О. А. Ладыженская

О ГЛОБАЛЬНОЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

Посвящается памяти А. П. Осколкова

§1. Введение

Считается, что динамика слабых водных растворов полимеров достаточно хорошо описывается системой

$$\partial_t(v-\varkappa\Delta v)+v\cdot\nabla(v-\varkappa\Delta v)-\nu\Delta v+\nabla p=f,\quad \varkappa,\ \nu=\text{const}>0 \quad (1.1_1)$$

$$\operatorname{div} v=0,\qquad v\big|_{t=0}=v^0, \qquad (1.2_2)$$

при том или ином краевом условии (см. [1, 2] и др.). Исследование системы (1.1_k) важно и с чисто математической точки зрения, ибо она не вкладывается в рамки хорошо изученных классов систем. Одним из наиболее интересных вопросов является вопрос о глобальной однозначной разрешимости для нее задачи Коши и различных начально-краевых задач. Насколько мне известно, однозначная разрешимость некоторых из них при $n=2$ и $n=3$ была установлена лишь при тех или иных ограничениях "малости" на данные задачи или интервал времени существования решений.

Такие результаты имеются в работе [3] А. П. Осколкова. В §2 мы приведем один из результатов работы [3], касающийся глобального существования обобщенных решений. В более ранних работах [4–6] А. П. Осколкова имеются теоремы единственности в классах более гладких обобщенных решений. К этим работам мы еще вернемся в конце статьи.

В предлагаемой работе мы докажем, что, подобно уравнениям Навье–Стокса и уравнениям Эйлера, система (1.1_k), $k=1,2$, глобально однозначно разрешима в двумерных ситуациях, когда нет зависимости от одной из пространственных координат. Это будет сделано для краевого условия, которое естественно назвать условием проскальзывания частиц и вихрей. Аналогично (и более просто) это делается при краевых условиях периодичности по пространственным переменным и в задаче Коши.

§2. Краевые условия проскальзывания частиц и вихрей. Известные факты

Указанные в заглавии краевые условия в трехмерном случае имеют вид

$$v_n = v \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} v \times n = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.1_1}$$

где n – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $v = (v_1, v_2, v_3)$. Для случая $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\operatorname{rot} v$ можно рассматривать как скаляр: $\operatorname{rot} v = v_{2x_1} - v_{1x_2}$ и условия (2.1_1) записать в виде

$$v_n = 0, \quad \operatorname{rot} v = v_{2x_1} - v_{1x_2} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.1_2}$$

В соответствии с общей концепцией исследования начально-краевых задач, разработанной мною в конце 40х–начале 50х годов (см. [7] 1953 г. и другие монографии и работы, в их числе и учебную многографию [8]), надо выбрать для исследуемой задачи функциональные пространства $H_0 \Supset H_1 \Supset H_2 \Supset \ldots$, вбирающие в себя краевые условия и, возможно, часть других уравнений задачи и переформулировать всю задачу как задачу Коши в пространстве H_0, выбираемом в качестве фазового пространства.

Для уравнений Навье–Стокса с условием прилипания я реализовала эту программу, разбив всю задачу на две задачи: в первой находится поле скоростей, а во второй – поле давления по его градиенту (последняя задача является классической, но решаться должна в общем случае в пространстве обобщенных функций). При этом важную роль играет следующая ниже Лемма 2.1, доказанная мною для известного разложения векторного пространства $L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ в ортогональную сумму подпространства $G(\Omega) = \{\nabla p \,\|\, p \in W_2^1(\Omega)\}$ и замыкания в норме $L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$ множества гладких соленоидальных полей, имеющих на $\partial\Omega$ нулевую нормальную компоненту (т.е. $v \cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0$) (см. [9], гл. I, §2). Это разложение одни называют разложением Вейля, другие – разложением Гельмгольца. Запишем его в виде $L_2(\Omega; \mathbb{R}^m) = \overset{\circ}{\mathrm{J}}_{(n)}(\Omega) \oplus G(\Omega)$. Справедлива

Лемма 2.1. *Пространство* $\overset{\circ}{\mathrm{J}}_{(n)}(\Omega)$ *совпадает с* $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$ *– замыканием в норме* $L_2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ *множества*

$$\dot{\mathrm{J}}^\infty(\Omega)=\left\{v \| v\in \dot{C}^\infty(\Omega),\ \operatorname{div} v=0\right\}.$$

(Точка сверху означает, что элементы v имеют компактные носители, лежащие в Ω).

