0 \text{ в } T'(X).$$

Ясно, что $EL^m(X) \subset EL^m(U)$.

Обозначим

$$L^{-\infty}(X) = \cap_m L^m(X), \quad L(X) = \cup_m L^m(X).$$

1.2. Операторы из $L(X; E, E)$ образуют алгебру. При композиции операторов $A_j \in L^m(X; E, E)$ их главные символы перемножаются

$$\sigma_{m_1+m_2}(A_1 \cdot A_2) = \sigma_{m_1}(A_1)\sigma_{m_2}(A_2) \text{ в } T'(X). \tag{1}$$

Эта формула имеет и локальный аналог в конической области $U \subset T'(X)$ при $A_j \in L_{k_j}(U)$ и $k_j \leq m_j$, если в (1) заменить m_j на k_j. Мы не будем выписывать известные формулы для полного символа композиции A_1A_2 (см. [4, 5]); нам важно его свойство, которое, следуя работе [3], будем называть "принципом локальности": для того, чтобы вычислить полный символ $\sigma(A_1A_2)$ в точке $q = (x_0, \xi_0)$ из $T'(X)$, достаточно знать полные символы $\sigma(A_1)$ и $\sigma(A_2)$ в любой (сколь угодно малой) конической окрестности U_q точки q. Это же свойство полного символа $\sigma(A)$ имеет место при замене переменных в X.

Операторы A^L и A^R называются левым и правым локальными параметриксами оператора A из $L^m(X)$ в области U, если они удовлетворяют соотношениям

$$A^L \cdot A = I + T_1 \text{ и } A \cdot A^R = I + T_2, \quad T_j \in L^{-\infty}(U), j = 1, 2. \tag{2}$$

При $U = T'(X)$ параметриксы называются глобальными. Из принципа локальности и наличия "срезающих" скалярных ПДО с коническим носителем, лежащим в любой области U из $T'(X)$, вытекает известное (см. [3] или [5], Предложение 6.9)

Предложение 1.2. *Для оператора A из $L^m(X; E, E)$ следующие свойства эквивалентны:*

i) A принадлежит классу $EL^m(U)$, т.е. он имеет порядок m и эллиптичен в коническом открытом множестве U;

ii) для любого конического открытого множества U_1 в U, замыкание которого в U является конически компактным ($U_1 \subset\subset U$), существует такой оператор $P \in L^{-m}(X; E, E)$, что операторы $PA - I$ и $AP - I$ принадлежат $L^{-\infty}(U_1)$.

Такой оператор P является левым и правым параметриксом для A в конической области U (т.е. $P = A^L = A^R$) и он принадлежит классу $EL^{-m}(U_1)$.

1.3. Выберем в E базис $e_1, \ldots, e_l$ и представим элементы u и f из $E = F$ в виде

$$u = \sum_{j=1}^{l} u_j e_j, \quad f = \sum_{i=1}^{l} f_i e_i.$$

Если $A \in L(X)$, то уравнение $Au = f$ можно записать в виде системы

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} u_j = f_i, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{3}$$

где a_{ij} суть операторы из $l_{m_{ij}}(X)$.

Число $m = \max_{i,j} m_{ij}$ — это порядок ($\operatorname{ord} A$) оператора A на X и A принадлежит $L^m(X)$.

Пусть целые числа $s_1, \ldots, s_l$ и $t_1, \ldots, t_l$ удовлетворяют неравенствам

$$s_i + t_j \geq m_{ij} \ \text{ для всех } i, j = 1, \ldots, l, \tag{4}$$

такую пару векторов $s = (s_1, \ldots, s_l)$ и $t = (t_1, \ldots, t_l)$ мы называем весовым порядком оператора A и записываем, что $w - \operatorname{ord} A = (s, t)$ и что A принадлежит классу $L^{(s,t)}(X; E, E)$. Весовой порядок задает матрицу главного символа

$$\sigma_{(s,t)}(A) \equiv \{\sigma_{s_i + t_j}(a_{ij})\}_{i,j=1,\ldots,l}, \tag{5}$$

в которой $\sigma_{s_i+t_j}(a_{ij}) \equiv 0$, если $s_i + t_j > m_{ij}$[1].

Оператор A называется (s,t)-эллиптическими в конической области U из $T'(X)$ (и, соответственно, на X), если матрица $\sigma_{(s,t)}(A)$ обратима в U (и, соответственно, на $T'(X)$). Множества таких операторов обозначим через $EL^{(s,t)}(U)$ и $EL^{(s,t)}(X)$.

В частности, если $s = \bar{0}$, $t = \bar{m} \equiv (m, \ldots, m)$, то матрицы $\sigma_{(\bar{0},\bar{m})}(A)$ и $\sigma_m(A)$ совпадают и, следовательно, класс $EL^{(\bar{0},\bar{m})}(U)$ это класс $EL^m(U)$.

Если же $s = \bar{0}$, а компоненты t_j вектора t равны $\max_i m_{ij}$, то оператор A из класса $EL^{(\bar{0},t)}(X)$ называется эллиптическим по

[1] При выборе $w - \operatorname{ord} A$ имеется большой произвол. Чтобы уменьшить его, обычно предполагают, что $m_{ij} = s_i + t_j$ хотя бы для одной пары i, j и что $s_i \leq 0$ и $\max_i s_i = 0$. Эта нормировка не делает выбор s_i и t_j однозначным. Мы будем предполагать только условие (4)

Петровскому [1]. Оператор A называется эллиптическим в смысле Даглиса-Ниренберга [2], если существуют векторы s и t такие, что A принадлежит $EL^{(s,t)}(X)$. Покажем, что оператору A из этого класса можно сопоставить оператор A^0 из $EL^0(X)$.

1.4. Выберем и зафиксируем любой скалярный оператор A из $el_1(X)$ с главным символом $\sigma_1(\lambda)(x,\xi) = |\xi|$ и его параметрикс $\lambda_{(-1)}$ из $el_{-1}(X)$. Оператор λ можно выбрать даже таким, что при каждом $s \in \mathbb{R}$ он индуцирует изоморфизм $H^s(X)$ на $H^{s-1}(X)$ (см. [5], Лемма 2.4), но этим свойством λ мы пользоваться не будем, нам достаточно фредгольмовости λ в пространствах Соболева.

Через λ^m обозначим m-тую степень λ при $m > 0$, $|m|$-тую степень $\lambda_{(-1)}$ при $m < 0$, и $\lambda^0 \equiv 1$ (тождественное отображение). Тогда при k, m из Z имеем

$$\sigma_m(\lambda^m) = |\xi|^m \text{ и } \lambda^k \lambda^m = \lambda^{k+m} + \tau_{k,m}, \tag{6}$$

где $\tau_{k,m} \in l_{-\infty}(X)$ и $\tau_{k,m}$ равны нулю, если знаки k и m совпадают.

Векторам s и t из $\mathbb{Z}^l$ сопоставляются диагональные операторы $J_s = (\lambda^{s_i}\delta_{ij})$ и J_t, соответственно.

Тогда из формул (4) вытекает, что при композиции диагональных операторов, определяющие их векторы складываются,

$$J_s \cdot J_t = J_{s+t} + T_{s,t}, \quad T_{s,t} \in L^{-\infty}(X), \tag{7}$$

и, следовательно,

$$J_s J_{-s} = I + T_{s,-s}, \quad T_{s,-s} \in L^{-\infty}(X), \tag{8}$$

где $I = I_l$ — единичная матрица порядка l.

Из неравенств (4) вытекает, что композиция

$$A^0 \equiv J_{-s} A J_{-t} \in L^0(X), \quad \text{если } A \in L^{(s,t)}(X). \tag{9}$$

Обратно, оператор A выражается через A^0 по формуле

$$A = J_s A^0 J_t + T_{s,t}, \quad \text{где } T_{s,t} \in L^{-\infty}(X). \tag{10}$$

Эта формула получается из ассоциативности умножения операторов в $L(X)$, формул (8), и того факта, что для любых операторов A из $L(X)$ и T_j из $L^{-\infty}(X)$ композиции

$$AT_1 \text{ и } T_2 A \in L^{-\infty}(X) \text{ и } T_1 \pm T_2 \in L^{-\infty}(X) \tag{11}$$

(буквой T мы всегда будем обозначать операторы из $L^{-\infty}(X)$ или из $L^{-\infty}(U)$, опуская излишние индексы). Так как элементы матрицы A^0 имеют вид $a^0_{ij} = \lambda^{-s_i} a_{ij} \lambda^{-t_j}$, то из формул композиции и формул (5)-(6) вытекает, что $\sigma_0(a^0_{ij}) = |\xi|^{-s_i - t_j} \sigma_{s_i+t_j}(a_{ij})$ и что

$$\det \sigma_{(s,t)}(A) = |\xi|^{\langle s\rangle + \langle t\rangle} \det \sigma_0(A^0) \text{ в } U, \tag{12}$$

где $\langle s\rangle$ обозначает сумму компонент вектора s.

Поэтому при указанном соответствии между A и A^0 сохраняется свойство эллиптичности в любой области U из $T'(X)$, а именно,

$$A \in EL^{(s,t)}(U) \Leftrightarrow A^0 \in EL^0(U). \tag{13}$$

Операторы A и A^0 являются ограниченными, а J_s и J_t фредгольмовыми в пространствах, указанных на диаграмме

$$H^{\bar{k}+t}(X;\mathbb{C}^l) \xrightarrow{A} H^{\bar{k}-s}(X,\mathbb{C}^l) \tag{14}$$

$$J_t \downarrow \qquad\qquad\qquad J_s \uparrow$$

$$H^{\bar{k}}(X,\mathbb{C}^l) \xrightarrow{A^0} H^{\bar{k}}(X,\mathbb{C}^l) \tag{15}$$

для любого $k \in \mathbb{R}$ ($\bar{k}$ — это всегда l-вектор с компонентами равными k). Поэтому операторы A и A^0, действующие в пространствах (14) и (15) являются фредгольмово эквивалентными (в русской литературе их чаще называют нетерево эквивалентными). Отметим, что соотношения (13)-(15) сохраняются, если в J_s (и J_t, соответственно) вместо диагональных элементов λ^{s_i} в J_s (и J_r) использовать любые другие операторы из классов $el_{s_i}(X)$.

Известно, следующее утверждение (см., например, [4], §19.5).

Теорема. *Оператор A из $L^{(s,t)}(X;E,E)$ на замкнутом многообразии X является фредгольмово разрешимым в пространствах* (14), *тогда и только тогда, когда он принадлежит классу $EL^{(s,t)}(X)$.*

Отметим, что эта теорема остается справедливой для операторов из более широкого класса $\Psi^{(s,t)}(X;E,F)$ стандартных ПДО, действующих в сечениях векторных расслоений E и F (см. [4], Теорема 19.5.3), если в (14) в обозначениях пространств заменить $\mathbb{C}^l$ на E или F, соответственно.

1.5. Вернемся к содержанию работы. Обозначим

$$GEL(X) = \cup_{(s,t)} GEL^{(s,t)}(X), EL(X) = \cup_m EL^m(X). \tag{16}$$

Аналогично, обозначим $P \cdot EL(X)$, $DN \cdot EL(X)$ и $WG \cdot EL(X)$ классы операторов (различных порядков) эллиптических по Петровскому [1], эллиптических по Даглису-Ниренбергу [2, 4] и приводимых к эллиптическим в смысле Вайнберга и Грушина [3]. Имеют место включения

$$EL(X) \subset P \cdot EL(X) \subset DN \cdot EL(X) \subset GEL(X)$$
$$WG \cdot EL(X) \subset GEL(X), \tag{17}$$

они вытекают из определений классов $GEL^0(X)$ и $GEL^{(s,t)}(X)$ (см. п.п. 1.3 §1, 3.1, 3.2 §3 и п.2.1, 2.2, 2.12 §2). Мы показываем, что любой оператор A из $GEL(X)$ имеет глобальный параметрикс $P = A^L = A^R$, который также принадлежит классу $GEL(X)$ (Теорема 3.6.1).

Известно, что композиция операторов из класса $EL(X)$ принадлежит $EL(X)$, тогда как композиции операторов из классов Петровского, Даглиса-Ниренберга и Вайнберга-Грушина, вообще говоря, не принадлежат этим классам. Мы показываем, что композиции операторов из $GEL(X)$ принадлежат $GEL(X)$ (Теорема 3.4). Следовательно, этому классу принадлежат также композиции операторов из классов $DN \cdot EL(X)$ и $WG \cdot EL(X)$. С другой стороны, пример оператора из п.3.5 §3 показывает, что класс $GEL(X)$ не исчерпывается такими композициями и содержит операторы, главный символ которых имеет переменный ранг на $T'(X)$.

Операторы из $GEL^{(s,t)}(X)$, которые не принадлежат классу $EL^{(s,t)}(X)$ мы называем *слабо эллиптическими*. Множество таких операторов обозначим $WEL^{(s,t)}(X)$. Слабая эллиптичность оператора A определяется конечной частью разложения его полного символа $\sigma(A)$ в асимптотический ряд (включая его главный символ). Фактически, определение классов $REL^{(s,t)}(U)$ и $REL^{(s,t)}(X)$ в п.4.1, 4.6 §4 и 5.1, 5.2 §5 указывает способ, по которому можно проверять принадлежность оператора A классу $WEL^{(s,t)}(X)$, так как согласно Теореме 5.2 классы $GEL^{(s,t)}(X)$ и $REL^{(s,t)}(X)$ совпадают. Детально алгоритм принадлежности оператора классу $GEL^{(s,l)}(X)$ мы излагаем в следующей работе [12], где рассматривается проблема фредгольмовой разрешимости обобщенно эллиптических операторов. Там же приводится доказательство остальных утверждений, указанных в [11].

Отметим еще одно важное свойство операторов A из класса $GEL(X)$: принадлежность к этому классу не зависит от того, какой весовой порядок $w - \operatorname{ord} A$ мы предписываем оператору A в качестве исходного (Теорема 3.2), при переходе от порядков (s,t)

к порядку $(p,q) \neq (s,t)$ можно потерять эллиптичность, но нельзя потерять обобщенную эллиптичность (Теорема 3.3.1). Обобщенная эллиптичность не зависит также от выбора базиса в векторных пространствах E и F (Теоремы 3.7.1 и 3.7.2). Все указанные утверждения показывают, что класс $GEL(X)$ является естественным расширением класса $EL(X)$.

Замечание о моих работах [6-9]. Определение 1 в [6, 7] в случае, когда S квадратная $(l \times l)$ матрица из $L^0(X)$ задает класс $GEL^0(X)$, а определение 6 в [6] и $1'$ в [7] — класс $GEL^{(s,t)}(X)$, соответственно. Операторы из этих классов мы назвали в [6], [7] слабоэллиптическими. Термин обобщенно эллиптические операторы, которому мы теперь придерживаемся [11], нам кажется более предпочтительным, так как классы эллиптических операторов $EL^0(X)$ и $EL^{(s,t)}(X)$ содержатся в классах $GEL^0(X)$ и $GEL^{(s,t)}(X)$, соответственно. Слабоэллиптическими мы называем теперь операторы из $GEL^0(X)\backslash EL^0(X)$ и из $GEL^{(s,t)}(X)\backslash EL^{(s,t)}(X)$. Кроме того, в §2 мы выделили и изучаем классы $EFL^0(U)$ и $EFL^{(s,t)}(U)$ операторов, допускающих эллиптическую факторизацию доминантной части, потому что, 1^0) они появляются естественным образом при (микро) локализации понятия обобщенной эллиптичности и 2^0) эти классы, как нам кажется, представляют и самостоятельный интерес.

Для определения принадлежности заданного оператора A классу $EFL^0(U)$ проводятся C-преобразования оператора и вводится класс $REL^0(U_q)$ операторов, приводимых к эллиптическим в U_q операторы нулевого порядка. При определении этого класса в [11] мы расширили возможности допустимых C-преобразований, задавая преобразующий оператор C среди операторов вида

$$J_a S^0 J_{-b}, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}^l_+,\ C^0 \in EL^0(U_q), \tag{18}$$

тогда как в [6, 7], Определение 2, мы допускали только операторы (18) с вектором $b = 0$. В п.2.10 мы приводим пример оператора (72) из класса $EFL^0(U)$ и в п.4.2 и 4.3 доказываем, что этот оператор можно привести к оператору из $EL^0(U_q)$, только и если только использовать преобразования (18) с вектором $b \neq 0$.

В п. 4.5 мы доказываем, что для любой конической области $U_1 \subset\subset U$ имеют место включения

$$EFL^0(U) \subset REL^0(U_1) \text{ и } REL^0(U) \subset EFL^0(U_1) \tag{19}$$

(Леммы 4.5.1 и 4.5.2). Из этих включений легко вывести совпадение классов $GEL^{(s,t)}(X)$ и $REL^{(s,t)}(X)$ (Теорема 5 в [11], которую следует считать точной формулировкой первой в части теоремы 1 в [6] и [7]) (об эквивалентности условий 1) и 2) обобщенной эллиптичности оператора A на X и его приводимости в окрестности каждой точки из $T'(X)$, если приводимость рассматривать в расширенном смысле).

§2. Класс $EFL(U)$ операторов, допускающих эллиптическую в U факторизацию доминантной части

2.1. Мы начнем с операторов A^0 из класса $L^0(X;E,E)$. Сокращая обозначения будем писать $L^k(X)$ (и, соответственно, $L^k(U)$) вместо $L^k(X;E,E)$ (и $L^k(U;E,E)$). Пусть U — коническая область в $T'(X)$; в частности, U может совпадать со всем $T'(X)$.

