А. А. Иванов

БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Предисловие

Эта книга является итогом многолетней работы автора по битопологическим пространствам. Подготовка ее текста была осуществлена в 1994–1995 годах при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 94–01–00914 и 95–01–00914). В работе над книгой автор руководствовался двоякой целью. С одной стороны, было естественное желание представить свои собственные результаты исследований, предпринятых им в разное время в этом направлении. Однако хотелось также написать нечто целое, дающее более или менее полное представление об этой области математики.

Невозможно, конечно, изложить всю теорию битопологических пространств достаточно детально, ее журнальная литература содержит сотни статей. Да в этом и нет необходимости, не все в этой литературе достойно внимания. Конечно выбор характера изложения той или иной части материала отражает научные интересы автора. Что-то описано более детально, что-то лишь схематично, а о чем-то вообще не упомянуто. Но дело не только в этом. Имеются и объективные причины, порождающие такую пристрастность. С наибольшими подробностями излагаются здесь основы общей теории битопологических пространств, инициированной и довольно далеко продвинутой самим автором. Именно в этой теории возникали и несомненно еще появятся совершенно новые идеи и методы, поэтому ее необходимо настойчиво пропагандировать.

Читатель, заинтересовавшийся тем или иным вопросом теории битопологических пространств, может найти недостающие детали в статьях цикла “Проблематика теории битопологических пространств”, а в случае необходимости найти и соответствующие ссылки в статьях цикла “Библиография по битопологическим пространствам”. Эти статьи опубликованы в следующих сборниках серии “Записки научных семинаров ЛОМИ

(ПОМИ)":

Исследования по топологии. 6., том 167, (1988г.),

Исследования по топологии. 7., том 208, (1993г.),

Исследования по топологии. 8., том 231, (1995г.).

В книге были использованы и другие сатьи автора, опубликованные в цикле "Исследования по топологии" Записок Научных Семинаров ЛОМИ, как непосредственно связанные с битопологическими пространствами, так и не имеющие к ним, на первый взгляд, прямого отношения. В тексте книги нет ссылок на эти статьи, но всегда можно понять, какие из них имеются в виду. Вот краткие комментарии к этим статьям.

Структуры расширений. – Исследования по топологии. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 36 (1973 г.).

Значительная часть содержащихся в этой статье результатов, относящихся к расширениям топологических пространств и пополнениям равномерных пространств, была обобщена в книге на битопологические пространства.

Детализации. – Исследования по топологии. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 36 (1973 г.).

Проблематика, связанная с вложением одной категории в другую, возникает и в битопологической теории. В частности, в книге изучались аксиомы детализации (ретракции) в битопологической ситуации.

Неподвижные точки отображений метрических пространств. – Исследования по топологии 2. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 66 (1976 г.).

Материал этой статьи слабо отражен в книге, хотя возможно его широкое обобщение с целью создания теории неподвижных точек отображений биметрических пространств.

Структуры топологического типа. – Исследования по топологии 3. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 83 (1979 г.).

Битопологическая теория рассматривается в книге, как часть теории пространств топологического типа.

Следующие две статьи в комментариях не нуждаются.

Битопологические пространства. – Исследования по топологии 4. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 122 (1982 г.).

Битопологические многообразия. – Исследования по топологии 5. Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, том 143 (1985 г.).

Автор выражает надежду, что эта книга будет полезной не только для сложившихся специалистов, но и для начинающих математиков, в том числе студентов, возбудит у них интерес к теории битопологических пространств и ее приложениям.

ВВЕДЕНИЕ

1. Один поучительный пример. Прежде, чем приступить к самой теории битопологических пространств, хотелось бы пояснить что, собственно говоря, представляет из себя эта теория и каковы возможности ее применения. Нам кажется полезным привести для этого следующий простой пример.

Пример.

Пусть $X = \{x|0 < x \leqslant 1\}$, τ_1, τ_2 – топологические структуры на X, определяемые следующим образом:

τ_1 – обычная топологическая структура полуинтервала $(0, 1]$,

τ_2 – обычная топологическая структура окружности, полученной отождествлением концов отрезка $[0, 1]$.

Топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) не обладают свойством неподвижной точки, то есть для каждого из этих пространств в отдельности (полуинтервала и окружности) существует какое-то его непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X$ в себя, не имеющее неподвижной точки, то есть точки $x \in X$, для которой $f(x) = x$. Если, однако, мы рассмотрим любое отображение $f : X \longrightarrow X$ непрерывное относительно обеих топологических структур τ_1 и τ_2 одновременно, то такое отображение будет иметь неподвижную точку. Действительно, пусть $f(1) \neq 1$, докажем, что в этом случае f-образ множества X является его собственным подмножеством, а именно, что ему не принадлежат точки достаточно близкие к точке 0. Допустим, что это не так и существует в X последовательность (x_n), для которой $f(x_n)$ сходится к 0 относительно обычной топологии числовой прямой. Без нарушения общности, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $(x_n) \longrightarrow x$ в (X, τ_2) для некоторой точки $x \in X$ и поэтому $f(x) = 1$. Но это невозможно, так как последовательность $(f(x_n))$ не сходится в (X, τ_1) к точке 1. Итак мы доказали, что $f(X)$ является собственным подмножеством окружности, и потому будет топологическим отрезком в (X, τ_2). Но тогда f непрерывно отображает этот отрезок в себя и потому имеет неподвижную точку.

Таким образом одновременное рассмотрение двух топологических структур, заданных на одном и том же множестве, или, как говорят, рассмотрение битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) позволило получить существенно новый результат. Это битопологическое пространство обладает свойством неподвижной точки, в то время как топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) этим свойством не обладают.

2. Возникновение битопологической в смысле Келли теории. Теория битопологических пространств является сравнительно молодой областью топологии. Ее возникновение связывают обычно с появлением в 1963 году работы Келли. В этой основополагающей статье было четко сформулировано исходное понятие битопологического пространства, как множества с двумя произвольно фиксированными на нем топологическими структурами. Там же были приведены и некоторые результаты, в значительной мере определившие развитие теории битопологических пространств на многие годы вперед. Справедливости ради, следует отметить, что одновременное изучение двух топологических структур, определенных на одном и том же множестве, проводилось и в более ранних работах других авторов. Сам термин "битопологическое пространство" был введен в 1957 году Мотшаном. Он рассматривал битопологические пространства, как тройки (X, τ_1, τ_2), однако топологические структуры τ_1 и τ_2 были у него сильно связаны друг с другом. Более того, его интересовали не битопологические пространства, как таковые, а специальные пары (τ_1, τ_2) топологических структур.

Необходимость одновременного изучения двух топологических структур отмечалась еще в 1931 году Вилсоном, однако и у него они не были произвольными. У Вестона (1957 год) фигурировали уже произвольные пары (τ_1, τ_2) топологических структур, но изучались только отношения между τ_1 и τ_2 для всевозможных пар топологических структур заданных на произвольно фиксированном множестве X. В связи с этим у него даже не было специального термина обозначающего тройки (X, τ_1, τ_2).

Во всех этих работах, включая и статью Келли, битопологические пространства выступали как вторичные объекты, естественно возникающие при изучении других объектов. Однако сам факт появления битопологических пространств в самых разных, далеких друг от друга, теориях влечет необходимость их изучения, как самостоятельных объектов, требует создания соответствующей теории.

3. Естественность битопологической теории Келли. Простейшими объектами, естественно порождающими битопологические пространства, являются различные несимметричные структуры. Пусть, например, d – несимметричная метрика, определенная на некотором множестве X, то есть $d(x,y) \neq d(y,x)$ для некоторых точек x, y из X. Эта метрика определяет две системы окрестностей точек, а именно:

$$U_1(x,\epsilon) = \{y | d(y,x) < \epsilon\}, \ x \in X, \ \epsilon > 0,$$

$$U_2(x,\epsilon) = \{y | d(x,y) < \epsilon\}, \ x \in X, \ \epsilon > 0.$$

и, следовательно, она определяет две несовпадающие в общем случае топологические структуры τ_1 и τ_2. Тем самым несимметричная метрика определяет битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2).

Произвольное отношение порядка на множестве X также определяет битопологическое пространство. При этом одна топологическая структура определяется множествами A, удовлетворяющими условию.

$$(x \in A \quad \text{и} \quad x \leq y) \iff y \in A$$

другая же определяется множествами A, удовлетворяющими условию

$$(x \in A \quad \text{и} \quad y \leq x) \iff y \in A.$$

Интересна также связь битопологических пространств с дистрибутивными решетками.

Пусть M – дистрибутивная решетка, то есть частично упорядоченное множество, в котором $a + b = \sup\{a,b\}$ и $a \times b = \inf\{a,b\}$ существуют и эти операции дистрибутивны. Пусть X – множество, состоящее из всех простых идеалов в M, то есть подмножеств $p \subset M$, для которых

$$a + b \in p \iff (a \in p \quad \text{или} \quad b \in p),$$

$$a \times b \in p \iff (a \in p \quad \text{и} \quad b \in p).$$

На множестве X можно ввести две топологические структуры τ_1 и τ_2, определяемые, соответственно, системой всех множеств вида $\{p|a \notin p\}$ и вида $\{p|a \in p\}$.

Еще до, так сказать, официального зарождения теории битопологических пространств была установлена связь их с бимодальными логиками. В бимодальной логике имеются две модальные связки $\Diamond_1$ и $\Diamond_2$ – строгая возможность и, соответственно, слабая возможность. Имеются также модальные связки $\Box_1$ и $\Box_2$ – строгая необходимость и слабая необходимость, определяемые, соответственно, как $\sim \Diamond_1 \sim$ и $\sim \Diamond_2 \sim$, где $\sim$ – связка отрицания.

При построении битопологической модели фиксированной бимодальной логики, каждой переменной сопоставляется некоторое подмножество фиксированного множества X, отрицанию соответствует дополнение, конъюнкции сответствует пересечение, дизъюнкции – объединение множеств, связкам $\Diamond_1$ и $\Diamond_2$ – соответствуют операции замыкания (вообще говоря, различные), связкам $\Box_1$ и $\Box_2$ – внутренности. Тем самым, модель является битопологическим пространством.

Приведенные примеры, а их количество можно было бы увеличить, убедительно демонстрируют необходимость введения самостоятельного понятия битопологического пространства и развития соответствующей теории. Эта теория привлекла к себе внимание многочисленных исследователей.

4. Пространства топологического типа, битопологические пространства. Совершенно другой подход, дающий более общее, чем у Келли, понятие битопологического пространства был предложен в 1979 Ивановым. В его статье рассматриваются так называемые. *структуры топологического типа*. Это понятие вводится следующим образом.

Пусть X – некоторое множество, рассматриваемое как основное, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – какие-то дополнительные множества. Начиная с множеств $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ можно образовывать новые множества, используя теоретико-множественную операцию образования произведения двух множеств и операцию перехода от множества к множеству всех его подмножеств

$$Y_1, Y_2 \mapsto Y_1 \times Y_2 = \{(y_1, y_2)|\ y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\},$$

$$Y \mapsto PY = \{A|A \subset Y\}.$$

Применяя эти операции многократно в любой последовательности мы получаем разнообразные множества, составляющие башню (шкалу) множеств над множеством X. Произвольную точку любого из таких множеств называют (по Бурбаки) структурой на X. Если вспомогательных множеств нет, то структура называется внутренней. Например, топологическая структура, определенная на X, как совокупность всех открытых множеств соответствующего топологического пространства, является точкой множества $P(PX)$.

Структурой топологического типа на X называется топологическая структура, определенная на каком-нибудь множестве, принадлежащем башне множеств над X. Простейшими структурами топологического типа являются: топологические структуры на X (обычные топологические структуры), *битопологические структуры на* X (топологические структуры на $X \times X$), *сеттопологические структуры на* X (топологические структуры на PX). Говоря в дальнейшем о битопологических структурах и битопологических пространствах, мы будем иметь в виду топологические структуры на $X \times X$ и, сответственно, пары (X, β), где β – битопологическая структура на X. Таким образом $(X \times X, \beta)$ – топологическое пространство, (X, β) – битопологическое пространство.

5. Разложимые битопологические пространства. Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) мы будем называть *битопологическим в смысле Келли* пространством.

Понятие битопологического пространства, как пары (X, β), где β – топологическая структура на $X \times X$, оказалось естественным обобщением понятия битопологического в смысле Келли пространства. Действительно, задание битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), где τ_1 и τ_2 – топологические структуры на множестве X, равносильно заданию битопологического пространства $(X, \tau_1 \times \tau_2)$. Такие битопологические пространства (X, β), $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, мы будем называть разложимыми, так как в этом случае $(X \times X, \beta) = (X \times X, \tau_1 \times \tau_2) = (X, \tau_1) \times (X, \tau_2)$.

В рамках общей теории битопологических пространств теория битопологических в смысле Келли пространств является теорией разложимых битопологических пространств.

6. Альтернативные определения битопологического пространства. Битопологическое пространство понималось первоначально, как тройка (X, τ_1, τ_2), то есть, как некое множество X, рассматриваемое вместе с двумя произвольно фиксированными на нем топологическими структурами τ_1 и τ_2. Это и есть определение битопологического в смысле Келли пространства. В дальнейшем появилось другое, как оказалось более общее, понимание битопологического пространства, как пары (X, β), где β – произвольно фиксированная на множестве $X \times X$ топологическая структура. При таком понимании битопологического пространства, битопологическое в смысле Келли пространство превратилось в пару $(X, \tau_1 \times \tau_2)$.

Возможно и другое понимание, битопологического пространства, при котором берется за основу не множество X а множество $X \times X$. Битопологическим пространством будет тогда топологическое пространство (Y, β) с дополнительной структурой представления Y в виде квадрата $X \times X$ какого-нибудь множества X. Так как в общем случае такое представление не единственно, то оно действительно является дополнительной структурой на Y.

Битопологическое пространство в этом понимании будет довольно сложным объектом, а именно (Y, β, X, j), где j – взаимно однозначное отображение $X \times X$ на Y.

Между рассмотренными вариантами понятия битопологического пространства нет, по-существу, особой разницы. В обоих случаях мы имеем дело с топологическими структурами на множестве $X \times X$. Можно, однако, ввести еще одну интерпретацию понятия битопологического пространства, в котором множество $X \times X$ в явном виде не фигурирует.

Пусть (X, β) – некоторое битопологическое пространство, $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленная система точек в X, ($x_\lambda \in X$ для каждого $\lambda \in \Lambda$). Рассматривая систему $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ вместе с некоторой точкой $x \in X$, мы будем говорить о *присоединении* $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ к точке x, записывая это присоединение в виде $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto x$ (о сходимости к точке x здесь не может быть и речи, так как топологическая структура на X не определена).

Пусть $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto x$, $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto y$. Будем говорить, что система $(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto y$ есть *результат переноса* системы $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto x$ из точки x в точку y, если

$$((x_\lambda, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

В этом случае будем писать

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

Итак,

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff ((x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)).$$

В общем случае, определенное здесь отношение переноса не транзитивно, не симметрично и даже не рефлексивно. В качестве битопологического пространства мы можем теперь рассматривать произвольное множество X вместе с некоторым, определеным на нем, переносом направленных систем точек. Это сложное по форме определение обладает некоторым преимуществом наглядности.

Существование различных подходов к понятию битопологического пространства позволяет варьировать их, выбирая наиболее подходящий, в той или иной ситуации, вариант.

7. Альтернативные определения бинепрерывного отображения. Каждому варианту понятия битопологического пространства соответствует свое понятие бинепрерывного отображения.

Пониманию битопологического пространства в смысле Келли, соответствует следующее определение.

Отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ называется *бинепрерывным отображением*, если отображения

$$f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1') \quad \text{и} \quad f : (X, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_2')$$

непрерывны.

Пониманию битопологического пространства, как пары (X, β) соответствует следующее определение.

Отображение

$$f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$$

называется *бинепрерывным отображением*, если отображение

$$f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$$

непрерывно, $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$.

Пониманию битопологического пространства, как пары (Y, β), где (Y, β) – топологическое пространство и $Y = X \times X$, соответствует следующее определение.

Непрерывное отображение $f:(Y,\beta)\longrightarrow(Y',\beta')$ с указанными на Y и Y' представлениями $Y=X\times X$, $Y'=X'\times X'$ называется *бинепрерывным отображением*, если $f=g\times g$, $g:X\longrightarrow X'$.

Пониманию битопологического пространства, как множества X с фиксированными на нем переносами

$$(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{x,y}(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)$$

направленных систем точек, соответствует следующее определение.

Отображение $f:X\longrightarrow X'$ с указанными на X и X' переносами направленных систем точек называется *бинепрерывным отображением*, если из

$$(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{x,y}(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)$$

следует

$$(f(x_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\mapsto_{f(x),f(y)}(f(y_\lambda)|\lambda\in\Lambda).$$

Нетрудно доказать, что все эти определения бинепрерывности отображений переходят друг в друга при замене одной формулировки понятия битопологического пространства на другую.

8. Основные категории. *Битопологические пространства и их бинепрерывные отображения* образуют категорию BT (Bitop), *битопологические в смысле Келли пространства и их бинепрерывные отображения* образуют категорию KT (Ktop), *топологические пространства и их непрерывные отображения* образуют категорию T (Top). Мы условимся отождествлять каждое топологическое пространство (X,τ) с битопологическим в смысле Келли пространством (X,τ,τ), каждое битопологическое в смысле Келли пространство (X,τ_1,τ_2) с битопологическим пространством $(X,\tau_1\times\tau_2)$. Таким образом можно рассматривать включения

$$T\subset KT\subset BT.$$

Непрерывное отображение

$$f:(X,\tau)\longrightarrow(X',\tau')$$

перейдет при этом в бинепрерывное отображение

$$f:(X,\tau,\tau)\longrightarrow(X',\tau',\tau'),$$

а бинепрерывное отображение

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$$

станет бинепрерывным отображением

$$f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta'), \ \beta = \tau_1 \times \tau_2, \ \beta' = \tau_1' \times \tau_2'.$$

Категория T окажется полной подкатегорией категории KT, а та, в свою очередь, будет полной подкатегорией категории BT.