В качестве пространства H_1 (для краевого условия $v|_{\partial\Omega}=0$) я выбрала замыкание множества $\dot{\mathrm{J}}^\infty(\Omega)$ в норме интеграла Дирихле, а в качестве H_2 – пересечение $H_1\cap W_2^2(\Omega)$. При исследовании бо́льшей гладкости решений использовались и другие функциональные пространства.

Именно такой подход к исследованию краевых и начально-краевых задач во многом способствовал успеху последующих десятилетий в изучении уравнений Навье–Стокса и многих других задач математической физики, линейных и нелинейных.

Для задачи (1.1_k), (2.1_k) наиболее подходящими являются следующие пространства: $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$,

$$\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n)}(\Omega)\equiv\left\{u \| u\in W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^3),\ \operatorname{div} u=0,\ u\cdot n\big|_{\partial\Omega}=0\right\} \qquad (2.2_1)$$

и

$$\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega)\equiv\left\{u \| u\in W_2^2(\Omega,\mathbb{R}^3),\right.$$
$$\left.\operatorname{div} u=0,\ u\cdot n\big|_{\partial\Omega}=0,\ \operatorname{rot} u\times n\big|_{\partial\Omega}=0\right\}. \qquad (2.2_2)$$

Для $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ и $u\in W_2^l(\Omega,\mathbb{R}^2)$ последнее условие $\operatorname{rot} u\times n\big|_{\partial\Omega}=0$ трактуется как (2.1_2). Чтобы не отвлекаться на чисто аналитические вопросы, будем считать Ω ограниченной областью в $\mathbb{R}^m$, $m=2$ или 3, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Известно, что для их элементов справедливы неравенства

$$\|u\|\leqslant c_1\|u_x\|,\quad u\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n)}, \qquad (2.3_1)$$

$$c_2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant\|\operatorname{rot} u\|\leqslant c_3\|u_x\|,\quad u\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n)}, \qquad (2.3_2)$$

$$c_4\|u\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\|\Delta u\|=\|\operatorname{rot}\operatorname{rot} u\|\leqslant c_5\|u_{xx}\|,\quad u\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}, \qquad (2.3_3)$$

где c_k – положительные постоянные, зависящие только от Ω. Символ $\|\cdot\|$ означает норму в $L_2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ с каким-либо $m=0,1,\dots$, а $(\ ,\ )$ будет обозначать скалярное произведение в $L_2(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Благодаря (2.3_k) в $\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n)}$ вместо обычной нормы пространства $W_2^1(\Omega)$ можно взять эквивалентную ей норму $\|\mathrm{rot}\,u\|$, а в $\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n,r)}$ вместо нормы $\|u\|_{W_2^2(\Omega)}$ для u взять величину $\|\Delta u\|=\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u\|$.

Нам будет нужно равенство

$$(-\Delta u,v)=(\mathrm{rot}\,u,\mathrm{rot}\,v)+\int_{\partial\Omega}(\mathrm{rot}\,u\times n)\cdot v\,ds+$$
$$+(\mathrm{div}\,u,\mathrm{div}\,v)-\int_{\partial\Omega}\mathrm{div}\,u(v\cdot n)\,ds,$$

а, точнее, его следствие:

$$(-\Delta u,v)=(\mathrm{rot}\,u,\mathrm{rot}\,v), \tag{2.4}$$

справедливое для любого соленоидального поля u, удовлетворяющего условию $\mathrm{rot}\,u\times n|_{\partial\Omega}=0$ и любого $v\in W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$, а также соотношение

$$(v\cdot\nabla u,w)=-(u,v\cdot\nabla w), \tag{2.5}$$

справедливое для любых u и w из $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и $v\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}_{(n)}(\Omega)$.

С задачей (1.1_k), (2.1_k) естественно связана спектральная задача для системы Стокса

$$-\Delta u+\nabla q=\lambda u,\quad u\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega). \tag{2.6}$$

Благодаря тождеству

$$(\Delta u,\nabla p)=0,\quad \forall\,u\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega)\ \text{ и }\ \forall\,p\in W_2^1(\Omega) \tag{2.7}$$

и разложению

$$L_2(\Omega;\mathbb{R}^m)=\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)\oplus G(\Omega),\quad G(\Omega)=\{\nabla p|p\in W_2^1(\Omega)\} \tag{2.8}$$

в задаче (2.6) $\nabla q\equiv 0$, и потому задачу (2.6) лучше формулировать так:

$$Au\equiv-\Delta u=\lambda u,\quad u\in\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega), \tag{2.9}$$

