Н. В. Хмылко

О ПОНЯТИИ ТОЧНОСТИ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ

1. Постановка проблемы. В теории расширений топологических пространств естественными объектами являются строгие и одновременно точные расширения. При этом расширение (X', τ') называется *строгим* (по Стону) расширением топологического пространства (X, τ), если τ'-замыкания всех подмножеств множества X образуют базу τ'-замкнутых множеств. Расширение (X', τ') называется *точным* (по Иванову) расширением топологического пространства (X, τ), если для любых двух не совпадающих точек x, y в X', из которых хоть одна не принадлежит X, найдется в X множество F такое, что τ'-замыкание этого множества содержит одну из этих точек и не содержит другую (в этом случае говорят, что точки x и y *топологически различимы* из X, а множество $F' = \tau' - clF$ – *различающее* эти точки множество).

При переходе от теории расширений топологических пространств к теории расширений битопологических пространств ситуация связанная с этими понятиями несколько усложняется. Правда понятие строгости расширений переносится из топологической теории в битопологическую довольно просто. Для простоты мы будем здесь рассматривать только такие расширения (X', β') битопологических пространств (X, β), для которых $(X' \times X', \beta')$ является расширением топологического пространства $(X \times X, \beta)$. Расширение (X', β') мы будем называть *строгим* расширением битопологического пространства (X, β), если $(X' \times X', \beta')$ является строгим расширением топологического пространства $(X \times X, \beta)$. Однако понятие точности расширения переносится на битопологические пространства не столь тривиально. Основная трудность связана здесь с невозможностью непосредственного переноса топологической различимости точек на битопологические пространства. Дело в том, что в битопологической ситуации различаемые точки принадлежат основному множеству X', а β'-замыкания являются подмножествами множества $X' \times X'$ и поэтому не могут быть различающими эти точки множествами.

Необходимо, в связи с этим, либо установить какое-то правило построения по битопологическим структурам β и β' системы различающих подмножеств множества X' либо установить какое-то правило сопоставления каждой точке $x \in X'$ некоторого множества $C_x \subset X' \times X'$ и процедуру различения этих множеств.

2. Точность строгих расширений. Понятие строгости и понятие точности расширений топологических пространств независимы, существуют строгие не точные расширения и, наоборот, не строгие точные расширения. Можно заметить, однако, что в классе строгих расширений топологических пространств понятию точности расширений можно придать категорный характер, а именно оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема. *Если (X', τ') является строгим расширением топологического пространства (X, τ), то оно будет точным расширеним тогда и только тогда, когда для любой пары не совпадающих точек $x \in X'$, $y \in X'$, из которых хоть одна не принадлежит X, инволюция $\varphi_{x,y}$, меняющая местами эти точки и оставляющая на месте остальные точки, не будет непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть (X', τ') – строгое расширение топологического пространства (X, τ), $x \neq y$ – точки из X', из которых хоть одна не принадлежит X. Пусть, для определенности, $y \notin X$. Нам достаточно доказать, что отображение $\varphi_{x,y}$ является непрерывным отображением тогда и только тогда, когда точки x и y топологически неразличимы из X. Предположим, что точки x и y топологически неразличимы из X. В этом случае они будут топологически неразличимы и в X', то есть каждое τ'-замкнутое множество либо содержит обе эти точки либо не содержит ни одну из них. Но тогда $\varphi_{x,y} = \varphi^{-1}_{x,y}$ переводит каждое τ'-замкнутое множество в себя и потому является непрерывным отображением.

Предположим, теперь, что $\varphi_{x,y}$ – непрерывное отображение. Являясь инволюцией, $\varphi_{x,y}$ будет в этом случае гомеоморфизмом. Тогда из $y \in \tau' - clF$ следует $x = \varphi_{x,y}(y) \in \tau' - clF$. Действительно, если допустить, что $x \notin \tau' - clF$ при $y \notin X$, то $\varphi_{x,y}F = F$. Тогда множество $\tau' - cl(\varphi_{x,y}F) = \tau' - clF$ содержит точку y и не содержит точку x. В то же время из непрерывности $\varphi_{x,y}$ следует $\tau' - cl(\varphi_{x,y}F) = \varphi_{x,y}(\tau' - clF) = (\tau' - clF) \setminus \{y\} \cup \{x\}$.

Так как множества вида $\tau' - clF$, где $F \subset X$ образуют базу замкнутых множеств пространства (X', τ'), то любое τ'-замкнутое множество в X', содержащее точку y, будет содержать точку x. Но тогда верно и обратное: любое τ'-замкнутое множество в X', содержащее точку x, будет содержать точку y. Это следует из того, что пара точек x и y принадлежит некоторому множеству $A \subset X'$ тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $\varphi_{x,y}A$. Точка y принадлежит множеству $\varphi_{x,y}(\tau' - clF)$, следовательно, $x \in \varphi_{x,y}(\tau' - clF)$, значит $x, y \in \tau - cl\, F$. Так как множества вида $\tau' - clF$, где $F \subset X$, замкнуты, точки x и y топологически неразличимы из X. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет рассматривать в качестве тривиального обобщения на битопологические пространства понятия точности строгого расширения следующее определение.