9. Процедура обобщения теорий. В связи с включениями

$$T \subset KT \subset BT.$$

представляется естественным стремление перенести определения и утверждения, относящиеся к топологическим пространствам и их отображениям (к категории T) на битопологические в смысле Келли пространства и их отображения (на категорию KT) и, затем, на битопологические пространства и их отображения (на категорию BT). Подавляющая часть битопологической литературы как раз и посвящена переносу топологических теорий (T-теорий) на KT-категорию. Начало этому было положено в упомянутой выше статье Келли 1963 года.

Эффективность такого перехода обеспечивается структурным сходством топологических и битопологических в смысле Келли пространств. В обоих случаях мы имеем дело с топологическими структурами на исходных множествах или же, соответственно, с парами таких топологических структур. Основная трудность состоит в переходе от τ-формулировок к их (τ_1, τ_2)-формулировкам. Этот переход неоднозначен, а перебор вариантов и их анализ требует, подчас, значительных исследований. Тем не менее, почти все основные понятия и утверждения T-теории были, в конечном счете, перенесены с большим или меньшим успехом в KT-теорию. Собственно говоря, почти вся KT-теория является, пока, результатом такого переноса.

Совсем иная ситуация возникает при попытке переноса KT-теории в BT-теорию. Мы имеем здесь дело с топологическими структурами τ_1, τ_2 на исходном множестве X, с одной стороны, и с топологической структурой β на множестве $X \times X$, с другой. Можно, конечно, перейти сначала от (τ_1, τ_2)-формулировок к $(\tau_1 \times \tau_2)$- формулировкам, однако последующий переход от $\tau_1 \times \tau_2$-формулировок к β-формулировкам далеко не очевиден.

10. Общая битопологическая теория. Общая теория битопологических пространств возникла фактически не как обобщение теории битопологических в смысле Келли пространств, а как часть теории пространств топологического типа. Представлялось интересным выяснить какие математические объекты можно описать теми или иными структурами топологического типа и что дают эти описания для изучения таких объектов. Среди структур топологического типа первыми, привлекшими к себе внимание, были топологические структуры на PX. Им было посвящено несколько сообщений, а именно на Московском международном математическом конгрессе (Москва, 1966 год), на 5-й всесоюзной топологической конференции (Новосибирск, 1966 год), на Международном симпозиуме по топологии и ее приложениям (СФРЮ, Херцег-Нови, 1968 год). В этих сообщениях битопологическим пространством называлось пространство топологического типа (X, ζ), где ζ-топологическая структура на PX (в то время автору не были известны работы по битопологическим в смысле Келли пространствам). Пространства (X, ζ) были интересны тем, что структуры ζ на PX могут представлять, как гладкие так и кусочно линейные структуры на топологических многообразиях. Однако, несколько позже, в 1979, Ивановым было доказано, что подходящие топологические структуры на $X \times X$ могут представлять кусочно линейные структуры на топологических многообразиях X. Возник интерес и к таким структурам, началось их систематическое изучение, именно они стали называться битопологическими структурами.

11. Проблематика битопологической теории. Проблематика теории битопологических пространств обширна и разнообразна. Часть этой проблематики имеет общетопологическое происхождение. Она основана на понятиях, являющихся более или менее непосредственными обобщениями различных понятий теории топологических пространств. Такая проблематика доминирует в KT-теории, но занимает скромное место в BT-теории. Значительно больший интерес представляют в BT-теории существенно битопологические понятия, не имеющие аналогов в теории топологических пространств. Особый интерес вызывают приложения битопологических пространств, например представление различных классов непрерывных отображений топологических пространств, битопологические многообразия и битопологические группы. Они занимают значительное место в настоящей работе. Сюда включена также (в разумных пределах) и классическая теория, то есть теория битопологических в смысле Келли пространств, рассматриваемая, как часть общей теории.

Дополнение при корректуре.

Воспользовавшись представившейся возможностью, отметим еще одно интересное и перспективное направление исследований. Суть его состоит в следующем.

Пусть X – произвольное топологическое пространство, множество его точек будем обозначать также через X. Рассмотрим множество $X \times X$, множество $X \setminus X$ всех непрерывных отображений X в себя и отображения

$$F : X \times X \longrightarrow X,$$

$$C : X \longrightarrow X \setminus X,$$

связанные соотношением $F(x, y) = G(x)(y)$. Это соотношение определяет взаимно однозначное соответствие между всеми отображениями $F : X \times X \longrightarrow X$, и всеми отображениями $C : X \longrightarrow X \setminus X$.

Мы будем рассматривать все пары F, G таких соответствующих друг другу отображений.

Любая топологическая структура τ на множестве $X \times X$ однозначно определяет максимальную топологическую структуру τ_* на множестве $X \setminus X$, для которой из непрерывности отображения F следует непрерывность соответствующего отображения G. Наоборот, любая топологическая структура τ на множестве $X \setminus X$ однозначно определяет минимальную топологическую структуру τ^* на множестве $X \times X$, для которой из непрерывности отображения G следует непрерывность соответствующего отображения F. Тем самым устанавливается связь между топологическими структурами на $X \times X$, то есть битопологическими структурами на X, и топологическими структурами на $X \setminus X$ – множестве непрерывных отображений топологического пространства X в себя. Иначе говоря, устанавливается связь между битопологическими пространствами и пространствами функций, дающая возможность их параллельного изучения.

ГЛАВА I

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Эта глава содержит некоторые варианты непосредственного обобщения теории битопологических в смысле Келли пространств на произвольные битопологические пространства. Здесь сохраняется классический подход к построению битопологической теории, при котором определения и утверждения, относящиеся к битопологическим пространствам (X, β) должны переходить в известные определения и утверждения, относящиеся к битопологическим в смысле Келли пространствам (X, τ_1, τ_2), если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$ и к топологическим пространствам (X, τ), если $\beta = \tau \times \tau$. С другой стороны, далеко не все, что есть в современной классической теории, будет здесь упомянуто. Речь пойдет только об основных понятиях и результатах теории. Более детальное изложение и библиографию предмета можно найти в статьях автора перечисленных в предисловии.

§1. Основные определения

1. Битопологическая структура. Битопологической структурой (BT-структурой) на множестве X называется произвольная топологическая структура на множестве $X \times X$.

2. Битопологическое пространство. Битопологическим пространством (BT-пространством) называется произвольная пара (X, β), где β есть битопологическая структура на множестве X.

3. Бинепрерывное отображение. Бинепрерывным отображением (BT-отображением) называется отображение $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$, для которого $f \times f : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X' \times X', \beta')$ - непрерывное отображение. Здесь $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$.

4. Битопологическая категория. Битопологической категорией (BT-категорией) называется категория состоящая из всех битопологических пространств и всех их бинепрерывных отображений.

5. Битопологическая теория. Битопологической теорией (BT-теорией) называется совокупность определений и утверждений, относящихся к битопологической категории.

6. Битопологическое в смысле Келли пространство. Битопологическим в смысле Келли пространством (KT-пространством) называется произвольная тройка (X, τ_1, τ_2), где τ_1 и τ_2 – топологические структуры на множестве X.

7. Бинепрерывное в смысле Келли отображение. Бинепрерывным в смысле Келли отображением (KT-отображением) называется отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$, для которого $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ и $f : (X, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_2')$ – непрерывные отображения.

8. Битопологическая в смысле Келли категория. Битопологической в смысле Келли категорией (KT-категорией) называется категория состоящая из всех битопологических в смысле Келли пространств и всех их бинепрерывных отображений.

9. Битопологическая в смысле Келли теория. Битопологической в смысле Келли теорией (KT-теорией) называется совокупность определений и утверждений, относящихся к битопологической в смысле Келли категории.

10. Вложение KT-категории в BT-категорию. Вложением KT-категории в BT-категорию называется соответствие, при котором (X, τ_1, τ_2) переходит в $(X, \tau_1 \times \tau_2)$ и $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ переходит в $f : (X, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1' \times \tau_2')$.

11. Топологическая категория. Топологической категорией (T-категорией) называется категория состоящая из всех топологических пространств и всех их непрерывных отображений.

12. Топологическая теория. Топологической теорией (T-теорией) называется совокупность определений и утверждений, относящихся к топологической категории.

13. Вложение T-категории в KT-категорию. Вложением T-категории в KT-категорию называется соответствие, при котором (X, τ) переходит в (X, τ, τ) и $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ переходит в $f : (X, \tau, \tau) \longrightarrow (X', \tau', \tau')$.

14. Диагональ. Диагональю в $X \times X$ называется множество $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$.

15. Окружение диагонали. Окружением диагонали в $X \times X$ называется любое множество $U \subset X \times X$, содержащее диагональ $\Delta \subset X \times X$.

16. Вертикальное множество. Вертикальным в $X \times X$ множеством называется любое множество $\{x\} \times X$, определенное для произвольно фиксированного $x \in X$.

17. Горизонтальное множество. Горизонтальным в $X \times X$ множеством называется любое множество $X \times \{y\}$, определенное для произвольно фиксированного $y \in X$.

18. Крест. Крестом в $X \times X$ называется любое множество $(\{x\} \times X) \cup (X \times \{y\})$, определенное для произвольно фиксированной точки $(x, y) \in X \times X$.

19. Прямоугольное множество. Прямоугольным в $X \times X$ множеством называется любое множество $A \times B$, где $A \subset X, B \subset X$.

20. Прямоугольная оболочка. Прямоугольной оболочкой множества $A \subset X \times X$ называется множество $[A]$, являющееся пересечением всех прямоугольных множеств содержащих A (наименьшее прямоугольное множество, содержащее A).

§2. Основные конструкции

1. Вариантность обобщений. Теория битопологических в смысле Келли пространств, ставшая ныне классической, развивалась как некоторое обобщение теории топологических пространств. Авторы статей формулировали определения и утверждения, относящиеся к битопологическим пространствам, переделывая соответствующим образом те или иные определения и утверждения, относящиеся к топологическим пространствам. Например, условия типа “$G \in \tau$” для топологического пространства (X, τ) заменялось на условие “$G \in \tau_1$” или “$G \in \tau_2$” для битопологического пространства (X, τ_1, τ_2). Такая замена могла осуществляться по-разному и потому в KT-теории мы имеем различные обобщения одних и тех же определений и утверждений T-теории. Имеются и другие причины неоднозначности обобщений, но так или иначе имело место расщепление формулировок. Такое расщепление возникает и при переходе от KT-теории к BT-теории. Процесс обобщения определений и утверждений оказывается здесь даже более вариантным, так как при этом могут быть использованы разнообразные связи между BT-пространствами, KT-пространствами и T-пространствами. С этой точки зрения представляют интерес конструкции, устанавливающие такого рода связи. Мы рассмотрим здесь некоторые из таких конструкций, а именно диагональную, горизонтальных и вертикальных множеств, подъема, прямоугольных оболочек.

2. Диагональная конструкция. Пусть (X,β)-произвольное битопологическое пространство. Битопологическая структура β, являясь топологической структурой на множестве $X\times X$, индуцирует топологическую структуру $\beta|\Delta$ на диагонали $\Delta\subset X\times X$. Вложение $i:X\longrightarrow X\times X$, $i(x)=(x,x)$, переносит структуру $\beta|\Delta$ на множество X, результат переноса обозначим через $\beta|X$. Таким образом битопологическому пространству (X,β) ставится в соответствие топологическое пространство $(X,\beta|X)$. Такое соответствие имеет функторный характер, так как если $f:(X,\beta)\longrightarrow(X',\beta')$ – бинепрерывное отображение, то $f:(X,\beta|X)\longrightarrow(X',\beta'|X')$ – непрерывное отображение. Соответствующий функтор $P:BT\longrightarrow T$ является даже ретракцией, так как он тождественен на T (мы условились считать, что $T\subset BT$).

3. Горизонтальная и вертикальная конструкции. Различные конструкции связаны с так называемыми следами битопологических структур на горизонтальных и вертикальных множествах. Пусть (X,β) – произвольное битопологическое пространство. Битопологическая структура β, являясь топологической структурой на множестве $X\times X$, индуцирует топологическую структуру на каждом горизонтальном множестве $X\times\{y\}$ и на каждом вертикальном множестве $\{x\}\times X$. Будем обозначать эти топологические структуры (следы β) через $\beta(\ ,y)$ и $\beta(x,\ )$, соответственно. Вложения $j(y):X\longrightarrow X\times X$, $j(x):X\longrightarrow X\times X$, $j(y)(x)=(x,y)$, $j(x)(y)=(x,y)$, позволяют перенести топологические структуры $\beta(\ ,y)$ и $\beta(x,\ )$ на X, результаты переноса будем также обозначать через $\beta(\ ,y)$ и $\beta(x,\ )$. Мы получаем, таким образом, две системы следов структуры β, а именно: *горизонтальную систему следов* $(\beta(\ ,y)|y\in X)$ и *вертикальную систему следов* $(\beta(x,\ )|x\in X)$.

Существуют различные способы построения топологической структуры по данной системе топологических структур, заданных на одном и том же множестве. В частности, можно построить топологическую структуру τ_1 по горизонтальной системе следов и, возможно другим способом, построить топологическую структуру τ_2 по вертикальной системе следов. Тем самым будет установлено некоторое соответствие между битопологическими пространствами и битопологическими в смысле Келли пространствами. Понятно, что такое соответствие определено неоднозначно, оно зависит от выбранных способов построения топологических структур τ_1 и τ_2. Оно не обязательно будет функторным соответствием. Например, если τ_1 и τ_2 являются пересечениями горизонтальных следов и, соответственно, вертикальных следов, то полученное таким способом сопоставление $F : BT \to KT$ будет функторным. Если, с другой стороны, τ_1 и τ_2 являются объединениями соответствующих следов, то сопоставление не будет функторным. Действительно, если $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ является бинепрерывным отображением, то каждое вертикальное (горизонтальное) в $X \times X$ множество отображается при этом непрерывно в соответствующее вертикальное (горизонтальное) в $X' \times X'$ множество. Отсюда следует, что пробраз следа битопологической структуры β' на любом вертикальном (горизонтальном) в $X' \times X'$ множестве содержится в следе битопологической структуры β на соотвествующем вертикальном (горизонтальном) в $X \times X$ множестве, если такое множество существует. Если f отображает X на X', то в каждое вертикальное (горизонтальное) в $X' \times X'$ множество отображается какое-нибудь вертикальное (горизонтальное) в $X \times X$ множество, поэтому f-прообраз как пересечения так и объединения следов структуры β', будет содержаться в пересечении или, соответственно, в объединении следов структуры β. В этом случае отображения $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$, будут непрерывными. Если же $f(X) \neq X'$, то найдется вертикальное (горизонтальное) в $X' \times X'$ множество, не содержащееся в $(f \times f)(X \times X)$. Бинепрерывность отображения f не зависит от следов структуры β' на таких множествах, поэтому можно считать их дискретными. При объединении соответствующих следов мы получим дискретную топологическую структуру, в то время как объединение следов структуры β может оказаться и не дискретным. Что же касается пересечения следов то оно может только уменьшится в связи с привлечением следов структуры β' на вертикальных (горизонтальных) множествах, не содержащихся в $(f \times f)(X \times X)$. Поэтому отображения $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ и $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ окажутся непрерывными.

4. Метод подъема. Приведенные выше конструкции определяли соответствия тождественные на топологических пространствах. Рассмотрим теперь конструкцию, определяющую функтор $F : BT \longrightarrow T$, не тождественный на T.

Пусть (X, β) – произвольное битопологическое пространство. Положим $F(X, \beta) = (X \times X, \beta)$, $F(f) = f \times f$. Если $\beta = \tau \times \tau$, то $F(X, \beta) = (X \times X, \beta) = (X, \tau) \times (X, \tau)$ и, таким образом, функтор F переводит любое топологическое пространство в его квадрат. Заменяя пространства и отображения, входящие в определения и утверждения какой-нибудь T-теории, на их F-прообразы, мы получаем, конечно, определения и утверждения некоторой BT-теории. Однако мы не можем утверждать, что получили при этом соответствующее обобщение исходной T-теории. Это будет так только и том случае, когда эта T-теория инвариантна относительно одновременного перехода к квадратам топологических пространств и их отображений. Например, так нельзя обобщать теорию размерности топологических пространств.

5. Крест конструкция. Следующая конструкция может явиться основой своеобразной битопологической теории.

Пусть (X, β) – произвольное битопологическое пространство. Для любой точки $(x, y) \in X \times X$ однозначно определена битопологическая структура $\beta(x, y) = \beta(\ , y) \times \beta(x,\ )$ или, что, по-существу, то же самое, битопологическое пространство $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$. Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое свойство KT-пространств. Тогда в $X \times X$ однозначно определено множество $\mathcal{P}(\beta)$ всех точек (x, y), для которых битопологическое в смысле Келли пространство $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$ обладает свойством $\mathcal{P}$. Возникающая на этой основе теория является обобщением KT-теории в том смысле, что для каждого KT-пространства (X, τ_1, τ_2) множество $\mathcal{P}(\beta)$ либо совпадает с $X \times X$ либо пусто, в общем же случае возможны и другие варианты. Здесь представляет интерес изучение множества $\mathcal{P}(\beta) \subset X \times X$ для данного свойства $\mathcal{P}$ и данной битопологической структуры β, а также изучение соотношений между $\mathcal{P}(\beta)$ для различных свойств $\mathcal{P}$ и различных битопологических структур β.

6. Неполные конструкции. Каждая из рассмотренных нами конструкций однозначно определяет соответствующую связь между битопологическими пространствами и битопологическими в смысле Келли пространствами или же топологическими пространствами. Эти конструкции вполне определяют соответствующие BT-теории и поэтому их можно считать, так сказать, полными конструкциями. Но есть и неполные конструкции, оставляющие возможность выбора вариантов при построении обобщения той или иной KT-теории или T-теории. Такие конструкции содержат только указания на характер соответствующих обобщений. Мы можем, например, фиксировать какой-нибудь функтор категории BT в себя и рассматривать его композиции с различными функторами, устанавливающими те или иные связи между категориями BT, KT, T. Рассмотрим, например, *метод прямоугольных оболочек.*

Пусть β –произвольная битопологическая структура на X. Переходя от множества A к его прямоугольной оболочке $[A]$, мы получим множество, не принадлежащее в общем случае к β. Совокупность прямоугольных оболочек всех множеств принадлежащих β порождает некоторую топологическую структуру на $X \times X$, которую мы будем обозначать через $[\beta]$. В общем случае $\beta \neq [\beta]$.Может случиться, что $[\beta] \subset \beta$, например для $\beta = \{\emptyset, X \times X, \Delta\}$ его прямоугольная оболочка $[\beta] = \{\emptyset, X \times X\}$ строго содержится в β. Возможен и случай $\beta \subset [\beta]$, например для структуры β, состоящей из всех подмножеств диагонали и $X \times X$. Построенное соответствие тождественно на разложимых битопологических пространствах однако оно функторно только для отображений битопологических пространств на битопологические пространства (для эпиморфизмов).