Определение. *Оператор A^0 из $L^0(X)$ допускает эллиптическую в области U факторизацию доминантной части, если существуют векторы a_j из $\mathbb{Z}^l$ и найдутся операторы A_j из $EL^0(U)$ и T из $L^{-\infty}(U)$ такие, что*

$$A^0 = J_{a_r}A_r \dots J_{a_1}A_1 + T, \quad r < \infty, \tag{20}$$

где J_{a_j} — диагональные операторы, соответствующие векторам a_j, $1 \leq j \leq r$[2].

Множество таких операторов обозначим $EFL^0(U)$.

Очевидно, что $EL^0(U) \subset EFL^0(U)$.

Представлению (20) сопоставим целое число c, равное сумме всех компонент всех векторов a_j, т.е. $c = \sum_{j=1}^r \langle a_j \rangle$, где $\langle a_j \rangle$ это сумма компонент вектора a_j. В частности, оператору A^0 из $EL^0(U)$ сопоставим число c равное нулю.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 2.1.1. *Если A^0 принадлежит $EFL^0(U)$ и вместе с представлением (20) имеет другое представление, скажем,*

$$A^0 = B_p J_{b_p} \dots B_1 J_{b_1} + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U) \tag{21}$$

[2] Число диагональных операторов J_{a_j} и эллиптических нулевого порядка A_i может различаться на единицу. Нам удобно зафиксировать представление (20), полагая $A_1 = I$, если композиция начинается с диагонального оператора, и $a_r = 0$. если она оканчивается на A_r.

где $b_k \in \mathbb{Z}^l$, $B_k \in EL^0(U)$, *то*

$$\sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle b_k \rangle. \tag{22}$$

Благодаря этому утверждению каждому оператору A^0 из $EFL^0(U)$ соответствует число с $(A^0|U)$ равное числу (22) в любом из его представлений,

$$c(A^0|U) = \sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle. \tag{23}$$

Утверждение 2.1.2. *Если оператор A из $EFL^0(U)$ имеет представление* (20), *то* $\sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle \leq 0$.

В п.2.15 мы покажем, что утверждение 2.1.1 вытекает из утверждения 2.1.2. Доказательство последнего в общем случае довольно длинное и мы его излагаем в работе [12]. Здесь же мы его докажем в случае, когда у A^0 найдется представление (20) с числом диагональных операторов, не превосходящим двух в пп. 2.6 и 2.9. Этого случая будет достаточно для целей данной публикации.

2.2 Отметим, что операторы S^0 из $L^0(X)$, приводимые с помощью матриц B_1 и B_2 из $EL^0(U_1)$ к блочно эллиптическим в U_1 матрицам H (см. [3]), $B_1 S^0 B_2 = H$, принадлежат классу $EFL^0(U)$ в любой области $U \subset\subset U_1$, и могут быть представлены в виде

$$S^0 = A_2 J_{-a} A_1 + T, \quad A_j \in EL^0(U), j = 1, 2, \ T \in L^{-\infty}(U), \tag{25}$$

где вектор a определяется порядками $(-k)$ и размерами t_k эллиптических в H блоков H_k и их числом $p+1$:

$$a = -(\bar{0}_{t_0}, (-\bar{1})_{t_1}, \ldots, (-\bar{p})_{t_p}) \in \mathbb{Z}^l_+.$$

Поэтому для S^0 число

$$c(S^0 \big| U) = -\langle a \rangle = -\sum_{k=0}^{p} k t_k \leq 0. \tag{26}$$

Представление (25) легко получить, из (24) если воспользоваться параметриксами B_1^L и B_2^R из класса $EL^0(U)$ и представлениям для H вида (10),

$$H = H^0 J_{-a} + T_1, \quad H^0 \in EL^0(U_1), \quad T_1 \in L^{-\infty}(U_1). \tag{27}$$

Обратно, любой оператор S^0 из $L^0(X)$, имеющий представление (25) приводим в $U' \subset\subset U$ к оператору вида $J_{-a} + T_2$,

$$A_1^L S^0 A_2^R = J_{-a} + T_2,\ A_1^L \text{ и } A_2^R \in EL^0(U'), T_2 \in L^{-\infty}(U'), \tag{28}$$

который является частным случаем блочно-эллиптического оператора. Так как $A_1^L S^0 A_2^R \in L^0(U')$, то вектор $(-a)$ принадлежит $\mathbb{Z}_-^l$, т.е. его компоненты неположительны.

Подкласс операторов из $EFL^0(U)$, имеющих представление (25) обозначим $BEL^0(U)$. Матрицы S^0 из $EL^0(U)$ принадлежат этому подклассу ($A_2 = I$, $a = 0$, $T = 0$ в (25)). Если же $S^0 \in BEL^0(U) \backslash EL^0(U)$, то вектор $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Z}_+^l$, и, следовательно, число $c(S^0(U)) \equiv -\langle a \rangle$ меньше нуля.

В п.2.7 мы докажем следующее

Предложение 2.2.1. *Если оператор S^0 из $BEL^0(U)$ имеет наряду с представлением (25) другое представление того же вида*

$$S^0 = B_2 J_{-b} B_1 + T_1, \quad B_j \in EL^0(U), \quad T \in L^{-\infty}(U) \tag{29}$$

и компоненты векторов a и b упорядочены по возрастанию, то векторы a и b совпадают ($a = b$).

Это утверждение эквивалентно Лемме 1 из [3].

2.3. Пусть оператор A^0 принадлежит классу $EFL^0(U)$ и имеет представление (20).

Выделим два важных случая

$$a) \text{ когда в (20) все векторы } a_j \text{ принадлежат } \mathbb{Z}_-^l, \tag{30}$$

$$\text{b) когда } a_r \in \mathbb{Z}_+^l, \text{ а остальные } a_j \in \mathbb{Z}_-^l,\ j = 1, \ldots, r-1. \tag{31}$$

Если векторы a_j в (20) не удовлетворяют условиям а) или b), то мы трансформируем представление (20) к одному из этих случаев, используя некоторые "канонические" преобразования, которые мы сейчас опишем.

2.4. Положим

$$\tilde{A}_j^n = J_{-\bar{n}} A_j J_{\bar{n}} = \lambda^{-n} A_j \lambda^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Из формул композиции и (6) вытекает, что операторы A_j и $\tilde{A}_j^n$ имеют одинаковые главные символы. Действительно,

$$\begin{aligned}\sigma_0(\tilde{A}_j^n) = \sigma_{-n}(\lambda^{-n})\sigma_0(A_j)\sigma_n(\lambda^n) = |\xi|^{-n}\sigma_0(A_j)|\xi|^n = \\ = \sigma_0(A_j).\end{aligned} \tag{33}$$

Поэтому,

$$A_j \in EL^0(U) \Leftrightarrow \tilde{A}_j^n \in EL^0(U) \tag{34}$$

и операторы A_j выражаются через $\tilde{A}_j^n$ по формулам

$$A_j = J_n \tilde{A}_j^n J_{-\bar{n}} + T_n, \quad T_n \in L^{-\infty}(X), \tag{35}$$

(сравните с формулами (8)-(10)).

Простейшее и самое общее из преобразований представления (20) оператора A^0 состоит в том, что в (20) мы заменяем один или несколько из операторов A_j правой частью равенства (35); а затем перегруппировываем полученное выражение, используя формулы (7) и (11). В итоге получаем выражение того же вида. Например, при $r > 2$ в (20) заменяя A_2, имеем

$$\begin{aligned} A^0 &= J_{a_r} A_r \dots J_{a_2} (J_{\bar{n}} \tilde{A}_2 J_{-n} + T_n) J_{a_1} A_1 + T = \\ &= J_{a_r} A_r \dots J_{a_2 + \bar{n}} \tilde{A}_2 J_{a_1 - \bar{n}} A_1 + T_1,\, T_1 \in L^{-\infty}(U). \end{aligned} \tag{36}$$

Мы получили представление, которое отличается от (20) тем, что при $n > 0$ компоненты вектора a_1 уменьшились на n единиц, а компоненты вектора a_2 на столько же единиц увеличились.

2.5. Имеет место следующая

Лемма 2.5. *Пусть векторы a_j в представлении (20) оператора A^0 не удовлетворяют включениям (30) или (31). Тогда преобразованиями (35) можно получить представление вида*

$$A^0 = J_{b_r} B_r \dots J_{b_1} B_1 + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U), \tag{37}$$

в котором векторы b_j удовлетворяют условиям (30) или (31), а матрицы B_j принадлежат $EL^0(U)$; более того, $\sigma_0(B_j) = \sigma_0(A_j)$ и

$$\sum_{j=1}^{r} \langle a_j \rangle = \sum_{j=1}^{r} \langle b_j \rangle. \tag{38}$$

Введем обозначения $M(a)$ и $m(a)$ для наибольшей и наименьшей из компонент вектора $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$

$$M(a) = \max_i \alpha_i, \quad m(a) = \min_i \alpha_i. \tag{39}$$

Перейдем к доказательству леммы. Пусть $M(a_1) > 0$. Тогда воспользуемся преобразованием (35), в котором $j = 2$ и $n = m_1$, а

$m_1 = M(a_1)$. Мы получим представление (36), в котором вектор $b_1 \equiv a_1 - \bar{m}_1$ принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$. Если вектор $a_2 + \bar{m}_1 \in \mathbb{Z}^l_-$, то рассмотрим следующие векторы $a_3, \ldots, a_r$. Если же $M(a_2+\bar{m}_1) > 0$, то преобразование (35) повторяем с $j = 3$ и $n = m_2 \equiv M(a_2+\bar{m}_1) = M(a_2) + M(a_1)$. Таким образом, после (не более чем) $r-1$ преобразований (35) приходим к представлению

$$A^0 = J_{a_r+\bar{m}_{r-1}} \tilde{A}_r J_{b_{r-1}} B_{r-1} \ldots B_2 J_{b_1} A_1 + T_{r-1}, \tag{40}$$

в котором векторы b_j принадлежат $\mathbb{Z}^l_-$ при $j = 1, \ldots, r-1$, матрицы B_j совпадают с A_j или $\tilde{A}_j$, а $T_{r-1} \in L^{-\infty}(U)$. Если вектор $a_r + \bar{m}_{r-1}$ принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$ или $\mathbb{Z}^l_+$, то, обозначая его b_r и полагая $\tilde{A}_r = B_r$, получим искомое представление (37). Если же вектор $a_r + \bar{m}_{r-1}$ имеет как положительные так и отрицательные компоненты, то на предыдущем шаге преобразования изменим число $n = m_{r-1}$ на большее число $n = m_{r-1} - u_r$, где $n_r \equiv m(a_r + \bar{m}_{r-1}) < 0$. Мы получим представление (40), в котором вектор n_{r-1} равен $a_{r-1} - \bar{m}_{r-1} + \bar{n}_r$ и принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$, а вектор b_r равен $a_r + \bar{m}_{r-1} - \bar{n}_r$ и принадлежит $\mathbb{Z}^l_+$. Наконец, отметим, что если в представлении (20) имеется только один диагональный оператор ($r = 1$), то $A^0 \in BEL^0(U)$, а в этом случае, как мы показали в п.2.2, вектор $a_1 \in \mathbb{Z}^l_-$. Лемма доказана.

2.6. Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.6.1. *Пусть оператор B принадлежит $EFL^0(U)$ и имеет представление* (20) *вида*

$$B = J_a A J_{-b} + T, \quad a, b \in \mathbb{Z}^l_+, \quad A \in EL^0(U), \tag{41}$$

а $T \in L^{-\infty}(U)$. Тогда число $c \equiv \langle a\rangle - \langle b\rangle$ не превосходит нуля ($c \leq 0$).

Лемма 2.6.2. *Если оператор B удовлетворяет условиям Леммы 2.6.1 и число c равно нулю, то оператор B принадлежит $EL^0(U)$ и, кроме того,*

$$\det \sigma_0(B) = \det \sigma_0(A) \ \text{в} \ U, \tag{42}$$

а векторы a и b либо совпадают, либо различаются только перестановкой компонент ($b = \Pi a$).

Прежде, чем переходить к доказательству этих лемм, отметим, что не ограничивая общности, можно считать, что компоненты α_i и β_i векторов a и b упорядочены следующим образом:

$$-\beta_l \leq \cdots \leq -\beta_1 \leq 0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_l. \tag{43}$$

Действительно, пусть $\Pi_{s,k}$ матрица, полученная из единичной матрицы I_l, перестановкой ее строк (или столбцов) с номерами s и k. Умножение любой матрицы M на $\Pi_{s,k}$ слева (справа) сводится к перестановке в M двух строк (столбцов) с номерами s и k; в частности, $\Pi_{s,k}\Pi_{s,k} = I$. Следовательно, для диагонального оператора J_a имеем

$$\Pi_{s,k} J_a \Pi_{s,k} = J_{a''},$$

где a'' — вектор, получаемый из a перестановкой его компонент с номерами s и k. Поэтому, если компоненты векторов a и b не удовлетворяют условиям (43), то умножая J_a и J_b на соответствующие композиции Π_1 и Π_2 перестановочных матриц, получим операторы

$$J_{a_1} = \Pi_1 J_a \Pi_1 \text{ и } J_{b_1} = \Pi_2 J_b \Pi_2 \tag{44}$$

у которых векторы a_1 и b_1 упорядочены согласно (43).

Тогда из (43) и (44) получим

$$\Pi_1 B \Pi_2 = J_{a_1}(\Pi_1^{-1} A \Pi_2^{-1}) J_{-b_1} + \Pi_1 T \Pi_2. \tag{45}$$

Таким образом, условия (43) удовлетворяются после соответствующих перестановок строк и столбцов в матрицах A, B и T. Не меняя обозначений, будем считать, что такие перестановки проведены и условия (43) имеют место для самих операторов A и B.

В этом случае лемму 2.6.1 можно уточнить.

Лемма 2.6.3. *Пусть оператор B удовлетворяет условиям леммы 2.6.1 и векторы a и b упорядочены согласно неравенствам (43). Тогда их разность $a - b$ принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$, т.е.,*

$$\alpha_j \leq \beta_j, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{46}$$

Действительно, если $a = 0$, то это утверждение очевидно, поэтому предположим, что $a \neq 0$.

Ввиду формул (8) равенство (41) можно переписать в виде

$$A = J_{-a} B J_b + T', \quad T' \in L^{-\infty}(U), \tag{47}$$

которое поэлементно выглядит так

$$a_{ij} = \lambda^{-\alpha_i} b_{ij} \lambda^{\beta_j} + t'_{ij}, \quad t'_{ij} \in l_{-\infty}(U),\, i, j \in [1, l]. \tag{47'}$$

По условию матрица $A \in EL^0(U)$, матрица B принадлежит $L^0(U)$, а их элементы a_{ij} и b_{ij} принадлежат $l_0(U)$. Поэтому, если для некоторых i и j число $\beta_j - \alpha_i$ меньше нуля, то $\operatorname{ord} a_{ij} \leq \beta_j - \alpha_i < 0$ в U, т.е., главный символ $\sigma_0(a_{ij})$ и последующие члены $\sigma_k(a_{ij})$ разложения полного символа $\sigma(a_{ij})$ равны нулю при $\beta_j - \alpha_i < k < 0$. Запишем эти ограничения на символ матрицы A так

$$\beta_j < \alpha_i \Rightarrow \sigma_k(a_{ij}) = 0 \text{ в } U \text{ при } k = 0, \ldots, \beta_j - \alpha_i + 1. \tag{48}$$

Докажем лемму 2.6.3. От противного. Пусть $\beta_l < \alpha_l$. Тогда из неравенств (43) вытекает, что $\beta_j < \alpha_l$ для всех $j = 1, \ldots, l$. Согласно соотношениям (48) $\sigma_0(a_{lj}) = 0$ в U при $j = 1, \ldots, l$; и в матрице $\sigma_0(A)$ получаем нулевую строку. Но это не возможно, потому, что по условию оператор A принадлежит $EL^0(U)$ и его символическая матрица $\sigma_0(A)$ невырождена в U. Следовательно, $\alpha_l \leq \beta_l$.

Далее, если $\beta_k < \alpha_k$ при $k < l$, то из неравенств (43) получаем, что $\beta_j < \alpha_i$ при $j \leq k \leq i$ и из соотношений (48), что

$$\sigma_0(a_{ij}) = 0 \text{ в } U \text{ при } 1 \leq j \leq k \leq i \leq l. \tag{49}$$

Нулевые элементы (49) в матрице $\sigma_0(A)$ составляют прямоугольную подматрицу, которая при любом k пересекается с диагональю (при $k = 1$ они составляют первый столбец в $\sigma_0(A)$). Поэтому, определитель $\sigma_0(A)$ равен нулю в U, что противоречит условию $A \in EL^0(U)$. Следовательно, $\alpha_k \leq \beta_k$ при всех $k = 1, \ldots, l$. Лемма 2.6.3 доказана.

Лемма 2.6.1 является следствием Леммы 2.6.3.

Действительно, в условиях последней леммы число $c = \langle a \rangle - \langle b \rangle = \sum_{k=1}^{l} (\alpha_k - \beta_k) \leq 0$. При перестановках (44), (45) сумма компонент векторов a и b не меняется, $\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle$, $\langle b \rangle = \langle b_1 \rangle$; мы приходим к утверждению Леммы 2.6.1

Из Леммы 2.6.3 имеем еще одно

Следствие 2.6.4. *Если оператор B удовлетворяет условиям Леммы 2.6.3 и число $c = \langle a \rangle - \langle b \rangle$ равно нулю, то векторы a и b совпадают, т.е.,*

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle \;\Rightarrow\; a = b. \tag{50}$$

Это утверждение вытекает из очевидного факта, что, если вектор $a - b$ принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$ (имеет неположительные компоненты) и сумма этих компонент $\langle a-b\rangle = \langle a\rangle - \langle b\rangle$ равна нулю, то вектор $a-b$ равен нулю.