Строгое расширение (X', β') битопологического пространства (X, β) называется его *точным* расширением, если для любой пары не совпадающих точек $x \in X'$, $y \in X'$, из которых хоть одна не принадлежит X, инволюция $\varphi_{x,y}$, меняющая местами эти точки и оставляющая на месте остальные точки, не будет бинепрерывным отображением.

Такое понимание точности битопологических расширений будет естественным обобщением категорного понятия точности топологических расширений при стандартном вложении категории топологических пространств и их непрерывных отображений в категорию битопологических пространств и их бинепрерывных отображений. Это следует из того факта, что отображение $\varphi_{x,y} \times \varphi_{x,y}$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $\varphi_{x,y}$.

3. Точность не строгих расширений. Если (X', τ') не является строгим расширением топологического пространства (X, τ), то может оказаться так, что для любой пары не совпадающих точек $x \in X'$, $y \in X'$, из которых хоть одна не принадлежит X, инволюция $\varphi_{x,y}$, меняющая местами эти точки и оставляющая на месте остальные точки, не будет непрерывным отображением, но тем не менее расширение не является точным. Возможность такой ситуации подтверждается следующим тривиальным примером.

Пример. Пусть $X = \{0\}$, $X' = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$, $\tau' = \{\emptyset, \{0\}, X'\}$. Здесь имеется единственная инволюция $\varphi_{0,1}$, она не является, очевидно, непрерывным отображением, но точки 0 и 1 не различимы из X.

Если (X',τ') не является строгим расширением топологического пространства (X,τ), то мы можем рассмотреть на X' топологическую структуру τ'_0, такую что (X',τ'_0) является строгим расширением топологического пространства (X,τ). Так как понятие точности произвольного расширения определено в терминах структуры τ'_0, то расширения (X',τ') и расширение (X',τ'_0) одновременно точны или не точны. Так, в рассмотренном выше примере топологическая структура τ'_0 тривиальна и потому расширения (X',τ') и (X',τ'_0) не являются точными расширениями.

Аналогичный подход к понятию точности произвольного (не обязательно строгого) расширения можно использовать и в битопологической ситуации.

4. Структурное определение точности. Мы рассмотрели выше категорное определение точности расширений битопологических пространств. Сформулируем на его основе структурное определение точности. Естественно, что при этом нам придется рассматривать отображения $\varphi_{x,y}\times\varphi_{x,y}$ топологического пространства $X'\times X'$ в себя, определенные для каждой пары различных точек x, y, из которых хоть одна не принадлежит X. Проблема состоит в отыскании структурного условия необходимого и достаточного для того, чтобы каждое такое отображение было непрерывным. При этом мы будем предполагать, конечно, что $(X'\times X',\beta')$ является строгим расширением топологического пространства $(X\times X,\beta)$, поэтому нам можно будет ограничиться рассмотрением β'-замыканий подмножеств множества $X\times X$. Заметим теперь, что отображение $\varphi_{x,y}\times\varphi_{x,y}$ переводит крест с центром (x,x) в крест с центром в (y,y) и обратно (рис. 1), оставляя все остальные точки на месте.

Теорема. *Отображение $\varphi_{x,y}\times\varphi_{x,y}$ непрерывно тогда и только тогда, когда β'-замыкание каждого множества $F\subset X\times X$ содержит или не содержит одновременно обе точки из пар вида: (x,u) и (y,u), (w,x) и (w,y), (x,x) и (y,y), (x,y) и (y,x).*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы п.2 с учетом того, что отображение $\varphi_{x,y}\times\varphi_{x,y}$ переводит точку (x,u) в точку (y,u) и обратно, точку (w,x) в точку (w,y) и обратно, точку (x,x) в точку (y,y) и обратно, точку (x,y) точку (y,x) и обратно.

Из этой теоремы следует следующее структурное определение точности строгого битопологического расширения.

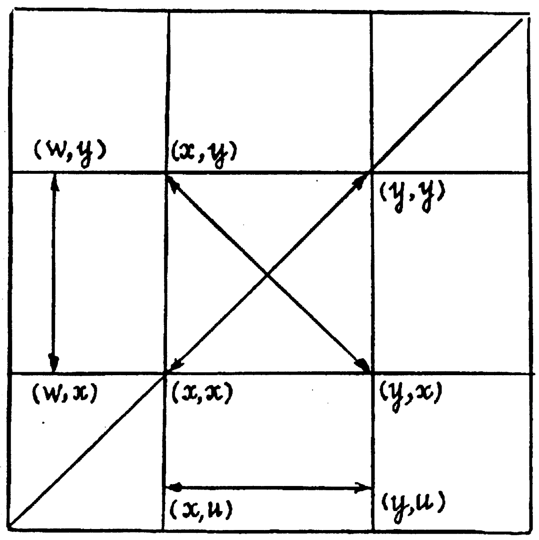

Рис. 1.