причем в качестве основного пространства надо взять $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$. Оператор A устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством $D(A) = \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega)$, плотно вложенным в $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$, и всем $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$. При этом справедливы оценки

$$\|u\|_{W_2^{k+2}(\Omega)} \leqslant c_k(\Omega)\|\Delta u\|_{W_2^k(\Omega)}$$

при $\forall\, k = 0, 1, \ldots$, если только $\partial\Omega$ достаточно гладкая. Задача

$$Au = f, \quad u \in \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(2,r)}, \tag{2.10}$$

с $f \in \overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$ имеет вариационный характер: ее решение дает инфимум функционалу

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \left[(\operatorname{rot} u)^2 - 2uf\,\right] dx$$

на множестве $\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n)}(\Omega)$. Второе краевое условие из (2.1_k) является естественным краевым условием этой задачи.

Для задач (2.9) и (2.10) справедливы все свойства, установленные для системы Стокса при условии $u|_{\partial\Omega} = 0$, или скалярной задачи Дирихле для оператора $-\Delta$, в их числе и точные теоремы разложения по собственным функциям, доказанные нами для этих задач (см., например, [7, 8]).

Как выяснено в [10], при теоретическом изучении задачи (1.1_k), (2.1_k) выгодно использовать систему собственных функций $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ связанной с ней задачи (2.9) в качестве базиса при построении тех или иных приближений.

Эту систему можно выбрать так, чтобы

$$\left(\varphi^{(k)}, \varphi^{(l)}\right) = \delta_k^l.$$

Она будет ортобазисом в пространствах $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n)}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega)$, если в них выбрать нормы так, как указано было выше, после формул (2.3_k). Для галеркинских приближений v^N, $N = 1, 2, \ldots$, задачи (1.1_k), (2.1_k), вычисленных по системе $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, будут справедливы все оценки, которые мы получим ниже, причем мажоранты в них можно выбрать независящими от номера N. Перейдем к получению этих оценок.

Умножим (1.1_1) на $v-\varkappa\Delta v$, проинтегрируем по Ω и результат преобразуем, используя (2.5), к виду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v-\varkappa\Delta v\|^2+\nu\|\operatorname{rot} v\|^2+\nu\varkappa\|\Delta v\|^2=(f,v-\varkappa\Delta v). \tag{2.11}$$

Отсюда получим неравенство

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)-\varkappa\Delta v(t)\|\leqslant \\ \leqslant\|v(0)-\varkappa\Delta v(0)\|+\int\limits_0^T\|f(\tau)\|d\tau\equiv M_1(T), \tag{2.12}$$

а также оценку

$$\int\limits_0^T\left(\nu\|\operatorname{rot} v\|^2+\nu\varkappa\|\Delta v\|^2\right)dt\leqslant c(M_1(T)). \tag{2.13}$$

В силу (2.3_k), из (2.12) следует оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant c(M_1(T)) \tag{2.14}$$

(зависимость мажорант от констант ν и $\varkappa$ не указывается).

Второе важное соотношение получим в результате скалярного умножения (1.1_1) на v_t и последующего интегрирования по частям. Оно имеет вид

$$\|v_t\|^2+\varkappa\|\operatorname{rot} v_t\|+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{rot} v\|^2=(v-\varkappa\Delta v,v\cdot\nabla v_t)+(f,v_t). \tag{2.15}$$

Из него, в силу ограниченности вложения $W_2^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, оценки (2.14) и (2.3_2) следует неравенство

$$\|v_t\|^2+\varkappa\|\operatorname{rot} v_t\|+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{rot} v\|^2\leqslant c\|\operatorname{rot} v_t\|+\|f\|\,\|v_t\|\leqslant \\ \leqslant\frac{\varkappa}{2}\|\operatorname{rot} v_t\|^2+\frac{c^2}{2\varkappa}+\frac{1}{2}\|v_t\|^2+\frac{1}{2}\|f\|^2. \tag{2.16}$$

После приведения подобных членов и интегрирования получим оценку

$$\|v_t\|_{L_2(Q_T)}+\|\operatorname{rot} v_t\|_{L_2(Q_T)}\leqslant c, \tag{2.17}$$

где c зависит от $M_1(T)$ из (2.14) и $\|f\|_{L_2(Q_T)}$, а $Q_T=\Omega\times(0,T)$.