§3. Аксиомы отделимости

1. Топологические аксиомы отделимости. Имеется довольно много различных аксиом отделимости для топологических пространств (X, τ), их количество значительно возрастает при переходе к битопологическим в смысле Келли пространствам (X, τ_1, τ_2) и становится трудно обозримым в теории битопологических пространств (X, β). Несколько позже мы продемонстрируем процесс расщепления аксиом отделимости при их последовательном обобщении сейчас же остановимся на топологических аксиомах отделимости типа аксиомы отделимости Хаусдорфа (аксиомы T_2) и типа аксиомы отделимости Рисса (аксиомы T_1). Таковых тоже набирается немало. Исходными для таких отделимостей являются следующие определения.

T_2: Для любых двух различных точек x_1, x_2 топологического пространства (X, τ) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau,\ x_2 \in G_2 \in \tau,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

T_1: Для любых двух различных точек x_1, x_2 топологического пространства (X, τ) найдется такое множество G, что

$$x_1 \in G \in \tau \quad \text{и} \quad x_2 \notin G.$$

Топологическое пространство (X, τ), удовлетворяющее аксиоме T_2, называется *хаусдорфовым* или класса T_2 или T_2-пространством, топологическое пространство (X, τ), удовлетворяющее аксиоме T_1, называется *риссовским* или класса T_1 или T_1-пространством.

Существуют различные варианты аксиом T_2 и T_1, отличающиеся друг от друга тем, что вместо условий $x_1 \in G_1 \in \tau$, $x_2 \in G_2 \in \tau$ и, соответственно, условий $x_1 \in G \in \tau$, $x_2 \notin G$ вводятся условия $x_1 \in G_1 \in \tau'$, $x_2 \in G_2 \in \tau'$ и, соответственно, $x_1 \in G \in \tau'$, $x \notin G$, где τ'-некоторая система подмножеств множества X (не обязательно топологическая структура), канонически определяемая по τ тем или иным свойством $\mathcal{P}$. Так, например, в некоторых статьях рассматривается система всех регулярно открытых множеств, $\tau' = \{G | G = \tau\text{-int}\,(\tau\text{-}clG)\}$, в других же рассматривается система всех полуоткрытых множеств, то есть множеств, каждое из которых содержит некоторое $G \in \tau$ и содержится в его τ-замыкании. Таких систем можно придумать много и, соответственно, можно получить много различных вариантов аксиом типа T_2 и T_1. Все это относится и к аксиомам других типов.

2. Расщепление аксиом отделимости в KT. Структура битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2) состоит из двух топологических структур τ_1 и τ_2, поэтому при обобщении аксиом T_2 и T_1 на битопологические в смысле Келли пространства мы можем заменить каждое вхождение τ в формулировку этих аксиом на τ_1 или на τ_2 или на какую -нибудь другую топологическую структуру $\tau' = \tau(\tau_1, \tau_2)$, канонически определяемую структурами τ_1 и τ_2. При этом должно, естественно, выполняться условие $\tau(\tau, \tau) = \tau$. Известны следующие основные варианты такого рода обобщения:

pT_2: Для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1, \ x_2 \in G_2 \in \tau_2, \ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

pT_1: Для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1,\ x_2 \notin G_1 \quad \text{или} \quad x_1 \in G_2 \in \tau_2,\ x_2 \notin G_2.$$

wpT_2: Для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1,\ x_2 \in G_2 \in \tau_2 \quad \text{или}$$
$$x_1 \in G_1 \in \tau_2,\ x_2 \in G_2 \in \tau_1,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

$\sup T_2$: Для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau,\ x_2 \in G_2 \in \tau,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,\ \tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}.$$

$\inf T_2$: Для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau,\ x_2 \in G_2 \in \tau,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,\ \tau = \inf\{\tau_1, \tau_2\}.$$

Формулировки аксиом $wpT_1, \sup T_1, \inf T_1$ очевидны.

Возможно наложение сразу двух и более условий, как в следующей аксиоме

biT_2: Для любых двух различных точек x_1, x_2 битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_1,\ x_2 \in G_2 \in \tau_1,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

и найдутся такие множества G_1, G_2, что

$$x_1 \in G_1 \in \tau_2,\ x_2 \in G_2 \in \tau_2,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

иначе говоря, топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) принадлежат классу T_2.

Возможно также использование сразу нескольких канонически определенных структур

$$\tau_1'(\tau_1, \tau_2),\ \tau_2'(\tau_1, \tau_2), \ldots,$$

переходящих в τ при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

3. Расщепление аксиом отделимости в BT. Переходя теперь к обобщению аксиом T_2 и T_1 на произвольные битопологические пространства (X, β), мы оказываемся в затруднительном положении. Как мы уже имели случай заметить, простая переформулировка этих аксиом здесь не срабатывает, так как битопологическая структура β является структурой на $X \times X$, а не на X. Можно, правда, воспользоваться аксиомами biT_2 и biT_1, вернее им эквивалентными (в силу мультипликативности и наследственности классов T_2 и T_1) формулировками

biT_2: Топологическое пространство $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ принадлежит классу T_2,

biT_1: Топологическое пространство $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ принадлежит классу T_1.

Тогда мы получим один из вариантов обобщения аксиомы T_2 на произвольные битопологические пространства, а именно

upT_2: Топологическое пространство $(X \times X, \beta)$ принадлежит классу T_2.

Аналогичное обобщение можно сформулировать для аксиомы T_1.

Эта идея перехода от аксиомы относительно структуры над X к эквивалентной ей аксиоме относительно структуры над $X \times X$, сформулированная в п.2.4, может быть использована довольно широко. Рассмотрим еще несколько примеров ее применения. В классе T аксиома T_2 эквивалентна каждой из следующих аксиом:

ΔT_2: Диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым в $(X \times X, \tau \times \tau)$ множеством.

$recT_2$: Для любой точки (x_1, x_2) из $X \times X$, не принадлежащей диагонали, найдется ее прямоугольная $\tau \times \tau$-окрестность, не имеющая общих точек с диагональю.

Нетрудно заметить, что в классе KT соответствующие аналоги этих аксиом будут также эквивалентны.

ΔT_2: Диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым в $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ множеством.

$recT_2$: Для любой точки (x_1, x_2) из $X \times X$, не принадлежащей диагонали, найдется ее прямоугольная $\tau_1 \times \tau_2$-окрестность, не имеющая общих точек с диагональю.

Однако в классе BT аналоги этих аксиом уже не эквивалентны, происходит расщепление аксиомы.

ΔT_2: Диагональ $\Delta \subset X \times X$ является замкнутым в $(X \times X, \beta)$

множеством.

$recT_2$: Для любой точки (x_1, x_2) из $X \times X$, не принадлежащей диагонали, найдется ее прямоугольная β-окрестность, не имеющая общих точек с диагональю.

Второй вариант является очевидным усилением первого. Заметим, что мы не требуем здесь, чтобы эта прямоугольная окрестность была бы β-открытым множеством, таковых может и не оказаться. В связи с этим обстоятельством можно сформулировать усиление предыдущей аксиомы а именно:

$orecT_2$: Для любой точки (x_1, x_2) из $X \times X$, не принадлежащей диагонали, найдется содержащее ее β-открытое прямоугольное множество, не имеющее общих точек с диагональю.

4. Отделимости в KT и отделимости в BT. Возможен и другой подход к введению аксиом отделимости для битопологических пространств. Мы уже рассматривали некоторые варианты введения двух топологических структур на X по битопологической структуре, то есть введения битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) соответствующего битопологическому пространству (X, β). Каждая аксиома отделимости для (X, τ_1, τ_2) явится тогда аксиомой отделимости для соответствующего (X, β).

Можно переносить аксиомы отделимости из KT-теории в BT-теорию используя переход от (X, β) к $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$, определенный для каждой точки $(x, y) \in X \times X$. Пусть $\mathcal{P}$-некоторая KT-аксиома отделимости. Тогда в $X \times X$ определено множество $\mathcal{P}(\beta)$ всех точек (x, y), для которых пространство $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$ удовлетворяет аксиоме $\mathcal{P}$. В качестве BT-аксиом отделимости могут фигурировать различные условия накладываемые на множество $\mathcal{P}(\beta)$, например условие $\mathcal{P}(\beta) = X \times X$ или $\beta - cl\mathcal{P}(\beta) = X \times X$.

5. Заключение. Все сказанное выше относится с теми или иными отклонениями к любым аксиомам отделимости. Дать более или менее полное описание приводимых в литературе аксиом отделимости и соотношений между ними здесь не представляется возможным, их несколько десятков типов даже в классе KT. Более полную информацию об аксиомах отделимости можно найти в “Записках...” (см. предисловие).

§4. Связность

1. Расщепление понятий связности. Значительная литература посвящена понятию связности и локальной связности топологических и битопологических в смысле Келли пространств. При этом, как обычно, при переходе от топологических пространств к битопологическим в смысле Келли пространствам происходит расщепление понятий.

Топологическое пространство (X, τ) называют *связным*, если из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$ следует $\{G_1, G_2\} = \{\emptyset, X\}$. Соответствуюшая аксиома связности для топологических пространств выглядит следующим образом:

C: Из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$ следует $\{G_1, G_2\} = \{\emptyset, X\}$.

При переходе к битопологическим в смысле Келли пространствам (X, τ_1, τ_2) эта аксиома расщепляется на следующие аксиомы:

pC: Из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau_1$, $G_2 \in \tau_2$ следует $\{G_1, G_2\} = \{\emptyset, X\}$.

$\inf C$: Из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$, $\tau = \inf\{\tau_1, \tau_2\}$, следует $\{G_1, G_2\} = \{\emptyset, X\}$.

$\sup C$: Из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$, $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$, следует $\{G_1, G_2\} = \{\emptyset, X\}$.

biC: Из $G_1 \cup G_2 = X$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \in \tau$, $G_2 \in \tau$, $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$, следует $\{G_1, G_2\} = \{\emptyset, X\}$, $\tau = \tau_1$ или $\tau = \tau_2$.

Так как связность топологических пространств сохраняется при переходе к произведениям и к непрерывным образам, то в классе KT аксиома biC эквивалентна следующей аксиоме:

upC: Топологическое пространство $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ связно.

Теперь мы можем сформулировать аналог аксиомы upC для BT-пространств (X, β), а именно

upC: Топологическое пространство $(X \times X, \beta)$ связно.

2. Категорное понятие связности. Как мы убедимся в дальнейшем, структурная формулировка в T-теории всегда может быть заменена категорной. В частности, определение C-связности, сформулированное выше в терминах соответствующих множеств (структурное определение), можно сформулировать в терминах непрерывных отображений (дать категорное определение). В рассматриваемом случае можно воспользоваться следующим утверждением:

Топологическое пространство (X, τ) связно тогда и только тогда, когда каждое его непрерывное отображение в двухточеч-

ное дискретное пространство постоянно (имеет одноточечный образ).

Аналогичное утверждение справедливо для битопологических в смысле Келли пространств с той только разницей, что теперь имеется в виду pC-связность, рассматриваются бинепрерывные отображения, а в качестве области значений берется битопологическое пространство (D, τ_r, τ_l), где

$$D = \{0, 1\}, \tau_r = \{\emptyset, D, \{0\}\}, \tau_l = \{\emptyset, D, \{1\}\}.$$

Что же касается произвольных битопологических пространств, то для upC-связности соответствующая теорема неверна, поэтому представляется более естественным следующее определение:

Битопологическое пространство (X, β) называется bC-связным, если каждое его бинепрерывное отображение в битопологическое пространство $(D, \tau_r \times \tau_l)$ постоянно. В следующем параграфе мы убедимся в естественности такого способа определения понятий.

3. Варианты локальной связности. Перейдем теперь к понятию *локальной связности*. В категории T это понятие выглядит следующим образом:

lC: Для любой точки $x \in X$ топологического пространства (X, τ) и любой ее τ-окрестности G, $x \in G \in \tau$, найдется связная τ-окрестность G' этой точки, содержащаяся в G, $x \in G' \subset G$.

Проблема выбора того или иного понятия локальной связности в категории KT упирается, прежде всего, в определение понятия окрестности точки битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2). Здесь возможны разные подходы, опять происходит расщепление понятия. Некоторые авторы считают, например, что окрестностями точки x в (X, τ_1, τ_2) являются все τ_1- и все τ_2-окрестности этой точки, другие же рассматривают в качестве окрестностей точки x в (X, τ_1, τ_2) всевозможные пересечения τ_1-окрестностей и τ_2-окрестностей или же их объединения.

В общей теории битопологических пространств диагональная топологическая структура $\beta|X$ для битопологического пространства (X, β) естественно выделяется среди других топологических структур на множестве X, соответствие $\beta \mapsto \beta|X$ имеет категорный характер. Поэтому связность топологического пространства $(X, \beta|X)$ в какой-то степени отражает "связность" битопологического пространства (X, β). С другой стороны, необходимо учитывать и характер структуры β вблизи диагонали. С этой точки зрения при построении теории локальной связности следует считать окрестностями точки x_0 все множества $\{x, y|(x, y) \in W\}$, где W является окрестностью точки (x_0, x_0) в $(X \times X, \beta)$.

§5. Категорные методы

1. Структурный и категорный методы. Категорный подход в теории битопологических в смысле Келли пространств (в KT-теории) в некоторых случаях предпочтительнее, чем структурный, но в KT-теории, как, впрочем, и в T-теории, категорный и структурный подходы по-существу эквивалентны. Дело в том, что имеет место взаимно однозначное соответствие между топологическими структурами τ, определенными на множестве X, и совокупностями всех непрерывных отображений $f : (X, \tau) \longrightarrow (D, \tau_r)$, где $\tau_r = \{\emptyset, D, \{0\}\}$. При этом соответствии каждое множество $G \in \tau$ задается непрерывным отображением $f_G : (X, \tau) \longrightarrow (D, \tau_r)$, для которого

$$f_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ 1, & x \notin G. \end{cases},$$

и, таким образом,

$$\tau \longleftrightarrow \{f_G | G \in \tau\}$$

Аналогично, можно установить соответствие между парами (τ_1, τ_2) топологических структур на X и совокупностями всех бинепрерывных отображений

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_r, \tau_0),$$

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_0, \tau_r),$$

где

$$\tau_0 = \{\emptyset, D\}.$$

При этом соответствии каждое множество G, принадлежащее τ_1 или τ_2 опять задается отображением $f : X \longrightarrow D$, для которого

$$f_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ 1, & x \notin G. \end{cases}$$

Но, если $G \in \tau_1$, то отображение

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_r, \tau_0),$$

бинепрерывно, если же $G \in \tau_2$, то отображение

$$f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (D, \tau_0, \tau_r),$$

бинепрерывно.

2. Ситуация в BT-теории. Заметим, кстати, что в общей теории битопологических пространств ситуация совершенно иная. Здесь структурный подход и категорный подход не эквивалентны друг другу, битопологические структуры не определяются, в общем случае, совокупностями соответствующих бинепрерывных отображений.

Действительно, пусть $\mathcal{B}$ – произвольно фиксированное множество битопологических пространств. Тогда найдется множество X, мощность которого больше мощности множества точек любого битопологического пространства из $\mathcal{B}$. Пусть, далее, $\beta = \{\emptyset, X \times X, \Delta\}$. Рассмотрим все возможные бинепрерывные отображения $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ для всех $(X', \beta') \in \mathcal{B}$. Для того чтобы совокупность всех таких отображений определила β необходимо существование таких (X', β'), $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$, $G' \in \beta'$, что $(f \times f)^{-1}(G') = \Delta$. Но, в силу предполагаемого нами соотношения между мощностями множеств X и X', найдутся в $X \times X$ такие точки x, y, $x \neq y$, что $f(x) = f(y)$. Для этих точек

$$(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y)) = (f(x), f(x)) = (f \times f)(x, x) \in G',$$

то есть $(x, y) \in (f \times f)^{-1}(G')$ и потому $\Delta \neq (f \times f)^{-1}(G')$. Но это и означает, что $\mathcal{B}$ не определяет β. Тем не менее, категорные методы могут с успехом применяться не только в категориях T и KT, где они, как было сказано, универсальны, но и в категории BT.

3. Связность по Пройсу. Категорный подход имеет широкое применение. В качестве примера мы рассмотрим сейчас понятие $\mathcal{E}, \mathcal{F}$-связности по Пройсу.

Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная категория, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ – какие-то классы ее объектов и морфизмов (отображений), соответственно. Вводятся два оператора $Z(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и $T(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. $Z(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ состоит из всех объектов $X \in \mathcal{C}$ таких, что каждое отображение $f : X \longrightarrow Y$, где $Y \in \mathcal{E}$, принадлежит классу $\mathcal{F}$, $T(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ состоит из всех объектов $X \in \mathcal{C}$ таких, что каждое отображение $f : Y \longrightarrow X$, где $Y \in \mathcal{E}$, принадлежит классу $\mathcal{F}$.

Операторы

$$Z = Z(\mathcal{E}, \mathcal{F}),$$

$$T = T(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

монотонно убывают по первому аргументу и возрастают по второму, следовательно обе их композиции ZT и TZ, образуемые при фиксированном $\mathcal{F}$, монотонно возрастают по каждому аргументу.

Операторы $D = TZ$ и $C = ZT$ сохраняют отношение содержания (изотонны) и идемпотентны ($DD = D, CC = C$). Класс $\mathcal{E}$ называется C-замкнутым (D-замкнутым), если $C\mathcal{E} = \mathcal{E}$ ($D\mathcal{E} = \mathcal{E}$). Между C-замкнутыми и D-замкнутыми классами имеется взаимно однозначное соответствие, а именно:

$$Z(D\mathcal{E}) = Z\mathcal{E},$$

$$T(Z\mathcal{E}) = D\mathcal{E},$$

где $D\mathcal{E}$ – произвольный D-замкнутый класс, $Z\mathcal{E}$ – произвольный C-замкнутый класс. Это соответствие обращает отношение содержания.