Перейдем к доказательству Леммы 2.6.2. По условию число $c \equiv \langle a\rangle - \langle b\rangle = 0$. Из следствия 2.6.4 получаем, что векторы a и b совпадают, если они упорядочены согласно (43). В общем случае, они совпадают после соответствующих перестановок (44), т.е. $b = \Pi a$, где Π — матрица перестановки.

Перейдем к доказательству соотношения (42). Для этого сравним матрицы $\sigma_0(A)$ и $\sigma_0(B)$, уточняя расположение в них нулевых элементов, считая, что векторы a и b равны и удовлетворяют неравенствам (43). Так как элементы из B, имеющие порядки $\alpha_i - \beta_j = \alpha_i - \alpha_j < 0$, в $\sigma_0(B)$ представлены нулями, то ввиду (43) нули в матрице $\sigma_0(B)$ располагаются в правом верхнем углу. Нули в матрице $\sigma_0(A)$ симметричны нулям $\sigma_0(B)$ и располагаются в левом нижнем углу, потому, что согласно (48), $\sigma_0(a_{ij}) = 0$ при $\alpha_i - \alpha_j > 0$. Элементы, имеющие нулевой порядок, расположены в B блоками вдоль главной диагонали, и эти блоки в силу $A \in EL^0(U)$ принадлежат $EL^0(U)$, если учесть расположение в $\sigma_0(A)$ нулевых элементов и известный из алгебры факт об определителях блочно диагональных и нижне или верхне (блочно)-треугольных матриц. В итоге, определители матриц $\sigma_0(A)$ и $\sigma_0(B)$ равны произведению определителей тех блоков, которые расположены в них вдоль главной диагонали. Они между собой совпадают. Откуда вытекает соотношение (42). Мы не будем подробнее проводить это доказательство, вместо этого мы приведем еще другое доказательство Леммы 2.6.2, формулами из которого мы воспользуемся при доказательстве следующего утверждения.

Второе доказательство Леммы 2.6.2. Не предполагая соотношений (43), сравним в определителях $\sigma_0(A)$ и $\sigma_0(B)$ слагаемые, которые соответствуют одной и той же перестановке $I = (i_1,\ldots,i_l)$ чисел $1,\ldots,l$. Они являются произведениями

$$\pm\sigma_0(b_{1i_1})\ldots\sigma_0(b_{li_l}), \tag{51}$$

где $b_{ij} = \lambda^{\alpha_i} a_{ij} \lambda^{-\beta_j}$, и

$$\pm\sigma_0(a_{1i_1})\ldots\sigma_0(a_{li_l}). \tag{52}$$

Покажем, что если $\langle a\rangle = \langle b\rangle$, то произведения (51) и (52) совпадают. Так как $a_{ij} \in l_0(U)$, а $\lambda^k \in el_k(U)$, при $\alpha_i - \beta_j \le 0$ порядок

b_{ij} в U не превосходит $\alpha_i - \beta_j$. Откуда получаем, что

$$\sigma_0(b_{ij}) = 0 \text{ в } U, \text{ если } \alpha_i - \beta_j < 0, \tag{53}$$

и, ввиду формул композиции и (6), что

$$\sigma_0(b_{ij}) = \sigma_0(a_{ij}), \text{ если } \alpha_i = \beta_j. \tag{54}$$

Если же $\alpha_i > \beta_j$, то условие $b_{ij} \in l_0(U)$ диктует условия (48) на полный символ $\sigma(a_{ij})$, при выполнении которых,

$$\sigma_0(b_{ij}) = |\xi|^{\alpha_i - \beta_j} \sigma_{-\alpha_i + \beta_j}(a_{ij}), \quad \alpha_i > \beta_j. \tag{55}$$

Для каждой перестановки I возможно следующее: либо

а) все числа

$$\alpha_k - \beta_{i_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{56}$$

либо

б) среди чисел $\alpha_k - \beta_{i_k}$ найдется положительное (соответственно, отрицательное) число $\alpha_p - \beta_{i_p}$ $(\alpha_j - \beta_{i_j})$. В случае (56) в силу (54) произведения (51) и (52) совпадают. В остальных случаях среди чисел $\alpha_k - \beta_{i_k}$ найдется как положительное число $\alpha_p - \beta_{i_p}$ так и отрицательное $\alpha_j - \beta_{i_j}$, потому, что их сумма по условию равна нулю $(c = 0)$. Тогда в каждом из произведений (51) и (52) найдется нулевой множитель, в (51) $\sigma_0(b_{ji_j} = 0$ согласно (53), а в (52) $\sigma_0(a_{pi_p}) = 0$ согласно (48). Поэтому произведения (51) и (52) равны нулю и они опять совпадают. Таким образом, определители $\sigma_0(A)$ и $\sigma_0(B)$ совпадают в каждой точке из U. Отметим, что ненулевой вклад в эти определители возможен только для тех перестановок, для которых выполняется условие (56). Из этого факта и из принадлежности A к $EL^0(U)$ легко убедиться, что вектор b отличается от a только перестановкой компонент $(b = \Pi a)$. Действительно, если это не так, то случай (56) не возможен, а тогда $\det \sigma_0(A)$ равен нулю в U, что противоречит эллиптичности A. Лемма 2.6.2 доказана.

Лемму 2.6.1 можно дополнить следующим утверждением.

Лемма 2.6.5. *Если оператор B удовлетворяет условиям леммы 2.6.1 и число $c \equiv \langle a \rangle - \langle b \rangle$ меньше нуля, то $\det \sigma_0(B) \equiv 0$ в U.*

Доказательство. Определитель матрицы $\sigma_0(B)$ состоит из произведений (51), соответствующих перестановкам I. Число $c < 0$, поэтому для любой I среди чисел $\alpha_k - \beta_{i_k}$, сумма которых равна

c, найдется число $\alpha_j - \beta_{i_j} < 0$. Согласно (53), в каждом из произведений (51) содержится нулевой множитель $\sigma_0(b_{ji_j})$. Поэтому определитель равен нулю. Лемма доказана.

Предложение 2.6.6. *Пусть оператор C принадлежит $EFL^0(U)$ и имеет представление* (20) *вида*

$$C = A_3 J_a A_2 J_{-b} A_1 + T_1, \quad a, b \in \mathbb{Z}^l_+,\ A_j \in EL^0(U). \tag{57}$$

Тогда для C остаются справедливыми аналоги Лемм 2.6.1-2.6.5 за исключением формулы (42), *которую нужно заменить формулой*

$$\det \sigma_0(C) = \prod_{j=1}^{3} \det \sigma_0(A_j) \ \text{в } U. \tag{58}$$

Действительно, операторы A_1 и A_3 имеют параметриксы A_1^R и A_3^L из $EL^0(U_1)_r$ для любой $U_1 \subset\subset U$. Применяя их к равенству (57), получим, что композиция $B \equiv A_3^L C A_1^R$ принадлежит $L^0(U_1)$ и имеет представление (41) в U_1. Теперь из Лемм 2.6.1–2.6.5 легко получить соответствующие утверждения для оператора (57).

2.7. Возвращаясь к классу $BEL^0(U)$ из п.2.2, докажем предложение 2.2.1. Оно вытекает из Лемм 2.6.3 и 2.6.5. Действительно, пусть оператор S^0 имеет два представления (25) и (29), где векторы a и b упорядочены по возрастанию, т.е. a и b удовлетворяют условиям (43). Тогда, исключая S^0 и применяя к полученному равенству параметриксы A_2^L и J_a слева и B_1^R справа получим соотношение

$$A_1 B_1^R = J_a A_2^L B_2 J_{-b} + T_2, \quad a, b \in \mathbb{Z}^l_+, T \in L^{-\infty}(U_1), \tag{59}$$

где операторы B_1^R, A_2^L, а с ними и $A_1 B_1^R$ и $A_2^L B_2$ принадлежит классу $EL^0(U_1)$ в любой области $U_1 \subset\subset U$. Представление (59) оператора $A_1 B_1^R$ удовлетворяет условиям леммы 2.6.3; следовательно, $a - b \in \mathbb{Z}^l_-$. Если $a - b \neq 0$, то согласно Лемме 2.6.5 определитель матрицы $\sigma_0(A_1^R)$ тождественно равен нулю в U_1. Это не возможно потому, что оператор $A_1 B_1^R$ эллиптичен в U_1,

$$\sigma_0(A_1 B_1^R) = \sigma_0(A_1)\sigma_0(B_1^R) = \sigma_0(A_1)[\sigma_0(B_1)]^{-1},$$

и определитель матриц $\sigma_0(A_1)$ и $\sigma_0(B_1)$ отличен от нуля в U_1. Итак, $a = b$ и лемма доказана.

2.8. Используя Лемму 2.6.2 можно определить преобразования представлений (20) операторов A^0 из $EFL^0(U)$ более общие, чем (35), (32) которые однако возможны не всегда (не для любых матриц A_j). Пусть оператор $A \in EL^0(U)$, вектор $c \in \mathbb{Z}^l_+$ и $c'' = \Pi c$ — вектор, получаемый из c перестановкой Π его компонент. Обозначим

$$^c\tilde{A} = J_c A J_{-c''}, \quad A \in EL^0(U), \quad c \in \mathbb{Z}^l_+. \tag{60}$$

Переход от оператора A к $^c\tilde{A}$ будем называть окаймлением A диагональными операторами, а сам оператор $^c\tilde{A}$ — окаймленным. Он имеет нулевой порядок в U,

$$^c\tilde{A} \equiv J_c A J_{-c''} \in L^0(U), \tag{61}$$

если $\sigma(A)$ удовлетворяет условиям вида (48), где нужно заменить α_i и β_j компонентами векторов c и c''. Если выполнено условие (61), то согласно Лемме 2.6.2 оператор $^c\tilde{A}$ принадлежит $EL^0(U)$, так как для него выполняются соотношения (42)

$$\det \sigma_0(\tilde{A}) = \det \sigma_0(A) \text{ в } U. \tag{62}$$

Оператор A выражается через $^c\tilde{A}$ по формуле

$$A = J_{-c}{}^c\tilde{A} J_{c''} + T_1, \quad {}^c\tilde{A} \in EL^0(U), \quad T_1 \in L^{-\infty}(X). \tag{63}$$

Отметим, что принадлежность $^c\tilde{A}$ к $L^0(U)$ определяется условиями (48) в случае $c \neq \bar{m} = (m_1, \ldots, m)$, $m \in N$. Если же $c = \bar{m}$, условие (61) выполняется для любого оператора A из $L^0(U)$ и, в частности, из $EL^0(U)$; никаких других условий на $\sigma(A)$ нет и формулы (60) и (63) совпадают с формулами (32) и (35) (если опустить индекс) и положить $m = -n$).

Пусть оператор B имеет представление (41) и удовлетворяет Лемме 2.6.2. Так как оператор $\tilde{A} = J_a A J_{-b} = B - T$ принадлежит $EL^0(U)$, то для B фактически имеет место более простое разложение

$$B = {}^a\tilde{A} + T, \quad {}^a\tilde{A} \in EL^0(U), T \in EL^{-\infty}(U). \tag{64}$$

Этот пример показывает, что в представлении (20) оператора A^0 из $EFL^0(U)$ также возможны упрощения, если хотя бы один из операторов A_j имеет окаймление диагональными, удовлетворяющие условию (61). В п. 2.10 мы приводим другой пример и покажем, что возможность упрощения его представления зависит от конической области U. Но вначале рассмотрим одну ситуацию общего характера.

2.9. Возвращаясь к преобразованиям представления (20) оператора A^0 из $EFL^0(U)$, предположим, что какой-либо из операторов A_j имеет окаймление (60), удовлетворяющее условиям (61). Тогда заменяя A_j правой частью равенства (63) и перегруппировывая полученное выражение так же как в (36), получим другое представление для A^0 того же типа, например, (21). При этом количество диагональных операторов может уменьшиться, но число $c(A^0|U)$ не меняется, т.е. имеет место равенство (22), потому что для окаймленных операторов (60) и (63) это число равно нулю. Вариантов возможных преобразований представления (20) может быть много, так же, как возможных расстановок скобок в произведениях. Например, 1) если операторы ${}^{c_j}\tilde{A}_j$ принадлежат $L^0(U)$ а, следовательно, и $EL^0(U)$, и представление (20) может быть записано в виде

$$A^0 = \prod_{j=1}^{r} {}^{c_j}\tilde{A}_j + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U), \tag{65}$$

то оператор A^0 на самом деле принадлежит $EL^0(U)$; 2) если представление (20) можно представить в виде

$$A^0 = {}^{b}\tilde{B} + T_2, \text{ где } B = A_2 \cdot {}^{c_1}\tilde{A}_1 \in EL^0(U) \text{ и } {}^{b}\tilde{B} \in L^0(U), \tag{66}$$

то оператор A^0, имеющий такое представление, сам принадлежит $EL^0(U)$. Мы привели эти два примера только для иллюстрации возможностей преобразований в (20).

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2.9.1. *Пусть оператор A^0 имеет представление (20), в котором число диагональных операторов больше двух ($r > 2$) и векторы a_j не удовлетворяют условию (30) (когда все $a_j \in \mathbb{Z}^l_-$). Предположим, что это представление последовательными операциями окаймления (60), удовлетворяющими условиям (61), можно преобразовать в представление (21), в котором либо*

a) все векторы b_k удовлетворяют условиям (30), т.е. все b_k принадлежат $\mathbb{Z}^l_-$, $k = 1, \dots, p$, либо

b) число диагональных операторов в (21) не превосходит двух, т.е. $p \le 2$. Тогда число $c(A^0|u) \le 0$.

Лемма 2.9.2. *Если оператор A удовлетворяет условиям Леммы 2.9.1 и число $c(A^0|u)$ равно нулю, то A принадлежит $EL^0(U)$ и,* *кроме того,*

$$\det \sigma_0(A^0) = \prod_{j=1}^{r} \det \sigma_0(A_j) \ \text{в}\ U \tag{67}$$

Лемма 2.9.3. *Если оператор A удовлетворяет условиям Леммы 2.9.1 и число $c(A^0|u) < 0$, то*

$$\det \sigma_0(A^0) \equiv 0 \ \text{в}\ U \tag{68}$$

Доказательство Леммы 2.9.1. Как мы уже отмечали после каждого из преобразований вида (63) представления (20) меняются векторы a_j но сумма всех компонент всех новых векторов остается неизменной. Если в результате мы получим представление (21), в котором все векторы b_k удовлетворяют условиям $b_k \in \mathbb{Z}^l_-$, то, очевидно, что $\sum_{k=1}^{p}\langle b_k\rangle \leq 0$. Если же $p \leq 2$ в представлении (21) и $b_1 \in \mathbb{Z}^l_-$, а $b_2 \in \mathbb{Z}^l_+$, то применяем Лемму 2.6.1 или Предложение 2.6.5. Снова получаем, что сумма $\langle b_k\rangle$ не превосходит нуля. Лемма доказана.

Доказательство Леммы 2.9.2. Если векторы b_k в представлении (21) удовлетворяют условию $b_k \in \mathbb{Z}^l_-$ и сумма их компонент равна нулю, то, очевидно, что все $b_k = 0$ и

$$A^0 = B_p \dots B_1 + T, \quad B_j \in EL^0(U),\, T \in L^{-\infty}(U). \tag{69}$$

Откуда получаем, что

$$\sigma_0(A^0) = \prod_{k=1}^{p} \sigma_0(B_k) \text{ и } \det \sigma_0(A^0) = \prod_{k=1}^{p} \det \sigma_0(B_k) \text{ в } U. \tag{76}$$

В свою очередь, каждая из матриц B_k определяется через некоторое число матриц A_j $(j = i_1, \dots, i_k)$ помощью конечного числа операций двух видов, а именно операций окаймления и умножения матриц из $EL^0(U)$. Поэтому определитель матрицы $\sigma_0(B_k)$ равен произведению определителей матриц $\sigma_0(A_j)$ для тех A_j, которыми определяется B_k. Каждая из матриц B_k определяется своими набором матриц A_j (в частности, B_k может совпадать с A_i или $\tilde{A}_i$) и каждая из матриц A_j входит в какой-либо из этих наборов. Учитывая формулы (62) и (70), получим формулу (67). Каждый из определителей в произведении (67) отличен от нуля в U, поэтому оно само не равно нулю и оператор A^0 принадлежит $EL^0(U)$. Доказательство случая a) закончено. В случае b) мы приходим к представлению (21) в котором $p \leq 2$, а B_k выражаются через A_j так, как показано выше. Поэтому из формул (62), (42) и (58) снова получим формулу (67) и, следовательно, эллиптичность A^0 в U. Лемма доказана.

Доказательство Леммы 2.9.3. По предположению число $c = \sum_{k=1}^{r} \langle a_k \rangle$ меньше нуля. Поэтому в результате преобразований в случае a) мы получим представление (21), в котором векторы $b_k \in \mathbb{Z}^l_-$ и сумма всех компонент всех векторов b_k отрицательна. Значит у векторов b_k имеются отрицательные компоненты, а в матрицах $\sigma_0(J_{b_k})$ имеются нулевые строки. Из представления (21) видим, что $\sigma_0(A^0) = \sigma_0(B_p)\sigma_0(J_{b_p})\ldots\sigma_0(B_1)\sigma_0(J_{b_1})$ в U. Вычисляя определитель этого произведения матриц и учитывая, что $\det \sigma_0(J_{b_k}) \equiv 0$ получим формулу (68). Доказательство леммы в случае a) закончено. В случае b) лемма вытекает из Леммы 2.6.5 или Предложения 2.6.6. Итак, Лемма 2.9.3 доказана.