Кроме этого, из (2.15) выводится и оценка

$$\max_{t\in[0,T]} \|\operatorname{rot} v_t(t)\| \leqslant c \tag{2.18}$$

с мажорантой c, зависящей от $M_1(T)$ и нормы $\|f\|_{L_{2,\infty}(Q_T)}$ функции f в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega;\mathbb{R}^m))$. Для ее получения надо третий член левой части перенести направо и заменить его мажорантой $\nu\|\operatorname{rot} v_t\|\|\operatorname{rot} v\| \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|\operatorname{rot} v_t\|^2 + \frac{\nu^2}{\varkappa}\|\operatorname{rot} v\|^2$. Остальные члены правой части оцениваются так же, как и выше.

Как отмечено выше, оценки (2.14), (2.17) и (2.18) справедливы и для галеркинских приближений v^N, $N = 1,2,\dots$, вычисленных по системе собственных функций $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1}^\infty$. Этого вполне достаточно, чтобы получить обобщенное решение v задачи, как предельную точку для множества приближений v^N, $N = 1,2,\dots$, и доказать теорему:

Теорема 2.1. *Задача* (1.1_k) *и* (2.1_k), $k = 1,2$, *при* $v^0 \in \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^m)$ *и* $m = 2$ *или* 3 *имеет по крайней мере одно обобщенное решение* v, *принадлежащее* $L_\infty(0,T;\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega))$ *с* v_t *из* $L_2(0,T;\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^1_{(n)}(\Omega))$. *Для него верны оценки* (2.14) *и* (2.17).

Эта теорема, по-существу, доказана А. П. Осколковым в обзоре [3] его результатов по различным задачам гидродинамики. В [3] имеется одна оплошность: написано, что неравенства (0.11)–(0.13) (у нас это неравенства $(2.3_k$, кı1,2,3) справедливы для произвольных элементов v из $H^s_n(\Omega)$, $s = 1,2$. На самом же деле для их справедливости надо на v наложить то или иное дополнительное ограничение, например, соленоидальность v. Но именно только к таким элементам v (элементам из $J^s_{(n)}(\Omega)$ в обозначениях [3]) автор и применяет (0.11)–(0.13).

В [3] имеется еще одна теорема (теорема 4.2), относящаяся к задаче (1.1_k), (2.1_k), $m = 2,3$. В ней утверждается наличие более гладкого решения $v(x,t)$ для $t \in [0,T]$, но при условии "малости" данных f и v^0, или его существование на малом интервале $[0,T^*]$, если f и v^0 "не малы." Единственность таких решений доказана в более ранних работах А. П. Осколкова [4, 5]. Правда, в [4, 5] рассмотрено вместо (2.1_k) условие прилипания: $v|_{\partial\Omega} = 0$, но это различие в вопросах единственности несущественно.

Можно показать, что в условиях теоремы 2.1 для $f \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega;\mathbb{R}^m))$ справедлива и оценка (2.18), понимаема как и (2.14) выше, в смысле $\operatorname*{vraimax}_{t\in[0,T]}$ и не $\max_{t\in[0,T]}$.

В следующем параграфе мы докажем, что в случае $m=2$ обобщенное решение v, гарантированное теоремой 2.1, единственно.

§3. Единственность обобщенных решений для двумерных задач

Обобщенное решение v, гарантированное теоремой 2.1, удовлетворяет системе (1.1_1) в форме интегрального тождества, которое, как известно, можно записать по-разному. Нам удобно взять его в виде набора равенств

$$\Big(v(t),\varphi^{(k)}\Big)+\varkappa\Big(\operatorname{rot}v(t),\operatorname{rot}\varphi^{(k)}\Big)-\Big(v^0,\varphi^{(k)}\Big)-\varkappa\Big(\operatorname{rot}v^0,\operatorname{rot}\varphi^{(k)}\Big)+$$

$$+\int_0^t\Big[\Big(-v(\tau)+\varkappa\Delta v(\tau),\,v(\tau)\cdot\nabla\varphi^{(k)}\Big)+\nu\Big(\operatorname{rot}v(\tau),\operatorname{rot}\varphi^{(k)}\Big)\Big]\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\Big(f(\tau,\varphi^{(k)}\Big)\,d\tau,\quad k=1,2,\ldots,\quad\forall\,t\in[0,T].\tag{3.1}$$

Галеркинские приближения $v^N(x,t)=\sum\limits_{k=1}^N c_k^N(t)\varphi^{(k)}(x)$ удовлетворяют (3.1) для $k=1,2,\ldots,N$. Докажем такую теорему единственности:

Теорема 3.1. *В случае $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ функция $v\in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(2,r)})$, удовлетворяющая равенствам (3.1), единственна.*