Строгое расширение (X', β') битопологического пространства (X, β) является его *точным* расширением если для любой пары не совпадающих точек $x \in X'$, $y \in X'$, из которых хоть одна не принадлежит X, β'-замыкание некоторого множества $F \subset X \times X$ или содержит ровно одну из точек (x, u), (y, u), или содержит ровно одну из точек (w, x), (w, y), или содержит ровно одну из точек (x, x), (y, y), или содержит ровно одну из точек (x, y), (y, x).

5. Условия типа точности. В формулировку понятия точности битопологического расширения входили точки x, y и множества $C_x = (\{x\} \times X') \cup (X' \times \{x\})$, $C_y = (\{y\} \times X') \cup (X' \times \{y\})$ (кресты этих точек). Эти множества должны были удовлетворять соответствующим условиям. Представляет определенный интерес рассматривать также и понятия *типа точности*, в которых точкам $x \in X$ сопоставляются не их кресты, а какие-то другие множества $C_x \subset X' \times X'$, а пары C_x, C_y должны будут удовлетворять каким-то другим условиям. Тип точности будет определен типом множеств C_x и типом условий накладываемых на пары C_x, C_y. Можно, например, чуть-чуть изменить понятие точности, рассматривая для точек из X их кресты не в $X' \times X'$, а в $X \times X$. Можно, также, положить $C_x = X' \times X'$ для всех $x \in X'$ или же положить $C_x = X' \times X'$ для всех $x \in X' \setminus X$ и $C_x = X \times X$ для всех $x \in X$. В качестве условия накладываемого на пару C_x, C_y (как всегда хоть одна из точек x, y не принадлежит X) можно взять, например, топологическую различимость из $X \times X$ хотя бы одной пары точек, одна из которых принадлежит C_x, а другая принадлежит C_y. Это довольно слабое условие. С другой стороны можно потребовать, чтобы имела место топологическая различимость из $X \times X$ каждой такой пары точек. Это очень сильное условие.

Тривиальными примерами являются следующие понятия типа точности. Положим $C_x = X' \times X'$ для всех $x \in X'$. Тогда можно будет потребовать топологическую различимость из $X \times X$ хоть одной пары точек из $X' \times X'$ или же (в другом варианте), топологическую различимость каждой такой пары точек.

Разнообразие понятий типа точности битопологических расширений весьма велико. Эти понятия можно комбинировать. Пусть Λ – некоторое множество понятий типа точности, $C_x^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$ – множество сопоставляемое точке $x \in X'$ для понятия типа точности λ, C_x – множество полученное из $C_x^{(\lambda)}$, взятых по всем $\lambda \in \Lambda$, какой-то не зависимой от x теоретико множественной операцией. При этом на пары C_x, C_y накладывается условие, являющееся какой-то не зависимой от x логической комбинацией условий, накладываемых на пары $C_x^{(\lambda)}$, $C_y^{(\lambda)}$ для каждого $\lambda \in \Lambda$.

В качестве примера, рассмотрим комбинацию горизонтальной точности, вертикальной точности и диагональной точности (во всех последующих определениях рассматриваются точки x, y, хоть одна из которых не принадлежит X).

Горизонтальной точностью будем называть понятие типа (h), для которого $C_x^{(h)} = X' \times \{x\}$, причем для каждой пары $C_x^{(h)}$, $C_y^{(h)}$ найдется множество $F \subset X \times X$, β'-замыкание которого содержит одну из точек (x, u), (y, u) и не содержит другую, для некоторого $u \in X'$.

Вертикальной точностью будем называть понятие типа (v), для которого $C_x^{(v)} = \{x\} \times X'$, причем для каждой пары $C_x^{(v)}$, $C_y^{(v)}$

найдется множество $F \subset X \times X$, β'-замыкание которого содержит одну из точек (w, x), (w, y) и не содержит другую, для некоторого $w \in X'$.

Диагональной точностью будем называть понятие типа (d), для которого $C_x^{(d)} = \{(x, x)\}$, причем для каждой пары $C_x^{(d)}$, $C_y^{(d)}$ найдется множество $F \subset X \times X$, β'-замыкание которого содержит одну из точек (x, x), (y, y) и не содержит другую.

Понятие диагональной точности можно усилить, если потребовать различающие в $X \times X$ множества содержались в диагонали $\Delta \subset X \times X$. Следующий пример показывает, что это усиление существенно.

Пример. Пусть $X = (0, 1)$, $X' = [0, 1]$. β' имеет предбазу замкнутых множеств, состоящую из обычных замкнутых множеств квадрата отрезка [0,1], а также его диагонали Δ' без конечных точек ((0,0) и (1,1)). Нетрудно видеть, что мы получили расширение с диагональной точностью, но точки (0,0) и (1,1) не различимы из Δ.

К сожалению нет аналогичной точности, которая имела бы дело с точками (x, y) и (y, x). Объединение горизонтальной, вертикальной и диагональной точностей дает лишь некоторое приближение к точности.

Khmylko N. V. On notion of exactness of bitopological extensions.

The author considers a generalization on bitopological spaces of the notion of exactness of topological extensions and some bitopological notions of exactness type.

С.-Петербургский институт
точной механики и оптики
(технический университет)

Поступило 25 декабря 1996г.