2.10. Покажем на примере, что в классе $EFL^0(U)$ имеются операторы, которые во всей области U не удовлетворяют условиям Леммы 2.9.1. В тоже время в U можно выделить подобласти, где условия Леммы 2.9.1 выполняются.

Пусть V — связная координатная окрестность, которая гладкой поверхностью (линией при $n = 2$) $\mathcal{P}$ разделена на две подобласти V_1 и V_2. Пусть заданы две функции $a_j(x) \in C^\infty(X)$ такие, что

$$a_j(x) \neq 0 \text{ в } V_j \text{ и } a_1(x) \cdot a_2(x) \equiv 0 \text{ в } V. \tag{71}$$

Рассмотрим матричный оператор D вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & a_2 \end{pmatrix} \tag{72}$$

где a_j — операторы умножения на функции $a_j(x)$, λ^{-1} — параметрикс оператора $\lambda \in el_1(X)$ из п.1.4, т.е. операторы $\lambda^{-1}\lambda - 1 \equiv \tau_{-1,1}$ и $\lambda \cdot \lambda^{-1} - 1 \equiv \tau_{1,-1}$ принадлежат $l_{-\infty}(X)$. Имеет место следующее

Предложение 2.10.1. *Оператор* (72) *при условии* (71) *принадлежит классу* $EFL^0(U)$ *в области* $U = T'(V)$, *и имеет представле-*

ние

$$A = J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}} + T, \tag{73}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} a_1\tau_{1,-1} & a_1\lambda a_2 \\ \lambda^{-1}\tau_{1,-1} & \tau_{-1,1}a_2 \end{pmatrix} \text{ и } T \in L^{-\infty}(U). \tag{74}$$

Доказательство. Соотношение (73) проверяется перемножением матриц. Все элементы матрицы T, кроме $a_1\lambda a_2$, принадлежат $l_{-\infty}(X)$; элемент $a_1\lambda a_2$ принадлежит $l_{-\infty}(U)$ потому, что носители функций a_1 и $a_2(x)$ не имеют внутренних точек пересечения.

Замечание 2.10.2. Из соотношений (72)-(74) видно, что Предложение 2.10.1 останется в силе и тогда, когда в матрице (72) a_j любые операторы из $l_0(X)$, удовлетворяющие условию

$$a_1\lambda a_2 \in l_{-\infty}(U), \quad U \subset T'(X), \tag{71$'$}$$

в некоторой конической области U из $T'(X)$.

Однако, для наглядности нам достаточно простой ситуации, когда a_j — это операторы умножения на функции, удовлетворяющие условию (71). Тогда $U = T'(V)$.

Имеет место

Предложение 2.10.3. *Если a_j удовлетворяют соотношениям* (71), *то оператор* (72) *не удовлетворяет условиям Леммы 2.9.1 в области $U = T'(V)$. Он также не удовлетворяет условиям Леммы 2.9.1 в любой* (*как угодно малой*) *окрестности U_q точки $q = (x_0, \xi_0)$, если x_0 принадлежит разделяющей поверхности $\mathcal{P}$, а $\xi_0 \neq 0$ любое.*

Доказательство. В представлении (73) оператора (72) можно выделить два окаймленных оператора вида (60)

$$\tilde{A}_1 = J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ и } \tilde{A}_2 = J_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}. \tag{75}$$

Однако, ни один из них не удовлетворяет условию (61) в $T'(V)$ или в U_q, если $x_0 \in \mathcal{P}$. Действительно, согласно (71) в любой окрестности точки $x_0 \in \mathcal{P}$ найдутся точки x' и x'', где $a_1(x') \neq 0$ и $a_2(x'') \neq 0$, соответственно. Следовательно, в любой окрестности

U_q точки $q = (x_0, \xi_0)$ операторы $a_1\lambda$ и λa_2 имеют первый порядок. Они являются элементами матриц $\tilde{A}_j$ в (75), которые тем самым не удовлетворяют условию (61). Предложение доказано.

Замечание. Диагональные операторы в (73) заданы векторами $a_1 = (-1, 0)$, $a_2 = (1, -1)$, $a_3 = (0, -1)$ (при нумерации справа налево), которые не удовлетворяют включениям (30) или (31). Согласно Лемме 2.5 заменой вида (32) представление (73) можно трансформировать в представление вида (37), в котором векторы $b_1 = (-1, 0)$, $b_2 = (0, -1)$ и $b_3 = (1, 0)$ удовлетворяют включениям (31), а именно

$$\begin{pmatrix} a_1 & \lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} & a_2 \end{pmatrix} = J_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} a_1 \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} + T, \tag{76}$$

где компоненты $t_{21} = t_{22} = 0$ в матрице T, а компоненты $t_{11} = a_1\tau_{1,-1} + \tau_{1,-1}a_1$, $t_{12} = \lambda\lambda^{-1}a_1\lambda a_2 + \tau_{1,-1}\lambda^{-1}$ принадлежат $l_{-\infty}(U)$, $U = T'(V)$.

Согласно Предложению 2.10.3 представления (73) и (76) оператора (72) нельзя упростить во всей области $U = T'(V)$, но в некоторых ее частях это сделать можно.

Предложение 2.10.4. *Если a_j удовлетворяют соотношениям (71), то в каждой из областей $T'(V_j)$, $j = 1, 2$, оператор (72) удовлетворяет условиям Леммы 2.9.1. Так в области $U_1 = T'(V_1)$ оператор (72) имеет следующую факторизацию доминантной части*

$$A = J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{77}$$

в которой векторы $b_1 = b_2 = (0, -1)$ удовлетворяют условию (30). Для любой области $W \subset\subset V_1$ оператор (72) принадлежит классу $BEL^0(U')$, где $U' = T'(W)$, и имеет представление

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^{-1}a_1^L & \lambda^{-1}a_1^L\lambda \end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 & \lambda^{-1} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + T', \tag{78}$$

где $a_1^L = \psi(x)a_1^{-1}(x)$, а функция $\psi(x) \in C_0^\infty(V_1)$ такова, что $\psi \equiv 1$ на $W \subset V_1$. Матрица T' имеет компоненты $t'_{11} = t'_{12} = 0$, $t'_{21} = \lambda^{-1}(1-\psi)$ и $t'_{22} = a_2 + \lambda^{-1}a_1^L\tau_{-1,1}\lambda^{-1}$, которые принадлежат $l_{-\infty}(T'(W))$.

Доказательство. Соотношение (77) очевидно; функция $a_2(x)$ согласно (71) тождественно равна нулю на V_1, поэтому оператор $a_2 \in l_{-\infty}(T'(V_1))$. Соотношение (78) легко проверить, перемножив матрицы и прибавив T'. Оператор $\lambda^{-1}a_1^L\lambda$ принадлежит $el_0(T'(W))$ потому, что $\sigma_0(\lambda^{-1}a_1^L\lambda) = a_1^{-1}(x) \neq 0$ при $x \in W$ и любом $\xi \neq 0$. Принадлежность операторов t'_{21} и t'_{22} классу $l_{-\infty}(T'(W))$ очевидна. Предложение доказано.

2.11. Перейдем к изучению свойств операторов из класса $EFL^0(U)$.

Теорема 2.11. *Пусть конические области U_1 и U_2 имеют непустое пересечение и область $U \subset\subset U_1 \cup U_2$. Пусть оператор A^0 принадлежит $EFL^0(U_1)$, а оператор $B^0 \in EFL^0(U_2)$. Тогда их композиция A^0B^0 принадлежит $EFL^0(U)$ и*

$$c(A^0B^0|U) = c(A^0|U) + c(B^0|U). \tag{79}$$

Доказательство этой теоремы простое. Она вытекает из ассоциативности композиции операторов, из формул (7), (10) и из принципа локальности для полного символа композиции. Если A^0 имеет в U_1 представление (20), а B^0 в U_2 представление

$$B^0 = J_{b_s}B_s \dots J_{b_1}B_1 + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U_2), \tag{80}$$

то их композиция A^0B^0 имеет представление

$$A^0B^0 = J_{a_r}A_r \dots J_{a_1}A_1J_{b_s}B_s \dots J_{b_1}B_1 + T_2, \tag{81}$$

где $T_2 \in L^{-\infty}(U)$, для любой $U \subset\subset U_1 \cup U_2$, A_j и B_k принадлежат $EL^0(U)$.

Следовательно, $A^0B^0 \in EFL^0(U)$. Формула (79) получается из (81) и утверждения 2.1.1. Лемма доказана.

2.12. Пусть оператор A принадлежит $L^{(s,t)}(X; E, E)$. В соответствии, с п.1.4 ему сопоставляется оператор $A^0 = J_{-s}AJ_{-t}$ из $L^0(X; E, E)$.

Определение. *Мы скажем, что оператор A принадлежит классу $EFL^{(s,t)}(U)$, если оператор A^0 принадлежит классу $EFL^0(U)$.*

Пусть оператор A^0 имеет представление (20), тогда в силу формул (7) и (10) оператор A имеет представление

$$A = J_{s+a_r}A_r \dots J_{a_1}A_1J_t + T_1, \quad T_1 \in L^{-\infty}(U). \tag{82}$$

Определим число $c(A^{(s,t)}|U)$ равенством

$$c(A^{(s,t)}|U) = \langle s\rangle + \langle t\rangle + c(A^0|U) = \\ = \langle s\rangle + \langle t\rangle + \sum_{j=1}^{r}\langle a_j\rangle. \tag{83}$$

Обозначим

$$EFL(U) = \cup_{(s,t)} EFL^0(s,t)(U). \tag{84}$$

Весовой порядок оператора определяется неоднозначно. Поэтому важна следующая

Теорема 2.12. *Пусть A принадлежит $EFL^{(s,t)}(U) \cap L^{(p,q)}(X;E,E)$ и $(p,q) \neq (s,t)$. Тогда оператор A принадлежит классу $EFL^{(p,q)}(U)$ и*

$$c(A^{(p,q)}|U) = c(A^{(s,t)}|U) \tag{85}$$

Доказательство. Нужно показать, что оператор $B^0 = J_{-p}AJ_{-q}$, принадлежащий по условию классу $L^0(X)$, имеет представление вида (20), если A^0 имеет представление (20) правой частью (82) и заменим A в формуле для B^0. Получим представление

$$B^0 = J_{s-p+a_r}A_r \dots J_{a_1}A_1J_{t-q} + T_2, \quad T_2 \in L^{-\infty}(U), \tag{86}$$

из которого следует, что $A \in EFL^{(p,q)}(U)$ и $c(A^{(p,q)}|U) = \langle p\rangle + \langle q\rangle + c(B^0|U) = \langle p\rangle + \langle q\rangle + \langle s-p\rangle + \langle t-q\rangle + c(A^0|U) = \langle s\rangle + \langle t\rangle + c(A^0|U) = c(A^{(s,t)}|U)$. Теорема доказана.

2.13. Рассмотрим зависимость от выбора весовых порядков для эллиптических операторов.

Теорема 2.13.1. *Если оператор A принадлежит классу $EL^{(s,t)}(U) \cup L^{(p,q)}(X)$ и $(p,q) \neq (s,t)$, то он принадлежит классу $EFL^{(p,q)}(U)$ и*

$$\langle s\rangle + \langle t\rangle \leq \langle p\rangle + \langle q\rangle. \tag{87}$$

Теорема 2.13.2. *Если оператор A удовлетворяет условиям Теоремы 2.13.1 и $\langle s\rangle + \langle t\rangle = \langle p\rangle + \langle q\rangle$, то оператор A принадлежит $EL^{(p,q)}(U)$ и, кроме того,*

$$\det \sigma_{(p,q)}(A) = \det \sigma_{(s,t)}(A) \text{ в } U, \tag{88}$$

а векторы p, q и s, t связаны соотношениями

$$p = s - r - \bar{n}, q = t + \Pi r + \bar{n}, \tag{89}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}^l_+$, а Π — матрица перестановки.

Теорема 2.13.3. *Если оператор A удовлетворяет условиям Теоремы 2.13.1 и $\langle s\rangle + \langle t\rangle < \langle p\rangle + \langle q\rangle$, то A принадлежит $EFL^{(p,q)}(U)$ и*

$$\det \sigma_{(p,q)}(A) \equiv 0 \text{ в } U. \tag{90}$$

Доказательство Теоремы 2.13.1. Ее первое утверждение — следствие предыдущей Теоремы 2.12. Докажем соотношение (87). По предположению оператор A имеет представление (10) с $A^0 \in EL^0(U)$. Следовательно, представление (86) такого оператора B^0 имеет вид

$$B^0 = J_{s-p}A^0J_{t-q} + T_1, \quad A^0 \in EL^0(U), T_1 \in L^{-\infty}(U). \tag{91}$$

Согласно Лемме 2.5, найдется целое число n такое, что векторы $s-p-\bar{n}$ и $t-q+\bar{n}$ удовлетворяют включениям (30) или (31), и представление (91) можно преобразовать в представление

$$B^0 = J_{s-p-\bar{n}}{}^n\tilde{A}^0J_{t-q+\bar{n}} + T_2, \quad {}^n\tilde{A}^0 \in EL^0(U), T_2 \in L^{-\infty}(U). \tag{92}$$

Если эти векторы удовлетворяют включениям (30), т.е.

$$s-p-\bar{n} \in \mathbb{Z}^l_- \text{ и } t-q+\bar{n} \in \mathbb{Z}^l_-, \tag{93}$$

то очевидно, что

$$\langle s-p-\bar{n}\rangle + \langle t-q+\bar{n}\rangle = \langle s\rangle + \langle t\rangle - \langle p\rangle - \langle q\rangle \le 0. \tag{94}$$

Мы получили соотношение (87). Если же эти векторы удовлетворяют условию (31), т.е.

$$s-p-\bar{n} \in \mathbb{Z}^l_+, \text{ а } t-q+\bar{n} \in \mathbb{Z}^l_-, \tag{95}$$

то оператор (92) удовлетворяет условиям Леммы 2.6.1, из которой, учитывая первое из соотношений (равенство) в (94), снова получаем неравенство (87). Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 2.13.2. Повторяя предыдущее рассуждение, получаем представление (92). Если в нем векторы $s-p-\bar{n}$ и $t-q+\bar{n}$ удовлетворяют условию (93) и по предположению теоремы в (94) справа имеем равенство нулю, то очевидно, что

$$s-p-\bar{n} = 0 \text{ и } t-q+\bar{n} = 0 \text{ и } \sigma_0(B^0) = \sigma_0(\tilde{A}^0) = \sigma_0(A^0) \text{ в } U$$

согласно формуле (3.3). Откуда вытекает формула (89) с $r = 0$, и формула (88), если вспомнить формулу (12) и условие $\langle s\rangle +$

$\langle t\rangle = \langle p\rangle + \langle q\rangle$. Если же эти векторы удовлетворяют соотношению (95), то к представлению (92) применима Лемма 2.6.2. Из нее получаем, что

$$\det \sigma_0(B^0) = \det \sigma_0({}^n\tilde{A}^0) = \det \sigma_0(A^0) \text{ в } U. \tag{96}$$

Это равенство в силу (12) и равенства в (87) эквивалентно соотношению (88). Согласно Лемме 2.6.2 существует матрица перестановки Π такая, что $s-p-\bar{n} = \Pi^{-1}(q-t-\bar{n})$. Обозначая этот вектор через r, получим соотношение (89). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.13.3. Так же как при доказательстве предыдущих теорем, получаем представление (92), где векторы $s-p-\bar{n}$ и $t-q+\bar{n}$ удовлетворяют либо условию (93), либо условию (95). При вычислении определителя $\sigma_{(p,q)}(A)$, используя формулу вида (12) с B^0 вместо A^0 и (p,q) вместо (s,t), получаем

$$\det \sigma_{(p,q)}(A) = |\xi|^{\langle p\rangle + \langle q\rangle} \det \sigma_0(B^0). \tag{97}$$

Но определитель $\sigma_0(B^0)$ в каждом из этих случаев тождественно равен нулю в U. Действительно, в случае (93) из строгого неравенства в (94) вытекает, что по крайней мере один из векторов $s-p-\bar{n}$ и $t-q+\bar{n}$ отличен от нуля. Так как, к тому же, они принадлежат $\mathbb{Z}^l_-$, то их ненулевые компоненты отрицательны. Если $s-p-\bar{n} \neq 0$, то матрица $\sigma_0(J_{s-p-\bar{n}})$ имеет нулевую строку и так как

$$\sigma_0(B^0) = \sigma_0(J_{s-p-\bar{n}})\sigma_0(A^0) \cdot \sigma_0(J_{t-q+\bar{n}}) \tag{98}$$

то определитель $\sigma_0(B^0)$ равен нулю в U.

В случае (95) $\det \sigma_0(B^0) \equiv 0$ в U согласно Лемме 2.6.5. Теорема доказана.

Отметим еще, что из Леммы 2.6.3 вытекает

Предложение 2.13.4. *Если векторы $s-p-\bar{n}$ и $q-t-\bar{n}$ в представлении (92) принадлежат $\mathbb{Z}^l_+$ а их компоненты упорядочены по возрастанию, то вектор $s+t-p-q$ принадлежит $\mathbb{Z}^l_-$.*

2.14. Операторы из $EFL(U)$ имеют параметриксы, которые принадлежат классу $EFL(U_1)$ для любой конической области $U_1 \subset\subset U$. Покажем это для операторов A^0 из $EFL^0(U)$. Обозначим через P_j параметриксы операторов A_j из $EL^0(U)$, которые существуют согласно Предложению 1.2 и принадлежит классу

$EL^0(U_1)$. Диагональные операторы J_{a_j} имеют параметриксы J_{-a_j} по формуле (8).