Предположим, что имеется две таких функции: v' и v''. Представим их разность u в виде: $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^\infty b_k(t)\varphi^{(k)}(x)$ и обозначим через $u^{(l)}(x,t)$ сумму $\sum\limits_{k=1}^l b_k(t)\varphi^{(k)}(x)$. Разность равенств (3.1) для v' и v'' дает для u соотношения

$$\frac{d}{dt}b_k(t)(1+\varkappa\lambda_k)+\nu\lambda_k b_k(t)=$$

$$= \left(u(t) - \varkappa\Delta u(t),\, v'(t)\cdot\nabla\varphi^{(k)}\right) + \tag{3.2}$$

$$+\left(v''(t) - \varkappa\Delta v''(t),\, u(t)\cdot\nabla\varphi^{(k)}\right),\ k = 1, 2, \dots,$$

справедливые для почти всех t из $[0, T]$. Умножая (3.2) на $b_k(t)$ и складывая результаты по k от 1 до l, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u^{(l)}\|^2 + \varkappa\|\operatorname{rot} u^{(l)}\|^2\right) + \nu\|\operatorname{rot} u^{(l)}\|^2 =$$

$$= \left(u - \varkappa\Delta u,\, v'\cdot\nabla u^{(l)}\right) + \left(v'' - \Delta v'',\, u\cdot\nabla u^{(l)}\right). \tag{3.3}$$

Первый член правой части представим в виде

$$\left(u - \varkappa\Delta u,\, v'\cdot\nabla u^{(l)}\right) = (u - \varkappa\Delta u,\, v'\cdot\nabla u) +$$

$$+\left(u - \varkappa\Delta u,\, v'\cdot\nabla(u^{(l)} - u)\right) = \tag{3.4}$$

$$= \varkappa\left(\operatorname{rot} u, v'_{kx_1}u_{2x_k} - v'_{kx_2}u_{1x_k}\right) + \left(u - \varkappa\Delta u,\, v'\cdot\nabla(u^{(l)} - u)\right).$$

Это представление подставим в (3.3) и результат проинтегрируем по t. Это дает

$$\frac{1}{2}\left(\|u^{(l)}(t)\|^2 + \varkappa\|\operatorname{rot} u^{(l)}(t)\|^2\right) + \nu\int_0^t \|\operatorname{rot} u^{(l)}(\tau)\|^2 =$$

$$= \int_0^t \varkappa\left(\operatorname{rot} u, v'_{kx_1}u_{2x_k} - v'_{kx_2}u_{1x_k}\right)\, d\tau +$$

$$+\int_0^t\left(u - \varkappa\Delta u,\, v'\cdot\nabla(u^{(l)} - u)\right) + \int_0^t\left(v'' - \Delta v'',\, u\cdot\nabla u^{(l)}\right) d\tau. \tag{3.5}$$

В силу предположения $v',\ v'' \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega))$ и свойств разложений по собственным функциям $\{\varphi^{(k)}\}$, имеем

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^\infty b_k^2(t) \leqslant c,\ \ \|\operatorname{rot} u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^\infty b_k^2(t)\lambda_k \leqslant c \quad \text{и}$$

$$\|Au(t)\|^2 = \sum_{k=1}^\infty b_k^2(t)\lambda_k^2 \leqslant c.$$

Благодаря им при $l \to \infty$ второй интеграл правой части (3.5) стремится к нулю, а третий к интегралу $\int\limits_0^t (v'' - \varkappa\Delta v'',\ u \cdot \nabla u) d\tau$. Поэтому из (3.5) можно сделать такой вывод:

$$
\begin{aligned}
&\|u_x(t)\|^2 \leqslant c_1 \|\operatorname{rot} u(t)\|^2 \leqslant \\
&\leqslant c_2 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega |u_x|^2 \, |v'_x| \, dx\, dt + \int\limits_0^t \|u \cdot \nabla u\| d\tau \right].
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Чтобы сделать отсюда заключение $u \equiv 0$, воспользуемся известными и элементарно доказываемыми неравенствами:

$$\max_{x \in K} |\, P_N \varphi(x)\,| \leqslant c\,(\ln N)^{1/2}\, \|\varphi\|_{W_2^1(K)}, \tag{3.7_1}$$

$$\|Q_N \varphi\|_{2,K} \leqslant c N^{-1} \|\varphi\|_{W_2^1(K)}, \tag{3.7_2}$$

$$\max_{x \in K} |\, Q_N \varphi(x)\,| \leqslant c N^{-1} \|\varphi\|_{W_2^2(K)}, \tag{3.7_3}$$