Пройс рассматривал случай, когда категория $\mathcal{C}$ является категорией топологических пространств и их непрерывных отображений, а класс $\mathcal{F}$ состоит из всех постоянных (одноточечных) отображений. В этом случае класс $Z\mathcal{E}$ состоит из всех связных топологических пространств, а класс $D\mathcal{E}$ состоит из всех дисконтинуумов.

§6. Компактность

1. Вариантность определения компактности. Топологическое пространство (X, τ) называется *компактным*, если выполняется следующее условие:

Cp: Для любого покрытия $s = \{G\}$ множества X τ-открытыми множествами, $X = \cup G | G \in s$, найдется конечное покрытие $s' = \{G'\}$ этого множества τ-открытыми множествами G', вписанное в s (каждый элемент покрытия s' содержится в каком-нибудь элементе покрытия s).

Топологическое пространство называется *локально компактным*, если любая его точка имеет окрестность с компактным замыканием.

Исходя из этих определений можно построить далеко продвинутую теорию компактности и локальной компактности топологических пространств.

При переходе от категории T к категории KT и сопутствующем этому переходу расщеплении понятий, не удается найти удовлетворительные, во всех отношениях, понятия компактности битопологических пространств и их локальной компактности. В битопологической литературе имеются различные варианты. Чтобы как-то называть их мы будем пользоваться термином "компактный", ставя перед ним указание на авторов соответствующих формулировок. Сначала о компактности.

Пусть $\tau_i(V) = \{X,\ \emptyset,\ U \cup V | U \in \tau_i\}$, где $V \in \tau_j,\ V \neq \emptyset,\ i \neq j$. Битопологическое в смысле Келли пространство (X, τ_1, τ_2) называется *K-компактным*, если все топологические структуры $\tau_i(V)$ компактны.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *B-компактным*, если в каждое τ_i-открытое покрытие можно вписать конечное τ_j-открытое покрытие, $i \neq j$.

Покрытие s множества X называется *парно открытым* покрытием битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если $s = s_1 \cup s_2,\ s_1 \subset \tau_1,\ s_2 \subset \tau_2,\ s_1 \neq \emptyset,\ s_2 \neq \emptyset$.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *FHP-компактным*, если каждое его парно открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Покрытие s множества X называется *$\tau_1\tau_2$-открытым* покрытием, если $s \subset \tau_1 \cup \tau_2$.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *Sw-компактным*, если каждое $\tau_1\tau_2$-покрытие содержит конечное подпокрытие.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *KN-компактным*, если каждое τ_i-замкнутое собственное подмножество в X будет τ_j-компактно.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *дважды компактным*, если топологические пространства (X, τ_1) и (X, τ_2) компактны.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *S-компактным* , если любая бинепрерывная функция $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_r, \tau_l)$ ограничена.

Имеются определения компактности, имеющие смысл не для произвольных битопологических пространств, а лишь для довольно узкого их класса.

Слабо парно вполне регулярное битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *парно вещественно компактным*, если оно парно гомеоморфно пересечению τ_1-замкнутых и τ_2-замкнутых множеств в некоторой степени битопологической прямой $(\mathbb{R}, \tau_r, \tau_l)$.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *Sg-компактным*, если оно S-компактно и парно вещественно компактно.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется *бикомпактным*, если топологическое пространство $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$ компактно.

Это только основные варианты, имеющихся в битопологической литературе определений компактности битопологических в смысле Келли пространств, а имеются еще варианты, использующие полуоткрытые множества, регулярно открытые множества, а также другие типы множеств.

2. Недостатки определений компактности. К сожалению каждое из имеющихся в литературе определений компактности KT-пространств имеет свои недостатки. Одни из них не гарантируют мультипликативность компактности в категории KT, такой, например, является FHP-компактность. Другие же обладают следующим неприятным свойством: если (X, τ_1, τ_2) компактно (в указанном смысле) и парно хаусдорфово, то $\tau_1 = \tau_2$.

Известно, что если топологическое пространство (X, τ) компактно, то структура τ является минимальной структурой в классе хаусдорфовых топологических структур. Естественно считать, что аналогичное утверждение должно быть верным и для битопологических пространств. В соответствии с этим принципом минимальность битопологической структуры (τ_1, τ_2) должна быть необходимым условием компактности для парно хаусдорфовых битопологических пространств. И действительно, почти все известные определения компактности битопологических пространств этому условию удовлетворяют. Пусть, например, (X, τ_1, τ_2)-произвольное KN-компактное парно хаусдорфово битопологическое пространство. В этом пространстве каждое собственное τ_i-замкнутое множество τ_j-компактно. Пусть далее (X', τ_1', τ_2')- также парно хаусдорфово пространство, причем ${\tau'}_1 \subset \tau_1, {\tau'}_2 \subset \tau_2$. Пусть F-произвольное собственное τ_i-замкнутое подмножество в X и $x \notin F$. Тогда для каждой точки $y \in F$ найдутся множества U_y и V_y такие, что $y \in U_y \in \tau_j$, $x \in V_y \in \tau_i$, $U_y \cap V_y = \emptyset$. Множества $U_y | y \in F$ образуют τ_j-открытое покрытие множества F и, в силу KN-компактности (X, τ_1, τ_2), найдутся $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ покрывающие F. Тогда $(\cap_{k=1}^n V_{y_k}) \cap F = \emptyset$ и следовательно точка x не принадлежит τ'-замыканию множества F. Но это означает в конечном счете, что F является τ_i'-замкнутым множеством. Тем самым доказано, что $\tau_i' = \tau_i$, $i = 1, 2$ и потому (X, τ_1, τ_2)-минимальное парно хаусдорфово битопологическое пространство.

С другой стороны можно доказать, что свойство KN-компактности не мультипликативно. Действительно, пусть X – произвольное множество, τ_d – максимальная T_1 топология, являющаяся дискретной топологической структурой на X, τ_m – минимальная T_1 топология, состоящая из пустого множества и дополнений до всех конечных множеств. Тогда (X, τ_d, τ_m)-парно хаусдорфово битопологическое пространство, так как если $x \neq y$ – произвольные точки из X, то $x \in \{x\} \in \tau_d$, $y \in X \setminus \{x\} \in \tau_m$. Кроме того (X, τ_d, τ_m) является KN-компактным битопологическим пространством. Действительно, любое τ_m-открытое покрытие любого множества содержит, очевидно, конечное покрытие и потому любое подмножество множества X будет τ_m-компактно. С другой стороны, любое τ_m-замкнутое собственное подмножество множества X конечно и, следовательно, τ_d-компактно. По тем же соображениям будет KN-компактным и битопологическое пространство (X, τ_m, τ_d). Рассмотрим теперь произведение этих битопологических пространств $(X \times X, \tau_d \times \tau_m, \tau_m \times \tau_d)$. В $X \times X$ любое вертикальное множество $\{x\} \times X$ будет $\tau_d \times \tau_m$-замкнутым множеством и любое горизонтальное множество $X \times \{y\}$ будет $\tau_m \times \tau_d$-открытым множеством. Поэтому для любого вертикального множества $\{x\} \times X$ мы можем рассмотреть его $\tau_m \times \tau_d$-открытое покрытие горизонтальными множествами. Из такого покрытия не выделить конечное покрытие и потому любое вертикальное множество будет $\tau_d \times \tau_m$-замкнутым множеством, но не будет $\tau_m \times \tau_d$-компактным множеством. Это означает что $(X \times X, \tau_d \times \tau_m, \tau_m \times \tau_d)$ не KN-компактное парно парно хаусдорфово битопологическое пространство.

Можно доказать также, что это битопологическое пространство $(X \times X, \tau_d \times \tau_m, \tau_m \times \tau_d)$ не является минимальным парно хаусдорфовым битопологическим пространством и, таким образом, свойство битопологического пространства быть минимальным парно хаусдорфовым также не мультипликативно.

Понятия KN-компакности, K-компактности и FHP-компактности отличаются только формулировками, на самом деле они определяют одно и то же понятие, называемое парной компактностью. Мы доказали, таким образом, что парная компактность не мультипликативна. С другой стороны некоторые из понятий компактности битопологических пространств мультипликативны, но такие понятия имеют другой недостаток. Для них из компактности (X, τ_1, τ_2) следует компактность топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2). Для простоты мы рассмотрим случай, когда некоторое понятие битопологической компактности включает в себя парную компактность, симметричность относительно τ_1 и τ_2 и мультипликативность.

Действительно, пусть (X, τ_1, τ_2) – компактное в указанном выше смысле битопологическое пространство. Тогда будет компактно и битопологическое пространство (X, τ_2, τ_1), а также их произведение $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2, \tau_2 \times \tau_1)$. Если τ_1 – тривиальная топологическая структура, то есть $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, то (X, τ_1) – компактное топологическое пространство. Если же τ_1 – нетривиальная топологическая структура, то мы можем рассмотреть τ_1-замкнутое множество F отличное от пустого множества и от X. Тогда $F \times X$ – непустое $\tau_1 \times \tau_2$-замкнутое собственное подмножество множества $X \times X$ и в силу парной компактности битопологического пространства $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2, \tau_2 \times \tau_1)$ это множество будет $\tau_2 \times \tau_1$-компактно. Рассмотрим произвольное τ_1-открытое покрытие s множества X. Тогда $X \times s$ будет $\tau_2 \times \tau_1$-открытым покрытием множества $F \times X$. В силу $\tau_2 \times \tau_1$-компактности этого множества из покрытия $X \times s$ можно выбрать конечное покрытие $X \times G_1, X \times G_2, \ldots, X \times G_n$. Тогда множества $G_1, G_2, \ldots, G_n$ будут образовывать конечное покрытие множества X. Но это означает, что в любом τ_1-открытом покрытии множества X найдется конечное подпокрытие, что означает компактность топологического пространства (X, τ_1). Аналогично доказывается компактность топологического пространства (X, τ_2).

3. Вариантность определений локальной компактности. Понятие битопологической локальной компактности еще более вариантно, чем понятие компактности. Если при введении понятия битопологической компактности мы сталкиваемся "только" с трудностью переноса топологической компактности на битопологические пространства, то при введении локальной компактности добавляется необходимость так или иначе сформулировать понятие окрестности точки (с этим мы столкнулись уже в теории битопологической локальной связности) и понятие замыкания окрестности.

Действительно, само определение локальной компактности не вызывает особых трудностей, оно просто повторяет топологическое определение в битопологической ситуации, а именно:

Битопологическое пространство называется *локально компактным*, если любая его точка имеет окрестность с компактным замыканием.

Вся трудность состоит в понимании трех последних терминов: окрестность, компактность, замыкание. Каждый из этих трех терминов допускает различные толкования и это нашло свое отражение в битопологической литературе. С битопологической компактностью мы только что более или менее познакомились, с окрестностями точек мы имели дело в связи с битопологической связностью, осталось только определиться с замыканиями окрестностей. В битопологическом пространстве (X, τ_1, τ_2) имеются две основные операции замыкания, а именно τ_1-замыкание и τ_2-замыкание. Кроме того можно рассматривать $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$-замыкание и $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$-замыкание. Наконец можно вводить различные комбинации этих (четырех) операций.

Таким образом совокупность различных вариантов понятия битопологической локальной компактности чрезвычайно велика и трудно обозрима. Варианты уже рассмотренные в битопологической литературе составляют ее незначительную часть. Вот некоторые из них:

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) *локально компактно,*

если каждая точка $x \in X$ имеет τ_i-окрестность с τ_j-компактным τ_j-замыканием;

если каждая точка $x \in X$ имеет τ_i-окрестность с τ-компактным τ_j-замыканием;

если каждая точка $x \in X$ имеет τ_i-окрестность с FHP-компактным τ_j-замыканием;

если каждая точка $x \in X$ имеет τ-окрестность G, для которой

$$(\tau_1 - clG) \cap (\tau_2 - clG) \quad \text{компактно в} \quad (X, \tau);$$

если (X, τ) – локально компактно.
В этих определениях $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$.

§7. Некоторые специальные свойства

1. Специальные топологические пары. Многие авторы изучали не битопологические пространства, а бинарные отношения на множестве всех топологических структур, определенных на произвольно фиксированном множестве X. Конечно изучать тройки (X, τ_1, τ_2) или же пары (τ_1, τ_2), где τ_1, τ_2 – топологические структуры на X, по-существу одно и то же, но формально это разные объекты. Во многих случаях даже не применялся и сам термин битопологическое пространство.

Точно так обстоит дело и со специальными отношениями между топологическими структурами, введенными Архангельским и Бокало. Мы опишем вкратце их подход к определению некоторых специальных бинарных отношений между топологическими структурами или же, в нашей терминологии, специальных классов битопологических пространств.

Говорят, что две топологические структуры τ_1 и τ_2 *совпадают в некоторой точке* $x \in X$, если в этой точке фильтр τ_1-окрестностей и фильтр τ_2-окрестностей совпадают.

Пусть θ и μ – некоторые свойства подмножеств топологических пространств. Через $\mathcal{E}_\mu(X, \tau)$ или просто $\mathcal{E}_\mu$, если это не приводит к недоразумениям, обозначают множество всех непустых подмножеств множества X, обладающих свойством μ в топологическом пространстве (X, τ). Для каждого $Y \in \mathcal{E}_\mu$ определено множество $\mathcal{E}_\theta(Y)$ всех непустых подмножеств множества Y обладающих свойством θ в $(Y, \tau|Y)$. Все такие множества составляют, в совокупности, множество $\mathcal{E}_{\theta,\mu}$.

Топологическая структура τ_1 называется (θ, μ)-*гранью* топологической структуры τ_2, если для каждого $Y \in \mathcal{E}_\mu(X, \tau_2)$ найдется множество $Z \in \mathcal{E}_\theta(Y)$ такое, что $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$ совпадают в некоторой точке множества Z. Эти определения позволяют рассматривать класс $T_{(\theta,\mu)}$ битопологических пространств, состоящий из всех (X, τ_1, τ_2), удовлетворяющих условию: τ_1 является (θ, μ)-гранью τ_2.

В простейшем случае, когда $\theta = t$, $\mu = t$, где t-свойство быть подмножеством, класс $T_{t,t}$ обозначают через Tan. В соответствии с определением класс Tan состоит из всех битопологических пространств (X, τ_1, τ_2), для которых в любом непустом подмножестве $Y \subset X$ найдется точка, для которой $\tau_1|Y$-фильтр и $\tau_2|Y$-фильтр окрестностей совпадают.

Используется также следующая терминология. *Точкой касания* топологических структур τ_1 и τ_2 называют точку, в которой совокупность τ_1-окрестностей и τ_2-окрестностей совпадают. Топологическая структура τ_1 *касается* топологической структуры τ_2, если в каждом непустом подмножестве $Y \subset X$ существует точка касания топологических структур $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$. Вводятся также следующие определения.

Топологическая структура τ_1 *слабо касается* топологической структуры τ_2, если в каждом непустом τ_1-замкнутом множестве $Y \subset X$ существует точка касания топологических структур $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$.

Топологическая структура τ_1 *сильно касается* топологической структуры τ_2, если для любого непустого множества $Y \subset X$ множество точек касания топологических структур $\tau_1|Y$ и $\tau_2|Y$ имеет непустую внутренность в $(Y, \tau_1|Y)$.

В соответствии с этими определениями мы можем рассматривать следующие классы битопологических пространств:

Tan-состоит из всех битопологических пространств (X, τ_1, τ_2), для которых τ_1 касается τ_2.

$wTan$-состоит из всех битопологических пространств (X, τ_1, τ_2), для которых τ_1 слабо касается τ_2.

$sTan$-состоит из всех битопологических пространств (X, τ_1, τ_2), для которых τ_1 сильно касается τ_2.

Очевидно, что

$$sTan \subset Tan \subset wTan.$$

2. Степень близости топологических структур. Нетрудно заметить, что битопологическое пространство (X, τ, τ) для произвольных X и τ принадлежит каждому классу $T_{\theta,\mu}$, каковы бы ни были свойства θ и μ. Поэтому принадлежность того или иного битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) к некоторому классу $T_{\theta,\mu}$ можно рассматривать, как отражение характера и степени совпадения (несовпадения) топологических стуктур τ_1 и τ_2, определенных на одном и том же множестве. Чем уже этот класс тем ближе друг к другу топологические структуры τ_1 и τ_2 и тем ближе битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) к классу T.

Возможны, впрочем, и другие подходы к оценке степени близости двух топологических структур, заданных на одном и том же множестве. Мы можем, например, осуществить непосредственное сравнение топологических структур τ_1 и τ_2, как систем подмножеств множества X, рассмотрев их пересечение. Представляется интуитивно ясным, что чем больше это пересечение, тем ближе друг к другу топологические структуры τ_1 и τ_2. Если $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$, то между этими топологическими структурами вообще вроде бы нет ничего общего. С другой стороны возможен и другой подход к оценке степени совпадения τ_1 и τ_2. Он основан на приведенной выше идее. Мы можем рассмотреть совокупность $\mathcal{I}(X, \tau_1, \tau_2)$ всех подмножеств множества X на каждом из которых топологические структуры τ_1 и τ_2 индуцируют одну и ту же топологическую структуру. Опять же интуитивно ясно, что чем больше $\mathcal{I}(X, \tau_1, \tau_2)$ тем ближе τ_1 и τ_2 друг к другу. Рассмотрим, однако, следующий пример. Пусть $X = [0,1]$, $X' = (0,1)$, τ'-обычная топологическая структура на интервале $(0,1)$. Положим

$$\tau_1 = \{G' \cup \{0\} | G' \in \tau'\} \cup \{\emptyset, X\}, \tau_2 = \{G' \cup \{1\} | G' \in \tau'\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

Каждое τ_1-открытое множество, отличное от $\emptyset$ и X, содержит точку 0 и каждое τ_2-открытое множество, отличное от $\emptyset$ и X, содержит точку 1. Отсюда следует, что $\tau_1 \cap \tau_2 = \{\emptyset, X\}$. Оценка совпадения по $\tau_1 \cap \tau_2$ приводит нас к заключению о том, что τ_1 и τ_2 далеки друг от друга. С другой стороны, τ_1 и τ_2 совпадают на множестве X' отличном от множества X только двумя точками и потому оценка близости по $\mathcal{I}(X, \tau_1, \tau_2)$ убеждает нас в том, что τ_1 и τ_2 близки друг к другу. Различные подходы к оценке близости τ_1 и τ_2 дают нам различные результаты.