Из определения класса $EFL^0(U)$ вытекает следующая

Лемма 2.14.1. *Если оператор A^0 принадлежит $EFL^0(U)$ и имеет представление (20), то A^0 имеет параметрикс P (левый и правый одновременно, $P = (A^0)^L = (A^0)^R$), который имеет вид*

$$P = P_1 J_{-a_1} \dots P_r J_{-a_r}. \tag{99}$$

Оператор P принадлежит классу $EFL^0(U_1)$ и

$$c(P|U_1) = -c(A^0|U_1), \quad U_1 \subset\subset U. \tag{100}$$

Действительно, применяя последовательно операторы из произведения (99) (слева или справа) и используя формулы (8), (2) и (11), получим, что

$$PA^0 = I + T_1, \quad A^0 P = I + T_2,\ T_j \in L^{-\infty}(U_1). \tag{101}$$

Принадлежность оператора P классу $EFL(U_1)$ и формула (100) вытекает из формулы (99) и Утверждения 2.1.1. Лемма доказана.

Что касается порядка оператора в $\bar{U}_1$, то имеет место

Утверждение 2.14.2. *Порядок в области $\bar{U}_1$ оператора P, параметрикса оператора A^0 из $EFL^0(U)$, удовлетворяет неравенствам*

$$\operatorname{ord} A^0 = 0 \le \operatorname{ord} P\big|_{\bar{U}_1} \le -c(A^0|U), \ \text{где } U_1 \subset\subset U. \tag{102}$$

Мы дадим полное доказательство этого утверждения в работе [12]. Сейчас отметим лишь случаи, когда в неравенстве (102) легко убедиться из формулы (99) для параметрикса и полученных ранее результатов. Напомним, что если $A^0 \in EL^0(U)$, то согласно Предложению 1.2 его параметрикс P принадлежит $EL^0(U_1)$ и, следовательно, порядок P в $\bar{U}_1$, равен нулю.

Если оператор S^0 принадлежит классу $BEL^0(U) \backslash EL^0(U)$ и имеет представление (25), то его параметрикс P_{S^0} имеет вид

$$P_{S^0} = B_1 J_a B_2, \text{ где } B_j = A_j^L \in EL^0(\bar{U}_1),\ a \in \mathbb{Z}_+^l. \tag{103}$$

Откуда видно, что его порядок в U_1 равен максимальной из компонент вектора $a \neq 0$, т.е.,

$$0 < \operatorname{ord} P_{S^0}\big|_{\bar{U}_1} = M(a) \le -c(A^0|U) = \langle a \rangle. \tag{104}$$

Если оператор B из $EFL^0(U)$ имеет представление (41) с $a \neq 0$, то его параметрикс P_B имеет вид

$$P_B = J_b A^l J_{-a}, \quad a, b \in \mathbb{Z}^l_+,\ A^L \in EL^0(U_1). \tag{105}$$

Если при этом компоненты векторов a и b упорядочены по возрастанию, то согласно Лемме 2.6.3 вектор $b-a \in \mathbb{Z}^l_+$, т.е. $0 \leq \beta_j - \alpha_j$, $j = 1, \dots, l$. Учитывая эллиптичность оператора A^L в U_1 в представлении (105), нетрудно видеть, что

$$0 < \operatorname{ord} P_B\big|_{\bar{U}_1} = M(b-a) \leq -c(B|U). \tag{106}$$

Наконец, если оператор A^0 имеет представление (20), в котором все векторы a_j принадлежат $\mathbb{Z}^l_-$, $a_j \neq 0$, $j = 1, \dots, l$, то его параметрикс (99) имеет в $\bar{U}_1$ порядок, удовлетворяющий неравенства

$$0 < \operatorname{ord} P\big|_{\bar{U}_1} \leq \sum_{j=1}^{r} M(-a_j) \leq -c(A^0|U). \tag{107}$$

2.15. Покажем, что Утверждение 2.1.1 вытекает из Утверждения 2.1.2. Действительно, если оператор A^0 имеет два представления (20) и (21), то, исключая из них A^0, получим равенство

$$J_{a_r} A_r \dots J_{a_1} A_1 + T = B_p J_{b_p} \dots B_1 J_{b_1} + T_1.$$

Применяя к этом равенству параметрикс (99), получим

$$I = P_1 J_{-a_1} \dots P_r J_{-a_r} B_p J_{b_p} \dots B_1 J_{b_1} + T_2,\ T_2 \in L^{-\infty}(U_1). \tag{108}$$

Порядок матрицы $I - T_2$ в U_1 равен нулю, поэтому согласно Утверждению 2.1.2 число $\beta - \alpha \leq 0$, где

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \langle a_j \rangle, \quad \beta = \sum_{k=1}^{p} \langle b_k \rangle.$$

Если же ту же самую процедуру повторить, применяя параметрикс правой части равенства (108), то получим другое представление единичной матрицы в U_1. Теперь из Утверждения 2.1.2 имеем, что $\alpha - \beta \leq 0$. Следовательно, $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

Отметим еще, что в противном случае, т.е., если бы $\gamma = \alpha - \beta$ не равнялось нулю, то единичной матрице в окрестности каждой точки из U соответствовало бы неограниченное множество чисел:

$0,\ \pm\gamma,\ \pm\gamma^2,\ \ldots,$ задаваемых разложениями вида (108), что не возможно.

2.16. Из Теорем 2.11, 2.12 и Леммы 2.14.1 вытекает, что классу $EFL(U_1)$ принадлежит композиция конечного числа операторов из классов $EL^{(s,t)}(U)$ и $BEL^m(U)$ различных порядков, а также их параметриксов; $U_1 \subset\subset U$.

Пример оператора (72) в предположении (71) показывает, что класс $EFL(U)$ не сводится к таким композициям (в разложении (73) этого оператора присутствует нетривиальное слагаемое (74) — оператор T из $L^{-\infty}(U)$).

С другой стороны, с помощью классов $EL^{(s,t)}(U)$ можно определить класс $EFL(U)$, не используя диагональные операторы.

Определение. *Оператор A из $L(X;E,E)$ допускает в области U эллиптическую факторизацию доминантной части, если существует векторы b_j и c_j, операторы S_j, принадлежащие $EL^{(b_j,c_j)}(U)$, $j=1,\ldots,r$, и $T\in L^{-\infty}(U)$ такие, что*

$$A = C_r \ldots C_1 + T. \tag{109}$$

При этом, оператору A сопоставляется число

$$c'(A|U) = \sum_{j=1}^{r} \langle b_j\rangle + \langle c_j\rangle.$$

Используя соотношения (7)-(10) и Теорему 2.12 легко убедиться, что это определение эквивалентно Определению п.2.12 и п.2.1 в случае, когда $A\in L^0(X)$, а именно, из представления (109) легко получить представление (82) и обратно (причем, неоднозначно). Кроме того, из Утверждения 2.1.1 вытекает, что числа $c(A|U)$ и $c'(A|U)$ совпадают. Из этой эквивалентности вытекает следующее.

Предложение 2.16. *Принадлежность заданного оператора A классу $EFL^{(s,t)}(U)$ не зависит от выбора оператора λ из $el_1(X)$ и его параметрикса $\lambda_{(-1)}$ из $el_{-1}(X)$ в диагональных операторах $(J_s, J_t, \ldots)$.*

Впрочем, это утверждение легко доказать и непосредственно.

2.17. При замене базисов в пространствах E и F (здесь мы временно предположим, что $E \neq F$, но будем считать, что $\dim E = \dim F$) матричное представление оператора A из $L(X;E,F)$, как известно, умножаются слева и справа на невырожденные матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ при всех $x \in V$, где V — любая координатная окрестность на X $(Q(x) = P^{-1}(X)$, если $E = F)$. Такие операторы, как операторы умножения на $P(x)$ и $Q(X)$ принадлежат классу $EL^0(T'(V))$. Поэтому, если матричный оператор A принадлежит классу $EFL^0(U)$ и имеет представление (20) в области U из $T'(V)$ в базисах $\{e_j\}$ и $\{f_k\}$, то оператор A' в базисах $\{e'_i\}$ и $\{f'_j\}$ имеет вид

$$A' = P(x)AQ(x) = P(x)J_{a_r}A_r \dots J_{a_1}A_1Q(x) + T_1, \tag{110}$$

где $T_1 = P(x)TQ(x)$ принадлежит $L^{-\infty}(U)$.

Отсюда вытекает

Предложение 2.17. *Класс $EFL^0(U)$ инвариантен относительно выбора базисов в E (и в F, если $E \neq F$).*

§3. Класс $GEL(X)$ обобщенно эллиптических ПДО

3.1. Пусть многообразие X связно и $n > 1$, тогда множество $T'(X)$ также связно.

Определение. *Оператор A^0 из $L^0(X; E, E)$ называется обобщенно эллиптическим на X, если для любой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q такая, что A^0 принадлежит классу $EFL^0(U_q)$. Множество таких операторов обозначим через $GEL^0(X)$.*

Очевидно, что $EL^0(X) \subset GEL^0(X)$. Через $WEL^0(X)$ обозначим множество $GEL^0(X) \backslash EL^0(X)$. Операторы из этого класса будем называть слабо эллиптическими на X. Классу $GEL^0(X)$ принадлежат так же равномерно не эллиптические операторы [3] из $L^0(X)$. Класс таких операторов обозначим $WG{\cdot}EL^0(X)$. В терминах п.2.2 этот класс определяется так. Оператор S принадлежит классу $WG{\cdot}EL^0(X)$, если для любой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q такая, что S принадлежит классу $BEL^0(U_q)$. Так как $BEL^0(U_q) \subset EFL^0(U_q)$, то

$$WG \cdot EL^0(X) \subset GEL^0(X). \tag{111}$$

Оператору A^0 из $GEL^0(X)$ сопоставляется целое число $c(A^0)$. Определим его. В каждой окрестности U_q, где $A^0 \in EFL^0(U_q)$ оператору приписывается число $c(A^0|U_q)$, равное сумме (23). Если две окрестности U_1 и U_2 точек q_1 и q_2 из $T'(X)$ пересекаются, то в пересечении $U_1 \cap U_2$ оператор A^0 имеет два представления вида (20) и (21) и два числа c_1 и c_2. Согласно Утверждению 2.1.1 эти числа совпадают ($c_1 = c_2$). Многообразие $T'(X)$ связно, поэтому число c определяется однозначно на всем $T'(X)$. Утверждение 2.1.2 показывает, что число $c(A^0)$ неположительно для любого оператора A^0 из $GEL^0(X)$, т.е.

$$c(A^0) \leq \operatorname{ord} A^0 = 0.$$

Если оператор A^0 принадлежит $EL^0(X)$, то число $c(A^0) = 0$. Имеет место и обратное

Утверждение 3.1.1. *Если оператор $A^0 \in GEL^0(X)$ и число $c(A^0)$ равно нулю, то A^0 принадлежит классу $EL^0(X)$.*

В случаях, когда в окрестности каждой точки q из $T'(X)$ оператор A^0 имеет представление (20), удовлетворяющее условиям Леммы 2.9.2, это утверждение доказано (ввиду формулы (67) оно вытекает из эллиптичности операторов A_j в U_q). В общем случае, мы его докажем в работе [12].

Отметим еще, что если оператор $A \in WG \cdot EL^0(X)$ и имеет локальное представление (25), где компоненты вектора a упорядочены по возрастанию, тогда из Предложения 2.2.1 вытекает, что вектор $a \in \mathbb{Z}^l_+$ определен однозначно на всем $T'(X)$.

3.2. Пусть оператор A принадлежит $L^{(s,t)}(X; E, E)$. Мы скажем, что оператор A принадлежит классу $GEL^{(s,t)}(X)$, если соответствующий ему оператор $A^0 = J_{-s} A J_{-t}$ принадлежит классу $GEL^0(X)$. Так же как при определении $c(A^{(s,t)}|U)$ положим

$$c(A^{(s,t)}) = \langle s \rangle + \langle t \rangle + c(A^0). \tag{112}$$

Очевидно, что $EL^{(s,t)}(X) \subset GEL^{(s,t)}(X)$. Если оператор $A \in EL^{(s,t)}(X)$, то $c(A^{(s,t)} = \langle s \rangle + \langle t \rangle$. Из Утверждения 3.1.1 вытекает следующее

Утверждение 3.2.1. *Если оператор A принадлежит $GEL^{(s,t)}(X)$ и $c(A^{(s,t)}) = \langle s \rangle + \langle t \rangle$, то он принадлежит классу $EL^{(s,t)}(X)$.*

Следовательно, если оператор A принадлежит классу

$$WEL^{(s,t)}(X) = GEL^{(s,t)}(X) \backslash EL^{(s,t)}(X),$$

то число $c(A^{(s,t)}) < \langle s \rangle + \langle t \rangle$.

Обозначим

$$GEL(X) = \cup_{(s,t)} GEL^{(s,t)}(X).$$

Обобщенная эллиптичность не зависит от произвола, который имеется при выборе весового порядка, так как имеет место

Теорема 3.2.2. *Пусть оператор* $A \in GEL^{(s,t)}(X) \cap L^{(p,q)}(X; E, E)$ *и* $(p,q) \neq (s,t)$. *Тогда* A *принадлежит классу* $GEL^{(p,q)}(X)$ *и*

$$c(A^{(s,t)}) = c(A^{(p,q)}). \tag{113}$$

Действительно, если оператор A принадлежит $GEL^{(s,t)}(X) \cap L^{(p,q)}(X; E, E)$ и точка $q \in T'(X)$, то существует окрестность U_q, в которой A принадлежит $EFL^{(s,t)}(U_q) \cup L^{(p,q)}(X; E, E)$ и имеет представление вида (82). Согласно Теореме 2.12 оператор A принадлежит классу $EFL^{(p,q)}(U_q)$ и имеет место равенство (85). Учитывая произвольность q из $T'(X)$ и связность $T'(X)$ получаем принадлежность A классу $GEL^{(p,q)}(X)$ и равенство (113).

Замечание. Равенство (113) показывает, что весовой порядок (s,t) в обозначении $c(A^{(s,t)})$ можно опустить; и далее мы будем писать $c(A)$ вместо $c(A^{(s,t)})$. Здесь уместно отметить так же, что в представлении (82) операторы J_s и J_t заданы глобально, тогда как матрицы A_j, векторы a_j и их число r могут быть различными в различных окрестностях одной и той же точки q (см. представления (73), (76) и (77), (78) оператора (72) в предположении (71) или (71′) при U совпадающем с $T'(X)$; представления (73) и (76) глобальные $U = T'(X)$, а представления (77), (78) — локальные (в той области U_1, где $a_2 \in l_{-\infty}(U_1)$).

3.3. Предположим, что оператор $A \in EL^{(s,t)}(X)$, он имеет тогда глобальное представление (10) с оператором A^0 из $EL^0(U)$ при $U = T'(X)$. В таком случае, применимы Теоремы 2.13.1-2.13.3 и класс $EFL^{(p,q)}(U)$ совпадает с классом $GEL^{(p,q)}(X)$. Ради полноты запишем их точную формулировку.

Теорема 3.3.1. *Если оператор* $A \in EL^{(s,t)}(X) \cap L^{(p,q)}(X; E, E)$ *и* $(p,q) \neq (s,t)$, *то* A *принадлежит классу* $GEL^{(p,q)}(X)$ *и*

$$\langle s \rangle + \langle t \rangle \leq \langle p \rangle + \langle q \rangle. \tag{114}$$

Теорема 3.3.2. *Если оператор A удовлетворяет условиям Теоремы 3.3.1 и в* (114) *имеет место равенство, то оператор A принадлежит $EL^{(p,q)}(X)$ и, кроме того, в любой конической области U из $T'(X)$*

$$\det \sigma_{(p,q)}(A) = \det \sigma_{(s,t)}(A) \quad \forall U \subset T'(X), \tag{115}$$

а векторы p, q и s, t связаны соотношениями

$$p = s - r - \bar{n}, q = t + \Pi r + \bar{n}, n \in \mathbb{Z}, r \in Z^l_+, \tag{116}$$

где Π — матрица перестановки.

Теорема 3.3.3. *Если оператор A удовлетворяет условиям Теоремы 3.3.1 и в* (114) *имеет место строгое неравенство, то A принадлежит классу $WEL^{(p,q)}(X)$ и*

$$\det \sigma_{(p,q)}(A) \equiv 0 \text{ всюду на } T'(X). \tag{117}$$

Эти теоремы показывают, что класс $GEL(X)$ является естественным расширением класса $EL(X)$. При неточном выборе порядков можно потерять эллиптичность, но обобщенная эллиптичность сохраняется, так как согласно Теореме 3.3.3, оператор становится тогда слабо эллиптическим. Из Теоремы 3.3.2 видно, при каких порядках эллиптичность может сохраниться.