справедливыми для любой функции φ, заданной в квадрате $K \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям периодичности и принадлежащей тому $W_2^m(K)$, которое указано в правой части соответствующего неравенства. В (3.7_k) $P_N\varphi$ есть отрезок классического ряда Фурье для φ, взятый по значениям (k_1, k_2), удовлетворяющим неравенству $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} < N$, а $Q_N\varphi = \varphi - P_N\varphi$. Постоянные c в (3.7_k) зависят только от размера K. Из (3.7_k) известным образом (см., например, [8]) выводятся аналогичные неравенства для функций, заданных в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с не очень плохой границей. Будем обозначать их теми же номерами (3.7_k) $k = 1, 2, 3$. Благодаря (3.7_1) и (3.7_2) и оценке (2.14) для v'

$$\max_{x \in \Omega} \left|\, P_N v'_{ix_k}(x,t)\,\right| \leqslant c\,(\ln N)^{1/2}, \tag{3.8_1}$$

а

$$\|Q_N v'_{ix_k}\|_{2,\Omega} \leqslant c N^{-1} \tag{3.8_2}$$

с контролируемыми c. Эти неравенства используем для оценки первого члена правой части (3.6):

$$\int_0^t\int_\Omega |u_x|^2\,|v_x'|dxd\tau \leqslant \int_0^t\int_\Omega |u_x|^2\,(\,|P_N\,v_x'|+|Q_N\,v_x'|\,)\,dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant c(\ln N)^{1/2}\int_{Q_t}|u_x|^2dxd\tau+\int_0^t \|u_x\|^2_{4,\Omega}\,\|Q_N\,v_x'\|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c(\ln N)^{1/2}\int_0^t|u_x|^2d\tau+cN^{-1}\int_0^t c_1\|u_{xx}\|^2d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c(\ln N)^{1/2}\int_0^t|u_x|^2d\tau+c_2N^{-1},\quad t\leqslant T.$$

Второй член правой части (3.6) оценим, используя (3.7_1) и (3.7_3), так:

$$\int_0^t \|u\cdot\nabla u\|f\tau \leqslant \int_0^t \|(P_Nu+Q_Nu)\cdot\nabla u\|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(\ln N)^{1/2}\int_0^t|u_x|^2d\tau+c_2N^{-1}.$$

Подставляя эти оценки в (3.6), получим для $y(t)\equiv\|u_x(t)\|^2$ неравенство

$$y(t)\leqslant c_3(\ln N)^{1/2}\int_0^t y(\tau)d\tau+c_4N^{-1},\quad t\in[0,T]. \tag{3.9}$$

Считая $N\geqslant 3$, заменим его более грубым неравенством

$$y(t)\leqslant c_3\ln N\int_0^t y(\tau)d\tau+c_4N^{-1}.$$

Интегрируя его, получим

$$y(t)\leqslant c_4N^{-1+c_3t}.$$

Так как оно верно при всех $N \geqslant 3$, то отсюда следует, что $y(t) \equiv 0$ для $t \in [0, t_1]$, $t_1 < c_3^{-1}$. Применяя этот вывод к $y(t)$ последовательно на отрезках $[t_1, 2t_1]$, $[2t_1, 3t_1]$ и т.д. убедимся, что $y(t) \equiv 0$ на всем $[0, T]$. Теорема 3.1 доказана.

Ситуация, с которой мы столкнулись при доказательстве теоремы единственности, сходна с той, которая встретилась при исследовании двумерных уравнений Эйлера для несжимаемых жидкостей (см. В. И. Юдович [11] и другие его работы) и доказательстве теорем единственности для обобщенных решений нестационарных задач теории оболочек (см. В. И. Седенко [12] и другие его работы). Во всех этих задачах "чуть-чуть" не хватает информации о гладкости решения для того, чтобы воспользоваться давно отработанными методами (например, леммой Грануола). В указанных случачаях "не хватает" ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, в $L_\infty(\Omega)$.

В следующем параграфе мы снова встретимся с этой "нехваткой" и преодолеем ее с помощью (4.3).