С битопологической точки зрения мы получили различные оценки близости рассматриваемого битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) к классу T. Представляется естественным искать наиболее близкое к (X, τ_1, τ_2) топологическое пространство среди топологических пространств (X, τ), структура которых лежит между $\inf\{\tau_1, \tau_2\}$ и $\sup\{\tau_1, \tau_2\}$. В рассмотренном выше примере можно считать, повидимому, что наиболее близким к битопологическому пространству (X, τ_1, τ_2) является топологическое пространство (X, τ), для которого $\tau = \{G' \cup \{0,1\} | G' \in \tau'\} \cup \{\emptyset\}$.

§8. Отображения

1. Классификация отображений. Значительное место в топологической литературе занимает изучение различных классов отображений топологических пространств. Эта деятельность была, судя по количеству статей, весьма интенсивной. Она имела большое значение и для развития теории топологических пространств и для развития теории битопологических пространств. В рамках этой тематики возникла необходимость изучения не обязательно непрерывных отображений. Если, например, топологическое пространство (X, τ) не является вполне регулярным пространством, то множество всех непрерывных на (X, τ) функций может оказаться слишком бедным, может даже состоять только из постоянных функций. Тогда следует изучать более широкие классы отображений. Этим более широким классам не обязательно непрерывных отображений топологических пространств сответствуют какие-то классы отображений битопологических пространств. С другой стороны, изучаются и классы непрерывных (бинепрерывных) отображений, имеющих те или иные дополнительные свойства. При этом переход от классов отображений топологических пространств к соответствующим классам отображений битопологических пространств сопровождается, конечно, расщеплением понятий, значительным увеличением разнообразия классов отображений.

2. Классы отображений. Количество изучаемых в литературе классов отображений битопологических пространств весьма велико, нет необходимости упоминать здесь все эти классы, для нас важен только принцип их построения. Мы не будем также приводить названия рассматриваемых здесь классов отображений, они, подчас, различны у разных авторов. Мы просто опишем некоторые из таких классов.

Следует, прежде всего, упомянуть классы отображний, определяемые условиями вида:

для каждой точки $x \in X$ и любой ${\tau_i}'$-окрестности V точки $f(x)$ существует τ_i-окрестность U точки x такая, что

$$f(U) \subset \tau'_j - cl\ V;$$

для каждой точки $x \in X$ и любой ${\tau_i}'$-окрестности V точки $f(x)$

существует τ_i-окрестность U точки x такая, что

$$f(U) \subset \tau_i' - \operatorname{int}(\tau_j' - cl\ V);$$

для каждой точки $x \in X$ и любой ${\tau_i}'$-окрестности V точки $f(x)$ существует τ_i-окрестность U точки x такая, что

$$f(\tau_i - cl\ U) \subset \tau_j' - cl\ V;$$

для каждой точки $x \in X$ и любой ${\tau_i}'$-окрестности V точки $f(x)$ существует τ_i-окрестность U точки x такая, что

$$f(\tau_j - cl\ U) \subset \tau_j' - cl\ V;$$

для каждой точки $x \in X$ и любой ${\tau_i}'$-окрестности V точки $f(x)$ существует τ_i-окрестность U точки x такая, что

$$f(\tau_i - cl\ U) \subset \tau_i' - \operatorname{int}(\tau_j' - cl\ V);$$

для каждой точки $x \in X$ и любой ${\tau_i}'$-окрестности V точки $f(x)$ существует τ_i-окрестность U точки x такая, что

$$f(\tau_i - \operatorname{int}(\tau_j - cl\ U) \subset \tau_i' - \operatorname{int}(\tau_j' - cl\ V),$$

и так далее. В такого типа условия могут входить операции τ-замыкания (τ'-замыкания) и τ-внутренности (τ'-внутренности) для $\tau = \inf\{\tau_1, \tau_2\}$ или же для $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ и для аналогичных τ'. Вместо окрестностей U и V могут рассматриваться суммы τ_1 и τ_2-окрестностей или же суммы τ_1' и τ_2'-окрестностей. Если учесть, что эти определения можно разнообразить заменой операций замыкания и внутренности на α-замыкание и α-внутренность такие, что $A \subset \alpha - cl\ A \subset cl\ A$, $\operatorname{int} A \subset \alpha - \operatorname{int} A \subset A$ для любого множества A, то можно себе представить какое обилие различных классов мы можем получить. Но на этом разнообразие классов отображений не кончается. Рассматриваются также битопологические аналоги *открытых* отображений, *совершенных* отображений, на основе которых строятся соответствующие битопологические теории *абсолютов*, различные типы *монотонных* отображений, определяемые битопологической связностью (здесь, как известно, также масса вариантов), *накрывающе бинепрерывных* отображений и их аналогов, в определения которых входят покрытия соответствующих множеств. Аналоги всех этих определений могут быть сформулированы и для многозначных отображений, вот почему литература по битопологической теории отображений столь велика и разнообразна.

§9. Расширения

Настоящий параграф и параграф следующий за ним содержат детальное изложение основ теории расширений битопологических пространств в частности теорию их пополнения по соответствующим структурам. При этом пришлось изложить также и элементы теории расширений топологических пространств также с соответствующими деталями. В топологической литературе можно найти различные методы построения и изучения расширений, как топологических так и битопологических пространств. Здесь описаны методы, предложенные самим автором в его более ранних публикациях.

1. Типы расширений. Создание теории расширений битопологических в смысле Келли пространств потребовало преодоления известных трудностей уже на этапе формирования ее основных понятий, в том числе и самого понятия расширения. Разные авторы давали существенно различные определения этого понятия, исходя из следующего понятия расширения топологического пространства.

Топологическое пространство (X', τ') называется *расширением* топологического пространства (X, τ), если (X, τ) является подпространством топологического пространства (X', τ') и замыкание, $\tau' - cl\ X$, множества X в (X', τ') равно X'.

Мы не будем приводить здесь все имеющиеся в литературе варианты понятия расширения битопологического пространства, а остановимся лишь на двух из них.

Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') называют *расширением* битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X, τ_1, τ_2) является подпространством битопологического в смысле Келли пространства (X', τ_1', τ_2') и замыкания, $\tau_1' - cl\ X$ и $\tau_2' - cl\ X$ множества X в топологических пространствах (X', τ_1') и (X', τ_2') равны X'.

Битопологическое пространство (X', τ_1', τ_2') называют *слабым расширением* битопологического пространства (X, τ_1, τ_2), если (X, τ_1, τ_2) является подпространством битопологического в смысле Келли пространства (X', τ_1', τ_2') и объединение замыканий, $\tau_1' - cl\ X$ и $\tau_2' - cl\ X$ множества X в топологических пространствах (X', τ_1') и (X', τ_2') равно X'.

Понятие слабого расширения битопологического в смысле

Келли пространства в общем соответствует идее введения слабых свойств битопологических пространств, что становится особенно ясным при переходе от рассмотрения замыканий множеств к рассмотрению окрестностей точек. На языке окрестностей (X', τ_1', τ_2') будет расширением его подпространства (X, τ_1, τ_2), если для любой точки $x \in X'$ любая ее τ_1'-окрестность и любая ее τ_2'-окрестность имеют непустое пересечение с X, и будет слабым расширением, если для любой точки $x \in X'$ любая ее τ_1'-окрестность или любая ее τ_2'-окрестность имеет непустое пересечение с X.

2. Регулярные расширения топологических пространств. Общую теорию расширений битопологических в смысле Келли пространств можно строить, как непосредственное обобщение теории расширений топологических пространств. Основными объектами являются здесь так называемые регулярные расширения.

Расширение (X', τ') топологического пространства (X, τ) называется *строгим* (по Стону) расширением, если замыкания в (X', τ') подмножеств множества X образуют в (X', τ') базу замкнутых множеств.

Расширение (X', τ') топологического пространства (X, τ) называется *точным* расширением, если любые две различные точки x, y из X', из которых хоть одна не принадлежит X, топологически различимы в (X', τ') из X (существует такое множество $A \subset X$, что его замыкание в (X', τ') содержит одну из этих точек и не содержит другую).

Расширение (X', τ') топологического пространства (X, τ) называется *регулярным* расширением, если оно строгое и точное расширение этого пространства.

3. Следы топологических расширений. Если (X', τ') – расширение топологического пространства (X, τ), то любая точка $x \in X'$ определяет две системы $\omega(x)$ и $\gamma(x)$ подмножеств множества X, а именно:

$$\omega(x) = \{G' \cap X | x \in G' \in \tau'\}$$

$$\gamma(x) = \{F | F \in \complement\tau, x \in \tau' - cl\ F\}.$$

Система $\omega(x)$ состоит из непустых открытых в (X, τ) множеств, $\omega(x) \subset \tau$, система $\gamma(x)$ состоит из непустых замкнутых в (X, τ) множеств, $\gamma(x) \subset \complement\tau = \{F | X \setminus F \in \tau\}$.

Система $\omega(x)$ обладает следующими свойствами:

$G_1 \in \omega(x)$ и $G_2 \in \omega(x) \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \omega(x)$.

$G_1 \in \omega(x), G_2 \in \tau, G_1 \subset G_2 \Longrightarrow G_2 \in \omega(x)$.

Любую непустую систему ω непустых открытых в (X, τ) множеств, обладающую этими свойствами, будем называть *открытым фильтром* в (X, τ).

Система $\gamma(x)$ обладает следующими свойствами:

$F_1 \cup F_2 \in \gamma(x),\ F_1 \in \complement\tau,\ F_2 \in \complement\tau \Longrightarrow F_1 \in \gamma(x)$ или $F_2 \in \gamma(x)$.

$F_1 \in \gamma(x),\ F_2 \in \complement\tau,\ F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_2 \in \gamma(x)$.

Любую непустую систему γ непустых замкнутых в (X, τ) множеств, обладающую этими свойствами, будем называть *замкнутым кофильтром* в (X, τ).

Между открытыми фильтрами ω и замкнутыми кофильтрами γ в произвольно фиксированном топологическом пространстве (X, τ) имеется каноническое взаимно однозначное соответствие (отношение двойственности), а именно:

$$\gamma(\omega) = \{F | F \in \complement\tau, X \setminus F \notin \omega\},$$

$$\omega(\gamma) = \{G | G \in \tau, X \setminus G \notin \gamma\}.$$

Нетрудно доказать, что

$$\gamma(\omega(\gamma)) = \gamma,\ \omega(\gamma(\omega)) = \omega.$$

В частности, для любой точки $x \in X'$ расширения (X', τ') топологического пространства (X, τ) справедливы соотношения

$$\gamma(\omega(x)) = \gamma(x), \quad \omega(\gamma(x)) = \gamma(x).$$

4. Построение раширений топологических пространств. Следующая конструкция всегда приводит к регулярному расширению произвольно фиксированного топологического пространства (X, τ).

Берется какое-нибудь множество Ω открытых фильтров в (X, τ), не содержащее фильтров вида $\omega(x)$ для $x \in X$. Это множество присоединяется к множеству X. На полученном таким образом множестве $X' = X \cup \Omega$ вводится топологическая структура τ'. Открытую базу этой топологической структуры составляют множества вида $G \cup \{\omega | G \in \omega \in \Omega\}$, образуемые по всем

$G \in \tau$. Без особого труда доказывается, что построенное топологическое пространство (X', τ') является регулярным расширением заданного топологического пространства (X, τ). Его называют расширением, полученным присоединением к X множества Ω открытых фильтров в (X, τ).

Двойственной конструкцией строится регулярное расширение (X', τ') получаемое присоединением к X какого-нибудь множества Γ замкнутых кофильтров в (X, τ), не содержащее кофильтров вида $\gamma(x)$. Это множество присоединяется к X. На полученном множестве $X' = X \cup \Gamma$ вводится топологическая структура τ', для которой все множества вида $F \cup \{\gamma | F \in \gamma \in \Gamma\}$ составляют базу замкнутых множеств.

Если (X', τ') – регулярное расширение топологического пространства (X, τ), то оно канонически гомеоморфно расширению, полученному присоединением к X множества $\Omega(X') = \{\omega(x) | x \in X' \setminus X\}$ или же множества $\Gamma(X') = \{\gamma(x) | x \in X' \setminus X\}$.

5. Регулярные расширения битопологических пространств. Переходя теперь к расширениям битопологических в смысле Келли пространств мы можем, прежде всего, перенести на них понятие регулярности расширения. Как и для топологических пространств, понятие регулярности расширения включает в себя понятие строгого расширения и понятие точного расширения.

(X', τ_1', τ_2') – *строгое* расширение, если (X', τ_1') и (X', τ_2') – строгие расширения топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.

(X', τ_1', τ_2') – *точное* расширение, если (X', τ_1') и (X', τ_2') – точные расширения топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.

(X', τ_1', τ_2') – *слабо точное* расширение, если любые две различные точки, из которых хоть одна не принадлежит X, битопологически различимы из X, то есть для них найдется множество $A \subset X$ такое, что его замыкание в (X', τ_1') или же его замыкание в (X', τ_2') содержит одну из этих точек и не содержит другую.

Строгое и точное расширение битопологического в смысле Келли пространства мы будем называть его *регулярным расширением*, строгое и слабо точное расширение – слабо регулярным.

Для слабых расширений мы также можем сформулировать определения строгости, точности и слабой точности, аналогичные приведенным выше.

(X', τ_1', τ_2') – *строгое* расширение, если замыкания в (X', τ_1') всех подмножеств множества X образуют его базу замкнутых множеств и замыкания в (X', τ_2') всех подмножеств множества X образуют его базу замкнутых множеств.

(X', τ_1', τ_2') – *точное* расширение, если $\tau_1' - cl\ X$ и $\tau_2' - cl\ X$ – точные расширения топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно.

(X', τ_1', τ_2') – *слабо точное* расширение, если любые две различные точки, из которых хоть одна не принадлежит X, битопологически различимы из X, то есть для них найдется множество $A \subset X$ такое, что его замыкание в (X', τ_1') или же его замыкание в (X', τ_2') содержит одну из этих точек и не солержит другую.

Строгое и точное слабое расширение мы будем называть *регулярным слабым* расширением, строгое и слабо точное слабое расширение мы будем называть слабо регулярным слабым расширением.

Замечание. Нам пришлось несколько изменить исходные определения, так как (X', τ_1') и (X', τ_2') не являются, в общем случае, расширениями пространств (X, τ_1) и (X, τ_2). Нетрудно заметить, что эти определения являются обобщениями соответствующих определений для расширений битопологических в смысле Келли пространств.

6. Следы битопологических расширений. Если (X', τ_1', τ_2')– регулярное расширение битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2), то любая точка $x \in X'$ определяет открытые фильтры $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ в топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно (замкнутые кофильтры $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$)

Множества $\Omega_1(X') = \{\omega_1(x) | x \in X' \setminus X\}$ и $\Omega_2(X') = \{\omega_2(x) | x \in X' \setminus X\}$ однозначно определяют с точностью до гомеоморфизма какие-то регулярные расширения соответствующих топологических пространств, однако они не определяют, даже с точностью до гомеоморфизма, соответствующее расширение (X', τ_1', τ_2'). Для этого надо еще знать какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\Omega_1(X')$ и множества $\Omega_2(X')$, определяемое соответствиями

$$\omega_1(x) \longleftarrow x \longrightarrow \omega_2(x)$$

для всех точек $x \in X' \setminus X$. В этом состоит *принципиальное отличие теории расширений битопологических пространств от теории расширений топологических пространств.*

7. Построение битопологических расширений. Следующая конструкция всегда приводит к регулярному расширению произвольно заданного битопологоического пространства. Рассматриваются какие-нибудь множества Ω_1 и Ω_2 открытых фильтров топологических пространств (X, τ_1) и (X, τ_2), не содержащие фильтров вида $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ для $x \in X$ (можно рассматривать соответствующие множества Γ_1 и Γ_2 замкнутых кофильтров) и фиксируется какое-нибудь взвимно однозначное соответствие (*спаривание*) $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ между точками этих множеств. К множеству X присоединяется график Γ_φ этого соответствия. Полагаем $X' = X \cup \Gamma_\varphi$ и на X' вводим две топологические структуры. Эти топологические структуры τ_1', τ_2' на множестве X' определяются их открытыми базами, состоящими из всех множеств вида

$$G_1 \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 = \varphi(\omega_1), G_1 \in \omega_1 \in \Omega_1\},\ G_1 \in \tau_1$$

и, соответственно,

$$G_2 \cup \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 = \varphi(\omega_1), \quad G_2 \in \omega_2 \in \Omega_2\}, \quad G_2 \in \tau_2.$$

В связи с этим небезинтересно отметить, что для регулярного расширения (X', τ_1', τ_2') , битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) из $\tau_1 = \tau_2$ совсем не следует $\tau_1' = \tau_2'$. Это будет так, если $\varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ тождественное отображение. Слабо регулярные расширения мы опишем в следующем разделе, как частный случай слабых расширений.

8. Следы слабых расширений. Если (X', τ_1', τ_2') – регулярное или слабо регулярное слабое расширение битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2), то любая точка $x \in X'$ определяет открытый фильтр $\omega_1(x)$ или открытый фильтр $\omega_2(x)$ в топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно, или такие фильтры в обоих топологических пространствах (замкнутые кофильтры $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$).

Рассмотрим множества $\Omega_1(X') = \{\omega_1(x) | x \in \tau_1' - cl\ X \setminus X\}$ и $\Omega_2(X') = \{\omega_2(x) | x \in \tau_2' - cl\ X \setminus X\}$. Если точке $x \in X' \setminus X$ соответствует пара $(\omega_1(x), \omega_2(x))$, то определено соответствие

$$\omega_1(x) \longrightarrow x \longleftarrow \omega_2(x).$$

Это соответствие определяет, в общем случае, частичное многозначное отображение φ множества $\Omega_1(X')$ в множество $\Omega_2(X')$. График этого отображения Γ_φ определим следующим образом:

если отображение φ определено для $\omega_1 \in \Omega_1(X')$, и $\omega_2 = \varphi(\omega_1)$ то $(\omega_1, \omega_2) \in \Gamma_\varphi$,

если отображение φ не определено для $\omega_1 \in \Omega_1(X')$, то $\omega_1 \in \Gamma_\varphi$,

если $\omega_2 \in \Omega_2(X')$ не является φ-образом никакого элемента из $\Omega_1(X')$, то $\omega_2 \in \Gamma_\varphi$.