3.4. Перейдем к вопросу о композиции операторов из класса $GEL(X)$. Имеет место

Теорема 3.4. *Пусть операторы A и B принадлежат $GEL(X)$. Тогда их композиция AB также принадлежит классу $GEL(X)$ и*

$$c(AB) = c(A) + c(B). \tag{118}$$

Доказательство. Операторы A и B принадлежат $GEL(X)$, выберем для них какие-либо весовые порядки. Если m и k суть истинные порядки A и B, то здесь удобно положить $w - \operatorname{ord} A = (\bar{m}, \bar{0})$ и $w - \operatorname{ord} B = (\bar{0}, \bar{k})$. Тогда для A, B и AB имеем представления

$$A = J_{\bar{m}} A^0 + T_1, \;\; B = B^0 J_{\bar{k}} + T_2, \; A^0, B^0 \in GEL^0(X), \tag{119}$$

$$AB = J_{\bar{m}} A^0 B^0 J_{\bar{k}} + T_3, \;\; T_j \in L^{-\infty}(X). \tag{120}$$

По определению, для каждой точки q из $T'(X)$ существуют окрестности U'_q и U''_q такие, что A^0 и B^0 принадлежат классам $EFL^0(U'_q)$ и $EFL^0(U''_q)$, соответственно. Согласно Теореме 2.11

их композиция A^0B^0 принадлежит $EFL^0(U_q)$ для любой $U_q \subset\subset U'_q \cap U''_q$ и, кроме того,

$$c(A^0B^0|U_q) = c(A^0|U_q) + c(B^0|U_q). \tag{121}$$

Ввиду произвольности точки q на $T'(X)$ и формулы (120) композиция AB принадлежит классу $GEL^{(\bar{m},\bar{k})}(X) \subset GEL(X)$. Первое утверждение теоремы доказано.

В силу Теоремы 3.2.2 и представления (120) для AB равенство (118) вытекает из равенства (121). Действительно, $c(AB) = c(AB^{(\bar{m},\bar{k})}) = \langle\bar{m}\rangle + \langle\bar{k}\rangle + c((AB)^0) = \langle\bar{m}\rangle + \langle\bar{k}\rangle + c(A^0B^0|U_q) = \langle\bar{m}\rangle + \langle\bar{k}\rangle + c(A^0|U_q) + c(B^0|U_q) = c(A^m) + c(B^k) = c(A) + c(B)$. Теорема доказана.

3.5. Из этой теоремы вытекает, что композиция конечного числа операторов из $GEL(X)$ и $WG \cdot EL(X)$ различных порядков принадлежит классу $GEL(X)$. Покажем, что последний класс шире двух предыдущих. Рассмотрим оператор (72) и для наглядности предположим, что X это двумерная сфера S, на которой заданы ненулевые функции класса $C^\infty(S)$ и такие, что их носители не имеют внутренних точек пересечения, т.е.,

$$a_1(x) \cdot a_2(x) \equiv 0 \ \text{ всюду на } S. \tag{122}$$

Например, параллелями и меридианами сфера разбита на ряд клеток, где поочередно a_1, a_2 не равны нулю (если число клеток нечетно, то в одной из них можно положить $a_1 = a_2 = 0$).

Предложение 3.5. *Пусть элементы $a_j(x)$ оператора (72) удовлетворяют условию (122). Тогда он принадлежит классу $GEL^0(S)$ и не принадлежит ни классу $WG \cdot EL^0(S)$, ни классу $DN \cdot EL(S)$.*

Доказательство. При условии (122) оператор $a_1\lambda a_2$ принадлежит $l_{-\infty}(S)$, поэтому оператор (72) имеет глобальное представление (73) и значит принадлежит классу $GEL^0(S)$. Матрица

$$\sigma_0(A) = \begin{pmatrix} a_1(x) & 0 \\ 0 & a_2(x) \end{pmatrix} \tag{123}$$

имеет переменный ранг (в точках x_0, лежащих на границе двух или более клеток, где $a_1(x_0) = a_2(x_0) = 0$, он равен нулю; в сколь угодно близких точках $x^{(j)}$, где $a_j(x^{(j)}) \neq 0$ при $j = 1$ или 2, он равен единице). Поэтому оператор (72) не принадлежит классу

$WG \cdot EL^0(S)$, в котором первое из условий — это требование постоянства ранга матрицы $\sigma_0(A)$ на $T'(S)$. Из формулы (77) видно, что оператор (72) принадлежит классу $EL^{(s,s)}(K')$ при $s = (0, -1)$ внутри каждой из клеток K' на S, где $a_1 \neq 0$, но $a_2 \equiv 0$. Аналогично, он принадлежит классу $EL^{(t,t)}(K'')$ при $t = (-1, 0)$ в клетках K'', где $a_1 \equiv 0$, но $a_2 \neq 0$. Согласовать такие порядки не возможно, поэтому оператор (72) при условии (122) не принадлежит классу $DN \cdot EL(S)$. Предложение доказано.

Замечание. Приведенный пример показывает также, что класс $GEL(X)$ не сводится к композициям операторов из классов $EL(X)$ и $WG \cdot EL(X)$ различных порядков.

3.6. Пусть оператор A принадлежит классу $GEL(X)$. Из определения этого класса и Леммы 2.14.1 вытекает, что для каждой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q и оператор P_q из $EFL(U_q)$, которой является локальным параметриксом оператора A, он удовлетворяет соотношениям $P_q = A_q^L = A_q^R$ и

$$A_q^L A = I + T_1, \quad AA_q^R = I + T_2, \quad T_j \in L^{-\infty}(U_q). \tag{124}$$

Из локальных параметриксов P_q можно "склеить" глобальный параметрикс P, для которого

$$PA = I + T', \quad T' \in L^{-\infty}(X), \tag{125}$$

$$AP = I + T'', \quad T'' \in L^{-\infty}(X). \tag{126}$$

Теорема 3.6.1. *Любой оператор A из класса $GEL(X)$ имеет глобальный параметрикс P. Оператор P принадлежит классу $GEL(X)$ и*

$$c(P) = -c(A). \tag{127}$$

Доказательство. Построим сначала правый параметрикс $P = A^R$, удовлетворяющий соотношению (126). Для этого, как известно [4], достаточно определить его полный символ $\sigma(A^R) \equiv K(x, \xi)$ — матрицу на $T'(X)$. Сделаем это локально отдельно для каждой конической окрестности U_q точки $q = (x_0, \xi_0)$ из $T'(X)$. Пусть в окрестности $x_0 \in X$ каким-либо способом выбрана система координат и пусть $P_q = A_q^R$ правый локальный параметрикс, удовлетворяющий второму из соотношений в (124). Прежде всего покажем, что полный символ $\sigma(A_q^R)$ определяется в U_q однозначно. Действительно, пусть у A имеются в U_q два локальных правых параметрикса P_1 и P_2. Тогда из соотношений (124_2) для $P_j = A_j^R$ имеем

$$A(P_2 - P_1) = T_2'' - T_2', \quad T_2' \text{ и } T_2'' \in L^{-\infty}(U_q). \tag{128}$$

Докажем, что $\sigma(P_1) = \sigma(P_2)$ в U_q. От противного, предположим, что существует точка

$$q_1 \in U_q \colon \sigma(P_1)\big|_{q_1} \neq \sigma(P_2)\big|_{q_1}. \tag{129}$$

Воспользуемся тем, что оператор A имеет левый локальный параметрикс $A_{q_1}^L$ удовлетворяющий первому из соотношений в (124), в конической окрестности $U_{q_1}' \subset\subset U_q$. Применяя $A_{q_1}^L$ к равенству (128), получим

$$P_2 - P_1 = T_3, \text{ где } T_3 = A_{q_1}^L(T_2'' - T_2') - T_1(P_2 - P_1) \in L^{-\infty}(U_{q_1}'), \tag{130}$$

потому, что $T_1 \in L^{-\infty}(U_{q_1}')$. Следовательно, полный символ $\sigma(T_3)$ равен нулю в U_{q_1}' и из первого равенства в (130) имеем $\sigma(P_2) = \sigma(P_1)$ в U_{q_1}' и, в частности, в точке q_1, что противоречит предположению (129). Итак,

$$\sigma(P_1) = \sigma(P_2) \text{ в } U_q. \tag{131}$$

Многообразие X компактно; тогда множество $S^*(X)$, — расслоение единичных сфер над X, также компактно. Следовательно, из покрытия $S^*(X)$ окрестностями $\dot{U}_q$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{\dot{U}_j\}$, $j = 1, \ldots, N$. При этом, конические окрестности U_j, $j = 1, \ldots, N$, образуют конечное покрытие множества $T'(X) = T^*(X)\backslash\{0\}$. Здесь мы воспользовались соответствием $(x, \xi) \in U \Leftrightarrow (x, \dot{\xi}) \in \dot{U}$, где $\dot{\xi} = \xi/|\xi|$, предполагая, что на X задана риманова метрика, определяющая $|\xi|_x$ в точках x. В каждом из U_j оператор A имеет локальный параметрикс P_j, удовлетворяющий в U_j, соотношениям (124). Если какие-либо две области U_i и U_j имеют непустое пересечение, то в $U_i \cap U_j$ как P_i, так и P_j являются правыми локальными параметриксами A. Тогда в силу уже доказанной в (131) однозначности полного символа, $\sigma(P_i)$ и $\sigma(P_j)$ совпадают в $U_i \cap U_j$, т.е. если в этом пересечении выбрать какую-либо систему координат (скажем, ту что была в U_i или в

U_j) и оба полных символа записать в этих координатах, то формальные ряды в каждом из элементов матриц $\sigma(P_i)$ и $\sigma(P_j)$ будут одинаковы. Тем самым, ограничения $\sigma(P_i)$ на U_j определяют сечение K в расслоении, которому принадлежат полные символы операторов. По этому сечению K можно построить оператор P, полный символ которого совпадает с K (см. [4]):

$$K = \sigma(P) = \{\sigma(P_j) \,\text{в}\, U_j\},\, j = 1, \ldots, N. \tag{132}$$

Матрица P является для A правым глобальным параметриксом; она удовлетворяет соотношению (126). Действительно, из определения правого локального параметрикса, формулы (132) и принципа локальности (утверждающего, что для определения в точке q из $T'(X)$ полного символа произведения двух операторов достаточно знать полные символы сомножителей только в некоторой окрестности точки q) вытекает, что полный символ $AP - I$ равен нулю на $T'(X)$:

$$\sigma(AP - I) = 0 \quad \forall (x, \xi) \in T'(X), \tag{133}$$

а это и означает, что $AP - I$ равен T, где $T \in L^{-\infty}(X)$, что и требовалось доказать. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что построенный для A правый параметрикс является также и левым, т.е. он удовлетворяет соотношению (125). Рассмотрим произведение APA. Из ассоциативности и соотношения (126) для P имеем

$$APA = (AP)A = A + T''A = A + T_3, \quad T_3 \in L^{-\infty}(X).$$

Снова используя ассоциативность произведения, получаем равенство

$$A(PA - I) = T_3, \quad T_3 \in L^{-\infty}(X). \tag{134}$$

Применим к этому равенству левый локальный параметрикс $P_j = A_j^L$, удовлетворяющий соотношению

$$P_j A - I = T_i, \ \text{где}\ T_j \in L^{-\infty}(U_j).$$

Получаем, что

$$PA - I = T_j', \ \text{где}\ T_j' = P_j T_3 - T_j(PA - I) \in L^{-\infty}(U_j).$$

Полагая $j = 1, \ldots, N$, и учитывая, что области U_j образуют покрытие $T'(X)$ получаем, что полный символ оператора $PA - I$

равен нулю всюду на $T'(X)$, т.е. получаем соотношение (125). Теорема доказана.

Что касается порядка оператора P, то из Утверждения 2.14.2 вытекает следующее

Утверждение 3.6.2. *Порядок параметрикса P_A оператора A из $GEL(X)$ удовлетворяет неравенству*

$$-\operatorname{ord} A \leq \operatorname{ord} P_A \leq -\operatorname{ord} A - c(A^0), \tag{135}$$

где $\operatorname{ord} A \equiv m$ *— истинный порядок оператора A, а $A^0 = J_{-\bar{m}}A$.*

Напомним, что согласно Утверждению 1.1.2 число $c(A^0) \leq 0$. Число m есть истинный порядок оператора A всюду на X, если $A \in L^m(X)$ и $\sigma_m(A) \neq 0$ хотя бы в одной точке из $T'(X)$.

3.7. Из Предложения 2.17 вытекает следующая

Теорема 3.7.1. *Класс $GEL^0(X)$ инвариантен относительно выбора базисов в E (и в F, если $E \neq F$, но $\dim E_x = \dim F_x$).*

Отметим, что если оператор $A \in EL^{(s,t)}(X)$ в базисе $\{e_j\}$, то он может не быть эллиптическим в базисе $\{e'_j\}$ при любом выборе весовых порядков (p,q). В этом легко убедиться на примере. Учитывая формулы (10) для A и (110) для A', имеем

$$A' = P(X)J_sA^0J_tQ(X) + T_1, T_1 \in L^{-\infty}(X). \tag{136}$$

Откуда видно, что оператор A' принадлежит $EL^{(p,q)}(X)$ если и только если композиция $J_{-p}PJ_sA^0J_tQJ_{-q}$ принадлежит $EL^0(X)$, что возможно далеко не всегда.

В любом случае, полагая $p = \bar{m}$, $q = \bar{0}$, где $m = \operatorname{ord} A$, получаем, что оператор (136) принадлежит классу $GEL^m(X)$. Аналогично, из локальной формулы вида (82) для оператора A из $GEL^{(s,t)}(X)$ в базисе $\{e_j\}$ и соответствующей формулы вида (110) для оператора A' в базисе $\{e'_j\}$ вытекает

Теорема 3.7.2. *Если оператор A принадлежит $GEL^{(s,t)}(X)$ в базисе $\{e_j\}$, то при выборе любого другого базиса $\{e'_j\}$ оператор A' может не принадлежать классу $GEL^{(s,t)}(X)$, но всегда принадлежит классу $GEL^m(X)$, где $m = \operatorname{ord} A$.*

§4. Класс $REL(U)$ операторов, приводимых к локально эллиптическим ПДО

В этом параграфе изучается класс операторов из $L^{(s,t)}(X; E, E)$, приводимых посредством композиции с операторами из класса $EL^{(a,-b)}(U)$ с a и $b \in \mathbb{Z}^l_+$ к оператору из $EL^{(s,t)}(U)$; здесь $U = U_q$ — окрестность фиксированной точки q из $T'(X)$. Эти преобразования позволяют определить принадлежность заданного оператора A классу $EFL^{(s,t)}(U)$, а затем и классу $GEL^{(s,t)}(X)$.

4.1. Начнем с преобразований оператора A из $L^0(X; E, E)$. Они проводятся посредством применения слева к A оператора вида

$$C = J_a C^0 J_{-b}, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}^l_+, C^0 \in EL^0(U), \tag{137}$$

т.е. эллиптического в U оператора C весового порядка $(a, -b)$.

Мы скажем, что оператор A допускает C-преобразование (слева) в конической области U, если композиция CA принадлежит классу $L^0(U)$ и, следовательно, при переходе от A к $CA(\equiv A_1)$ мы не выходим из класса $L^0(U)$.

Определение. *Оператор A из $L^0(X)$ назовем приводимым в окрестности точки q к (микро)-локально эллиптическому оператору нулевого порядка, если существует коническая окрестности $U_q \subset T'(X)$ и конечная цепочка допустимых преобразований C_j вида (137) с a_j и b_j из $\mathbb{Z}^l_+$, $A_1 = C_1 A, \ldots, A_p = C_p A_{p-1}$, таких, что $A_j \in L^0(U_q)$, $j = 1, \ldots, p$ и оператор A_p принадлежит $EL^0(U_q)$. Множество таких операторов обозначим через $REL^0(U_q)$.*

Из определения (138) видно, что

$$A_p = C_p \ldots C_1 A = D_p A \in EL^0(U_q), \tag{138}$$

где

$$D_p = C_p \ldots C_1 = J_{a_p} C^0_p J_{-b_p} \ldots J_{a_1} C^0_1 J_{-b_1}, \tag{139}$$

причем $C^0_j \in EL^0(U_q)$ и a_j, $b_j \in \mathbb{Z}^l_+$ при $j = 1, \ldots, p$. Следовательно, приводящий оператор D_p принадлежит классу $EFL(U_q)$. Оператору A из $REL^0(U_q)$ сопоставим целое число d равное

$$d = c(D_p|U_q) = \sum_{j=1}^{p} \langle a_j \rangle - \langle b_j \rangle. \tag{140}$$

Эллиптические операторы S из $EL^0(U)$ будем считать принадлежащими классу $REL^0(U)$ как приводимые на нулевом шаге к S и $D_0 = I$ в U, а число $d = 0$.

4.2. Рассмотрим детальнее вопрос о допустимых C-преобразованиях оператора A из $L^0(X)$ и роли векторов a и b при таких преобразованиях. Если $a = b = 0$, то $C^0 A \in L^0(U)$ для любого $A \in L^0(U)$ и

$$\sigma_0(C^0 A) = \sigma_0(C^0) \cdot \sigma_0(A) \text{ в } U. \qquad (141)$$

Так что при C^0-преобразованиях матрица главного символа $\sigma_0(A)$ умножается на невырожденную в U матрицу $\sigma_0(C^0)$. Если найдется матрица C^0 такая, что j-тая строка композиции $C^0 A$ имеет в U порядок $-\alpha_j < 0$, то к $C^0 A$ можно применить диагональный оператор J_a с вектором a, у которого j-тая компонента равна $\alpha_j > 0$, а остальные равны нулю ($a = (0 \ldots 0, \alpha_j, 0 \ldots 0) = \alpha_j e_j$). Тогда композиция $J_a C^0 A$ снова принадлежит $L^0(U)$ и оператор A допускает $J_a C^0$-преобразование. При этом j-тая строка матрицы $\sigma_0(C^0)$ является аннулятором матрицы $\sigma_0(A)$, т.е.

$$e_j \sigma_0(C^0) \sigma_0(A) = 0 \text{ в } U, \qquad (142)$$

где e_j — j-тая строка единичной матрицы.