§4. Существование более гладких решений

Покажем, что при $m = 2$ можно оценить норму v и v_t в $W_2^l(\Omega)$ с любым l через данные задачи. Для оценки нормы v в $W_2^3(\Omega)$ используем эквивалентность интегралов $\|\Delta \mathrm{rot}\, v\|$ и $\|v\|_{W_2^3(\Omega)}$ для любой $v \in \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega) \cap W_2^3(\Omega)$, точнее неравенства

$$c_1 \|v\|_{W_2^3(\Omega)} \leqslant \|\Delta \mathrm{rot}\, v\| \leqslant c_2 \|D_x^3 v\|. \tag{4.1}$$

Левое, нетривиальное неравенство следует из второго основного неравенства $\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c\|\Delta u\|_{2,\Omega}$, справедливого для любой $u \in W_2^2(\Omega)$ и равной нулю на $\partial\Omega$ ([7], см. также [8]) и известных свойств оператора rot :

$$\|u\|_{W_2^l(\Omega)} \leqslant c(l) \|\mathrm{rot}\, u\|_{W_2^{l-1}(\Omega)} \tag{4.2}$$

для любых $u \in \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n)}(\Omega) \cap W_2^l(\Omega)$.

Кроме этого нам понадобится сугубо двумерное неравенство

$$\max_{x \in \Omega} |u(x)| \leqslant M_1 \ln [\, M_2 + M_3 \|\Delta u\| \,], \quad M_2 \geqslant 1, \tag{4.3}$$

справедливое для любой $u \in W_2^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, [11]. В нем величины M_k определяются Ω и $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$. Оно и его многомерные аналоги выводятся на основе известных теорем вложения $W_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, но с правильным учетом зависимости роста мажорант в них от параметров n, l, p и q.

Применим оператор rot к обеим частям (1.1_1). Это даст уравнение

$$\partial_t(\mathrm{rot}\, v - \varkappa\Delta \mathrm{rot}\, v) + v\cdot\nabla(\mathrm{rot}\, v - \varkappa\Delta\mathrm{rot}\, v) - j_1 - \nu\Delta\mathrm{rot}\, v = \mathrm{rot}\, f, \quad (4.4)$$

где

$$j_1 = \varkappa\left(v_{kx_1}\Delta v_{2x_k} - v_{kx_2}\Delta v_{1x_k}\right).$$

Умножим (4.4) скалярно на $-\Delta\mathrm{rot}\, v$ и результат преобразуем к виду

$$\begin{gathered}\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\mathrm{rot}\, v\|^2 + \nu\|\Delta\mathrm{rot}\,\|^2 = \\ = (\mathrm{rot}\, v_t + v\cdot\nabla\mathrm{rot}\, v - j_1 - \mathrm{rot}\, f,\ \Delta\mathrm{rot}\, v) \equiv j_2.\end{gathered} \quad (4.5)$$

Правую часть j_2 оценим, используя неравенство Коши и (2.14), следующим образом:

$$\begin{gathered}|j_2| \leqslant \big(\|\mathrm{rot}\, v_t\| + \max_\Omega |v|\|\nabla\mathrm{rot}\, v\| + \\ + \varkappa\max_\Omega |v_x|\|\Delta v_x\| + \|\mathrm{rot}\, f\|\big)\|\Delta\mathrm{rot}\, v\| \leqslant \\ \leqslant (c + \|\mathrm{rot}\, f\|)\,\|\Delta\mathrm{rot}\, v\| + c\varkappa\max_\Omega |v_x|\|\Delta\mathrm{rot}\, v\|^2.\end{gathered} \quad (4.6)$$

Для оценки $\max\limits_\Omega |v_x(x,t)|$ воспользуемся (2.14) и неравенствами (4.1)–(4.3). Они дают неравенство

$$\max_\Omega |v_x(x,t)| \leqslant c_1 \ln\left[c_2 + c_3\|\Delta\mathrm{rot}\, v(t)\|\right], \quad c_2 \geqslant e, \quad (4.7)$$

с контролируемыми нами c_k. Благодаря (4.6) и (4.7) из (4.5) следует для $y(t) \equiv (\|\Delta\mathrm{rot}\, v(t)\|^2 + 1)^{1/2}$ неравенство

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}y(t) \leqslant cc_1\varkappa y(t)\ln\left[c_2 + c_3\, y(t)\right] + c_4(t), \quad (4.8)$$

где $c_4(t) = c + \|\mathrm{rot}\, f(t)\|$ из (4.6). Для $z(t) \equiv c_2 + c_3 y(t)$ из (4.8) следует неравенство

$$\frac{dz}{z\ln z} \leqslant \left[2cc_1 + \frac{2}{\varkappa}c_3 c_4(t)\right]dt,$$

интегрируя которое, получим оценку для $z(t)$

$$\begin{gathered} z(t) = c_2 + c_3 y(t) \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{ \ln z(0) \cdot \exp\left[2cc_1 t + \frac{2}{\varkappa} c_3 \int\limits_0^t c_4(\tau)\, d\tau \right] \right\}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Отсюда и (4.1) следует оценка

$$\max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{W_2^3(\Omega)} \leqslant c \tag{4.10}$$

с мажорантой c, зависящей от $\|v^0\|_{W_2^3(\Omega)}$ и $\|\operatorname{rot} f\|_{L_2(Q_T)}$, а также от более слабых норм v^0 и f, указанных в §2.