Нетрудно убедиться в том, что условие слабой точности обеспечивает взаимную однозначность соответствия между всеми точками множества $X' \setminus X$ и всеми точками множества Γ_φ.

Действительно, мы имеем

$$x \mapsto \omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x) \in \Gamma_\varphi | x \notin \tau_2' - cl\ X, \\ \omega_2(x) \in \Gamma_\varphi | x \notin \tau_1' - cl\ X, \\ (\omega_1(x), \omega_2(x)) \in \Gamma_\varphi | x \in \tau_1' - cl\ X \cap \tau_2' - cl\ X, \end{cases} .$$

Если $\omega(x) = \omega(y)$ для некоторых точек x, y из $X' \setminus X$, то либо $\omega_1(x) = \omega_1(y)$ либо $\omega_2(x) = \omega_2(y)$ либо $(\omega_1(x), \omega_2(x)) = (\omega_1(y), \omega_2(y)$, в соответствии с этими случаями

точки x и y не принадлежат множеству $\tau_2' - cl\ X$

точки x и y не принадлежат множеству $\tau_1' - cl\ X$

точки x и y принадлежат множеству $\tau_1' - cl\ X \cap \tau_2' - cl\ X$.

В первом случае $x = y$, так как если это не так, то должно найтись множество $F \subset X$, τ_1'-замыкание которого содержит одну из этих точек и не содержит другую, что влечет $\omega_1(x) \neq \omega_1(y)$.

Во втором случае $x = y$, так как если это не так, то должно найтись множество $F \subset X$, τ_2'-замыкание которого содержит одну из этих точек и не содержит другую, что влечет $\omega_2(x) \neq \omega_2(y)$.

В третьем случае $x = y$, так как если это не так, то должно найтись множество $F \subset X$, τ_2'-замыкание или τ_1'-замыкание которого содержит одну из этих точек и не содержит другую, что влечет $(\omega_1(x), \omega_2(x)) \neq (\omega_1(y), \omega_2(y))$.

9. Построение слабых расширений. Следующая конструкция всегда дает, в общем случае, слабо регулярное слабое расширение битопологического в смысле Келли пространства, а в соответствующих частных случаях дает регулярное расширение, слабо регулярное расширение или регулярное слабое расширение. Описывать эту конструкцию мы будем в терминах замкнутых кофильтров, так как в теории слабых расширений, в отличие от теории расширений битопологических в смысле Келли пространств, использование замкнутых кофильтров предпочтительнее.

Пусть Γ_1 и Γ_2 – какие-то множества замкнутых кофильтров топологических пространств (X,τ_1) и (X,τ_2), не содержащие кофильтров вида $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ для $x \in X$, соответственно. Пусть, далее, $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ – частичное многозначное отображение, Γ_φ – график этого отображения. Образуем множество $X' = X \cup \Gamma_\varphi$ и введем на этом множестве две топологические структуры τ_1' и τ_2', определяемые следующими базисами замкнутых множеств.

Для τ_1' базис состоит из всех множеств вида

$$F_1 \cup \{\gamma_1,\ (\gamma_1,\gamma_2) | F_1 \in \gamma_1 \in \Gamma_\varphi;\ F_1 \in \gamma_1,\ (\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma_\varphi\},$$

где $F_1 \in \complement\tau_1$.

Для τ_2' базис состоит из всех множеств вида

$$F_2 \cup \{\gamma_2,\ (\gamma_1,\gamma_2) | F_2 \in \gamma_2 \in \Gamma_\varphi;\ F_2 \in \gamma_2,\ (\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma_\varphi\},$$

где $F_2 \in \complement\tau_2$.

Нетрудно заметить, что (X',τ_1',τ_2') – строгое расширение. Это следует непосредственно из определения топологических структур τ_1' и τ_2'. Оно является также слабо точным расширением, то есть для любых двух различных точек x, y множества X', из которых по крайней мере одна не принадлежит X, найдется такое множество $F \in X$, что $\tau_1' - cl\ F$ или $\tau_2' - cl\ F$ содержит одну из этих точек и не содержит другую.

Действительно, пусть x, y – произвольные точки множества X'. Без нарушения общности можно считать, что $y \in X' \setminus X = \Gamma_\varphi$, а $x \in X$ или $x \notin X$. Пусть $x \in X, y \in X' \setminus X$. Для y возможны три случая, а именно:

$$y = \begin{cases} \gamma_1 \neq \gamma_1(x), \gamma_1 \in \Gamma_1, \\ \gamma_2 \neq \gamma_2(x), \gamma_2 \in \Gamma_2 \\ (\gamma_1,\gamma_2), \gamma_1(x) \neq \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2(x) \neq \gamma_2 \in \Gamma_2 \end{cases}.$$

В первом случае найдется множество $F \subset X$, которое принадлежит одному из кофильтров $\gamma_1, \gamma_1(x)$ и не принадлежит другому и, следовательно, $\tau_1' - cl\ F$ содержит одну из точек γ_1, x и не содержит другую. Остальные случаи рассматриваются аналогично, причем в третьем случае можно использовать либо соотношение $\gamma_1(x) \neq \gamma_1$, либо соотношение $\gamma_2(x) \neq \gamma_2$.

Пусть теперь точки x, y принадлежат Γ_φ. Если они принадлежат множеству $\tau_1' - cl\ X \cup \tau_2' - cl\ X$, то $x = (\gamma_1, \gamma_2), y = (\gamma_1', \gamma_2')$, причем либо $\gamma_1 \neq \gamma_1'$, либо $\gamma_2 \neq \gamma_2\prime$. В первом случае найдется множество F, принадлежащее одному из кофильтров γ_1, γ_1' и не принадлежащее другому. Тогда $\tau_1' - cl\ F$ содержит одну из точек x, y и не содержит другую. Случай $\gamma_2 \neq \gamma_2\prime$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь хоть одна из точек x, y, например y, не принадлежит множеству $\tau_1' - cl\ X \cap \tau_2' - cl\ X$. Будем, для определенности, считать, что $y \notin \tau_1' - cl\ X$ и потому $y \in \tau_2' - cl\ X$. Если $x \bar{\in} \tau_2' - cl\ X$, то $\tau_2' - clX$ содержит одну из точек x, y и не содержит другую. Осталось рассмотреть последний случай, в котором обе точки x, y принадлежат $\tau_2' - cl\ X$, а $y \notin \tau_1' - cl\ X$. Тогда $y = \gamma_2$, в то время как $x = \gamma_2'$ или $x = (\gamma_1, \gamma_2')$. Если $x = \gamma_2'$, то $\gamma_2' \neq \gamma_2$ и потому найдется множество F, принадлежащее одному из этих кофильтров и не принадлежащее другому. Тогда $\tau_2' - cl\ F$ будет содержать одну из точек x, y и не содержать другую. Если же $x = (\gamma_1, \gamma_2')$, то $\tau_1' - cl\ X$ будет содержать точку x и не содержать точку y.

10. Характеристика битопологических расширений. Мы показали в предыдущих разделах, что произвольное слабо регулярное слабое расширение битопологического в смысле Келли пространства (X, τ_1, τ_2) определяется фактически графиком Γ_φ (частичного) отображения $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 – некоторые множества кофильтров в (X, τ_1) и (X, τ_2), не содержащие кофильтров вида $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ для $x \in X$, сответственно.

Если φ – частичное взаимно однозначное отображение множества Γ_1 в Γ_2, то мы получаем регулярное слабое расширение. Действительно, пусть x, y какие-то различные точки из $\tau_1' - cl\ X$. Тогда, без нарушения общности, можно считать, что $x = \gamma_1, y = \gamma_1'$ или $x = \gamma_1, y = (\gamma_1', \gamma_2)$, или $x = (\gamma_1, \gamma_2), y = (\gamma_1', \gamma_2')$. Так как отображение φ взаимно однозначное, то во всех этих случаях $\gamma_1 \neq \gamma_1'$ и потому точки x, y всегда различимы из X и, следовательно, (X', τ_1') – точное расширение топологического пространства (X, τ_1). Аналогично доказывается, что (X', τ_2') – точное расширение топологического пространства (X, τ_2).

Если φ – отображение множества Γ_1 на Γ_2, то мы получаем слабо регулярное расширение битопологического в смысле Келли пространства, если же φ – взаимно однозначное отображение множества Γ_1 на Γ_2, то мы получаем регулярное расширение.

§10. Пополнение биравномерных пространств

Во многих случаях расширение битопологического пространства определяется, хотя и не однозначно, фиксированной на нем бисструктурой в смысле Келли. В качестве таких биструктур мы будем рассматривать пары структур близости или пары структур смежности или пары равномерных структур, заданных на некотором битопологическом в смысле Келли пространстве. При этом мы будем говорить о пополнении заданного битопологического пространства по соответствующей биструктуре. Естественно, что изложение теории пополнения битопологических пространств по таким биструктурам следует начинать с изложения элементов теории пополнения топологических пространств по равномерным структурам, по структурам смежности и по структурам близости. Заметим, что в теории пополнения топологических пространств рассматриваются не произвольные регулярные расширения, а так называемые *правильные* расширения, то есть расширения, в которых все одноточечные множества нароста являются замкнутыми множествами.

1. ρ-пополнения топологических пространств. Пусть (X, τ) – произвольное топологическое пространство. *Равномерной (по покрытиям)* структурой на (X, τ) мы будем называть любую систему ρ его открытых покрытий, удовлетворяющую следующим условиям:

P_1. Если покрытие $s \in \rho$ вписано в какое-то открытое покрытие s' пространства (X, τ), то $s' \in \rho$.

P_2. Если $s_1 \in \rho$ и $s_2 \in \rho$, то $s_1 \wedge s_2 \in \rho$, где $s_1 \wedge s_2 = \{G_1 \cap G_2 | G_1 \in s_1, G_2 \in s_2\}$.

Пусть ω – некоторый фильтр открытых в (X, τ) множеств. Он называется ρ-фильтром (Коши), если для любого $s \in \rho$ найдется такое $G \in s$, что $G \in \omega$. Нас будут интересовать минимальные ρ-фильтры. Нетрудно заметить, что фильтр $\omega(x) = \{G | x \in G \in \tau\}$ является минимальным ρ-фильтром для каждой точки $x \in X$. Множество всех минимальных ρ-фильтров отличных от $\omega(x)$ обозначается через Ω_ρ.

Пусть γ – некоторый кофильтр замкнутых в (X,τ) множеств. Он называется ρ-кофильтром (Коши), если $\complement\gamma = \{G|X\setminus G \in \gamma\} \notin \rho$. Нас будут интересовать максимальные ρ-кофильтры. Нетрудно заметить, что кофильтр $\gamma(x) = \{F|x \notin X \setminus F \in \tau\}$ является максимальным ρ-кофильтром для каждой точки $x \in X$. Множество всех максимальных ρ-кофильтров отличных от $\gamma(x)$ обозначается через Γ_ρ.

При известном отношении двойственности между открытыми фильтрами и замкнутыми кофильтрами

$$(\gamma \longleftrightarrow \omega) \iff (G \in \omega \iff X \setminus G \notin \gamma).$$

Нетрудно доказать, что

$$\Gamma_\rho \longleftrightarrow \Omega_\rho.$$

В предыдущем параграфе была описана процедура построения регулярного расширения произвольного топологического пространства (X,τ), получаемого присоединением к X фиксированного множества Ω открытых фильтров или соответствующего ему множества Γ замкнутых кофильтров. Регулярное расширение топологического пространства (X,τ), получаемое присоединением к X множества Ω_ρ или множества Γ_ρ будем называть его ρ-пополнением и обозначать через $(\rho X, \rho\tau)$. Нетрудно убедится в том что так определенное расширение будет всегда правильным расширением. С другой стороны, пусть (X',τ') – некоторое правильное расширение топологического пространства (X,τ). Будем говорить, что открытое покрытие s топологического пространства (X,τ) *продолжимо* до открытого покрытия s', если $s' = \{X' \setminus (\tau' - cl\ (X \setminus G))|G \in s\}$ является покрытием множества X'. Рассмотрим совокупность ρ всех открытых покрытий топологического пространства (X,τ), продолжимых до открытых покрытий его правильного расширения (X',τ'). Можно доказать, что ρ-пополнение $(\rho X, \rho\tau)$ эквивалентно исходному расширению (X',τ').

2. Особенности общей теории ρ-пополнения. Равномерная структура ρ на топологическом пространстве (X,τ) называется *прекомпактной*, если для любого открытого покрытия $s \in \rho$ найдется конечное его подпокрытие $s' \in \rho$. Прекомпактная равномерная структура однозначно определена входящими в нее конечными покрытиями. Она состоит из всех покрытий, содержащих эти конечные покрытия. С другой стороны, любая равномерная структура ρ на топологическом пространстве (X, τ) определяет некоторую прекомпактную равномерную структуру ρ_c, состоящую из всех открытых покрытий топологического пространства (X, τ), которые содержат конечные открытые покрытия из ρ. В соответствии с этим определением $\rho_c \subset \rho$. ρ_c можно определить, как максимальную прекомпактную равномерную структуру, содержащуюся в ρ. Будем называть структуру ρ_c *прекомпактной частью* равномерной структуры ρ.

Наряду с ρ-пополнением мы можем рассматривать и ρ_c-пополнение и, так как $\rho_c \subset \rho$, то можно предположить, что $\rho X \subset \rho_c X$ по аналогии с известным фактом вейлевской теории пополнения. К сожалению это включение в общем случае не имеет места, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = (0,1]$, τ – обычная топологическая структура на $(0,1]$ и γ_0 – произвольно фиксированный максимальный исчезающий замкнутый фильтр. Эта система замкнутых в (X, τ) множеств обладает следующими свойствами:

1. $F_1 \cup F_2 \in \gamma_0 \iff F_1 \in \gamma_0$ или $F_2 \in \gamma_0$.
2. $F_1 \cap F_2 \in \gamma_0 \iff F_1 \in \gamma_0$ и $F_2 \in \gamma_0$.
3. $\emptyset \notin \gamma_0$.
4. Если $F' \cap F \neq \emptyset$ для каждого $F \in \gamma_0$, то $F' \in \gamma_0$.
5. $(\bigcap F | F \in \gamma_0) = \emptyset$.

Пусть $s_0 = \complement\gamma_0$, тогда эта система открытых в (X, τ) множеств обладает следующими свойствами:

1. $G_1 \cap G_2 \in s_0 \iff G_1 \in s_0$ или $G_2 \in s_0$.
2. $G_1 \cup G_2 \in s_0 \iff G_1 \in s_0$ и $G_2 \in s_0$.
3. $X \notin s_0$.
4. Если $G' \cup G \neq X$ для каждого $G \in s_0$, то $G' \in s_0$.
5. $(\bigcup G | G \in s_0) = X$.

В качестве равномерной структуры ρ на топологическом пространстве (X, τ) рассмотрим структуру, состоящую из всех его открытых покрытий, в которые вписаны покрытия вида $(s_0 \cup \{G\}) \wedge s$, где $G \notin s_0$ и s – конечное покрытие, содержащее какой-нибудь интервал $(0, \epsilon)$.

Докажем прежде всего, что условия P_1, P_2 для ρ выполнены. Выполнение условия P_1 непосредственно следует из определения структуры ρ. Выполнение условия R_2 следует из соотношения

$$(s_0 \cup \{G_1\}) \wedge (s_0 \cup \{G_2\}) = s_0 \cup \{G_1 \cap G_2\}.$$

Заметим, что из $G_1 \notin s_0$ и $G_2 \notin s_0$ следует $G_1 \cap G_2 \notin s_0$, в частности $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Нетрудно заметить, что γ_0 является максимальным исчезающим ρ-кофильтром. Действительно, γ_0 является ρ-фильтром, так как $\complement\gamma_0 = s_0 \notin \rho$. С другой стороны, для любого $F \notin \gamma_0$

$$\complement(\gamma_0 \cup \{F\}) = (s_0 \cup \{G\}) \in \rho$$

и потому γ_0 – максимальный исчезающий ρ-кофильтр. Нам осталось только доказать, что ρ_c-пополнение эквивалентно отрезку $[0,1]$, то есть ρ_c состоит из всех открытых покрытий полуинтервала $(0,1]$, продолжимых до открытых покрытий отрезка $[0,1]$. Пусть s' – конечное покрытие, принадлежащее ρ. Тогда в него вписано некоторое покрытие $(s_0 \cup \{G\}) \wedge s$, где $G \notin s_0$, s – конечное покрытие, содержащее какой-нибудь интервал $(0,\epsilon)$. В частности каждый элемент системы $s_0 \wedge (0,1)$ содержится в каком-нибудь элементе покрытия s'. Заметим теперь. что как бы мы ни разбивали s_0 на подсистемы $s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n}$, хоть одна из них будет покрытием множества $(0,1]$. Действительно, в противном случае должны найтись точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ не накрываемые подсистемами $s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n}$ соответственно. Но в s_0 существует элемент накрывающий каждую из этих точек. Без нарушения общности можно считать, что он принадлежит подсистеме s_{01}, что противоречит выбору точки x_1. Отсюда следует, что в s' найдется элемент, содержащий интервал $(0,1)$, а такое покрытие продолжимо на отрезок $[0,1]$.

Мы доказали, что оба расширения ρX и $\rho_c X$ являются с точностью до эквивалентности отрезками $[0,1]$, но с разной топологией на них, поэтому ρX не содержится в $\rho_c X$.

3. σ-расширения топологических пространств. Прекомпактным равномерным структурам на (X,τ) взаимно однозначно соответствуют так называемые *отношения (структуры) смежности*. Отношением смежности называют любое отношение σ на множестве всех конечных систем γ замкнутых в (X,τ) множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

C_1. Если каждый элемент системы γ_1 содержит какой-нибудь злемент системы γ_2, то

$$\sigma(\gamma_2) \Longrightarrow \sigma(\gamma_1).$$

C_2. $\sigma(\gamma_1 \vee \gamma_2) \Longrightarrow (\sigma(\gamma_1)$ или $\sigma(\gamma_2))$.