Таким образом, преобразования такого вида допускают лишь те матрицы A, у которых

$$\operatorname{rang} \sigma_0(A) \le k < l \text{ в } U. \qquad (143)$$

Если существует окрестность U точки q, в которой матрица $\sigma_0(A)$ имеет постоянный ранг $k < l$, то C-преобразование вида $J_a C^0$ существует и легко строится (см. [3, 7]). В общем случае, имеет место

Предложение 4.2. *Необходимым и достаточным условием существования у оператора A преобразований вида $J_a C^0$, $a \in \mathbb{Z}^l_+$, в некоторой окрестности точки $q = (x_0, \xi_0)$ из $T'(X)$ является существование у линейной алгебраической системы с параметром (x, ξ)*

$$\vec{y}(x,\xi)\sigma_0(A) = 0, \quad (x,\xi) \in U, \qquad (144)$$

ненулевого в точке q и гладкого в окрестности U_q (точнее, гладкого по x и $\dot{\xi} = \xi/|\xi|$ в $\dot{U}_q$) решения $\vec{y}(x,\xi)$, однородного по ξ нулевого порядка.

Необходимость мы показали выше, вектор $\vec{y} = e_j \sigma_0(C^0)$ в (142) является таким решением системы (144) . Для доказательства достаточности покажем , что по ненулевому в точке q и гладкому решению $\vec{y}(x,\xi)$ можно построить матрицу C^0 из $EL^0(U_q)$, удовлетворяющую соотношению (142). Действительно, у вектора $\vec{y}(x,\xi)$ найдется ненулевая в точке q компонента $y_j(x,\xi)$. По непрерывности она не исчезает в некоторой окрестности U_0 точки q. Воспользуемся единичной матрицей и заменим в ней j-тую строку вектором $\vec{y}$.

Получим матрицу $Y(x,\xi)$ невырожденную в U. Умножим эту матрицу на срезывающую функцию $g(x,\xi)$ (однородную по ξ нулевого порядка из класса $C_0^\infty(\dot{U})$ и равную единице на $U_0 \subset\subset U$). Тогда любой оператор C^0 с главным символом $g(x,\xi)Y(x,\xi)$ удовлетворяет соотношению (142) в конической области $U_q \subset U_0$. Следовательно, оператор A допускает J_aC^0-преобразование с некоторым $a \in \mathbb{Z}_+^l$, $\langle a\rangle > 0$, в окрестности U_q. Предложение доказано.

В случае, когда в любой окрестности точки q ранг $\sigma(A)$ переменный, существуют матрицы A, у которых символы $\sigma_0(A)$ удовлетворяют условию (143), но не имеют в окрестности некоторых точек q гладких и ненулевых в q аннуляторов $\vec{y}$ вида (144).

Покажем это на примере. Рассмотрим оператор (72), в котором элементы a_j суть операторы умножения на функции $a_j(x)$, удовлетворяющие условию (71). Матрица $\sigma_0(A)$ имеет вид (123) и не зависит от ξ , ее ранг равен нулю в точках $x_0 \in \mathcal{P}$ и равен единице в точках x из V, не принадлежащих $\mathcal{P}$. В окрестности точек (x_0,ξ_0) из $T'(\mathcal{P})$ (при $x_0 \in \mathcal{P}$, $\xi_0 \neq 0$) система (144) оператора (72) не имеет гладкого решения $\vec{y}(x,\xi)$, не обращающегося в нуль в точке $q=(x_0,\xi_0)$. Действительно, поверхность $\mathcal{P}$ разделяет область V на две части V_j, $j=1,2$. Легко видеть, учитывая (71), что система (144) имеет в $T'(V_j)$ решения вида

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (0,f_1) \text{ в } T'(V_1), \\ y^{(2)} &= (f_2,0) \text{ в } T'(V_2). \end{aligned} \tag{145}$$

где $f_j(x,\xi)$ — произвольные однородные по ξ функции нулевой степени, гладкие по $(x,\dot{\xi})$ и отличные от нуля в $T'(V_j)$, $j=1,2$. Чтобы получить гладкое решение $\vec{y}(x,\xi)$ в окрестности U_q необходим склеить векторы $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ в точках из $T'(\mathcal{P})$ и, в частности, в точке $q=(x_0,\xi_0) \in T'(\mathcal{P})$. Но тогда из равенства $y^{(1)}(q)=y^{(2)}(q)$ ввиду (145) получаем, что $f_1(q)=f_2(q)=0$, т.е. любое из полученных решений $\vec{y}(x,\xi)$ обращается в нуль в точке q. Следовательно, из него нельзя построить эллиптический в U_q оператор C^0 такой, что одна из строк $\sigma_0(C^0)$ совпадает с $\vec{y}(x,\xi)$.

4.3. Покажем, что преобразованиями (137) более общего вида, выбирая $b \neq 0$, оператор (72) можно привести к эллиптическому оператору нулевого порядка в окрестности любой точки q из $T'(V)$. Имеет место

Предложение 4.3. *Оператор (72) с элементами a_j из $l_0(X)$ принадлежит классу $REL^0(U_q)$ в конической области U, где композиция $a_1\lambda a_2$ принадлежит классу $l_{-\infty}(U)$. В частности, если $a_j(x)$ — функции, удовлетворяющие условию (71), то оператор (72) принадлежит классу $REL^0(U)$ в области $U = T'(V)$.*

Доказательство. Рассмотрим C-преобразования (137) вида

$$C_1 = J_{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\lambda^{-1}a_1\lambda\end{pmatrix} J_{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}, \quad C_2 = J_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1 & -a_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{146}$$

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что композиция C_1A оператора C_1 из (146) и (72) выглядит так

$$C_1A = \begin{pmatrix}\lambda^{-1} & a_2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}, \tag{147}$$

где $t_{21} \equiv -\lambda^2\lambda^{-1}a_1\tau_{1,-1}$ и $t_{22} \equiv \tau_{2,-2} + \lambda^2\lambda^{-1}a_1\lambda a_2$. Операторы t_{ij} принадлежат $l_{-\infty}(U)$, если $a_1\lambda a_2$ принадлежит $l_{-\infty}(U)$, потому что операторы $\tau_{k,-k} \equiv \lambda^k\lambda^{-k} - 1$ принадлежат $l_{-\infty}(X)$, $k = 1, 2$.

Теперь, применяя к (147) оператор C_2 из (146), получим

$$C_2C_1A = I_2 + T', \tag{148}$$

где компоненты t'_{ij} матрицы T' выражаются через компоненты t_{21} и t_{22} матрицы T в (147) по формулам

$$t'_{11} = \tau_{1,-1} - \lambda a_2 t_{21},\ t'_{12} = -\lambda a_2 t_{22},\ t'_{21} = t_{21},\ t'_{22} = t_{22};$$

поэтому они принадлежат $l_{-\infty}(U)$. Поскольку оператор $I_2 + T'$, где I_2 — единичная матрица, эллиптичен в U, то оператор (72) принадлежит классу $REL^0(U)$, что и требовалось доказать.

4.4. Установим связь между различными приводящими операторами (139). Имеет место следующая

Лемма 4.4.1. *Пусть A принадлежит $REL^0(U)$ и наряду с оператором (139) имеется другой оператор $D'_{p'}$, тоже приводящий A к оператору A'_p из $EL^0(U)$, т.е.*

$$A_p \equiv D_p A \in EL^0(U) \text{ и } A'_{p'} \equiv D'_{p'} A \in EL^0(U). \tag{149}$$

Тогда операторы D_p и $D'_{p'}$ связаны соотношениями

$$D'_{p'} = BD_p + T, \text{ где } B \in EL^0(U_0), T \in L^{-\infty}(U_0), \tag{150}$$

$$D_p = B'D'_{p'} + T', \text{ где } B' \in EL^0(U_0), T \in L^{-\infty}(U_0), \tag{151}$$

для любой области $U_0 \subset\subset U$.

Доказательство. Согласно п.п.2.12, 2.14 и Лемме 2.14.1 оператор D_p, принадлежащий классу $EFL(U)$, имеет (левый) параметрикс D_p^L, принадлежащий классу $EFL(U_1)$ для любой области $U_1 \subset\subset U$, т.е.

$$D_p^L D_p = I + T_p, \quad T_p \in L^{-\infty}(U_1). \tag{152}$$

Следовательно,

$$D'_{p'} = D'_{p'}(D_p^L D_p - T_p) = BD_p + T, \quad \text{где } B = D'_{p'} D_p^L, \tag{150$'$}$$

а $T = -D'_{p'}T_p$ принадлежит $L^{-\infty}(U_1)$. Мы получили равенство (150). Докажем, что $B \in EL^0(U_0)$. Применим к равенству (150) справа оператор A и воспользуемся соотношениями (149). Имеем

$$A'_{p'} = BA_p + T_1, \ A'_{p'} \text{ и } A_p \in EL^0(U), \ T_1 \in L^{-\infty}(U_1). \tag{153}$$

К этому равенству применим правый параметрикс A_p^R, принадлежащий классу $EL^0(U_0)$, где $U_0 \subset\subset U_1$. Получим

$$B = A'_{p'} A_p^R + T_2, \quad T_2 \in L^{-\infty}(U_0). \tag{154}$$

Доминантная часть оператора B есть композиция эллиптических в U_0 операторов. Следовательно, $B \in EL^0(U_0)$ и соотношения (150) доказаны. Соотношения (151) получаются по симметрии. Лемма доказана.

Из соотношений (150) и (151) вытекает следующее

Предложение 4.4.2. *Для любой конической области $U_0 \subset\subset U$ истинные порядки k и k' операторов D_p и $D'_{p'}$ в $\bar{U}_0$ совпадают. Более того, если $D_p \in L^k(U_0)$, $D'_{p'} \in L^{k'}(U_0)$ и $\sigma_k(D_p)$ и $\sigma_{k'}(D'_{p'})$ главные символы операторов D_p и $D'_{p'}$ в U_0 такие, что $\sigma_k(D_p) \not\equiv 0$ и $\sigma_{k'}(D'_{p'}) \not\equiv 0$ в U_0, то $k = k'$ и ранги матриц $\sigma_k(D_p)$ и $\sigma_k(D'_{p'})$ совпадают в каждой точке (x, ξ) из U_0.*

Действительно, пусть $k' > k$ и $\sigma_{k'}(D'_{p'}) \not\equiv 0$ в $U_0 \subset\subset U$, а $\sigma_{k'}(D_p) \equiv 0$ в U_0. Тогда из (150) получаем равенство для главных символов операторов левой и правой части

$$\sigma_{k'}(D'_{p'}) = \sigma_0(B)\sigma_{k'}(D_p) = \sigma_0(B) \cdot 0 \equiv 0 \text{ в } U_0.$$

Мы пришли к противоречию с предположением. Следовательно, $k' \leq k$. Аналогично, учитывая соотношение (151), получим $k' = k$. Теперь из равенств (150) и (151) имеем

$$\sigma_k(D'_{p'}) = \sigma_0(B)\sigma_k(D_p) \text{ и } \sigma_k(D_p) = \sigma_0(B')\sigma_k(D'_{p'}) \text{ в } U_0. \tag{155}$$

Так как матрицы $\sigma_0(B)$ и $\sigma_0(B')$ невырождены в U_0, то ранги матриц $\sigma_k(D_p$ и $\sigma_k(D'_{p'})$ совпадают в каждой точке (x, ξ) из U_0. Предложение доказано.

Из Леммы 4.4.1, Предложения 4.4.2, вспоминая определение числа $c(A|U)$ и учитывая Утверждение 2.1.1, имеем

Следствие 4.4.3. *Если D_p и $D'_{p'}$ приводящие операторы (удовлетворяющие соотношениям (149)), то $c(D_p|U) = c(D'_{p'}|U)$.*

Таким образом, число $d = c(D_p|U)$, равное согласно (139)–(140) $\sum_{j=1}^{p}\langle a_j\rangle - \langle b_j\rangle$, не зависит от произвола, который имеется при выборе оператора D_p. Его можно обозначить $d(A^0|U)$

4.5. Установим связь между классами $REL^0(U)$ и $EFL^0(U_1)$. Имеет место

Лемма 4.5.1. *Для любой конической области $U_1 \subset\subset U$*

$$REL^0(U) \subset EFL^0(U_1), \tag{156}$$

т.е. если $A^0 \in REL^0(U)$, то $A^0 \in EFL^0(U_1)$ и, кроме того,

$$c(A^0|U_1) = -d(A^0|U_1). \tag{157}$$

Доказательство. Пусть $A^0 \in REL^0(U)$ и D_p — его приводящий оператор, имеющий вид (139) и такой, что $D_pA^0 \equiv A^0_p \in EL^0(U)$.

Он имеет локальный параметрикс D_p^L, удовлетворяющий соотношению (152), принадлежащий классу $EFL(U_1)$ для любой области $U_1 \subset\subset U$. Применяя D_p^L к равенству (138), получим представление для оператора A^0:

$$A^0 = D_p^L A_p + T = J_{b_1} B_1 J_{b_2 - a_1} \dots B_p J_{-a_p} A_p + T, \tag{158}$$

где $B_j = (C_j^0)^L$ — (левые) параметриксы операторов C_j^0, принадлежащие классу $EL^0(U_1)$, и $T \in L^{-\infty}(U_1)$.

Это представление показывает, что оператор A^0 принадлежит классу $EFL^0(U_1)$ и что число $c = -d$, т.е. имеем равенство (157). Лемма доказана.

Имеет место и обратное утверждение того же типа.

Лемма 4.5.2. *Для любой конической области* $U_1 \subset\subset U$

$$EFL^0(U) \subset REL^0(U_1), \tag{159}$$

т.е. если $A^0 \in EFL^0(U)$, *то* $A^0 \in REL^0(U_1)$ *и, кроме того,*

$$d(A^0|U_1) = -c(A^0|U_1). \tag{160}$$

Доказательство. Пусть оператор A^0 принадлежит $EFL^0(U)$ и имеет представление (20). По Лемме 2.5 это представление можно преобразовать таким образом, что векторы b_j в представлении (37) удовлетворяют либо условию (30), либо условию (31). Для простоты мы не будем менять обозначений и будем считать, что условиям (30) или (31) удовлетворяют сами векторы a_j. Рассмотрим первый случай.

a) Если все векторы a_j в представлении (20) принадлежат $\mathbb{Z}_-^l$, то диагональные операторы J_{a_j} принадлежит классу $L^0(U)$ для любой U из $T'(X)$. Поэтому их композиции с операторами A_j из $EL^0(U)$ также принадлежат $L^0(U)$ и, в частности, таковы композиции

$$E_k \equiv A_{r-k+1} J_{a_{r-k}} \dots A_2 J_{a_1} A_1,\ k = 1, \dots, r-1. \tag{161}$$

C-преобразования оператора A^0 выберем в виде

$$C_1 = J_{-a_r} \text{ и } C_k = J_{c_k} C_k^0, \text{ где } c_k = -a_{r-k+1}, C_k^0 = A_{r-k+2}^L \in EL^0(U_1), \tag{162}$$

при $k = 2, \dots, r$. Тогда из формулы (20) получаем, что

$$C_k \dots C_1 A^0 = E_k + T_k,\ E_k \in L^0(U),\ T_k \in L^{-\infty}(U_1),$$

при $k = 1, \dots, r-1$. И, наконец, композиция

$$D_r A^0 \equiv C_r \dots C_1 A^0 = A_1 + T_r,\ A_1 \in EL^0(U),\ T_r \in L^{-\infty}(U_1) \quad (163)$$

приводит оператор A^0 к эллиптическому в U_1 оператору $A_1 + T_r$. Итак, оператор A^0 принадлежит $REL^0(U_1)$.

Рассмотрим второй случай (31).

b) Пусть вектор $a_r \in \mathbb{Z}^l_+$ и $a_j \in \mathbb{Z}^l_-$ при $j < r$.

Тогда композиции E_k (161) снова принадлежат $L^0(U)$, ибо они не содержат оператора J_{a_r}. Теперь C-преобразования оператора A^0 выберем в виде

$$C_1 = J_{c_1} C_1^0 J_{-b_1},\ \text{где}\ b_1 = a_r,\ c_1 = -a_{r-1},\ \text{и}\ C_1^0 = A_r^L \in EL^0(U_1) \quad (164)$$

$$C_k = J_{c_k} C_k^0,\ \text{где}\ c_k = -a_{r-k},\ C_k^0 = A^L_{r-k+1},\ k = 2, \dots, r-1.$$

Применяя их к оператору (20), получим

$$C_1 A = E_2 + T_1',\ E_2 \in L^0(U_1),\ T_1' \in L^{-\infty}(U_1), \quad (165_1)$$

$$C_k \dots C_1 A^0 = E_{k+1} + T_k',\ E_{k+1} \in L^0(U),\ T_k' \in L^{-\infty}(U_1), \quad (165_k)$$

при $k = 2, \dots, r-2$; здесь E_k это композиция (161). И, наконец,

$$D_{r-1} A^0 \equiv C_{r-1} \dots C_1 A^0 = A_1 + T'_{r-1},\ T'_{r-1} \in L^{-\infty}(U_1). \quad (166)$$

Итак, C-преобразованиями (20) мы привели к оператору $A_1 + T'_{r-1}$, принадлежащему $EL^0(U_1)$.