Оценки всех более сильных норм v и v_t приводятся проще, ибо полученные оценки (2.14), (2.18) и (4.10) позволяют работать с (1.1_1) как с линейной системой, рассматривая множитель v во втором члене как коэффициент, для которого нам известны оценки достаточно сильных норм. В частности оценка

$$\max_{t \in [0,T]} \|v_t(t)\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant c \tag{4.11}$$

выводится из равенства, получаемого из (1.1_1), скалярно умноженного на $-\Delta v_t$.

Резюмируя сделанное, можно сказать, что мы рассматриваем задачу (1.1_k), (2.1_k) как задачу Коши для операторного уравнения

$$\begin{cases} \partial_t(v + \varkappa A v) + P_{\overset{\circ}{\mathrm{J}}}[\, v \cdot \nabla(v + \varkappa A v)\,] + \nu A v = P_{\overset{\circ}{\mathrm{J}}} f, \\ v(\cdot, t) \in \overset{\circ}{\mathrm{J}}{}^2_{(n,r)}(\Omega), \quad v\big|_{t=0} = v^0, \end{cases} \tag{4.12}$$

в котором $P_{\overset{\circ}{\mathrm{J}}}$ есть ортопроектор из $L_2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ на $\overset{\circ}{\mathrm{J}}(\Omega)$, а оператор A определен в (2.7).

После того, как задача (4.12) решена, мы можем найти давление p, используя полную систему (1.1_1).

В заключение надо сказать, что часть результатов работ [4] и [5] А. П. Осколкова, касающаяся априорных оценок и разрешимости системы (1.1_k) при краевом условии $v|_{\partial\Omega} = 0$, нуждается в ревизии. В этих вопросах он использовал аппроксимацию, которая некорректна как для (1.1_k), так и для системы Навье–Стокса. Он взял ее из моей работы [13] 50х годов, утверждение которой носят условный характер и которая давно была забракована мною. Она была выполнена до первого безусловного результата [14] по глобальной однозначной разрешимости первой начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса (случай двух пространственных переменных) и задолго до описания корректных краевых условий для системы Стокса и ее обобщений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-01-00824, и INTAS, грант № 94-1376.

Литература

1. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды.* Т. 2, М., Наука, (1970).
2. Л. С. Артюшков, *Динамика неньютоновских жидкостей.* Л., (1979).
3. А. П. Осколков, *Начально-краевые задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **213** (1994), 93–115.
4. А. П. Осколков, *О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **27** (1972), 145–160.
5. А. П. Осколков, *О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растоворов полимеров.* — Зап. научн. семи. ЛОМИ **38** (1973), 98–136.
6. А. П. Осколков, *О нестационарных течениях вязко-упругих жидкостей.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **159** (1983), 101–131.
7. О. А. Ладыженская, *Смешанная задача для гиперболического уравнения.* М., Гостехиздат, (1953).
8. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математическлй физики.* М., Наука. (1973).
9. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М., ГИФМЛ, (1961); (второе издание, М., Наука, 1970).
10. О. А. Ладыженская, *Об интегральных оценках и сходимости приближенных методов для линейных эллиптических операторов.* — Вестник ЛГУ **7** (1958), 60–69.
11. В. Н. Юдович, *Двумерная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости.* — Мат. сб. **64, No. 4** (1964), 562–588.
12. В. Н. Седенко, *Теорема единственности обобщенного решения начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений.* — Механика твердого тела **6** (1991), 142–150.

13. О. А. Ладыженская, *О нестационарных уравнениях Навье–Стокса.* — Вестник ЛГУ, серия мат., мех.6 астр. **No. 19** (1958), 9–18.

14. О. А. Ладыженская, *Решение "в целом" краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных.* — ДАН СССР **123** (1958), 427–429.

Ladyzhenskaya O. A. On a global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers.

A global unique solvability of the two-dimensional unitial boundary value problem with some slip-boundary conditions for a quasilinear system describing the flows of weak water solutions of polymers is proved. It is noted that for this system a global unique solvability of the Cauchy problem and the initial boundary problem with the periodic boundary conditions are proved in a similar way.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 февраля 1996 г.