C_3. Если $(\bigcap F | F \in \gamma) \neq \emptyset$ то $\sigma(\gamma)$ имеет место.

Рассмотрим произвольную прекомпактную равномерную структуру ρ на (X, τ) и определим отношение σ для конечных систем замкнутых в (X, τ) множеств, положив

$$\sigma(\gamma) \quad \text{имеет место} \qquad \Longleftrightarrow \complement\gamma \notin \rho,$$

где $\complement\gamma = (X \setminus F | F \in \gamma)$.

Нетрудно заметить, что это отношение будет отношением смежности. Действительно, если каждый элемент системы γ_1 содержит какой-нибудь элемент системы γ_2, то каждый элемент системы $\complement\gamma_1$ содержится в каком-нибудь элементе системы $\complement\gamma_2$, то есть система $\complement\gamma_1$ вписана в систему $\complement\gamma_2$. Если, теперь, $\sigma(\gamma_2)$ имеет место, то $\complement\gamma_2 \notin \rho$ и потому и система $\complement\gamma_1 \notin \rho$, откуда по определению σ следует $\sigma(\gamma_1)$. Выполнение C_1 доказано.

Пусть, теперь, имеет место $\sigma(\gamma_1 \vee \gamma_2)$, тогда $\complement(\gamma_1 \vee \gamma_2) \notin \rho$. Но $\complement(\gamma_1 \vee \gamma_2) = \complement\gamma_1 \wedge \complement\gamma_2$. Отсюда, в силу P_2, следует, что или $\complement(\gamma_1) \notin \rho$ или $\complement(\gamma_2) \notin \rho$, то есть имеет место $\sigma(\gamma_1)$ или $\sigma(\gamma_2)$. Выполнение C_2 доказано.

Выполнение C_3 очевидно, так как если $(\bigcap F | F \in \gamma) \neq \emptyset$ имеет место то $\complement\gamma$ не является покрытием и потому не может принадлежать ρ.

С другой стороны, каждому отношению смежности σ можно сопоставить систему ρ всех покрытий, каждое из которых содержит какое-нибудь конечное подпокрытие вида $\complement\gamma$, где γ таково, что $\sigma(\gamma)$ не имеет места. Нетрудно доказать, что так образованная система открытых покрытий топологического пространства (X, τ) является равномерной структурой, то есть для нее выполняются условия P_1, P_2.

То, что так построенные сопоставления структур смежности прекомпактным равномерным структурам и, наоборот, равномерных структур структурам смежности определяют взаимно однозначное соответствие между ними, доказать нетрудно. Поэтому ρ-пополнение топологического пространства для прекомпактной равномерной структуры ρ можно строить в σ-терминах. Для этого рассматриваются так называемые системы σ-смежности. Таковыми являются, прежде всего, конечные системы γ, для которых $\sigma(\gamma)$ имеет место. Произвольная система γ замкнутых в (X, τ) множеств называется системой σ-смежности, если любая ее конечная подсистема является системой σ-смежности. Рассматриваются максимальные системы σ-смежности с пустым пересечением, их совокупность обозначается через Γ_σ. Оказывается, что Γ_σ совпадает с Γ_ρ. Действительно, пусть γ–максимальная система σ-смежности и $\gamma' \subset \gamma$–ее произвольная конечная подсистема. Тогда $\complement\gamma \notin \rho$, в силу прекомпактности ρ, то есть γ является максимальным ρ-кофильтром. Обратное соответствие доказывается аналогично. Регулярное расширение пространства (X, τ), получаемое присоединением множества Γ_σ обозначается через $(\sigma X, \sigma\tau)$, оно совпадает с расширением $(\rho X, \rho\tau)$ для прекомпактных равномерных структур.

Заметим, что отношение смежности $\sigma(\rho)$ можно построить для любой, не обязательно прекомпактной, равномерной структуры ρ, как отношение смежности соответствующее максимальной, содержащейся в ρ, прекомпактной равномерной структуре ρ_c. В этом, общем случае, расширения $(\sigma X, \sigma\tau)$ и $(\rho X, \rho\tau)$ не совпадают, более того не имеет места даже включение $\rho X \subset \sigma X$, как это было по-существу показано в пункте 2.

4. Пополнения равномерных пространств. На топологическом пространстве $(\rho X, \rho\tau)$, являющемся ρ-пополнением топологического пространства (X, τ), можно ввести естественную равномерную структуру $\widehat{\rho}$. Эта структура является продолжением равномерной структуры ρ на ρX. Она состоит из всех открытых покрытий $\widehat{s}$ пространства $(\rho X, \rho\tau)$, в которые вписаны покрытия вида

$$\complement(\rho\tau - cl\ (\complement s)) = \{X' \setminus (\rho\tau - cl\ (X \setminus G)) | G \in s\}.$$

В дальнейшем мы будем говорить не только о равномерных структурах ρ, задаваемых на топологических пространствах (X, τ), но и о равномерных пространствах, определяемых, как пары (X, ρ). Заметим, что топологическая структура τ однозначно восстанавливается по равномерной структуре ρ, как совокупность множеств, являющихся элементами покрытий из ρ.

Будем говорить, что равномерное пространство (X, ρ) является *полным* равномерным пространством, если каждый ρ-фильтр имеет непустое пересечение (каждый ρ-кофильтр имеет непустое пересечение). В вейлевской теории пополнение равномерного пространства всегда является полным равномерным пространством, в общей же теории, в которой на равномерную структуру не накладываются никакие ограничения, это утверждение не имеет места. Необходимо либо накладывать на равномерную структуру какие-то ограничения либо вводить другое понимание полноты.

5. Типы редуктивности. Вейлевские равномерные структуры, обладающие достаточно хорошими свойствами, являются классическими объектами изучения. Однако их достаточно много лишь на достаточно хороших топологических пространствах. В связи с этим желательно указать равномерные структуры такого типа, что они хорошо представлены на произвольных топологических пространствах и, одновременно, имеют сходные черты с вейлевскими равномерными пространствами.

Пусть ρ – произвольная равномерная структура, определенная на топологическом пространстве (X, τ), s_1 и s_2 – системы τ-открытых множеств, не обязательно являющихся покрытиями X. Будем говорить, что система s_2 *ρ-мажорирует* систему s_1, записывая это через $s_1 \leqslant_\rho s_2$, если для любой системы s открытых множеств из $s_1 \cup s \in \rho$ следует $s_2 \cup s \in \rho$. Если, например, система s_1 содержится в системе s_2 то $s_1 \leqslant_\rho s_2$ для любой равномерной структуры ρ на (X, ρ).

Пусть s_1 – система открытых в (X, τ) множеств, $s_1 \leqslant_\rho s_2$ и $s_2 \cup s' \in \rho$. Вообще говоря, $s_1 \cup s'$ не является покрытием X и тем более не обязательно $s_1 \cup s' \in \rho$. Если все же $s_1 \cup s' \in \rho$, то будем говорить, что покрытие $s_2 \cup s'$ *ρ-редуцируемо* в покрытие $s_1 \cup s'$.

Будем говорить, что равномерная структура ρ, заданная на топологическом пространстве (X, τ), *слабо редуктивна*, если любое открытое покрытие $s_2 \cup s'$, в котором $s' = \{G\}$ – одноэлементная система, ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – конечная система.

Будем говорить, что равномерная структура ρ, заданная на топологическом пространстве (X, τ), *бинарно редуктивна*, если любое открытое покрытие $s_2 \cup s'$, в котором $s' = \{G\}$ – одноэлементная система, ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – одноэлементная система.

Будем говорить, что равномерная структура ρ, заданная на топологическом пространстве (X, τ), *редуктивна*, если любое открытое покрытие $s_2 \cup s'$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – конечная система.

Будем говорить, что равномерная структура ρ, заданная на топологическом пространстве (X, τ), *сильно редуктивна*, если любое открытое покрытие $s_2 \cup s'$ ρ-редуцируемо в какое-нибудь покрытие $s_1 \cup s'$, где s_1 – одноэлементная система.

6. Теоремы редуктивности. Приведенные выше типы редуктивности являются свойствами некоторых классов равномерных пространств и сами обеспечивают соответствующие свойства пополнений.

Теорема. *Любая прекомпактная равномерная структура является редуктивной равномерной структурой.*

Доказательство. Пусть ρ – прекомпактная равномерная структура и $s_2 \cup s' \in \rho$. Тогда найдется конечное покрытие $s \in \rho$, содержащееся в $s_2 \cup s'$. Положим $s_1 = s \cap s_2$. Тогда $s_1 \leqslant_\rho s_2$, $s \subset s_1 \cup s'$ и потому $s_1 \cup s' \in \rho$.

Теорема. *Максимальная равномерная структура, определенная на произвольно фиксированном топологическом пространстве является сильно редуктивной равномерной структурой.*

Доказательство. Пусть ρ – максимальная равномерная структура на топологическом пространстве (X, τ) и $s_2 \cup s' \in \rho$. Положим $G_0 = \bigcup G | G \in s_2$, тогда $\{G_0\} \cup s'$ является открытым покрытием и потому принадлежит ρ. При этом для любой системы s открытых в (X, τ) множеств из $s_2 \cup s \in \rho$ следует то, что эта система открытых и (X, τ) множеств является покрытием X. Но тогда, по определению G_0, и система $\{G_0\} \cup s \in \rho$ также является покрытием X и потому принадлежит ρ. Но это означает, что $\{G_0\} \leqslant_\rho s_2$. Таким образом покрытие $s_2 \cup s$ ρ-редуцируемо в покрытие $\{G_0\} \cup s$.

Теорема. *Любая вейлевская равномерная структура является сильно редуктивной равноиерной структурой.*

Доказательство. Пусть ρ – вейлевская равномерная структура, заданная на топологическом пространстве (X, τ), $s_2 \cup s' \in \rho$, $s^* \in \rho$ – звездно вписанное в $s_2 \cup s'$ покрытие. Обозначим через G_0 объединение всех элементов покрытия s^* звезды которых содержатся в элементах системы s_2. Так как s^* вписано в $\{G_0\} \cup s'$, то $\{G_0\} \cup s' \in \rho$. Осталось доказать, что $\{G_0\} \leqslant_\rho s_2$. Если $G_0 = \emptyset$, то это очевидно. Пусть $G_0 \neq \emptyset$ и $\{G_0\} \cup s \in \rho$ для какой-нибудь системы s открытых множеств. Рассмотрим покрытие $s_0 = (\{G_0\} \cup s) \wedge s^* = (\{G_0\} \wedge s^*) \cup (s \wedge s^*) \in \rho$. Рассмотрим произвольный элемент G покрытия s. Если $G \in s \wedge s^*$, то G содержится в каком-нибудь элементе покрытия s. Если же $G \in \{G_0\} \wedge s^*$, то есть $G = G_0 \cap G^*$, где $G^* \in s^*$, тогда по построению G_0 найдется множество ${G_1}^* \in s^*$, звезда которого вписана в некоторый элемент системы s_2, причем $G^* \cap {G_1}^* \neq \emptyset$. Но отсюда следует, что G^* содержится в этой звезде и, следовательно, G^* содержится в каком-нибудь элементе системы s_2, а так как $G \subset G^*$, то и G содержится в этом злементе системы s_2. Таким образом s_0 вписано в $s_2 \cup s$ и потому $s_2 \cup s \in \rho$. Тем самым доказано, что $\{G_0\} \leqslant_\rho s_2$.

Теорема. *Если отношение смежности σ соответствует прекомпакной части слабо редуктивной равномерной структуры ρ на (X, τ), то $\rho X \subset \sigma X$.*

Доказательство. Пусть γ – максимальный исчезающий ρ-кофильтр, то есть $\gamma \in \rho X \setminus X$. Рассмотрим произвольное, замкнутое в (X, τ) множество F не принадлежащее γ. Система $\{F\} \cup \gamma$ уже не будет ρ-кофильтром и поэтому $\{X \setminus F\} \cup \complement\gamma \in \rho$. Положим $G = X \setminus F$, $s_2 = \complement\gamma$. Так как ρ – слабо редуктивная равномерная структура, то должна найтись такая конечная система s_1 открытых в (X, τ) множеств, что $s_1 \leqslant_\rho s_2$ и $s_1 \cup \{G\} \in \rho$. Заметим теперь, что из $s_2 \cup s_2 = s_2 \notin \rho$ следует $s_1 \cup s_2 \notin \rho$. Так как $\complement s_2$ является максимальным ρ-кофильтром, то $s_1 \subset s_2$. Таким образом для произвольно фиксированного замкнутого в (X, τ) множества F, не принадлежащего γ, нашлась конечная подсистема $\complement s_1$ системы γ такая, что $\complement s_1 \cup \{F\}$ не является системой σ-смежности. Таким образом γ является максимальной исчезающей системой σ-смежности, то есть $\gamma \in \sigma X \setminus X$.

7. Пример несовпадения $\widehat{\sigma}$ и σ'. Пусть ρ–слабо редуктивная равномерная структура на топологическом пространстве (X, τ) и σ – отношение смежности согласованное с ρ. Тогда, как мы видели, $X \subset \rho X \subset \sigma X$. Пусть далее $\widehat{\rho}$ – равномерная структура на $(\rho X, \rho\tau)$, являющаяся продолжением ρ, и $\widehat{\sigma}$–отношение смежности на $(\rho X, \rho\tau)$, являющееся продолжением σ. С другой стороны мы можем рассматривать отношение смежности σ', согласованное с $\widehat{\rho}$. Следующий пример показывает, что отношения смежности $\widehat{\sigma}$ и σ' в общем случае не совпадают.

Пример. Пусть $X = \{(x, y) | |x| \leqslant 1, -1 \leqslant y < 0\}$, (X, τ) – подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$ с обычной топологией, $X' = \{(x, y) | |x| \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ – замыкание X в $\mathbb{R}^2$, являющееся компактным расширением пространства (X, τ). Пусть ρ_0 – прекомпактная равномерная структура на (X, τ), соответствующая этому расширению. Введем следующие множества (Рис. 1): $A^- = \{(x,0) | -1 \leqslant x < 0\}$,

$A^+ = \{(x,0) | 0 < x \leqslant 1\}$,
$A_n^- = \{(x,y) | -1 \leqslant x < 0, |\frac{y}{x}| \leqslant \frac{1}{n}\}$,
$A_n^+ = \{(x,y) | 0 < x \leqslant 1, |\frac{y}{x}| \leqslant \frac{1}{n}\}$,
$s^+ = \{X \setminus A_n^+ | n \in \mathbb{N}\}$,
$s^- = \{X \setminus A_n^- | n \in \mathbb{N}\}$,
$s^0 = s^- \cup s^+$.

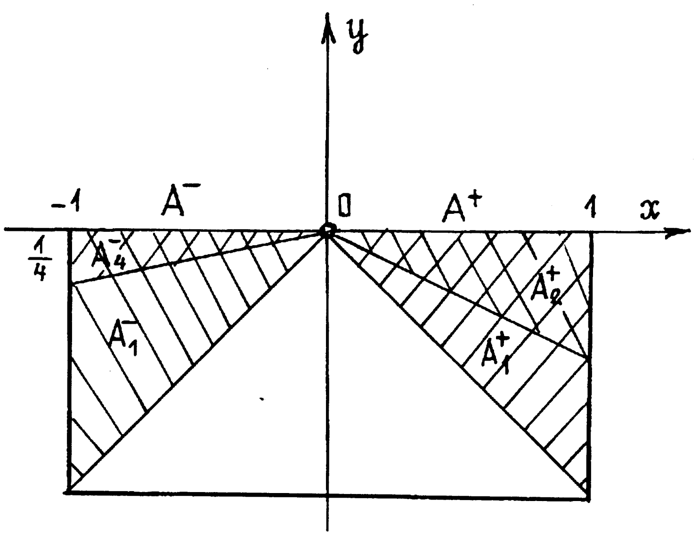

Рис. 1.

Рассмотрим на (X, τ) равномерную структуру ρ, база которой состоит из всех открытых покрытий вида $s_0 \wedge s$, где $s \in \rho_0$. Оказывается, что $\widehat{\sigma}(A^-, A^+)$ имеет место, но $\sigma'(A^-, A^+)$ не имеет места, то есть отношения смежности $\widehat{\sigma}$ и σ' этого примера не совпадают.

Для доказательства этого утверждения удобнее пользоваться другой базой равномерной структуры ρ. Так как любое покрытие $s \in \rho_0$ имеет вид $s' \wedge X$, где s' – сответствующее открытое покрытие прямоугольника X', то в s можно вписать покрытие $s \in \rho_0$, состоящее из множества U, содержащего какую-нибудь

ϵ-окрестность точки O в X, и множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n$, каждое из которых содержится либо в $X \setminus A_1^-$ либо в $X \setminus A_1^+$ и не имеет точку O своей предельной в X' точкой. Имеем очевидное включение $s^* = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \cup (s^0 \wedge U) \subset s^0 \wedge\ s$. С другой стороны, покрытие $s^0 \wedge\ s$ вписано в покрытие s^* и потому $s^* \in \rho$. Таким образом в качестве базы равномерной структуры ρ можно взять систему покрытий вида s^*, которые будем называть каноническими. Элементы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ канонического покрытия $s^* = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \cup (s^0 \wedge U)$ будем называть неособенными элементами. Вид канонических покрытий демонстрирует тот факт, что равномерные структуры ρ и ρ_0 различны только вблизи точки O.