Равенство (160) легко получается, если учтем, что при преобразованиях, проводимых при доказательстве Леммы 2.5, число $c(A^0|U)$ не меняется и воспользуемся формулами (162) и (164), соответственно.

c) Отметим отдельно, случай, когда в представлении (20) имеется один диагональный оператор. Тогда оператор A^0 принадлежит классу $BEL^0(U)$ и вектор $a_1 = -a$ в представлении (25), где положим $A^0 = S^0$; принадлежит Z^l_-, (это мы показали в п.2.2). Применяя преобразование

$$C_1 = J_a A_2^L,\ \text{где}\ A_2^L \in EL^0(U_1),\ U_1 \subset\subset U, \quad (162')$$

к формуле (25), получим

$$C_1 A^0 = A_1 + T_1,\ A_1 \in EL^0(U),\ T_1 \in L^{-\infty}(U_1), \quad (163')$$

т.е., искомое приведение оператора A^0 к эллиптическому в U_1 оператору $A_1 + T_1$. Лемма доказана.

4.6. Наряду с левосторонними преобразованиями оператора A^0 из $L^0(X)$ при приведении его к эллиптическому в U оператору можно использовать правосторонние преобразования или проводить их последовательно с различных сторон. Для наглядности будем обозначать операторы, применяемые слева, буквой C, а те, которые мы применяем справа — буквой B (с различными индексами). Пусть c и d — векторы из $\mathbb{Z}^l_+$ и оператор B имеет вид

$$B = J_{-c}B^0J_d, \quad B^0 \in EL^0(U),\ c, d \in \mathbb{Z}^l_+. \tag{167}$$

Мы говорим, что оператор A^0 допускает B-преобразование в области U, если порядок композиции A^0B в U не превосходит нуля, т.е. A^0 и A^0B принадлежат $L^0(U)$. Оператор A^0 допускает (C, B) преобразования если последовательные композиции A^0 с операторами (137) и (или) с операторами (167) принадлежат классу $L^0(U)$.

Определение. *Оператор A^0 называется приводимым в окрестности точки q из $T'(X)$ к (микро) локально эллиптическому оператору нулевого порядка, если существует коническая окрестность $U_q \subset T'(X)$ и конечная цепочка допустимых (C, B)-преобразований $A^0 \to A^0_1 \to \ldots A^0_m$ (причем, при каждом шаге применяется либо C, либо B-преобразование) такая, что операторы $A^0_j \in L^0(U_q)$ при $j \leq m$ и $A^0_m \in EL^0(U_q)$. Если при этом используются только B-преобразования, то оператор A^0 называется правосторонне приводимым к эллиптическому в U_q оператору нулевого порядка.*

Если сравнить это определение с определением в п.4.1, то видим, что здесь мы расширили возможности преобразований оператора A^0, допуская как преобразования его строк операторами C_i, так и преобразования его столбцов операторами B_j. Однако, оказывается, что при этом мы не расширяем класса $REL^0(U_q)$ п.4.1, определенного только посредством C-преобразований, так как имеет место следующая

Лемма 4.6. *Если оператор A^0 приводим к оператору $A^0_m \in EL^0(U_q)$ с помощью цепочки (C, B)-преобразований, то в любой конической окрестности $U'_q \subset U_q$ найдется цепочка C-преобразований*

(138), *которая приведет* A^0 *к оператору* $A_p^0 \in EL^0(U_q')$, *т.е.* $A^0 \in REL^0(U_q')$.

Доказательство леммы состоит из двух шагов. На первом шаге мы показываем, что оператор A^0, удовлетворяющий условиям леммы, принадлежит классу $EFL^0(U_1)$ для любой области $U_1 \subset\subset U_q$. На втором шаге воспользуемся Леммой 4.5.2 и получим, что оператор A^0 принадлежит $REL^0(U_q')$, где $U_q' \subset\subset U_1$. Поясним первый шаг; он аналогичен доказательству Леммы 4.5.1. Пусть $(i_1, \ldots, i_m)$ перестановка чисел $1, \ldots, m$, определяющая порядок применения операторов C_i или B_j к A^0. Тогда, учитывая ассоциативность произведения операторов композицию A_m^0 запишем в виде

$$C_{i_1} \ldots C_{i_k} A^0 B_{i_{k+1}} \ldots B_{i_m} = A_m^0 \in EL^0(U_q). \tag{168}$$

Операторы C_i и B_j вида (137) и (167) имеют левые и правые параметриксы,

$$C_i^L = J_{b_i}(C_i^0)^L J_{-a_i}, \quad B_j^R = J_{-d_j}(B_j^0)^R J_{c_j}, \tag{169}$$

где $(C_i^0)^L$ и $(B_j^0)^R$ принадлежат $EL^0(U_1)$, $U_1 \subset\subset U$. Применяя эти параметриксы к равенству (168) получим представление для оператора A^0:

$$A^0 = C_{i_k}^L \ldots C_{i_1}^L A_m^0 B_{i_m}^R \ldots B_{i_{k+1}}^R + T_1,\ T_1 \in L^{-\infty}(U_1). \tag{170}$$

Формулы для C_i^L и B_j^R показывают, то это представление имеет вид (20), т.е. доминантная часть оператора есть композиция диагональных и эллиптических в U_1 операторов. Следовательно, $A^0 \in EFL^0(U_1)$; сделав второй шаг, получим окончательный результат. Лемма доказана.

4.7. Пусть оператор A принадлежит классу $L^{(s,t)}(X; E, E)$. В соответствии с нашим подходом, мы скажем, что A принадлежит классу $REL^{(s,t)}(U)$, если оператор $A^0 \equiv J_{-s} A J_{-t}$ из $L^0(X)$ принадлежит классу $REL^0(U)$. При этом, если оператор D_p вида (139) приводит A^0 к оператору $A_p^0 = D_p A$ из $EL^0(U)$, то оператор $J_s D_p J_{-s}$ приводит A к оператору $A_p = J_s D_p J_{-s} A$ из $EL^{(s,t)}(U)$. Действительно, из формул (8)-(13) имеем

$$J_s D_p J_{-s} A = J_s(D_p A^0) J_t + T_1 = J_s A_p^0 J_t + T_1 = A_p + T_1,$$

где оператор $T_1 \in L^{-\infty}(U)$.

Следовательно, определяя число $d = d(A^{(s,t)}|U)$ так же, как в п.4.1 (см. формулу (140)), имеем

$$d(A^{(s,t)}|U) = c(J_s D_p J_{-s}|U) = c(D_p|U) = d(A^0|U).$$

Так что положим

$$d(A^{(s,t)}|U) = d(A^0|U), \quad A^0 = J_{-s}AJ_{-t}. \tag{171}$$

Обозначим

$$REL(U) = \cup_{(s,t)} REL^{(s,t)}(U).$$

Из определения классов $REL^{(s,t)}(U)$ и $EFL^{(s,t)}(U)$ (в п.2.12) и из Лемм 4.5.1 и 4.5.2 вытекают следующие утверждения.

Предложение 4.7.1. *Если $A \in REL^{(s,t)}(U)$, то $A \in EFL^{(s,t)}(U_1)$ для любой области $U_1 \subset\subset U$ и, кроме того,*

$$c(A^{(s,t)}|U_1) + d(A^{(s,t)}|U_1) = \langle s\rangle + \langle t\rangle. \tag{172}$$

Предложение 4.7.2. *Если $A \in EFL^{(s,t)}(U)$, то $A \in REL^{(s,t)}(U_1)$ для $\forall U_1 \subset\subset U$ и, кроме того, имеет место соотношение (172).*

Докажем первое из них. $A \in REL^{(s,t)}(U)$, если $A^0 \in REL^0(U)$. Согласно, Лемме 4.5.1 тогда $A^0 \in EFL^0(U_1)$ для любой $U_1 \subset\subset U$. Значит, оператор $A \in EFL^{(s,t)}(U_1)$. Формула (172) вытекает из формул (83) и (171). Предложение 4.7.1 доказано.

Предложение 4.7.2 доказывается аналогично, используя Лемму 4.5.2

Имеет место,

Теорема 4.7.3. *Пусть $A \in REL^{(s,t)}(U) \cap L^{(p,q)}(X : E, E)$ и $(p,q) \neq (s,t)$. Тогда оператор A принадлежит классу $REL^{(p,q)}(U_1)$ в любой области $U_0 \subset\subset U$ и, кроме того,*

$$d(A^{(p,q)}|U_0) = \langle p\rangle + \langle q\rangle - \langle s\rangle - \langle t\rangle + d(A^{(s,t)}|U_0). \tag{173}$$

Утверждение теоремы, очевидно, вытекает из Предложения 4.7.1, Теоремы 2.12 и Предложения 4.7.2. Формула (173) получается из формул (171), (172) и (85):

$$\begin{gathered} d(A^{(p,q)}|U_0) = \langle p\rangle + \langle q\rangle - c(A^{(p,q)}|U_0) = \\ = \langle p\rangle + \langle q\rangle - c(A^{(s,t)}|U_0) = \langle p\rangle + \langle q\rangle - \langle s\rangle - \langle t\rangle + d(A^{(s,t)}|U_0), \end{gathered} \tag{174}$$

что и требовалось доказать.

Итак, принадлежность оператора классу $REL(U)$ не зависит от выбора весового порядка (s,t), но число $d(A^{(s,t)}|U)$ зависит от него.

§5. Класс $REL(X)$

5.1. Введем еще один класс.

Определение. *Оператор A^0 из $L^0(X;E,E)$ называется приводимым повсеместно на $T'(X)$ к (микро) локально эллиптическому оператору нулевого порядка, если для любой точки q из $T'(X)$ найдется коническая окрестность U_q такая, что A^0 принадлежит классу $REL^0(U_q)$. Класс таких операторов обозначим $REL^0(X)$.*

Число $d(A^0)$, совпадающее в окрестности U_q, где $A^0 \in REL^0(U_q)$, с числом $d(A^0|U_q)$, определяется однозначно на всем $T'(X)$.

Это утверждение вытекает из Следствия 4.4.3 из Леммы 4.4.1 и из связности множества $T'(X)$. Рассуждение такое же, как при определении в §3 числа $c(A^0)$. По определению оператор A^0 из $EL^0(X)$ принадлежит $REL^0(X)$ и $d(A^0)=0$. Справедливо

Утверждение 5.1.1. *Если оператор $A^0 \in REL^0(X)$ и число $d(A^0)=0$, то $A \in EL^0(X)$.*

Мы вернемся к обсуждению доказательства этого утверждения чуть ниже, вначале отметим следующий факт.

Теорема 5.1.2. *Для оператора A^0 из $L^0(X;E,E)$ следующие условия эквивалентны: a) A^0 принадлежит $REL^0(X)$, b) A^0 принадлежит $GEL^0(X)$.*

Между числами $c(A^0)$ и $d(A^0)$ выполняется соотношение

$$c(A^0)+d(A^0)=0. \tag{175}$$

Доказательство. Если A^0 принадлежит $REL^0(X)$, то по определению для любой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q такая, что $A^0 \in REL^0(U_q)$. Тогда в силу Леммы 4.5.1 оператор A^0 принадлежит классу $EFL^0(U'_q)$ в любой окрестности $U'_q \subset\subset U_q$ и $c(A^0|U'_q) = -d(A^0|U'_1) = -d(A^0)$. Учитывая произвольность точки $q \in T'(X)$ и определение класса $GEL^0(X)$ и числа $c(A^0)$, получаем что $A^0 \in GEL^0(X)$ и $c(A^0) = -d(A^0)$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение получается аналогичным рассуждением, используя Лемму 4.5.2. Теорема доказана.

Из этой теоремы очевидно, что Утверждение 5.1.1 эквивалентно Утверждению 3.1. Мы его докажем полностью в работе [12].

Из Утверждения 2.1.2 и 5.1.1 вытекает, что если оператор A принадлежит классу $REL^0(X)\backslash EL^0(X)$, то число $d(A^0) > 0$.

5.2. В соответствие с п.4.7. Оператор A из $L^{(s,t)}(X;E,E)$ принадлежит классу $REL^{(s,t)}(X)$, если соответствующий ему оператор $A^0 = J_{-s}AJ_{-t}$ из $L^0(X)$ принадлежит классу $REL^0(X)$. Ввиду формулы (171) положим

$$d(A^{(s,t)}) = d(A^0), \quad A^0 = J_{-s}AJ_{-t}. \tag{176}$$

Обозначим

$$REL(X) = \cup_{(s,t)} REL^{(s,t)}(X). \tag{177}$$

Имеет место

Теорема 5.2. *Классы $GEL^{(s,t)}(X)$ и $REL^{(s,t)}(X)$ совпадают, т.е. если оператор A принадлежит $GEL^{(s,t)}(X)$, то A принадлежит $REL^{(s,t)}(X)$ и обратно. При этом*

$$c(A^{(s,t)}) = \langle s\rangle + \langle t\rangle - d(A^{(s,t)}). \tag{178}$$

Эта теорема, вытекает из Теоремы 5.1.2 и определений указанных классов и чисел (см. также Предложения 4.7.1 и 4.7.2).

5.3. Отметим еще одно важное свойство операторов из класса $WEL^0(X) = REL^0(X)/EL^0(X)$: существует матрица D, возможно не квадратная с размерами $L \times l$, где $l \leq L$, которая приводит оператор A^0 из $WEL^0(X)$ к глобально эллиптическому на X оператору DA^0 нулевого порядка. Это значит, что матрица $\sigma_0(DA^0)$ имеет левую обратную всюду на $T'(X)$. Действительно, согласно определению класса $REL^0(X)$ для любой точки q из $T'(X)$ существует окрестность U_q и оператор $D_p = C_p \dots C_1$ такой, что композиция $A^0_p = D_pA^0 \in EL^0(U_q)$. Из покрытия компактного множества $S^*(X) \subset T'(X)$ окрестностями $\dot U_q$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{\dot U_j\}$, $j = 1, \dots, N$, и построить разбиение единицы $\{\varphi_j(x,\xi)\}$, подчиненное этому покрытию. Здесь $\dot\xi = \xi/|\xi|$, а $\varphi_j(x,\dot\xi)$ — гладкие и однородные по ξ нулевого порядка функции с носителями $\dot U'_j \subset \dot U_j$. Рассмотрим операторы $D^{(j)} = \varphi_j(x,D)D_{p_j}$ и из них составим $(lN \times l)$-матрицу

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} \\ \vdots \\ D^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{179}$$

Тогда очевидно, что операторы $A_j^0 = D^{(j)} A^0$ принадлежат $EL^0(U_j')$, а вся $(lN \times l)$-матрица DA принадлежит классу $E\tilde{L}^0(X)$ глобально эллиптических на X операторов. При $N > 1$ она не является квадратной. Этот оператор D позволяет определить пространство Соболева, в котором оператор A^0 из $WEL^0(X)$ является нетерово разрешимым [7].

Из Утверждения 4.5.4 и определения числа $d(A^0)$ получаем ограничения для истинного порядка оператора D всюду на $T'(X)$

$$0 \leq \operatorname{ord} D \leq d(A^0). \tag{180}$$

Полученные результаты находят применение при исследовании разрешимости краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений [3, 9, 10].

Литература

1. И. Г. Петровский, *Об аналитичности решений систем уравнений с частным производными.* — Матем. сборник **5**, № 1 (1939), 3–70.
2. A. Douglis, L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations.* — Comm. Pure and Appl. Math. **8** (1955), 503-538.
3. Б. Г. Вайнберг, В. В. Грушин, *О равномерно не эллиптических задачах 1.* — Матем. сборник **72** (1967), 602-636.
4. Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т.2.* Москва, Мир, 1987, с. 495.
5. Ф. Трев, *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т.1.* Москва, Мир, 1984, с. 360.
6. Р. С. Сакс, *Слабоэллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразиях без края.* — ДАН **240**, № 4 (1978), 786–789.
7. Р. С. Сакс, *Слабоэллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразиях без края.* В сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды сем. ак. С.Л.Соболева), No.2 (1978), 103–126, Новосибирск.
8. Р. С. Сакс, *Слабоэллиптические системы дифференциальных уравнений и их свойства.* В сб.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды сем. ак. С.Л.Соболева), No.1 (1979), Нивисибирск, 91–118.
9. Р. С. Сакс, *Слабоэллиптические краевые задачи.* В сб.: Уравнения с частными производными (Труды сем. ак. С.Л.Соболева), No.2 (1979), Новисибирск, 57–78.

10. Б. Г. Вайнберг, В. В. Грушин, *О равномерно неэллиптических задачах.* — Матем. сборник **73**, № 1 (1967), 126–154.
11. Р. С. Сакс, *Обобщенно эллиптические псевдодифференциальные операторы на замкнутом многообразии.* — ДАН **331**, № 6 (1993), 687–690.
12. Р. С. Сакс, *О нетеровой разрешимости эллиптических операторов на замкнутых многообразиях.* Будет опубликовано.

Saks R. S. On properties of the generalized elliptic pseudo-differential operators on closed manifolds.

The coincidence of two classes of the generalized elliptic pseudo-differential operators — the class $GEL(X)$ and the class $REL(X)$ — selected by author from the class of all the linear classical pseudo-differential operators $L(X; E, E)$ (Theorem 5.2) is proved. It is also proved that the composition AB of any operators A and B from $GEL(X)$ and global parametrix P_A and P_B belongs to $GEL(X)$ (Theorems 3.4 and 3.6.1). The belonging of A to $GEL(X)$ does depend neither the choosing of basis in E nor the weight-orders of A (Theorems 3.2.2, 3.7.1, and 3.7.2).

In §2 and §4, some properties of the classes $EFL(U)$ and $REL(U)$, which arise from microlocal analysis of the generalized elliptic operators, are studied.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 февраля 1996 г.