Докажем теперь, что ρ является бинарно редуктивной структурой. Пусть $s_2 \cup \{G\} \in \rho$ и s^* – каноническое покрытие, вписанное в $s_2 \cup \{G\}$. Если s^* вписано в s_2, то полагаем $G_0 = X \leqslant_\rho s_2$ и $\{G_0, G\} \in \rho$. Если s^* не вписано в s_2, то следует рассмотреть два случая: $U \subset G$ и $U \not\subset G$. Рассмотрим сначала первый случай. Можно считать, что все неособенные элементы канонического покрытия s^* не содержатся в U, присоединяя к U неособенные элементы содержащиеся в U. Пусть $G_0 = \cup_{i=1}^n G_i$, $\{G_0\} \cup s \in \rho$, где s – какая-то система открытых в X множеств, s_1^* – каноническое покрытие, вписанное в $\{G_0\} \cup s$. Каждый элемент покрытия s_1^*, не содержащийся ни в каком элементе системы s, содержится в G_0, а так как точка O не является предельной точкой для множества G_0, то в G_0 содержатся только неособенные элементы покрытия s_1^*. Переходя в случае необходимости к пересечениям неособенных элементов покрытия s_1^* с $G_1, G_2, \ldots, G_n$, можно считать, что каждый неособенный элемент покрытия s_1^*, содержащийся в G_0, содержится в каком-нибудь неособенном элементе покрытия s^* и, следовательно, в каком-нибудь элементе покрытия s_2. Отсюда следует, что покрытие s_1^* вписано в покрытие $s_2 \cup s$, то есть $s_2 \cup s \in \rho$. Тем самым доказано, что $\{G_0\} \leqslant_\rho s_2$ и потому в рассматриваемом сейчас случае доказано выполнение для ρ условия бинарной редуктивности.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда $U \not\subset G$. Пусть G_0 является объединением U и всех неособенных элементов из s^*, не содержащихся в G и $\{G_0\} \cup s \in \rho$. Пусть s_1^* – каноническое покрытие, вписанное в $\{G_0\} \cup s$. Как и в первом случае, можно считать, что s_1^* вписано в s^*, но теперь только неособенные элементы покрытия s_1^* могут не содержаться в G_0. Отсюда следует, что покрытие, состоящее из G_0 и этих, скажем отмеченных, элементов покрытия s_1^* принадлежит ρ и потому s_1^* можно получить из s^*, заменяя неособенные элементы, содержащиеся в G, их пересечениями с отмеченными элементами покрытия s_1^*. Но тогда s_1^* будет вписано в покрытие $s_2 \cup s$, поэтому $s_2 \cup s \in \rho$ и, следовательно, $\{G_0\} \leqslant_\rho s_2$. Так как $\{G_0, G\} \in \rho$, то доказано выполнение для ρ условия бинарной редуктивности и во втором случае. Тем самым доказана бинарная редуктивность равномерной структуры ρ.

Докажем теперь, что равномерная структура ρ согласована с отношением смежности σ на X, определенным расширеним X'. Пусть $s = \{V_1, V_2, \dots, V_m\} \in \rho$, то есть в s вписано каноническое покрытие $s^* = \{G_1, G_2, \dots, G_n\} \cup (s_0 \wedge U)$. Заметим при этом, что в соответствии с определением канонических покрытий, $\{G_1, G_2, \dots, G_n, U\} \in \rho$. Система $s_0 \wedge U$ состоит из счетного числа множеств, поэтому счетное же их количество будет содержаться хоть в одном из элементов покрытия s. Отсюда следует, что и само множество U содержится в этом элементе, и потому $s \in \rho_0$. Так как ρ_0 – прекомпактная равномерная структура на X определенная, как и σ его расширением X', то из доказанного следуют включения

$$X \subset \rho X \subset \sigma X = X',$$

причем $\rho X = X' \setminus \{O\}$.

Рассмотрим теперь замкнутые в ρX множества A^+ и A^-. Так как замыкания этих множеств в X' имеют непустое пересечение, то имеет место $\widehat{\sigma}(A^-, A^+)$. С другой стороны, продолжение покрытия $s_0 \in \rho$ на ρX вписано в покрытие $\{\rho X \setminus A^-, \rho X \setminus A^+\}$ пространства ρX и потому $\sigma'(A^-, A^+)$ не имеет места. Тем самым доказано, что отношения смежности $\widehat{\sigma}$ и σ' на ρX не совпадают.

8. Соотношения между $\widehat{\sigma}$ и σ'. В предыдущем пункте было доказано, что в общем случае отношения смежности $\widehat{\sigma}$ и σ' не совпадают. Можно доказать, однако, что всегда $\sigma' \leqslant \widehat{\sigma}$, то есть, если $\sigma'(\gamma)$ имеет место, то и $\widehat{\sigma}(\gamma)$ имеет место. Действительно, $\rho_c \subset \rho$ и поэтому $\widehat{\rho}_c \subset \widehat{\rho}$ откуда следует, что $\sigma' \leqslant \widehat{\sigma}$.

С другой стороны, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любой сильно редуктивной равномерной структуры ρ отошения смежности $\widehat{\sigma}$ и σ' совпадают.*

Доказательство. В силу сказанного выше, достаточно доказать, что в данных условиях $\sigma' \geqslant \widehat{\sigma}$. Пусть $\sigma'(\gamma)$ не имеет места для некоторой конечной системы замкнутых в $(\rho X, \rho\tau)$ множеств, то есть $\complement\gamma \in \widehat{\rho}$. Тогда найдется такое покрытие $s \in \rho$, что его продолжение $\widehat{s}$ на ρX вписано в $\complement\gamma$. Пусть $\complement\gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$. Тогда покрытие $\widehat{s}$ можно представить, как объединение n его подсистем $\widehat{s}_1, \widehat{s}_2, \ldots, \widehat{s}_n$, где каждое $\widehat{s}_i$ состоит из всех элементов покрытия $\widehat{s}$, содержащихся в G_i. Соответственно этому, покрытие s представляется в виде объединения подсистем s_i, продолжениями которых на ρX являются $\widehat{s}_i$. В силу сильной редуктивности равномерной структуры ρ, существуют такие открытые в (X, τ) множества $U_1, U_2, \ldots, U_n$, что $\{U_i\} \leqslant_\rho s_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in \rho$. Докажем теперь, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место включение $\complement(\rho\tau - cl\ (\complement U_i)) \subset G_i$.

Допустим, что это не так и существует $x \in \complement(\rho\tau - cl\ (\complement U_i))$ и $x \notin G_i$ для некоторого i. Тогда $x \notin \rho\tau - cl\ (\complement U_i)$, то есть $\complement U_i \notin \gamma_x$, $\gamma_x \cup \{\complement U_i\}$ не является системой σ-смежности и поэтому $\complement\gamma_x \cup \{U_i\} \in \rho$. Отсюда следует, что $\complement\gamma_x \cup s_i \in \rho$. Но $s_i \subset \complement\gamma_x$, так как $x \notin G_i$, и потому $\complement\gamma_x \in \rho$, что неверно, так как $x \in \rho X$. Итак для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ $\complement(\rho\tau - cl\ (\complement U_i)) \subset G_i$. Но $\{\complement(\rho\tau - cl\ (\complement U_i)) | i = 1, 2, \ldots, n\} \in \widehat{\rho}$, а потому $\complement\gamma \in \widehat{\rho}$, то есть $\widehat{\sigma}(\gamma)$ не имеет места.

9. Бинарные равномерные структуры. Не вдаваясь больше в детали теории равномерных структур и соответствующих им равномерных пространств, мы кратко упомянем здесь только *бинарные* равномерные структуры. Это структуры, состоящие из открытых покрытий, в которые вписаны покрытия вида $\{G_1, G_2\}$ – бинарные покрытия. Каждой бинарной равномерной структуре ρ на топологическом пространстве (X, τ) сопоставляется отношение близости $\delta = \delta(\rho)$ для пар замкнутых в (X, τ) множеств, для которого $\delta(F_1.F_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\{G_1, G_2\} \notin \rho$. С другой стороны, каждой равномерной структуре сопоставляется, как мы видели, некоторое отношение смежности. Оно называется *главным отношением смежности*, если исходная равномерная структура бинарна. Отношения (структуры) близости, как объекты изучения, появились задолго до равномерных структур, в связи с потребностями теории расширений топологических пространств. В действительности, они не могут быть основой общей теории расширений, описывая только главные расширения, определяемые бинарными равномерными структурами.

10. Биравномерные пространства и их пополнения. Тройка (X, ρ_1, ρ_2) называется *биравномерным* пространством, определенным на битопологическом пространстве (X, τ_1, τ_2), если ρ_1 и ρ_2 – равномерные структуры на топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно. Это определение биравномерного пространства соответствует определению битопологического в смысле Келли пространства. Здесь ρ_1 и ρ_2 – системы τ_1-открытых и τ_2-открытых покрытий, удовлетворяющие условиям P_1, P_2. Битопологическое в смысле Келли пространство (X, τ_1, τ_2) однозначно определяется биравномерным пространством (X, ρ_1, ρ_2). Тем самым определены расширения $(\rho_1 X, \rho_1 \tau_1)$ и $(\rho_2 X, \rho_2 \tau_2)$. Наросты этих расширений, то есть множества $\rho_1 X \setminus X$ и $\rho_2 X \setminus X$ обозначим через $\widehat{X}_{\rho_1}$ и $\widehat{X}_{\rho_2}$, соответственно. Если задано некоторое, возможно частичное и многозначное, отображение $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1} \longrightarrow \widehat{X}_{\rho_2}$ (спаривание), то определено расширение

$$((\rho_1, \rho_2)_\varphi X, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \tau_1, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \tau_2)$$

битопологического пространства (X, τ_1, τ_2) и пополнение

$$((\rho_1, \rho_2)_\varphi X, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \rho_1, (\rho_1, \rho_2)_\varphi \rho_2)$$

биравномерного пространства (X, ρ_1, ρ_2), которое мы будем называть $(\rho_1, \rho_2)_\varphi$-пополнением.

Такая процедура пополнения биравномерного пространства требует, как мы видели, не только задания двух равномерных структур, но и задания какого-нибудь отображения $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1} \longrightarrow \widehat{X}_{\rho_2}$. Но задание такого отображения требует предварительно введения множеств $\widehat{X}_{\rho_1}$ и $\widehat{X}_{\rho_2}$ соответствующих фильтров (кофильтров), то есть введения довольно сложных структурных объектов.

11. Пополнения биравномерных пространств. Мы можем обойти структурные трудности предыдущего пункта, воспользовавшись следующей своеобразной конструкцией. Рассмотрим произвольное биравномерное пространство (X, ρ_1, ρ_2), заданное на некотором битопологическом в смысле Келли пространстве (X, τ_1, τ_2). Пусть s_1 и s_2 – произвольные покрытия, принадлежащие равномерным структурам ρ_1 и ρ_2, соответственно. По этим покрытиям можно построить покрытие $s_{12} = s_1 \times s_2 =$

$\{G_1 \times G_2 | G_1 \in s_1, G_2 \in s_2\}$, являющееся открытым покрытием топологического пространства $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$. Совокупность таких покрытий, взятых по всем элементам s_1, s_2 равномерных структур ρ_1, ρ_2, образует базу $\{s_1 \times s_2 | s_1 \in \rho_1, s_2 \in \rho_2\}$ равномерной структуры $\rho_{12} = \rho_1 \times \rho_2$, определенной на топологическом пространстве $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$. Это следует из очевидного соотношения $(G_1 \times G_2) \cap (G_1' \times G_2') = (G_1 \cap G_1') \times (G_2 \cap G_2\prime)$.

Для любого множества $\Phi \subset X \times X$ можно образовать его s_{12}-окружение, а именно $U(\Phi, s_{12}) = \bigcup (G_1 \times G_2) | (G_1 \times G_2) \cap \Phi \neq \emptyset$ $G_1 \times G_2 \times S_{12}$. Систему всех таких окружений множества Φ, взятую по всем элементам s_1, s_2 равномерных структур ρ_1, ρ_2, обозначим через $\mathfrak{U}(\Phi, \rho_{12})$.

Мы можем теперь определять различные $(\rho_1, \rho_2)_\varphi$-пополнения биравномерного пространства (X, ρ_1, ρ_2) фиксируя то или иное подмножество $\Phi \subset X \times X$. Отображение спаривания $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1} \longrightarrow \widehat{X}_{\rho_2}$ определяется при этом следующим образом:

если $\omega_1 \in \widehat{X}_{\rho_1}, \omega_2 \in \widehat{X}_{\rho_2}$, то $\varphi(\omega_1) = \omega_2$ тогда и только тогда, когда для любого s_{12}-окружения множества Φ найдутся такие $G_1 \in \omega_1, G_2 \in \omega_2$, что $G_1 \times G_2$ содержится в этом окружении.

В частности, если $\Phi = \emptyset$, то никакие элементы множеств $\widehat{X}_{\rho_1}$ и $\widehat{X}_{\rho_2}$ не спариваются, если же $\Phi = X \times X$, то каждый элемент нароста $\varphi : \widehat{X}_{\rho_1}$ спаривается с каждым элементом нароста $\widehat{X}_{\rho_2}$.

Пример. Пусть $X = (0,1)$ – единичный интервал, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ – обычная топологическая структура единичного интервала, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ – равномерная структура на (X, τ), определяемая расширением $X' = [0,1]$. Множество $\widehat{X}_{\rho_1} = \widehat{X}_{\rho_2}$ состоит из двух точек, скажем точки 0 и точки 1. Существует шестнадцать различных отображений двухточечного множества в себя, считая частичные и многозначные. Мы рассмотрим только два из них, а именно тождественное и инволюцию $(\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0)$. В первом случае нам достаточно взять в качестве Φ в $X \times X$ диагональ Δ, во втором же из рассматриваемых случаев в качестве Φ можно взять побочную диагональ $\{(x,y) | y = 1-x\}$. В обоих случаях множество $X' = [0,1]$, то есть пополнение будет получаться присоединеним к X двухточечного множества $\{0,1\}$, но в первом случае $\tau_1' = \tau_2'$ – обычная топологическая структура единичного отрезка $[0,1]$, во втором же случае $\tau_1' \neq \tau_2'$, любая последовательность, сходящаяся к точке 0 относительно τ_1', сходится к точке 1 относительно τ_2'

и наоборот.

Биравномерное пространство (X, ρ_1, ρ_2) можно считать полным, если равномерные пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) являются полными равномерными пространствами. При таком понимании полноты битопологических остранств оба рассмотренны в этом примере пополнения будут полными битопологическими пространствами.

§11. Размерность

1. Общие принципы построения теории битопологической размерности. Теория размерности битопологических пространств начиналась, как это часто бывает, с исследования простейшей ситуации, а именно с исследования нульмерных битопологических пространств. При этом под нульмерным битопологическим пространством понималось битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2), для которого топологическая структура τ_i имеет базу, состоящую из τ_j-замкнутых множеств, $i \neq j$. В дальнейшем началось изучение различных размерностных функций определенных на различных классах битопологических пространств. Построение этих размерностных функций осуществлялось, в общем, по аналогии с построением соответствующих размерностных функций для топологических пространств. При этом приходилось преодолевать те же трудности, которые возникают в различных частных битопологических теориях, в связи с отсутствием в (X, τ_1, τ_2), как единого объекта, открытых и замкнутых множеств. Эту трудность разные авторы преодолевали различными способами. Так например, при определении функций $indX$ и $IndX$ используются соответствующие замкнутые множества и одни авторы считают таковыми замкнутые в $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ множества другие же – множества вида $F_1 \cap F_2$, где F_1 и F_2-множества замкнутые в (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно. Тем самым они фактически определяют разные понятия. Аналогично обстоит дело и с размерностной функцией $dimX$, требующей открытых множеств.

2. Категорный подход. При построении размерностных функций для битопологических пространств использовались также и категорные методы теории битопологической связности. Пусть $\mathcal{E}$-произвольно фиксированный класс битопологических пространств. Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) называется $\mathcal{E}$-несвязным между подмножествами A и B множества X, если существуют $(X', \tau_1', \tau_2') \in \mathcal{E}$ и бинепрерывное отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_1', \tau_2')$ такие, что τ_j'-замыкание множества $f(A)$ имеет пустое пересечение с τ_i'-замыканием множества $f(B)$. Таким образом при определении $\mathcal{E}$-несвязности используются по отдельности топологические структуры τ_1' и τ_2'. С другой стороны, при определении пар (x, F) для $indX$ и пар (F_1, F_2) для $IndX$ множества F, F_1, F_2 должны быть замкнутыми множествами в топологических пространствах (X, τ_1) и (X, τ_2) одновременно. Наконец разбивающие множества A должны иметь вид $F_1 \cap F_2$, где F_1, F_2 должны быть замкнутыми множествами в (X, τ_1) и (X, τ_2), соответственно. После этого функции $indX$ и $IndX$ определяются, как обычно.

§12. Гиперпространства

1. Вариантность понятия гиперпространства. *Гиперпространства (пространства подмножеств)* являются довольно хорошо изученными объектами в теории топологических пространств. Они привлекали внимание многих математиков, им посвящена значительная литература. Многие идеи и результаты, посвященные топологическим гиперпространствам, нашли свое отражение и в битопологической теории. Обычно при построении какого-то гиперпространства рассматривают не все множество PX, а какую-нибудь его часть P_0X, состоящую из подмножеств множества X, удовлетворяющих некоторому условию. В топологической теории это, как правило, либо множество всех непустых замкнутых подмножеств данного топологического пространства (X, τ) либо множество всех его непустых компактных подмножеств, возможны и другие варианты. После того как множество P_0X определено на нем вводится соответствующая топологическая структура. Здесь также возможны различные варианты. Наиболее часто употребляемой является топологическая структура $P_0\tau$ на множестве P_0X с предбазой, состоящей из множеств вида

$$PG = \{A | A \in P_0X, A \cap G \neq \emptyset\},$$

$$QG = \{A | A \in P_0X, A \subset G\},$$

взятых по всем $G \in \tau$.

В битопологической ситуации мы можем рассматривать подмножества исходного множества X, удовлетворяющие тем или иным условиям, однако количество вариантов здесь увеличивается за счет расщепления понятий. Так мы можем рассматривать множества замкнутые в (X, τ_1), замкнутые в (X, τ_2), замкнутые в (X, τ_1) или в (X, τ_2), замкнутые и в (X, τ_1) и в (X, τ_2) одновременно, аналогично для компактных множеств или множеств иного типа. Можно рассматривать и замкнутые и компактные множества в $(X, \inf\{\tau_1, \tau_2\})$, в $(X, \sup\{\tau_1, \tau_2\})$.

2. Основные гипертопологии. Соответствующие гиперпространства возникают в теории многозначных отображений, так как любое многозначное отображение $f : X \longrightarrow X'$ можно рассматривать, как однозначное отображение $f : X \longrightarrow PX'$. В связи с этим представляется естественной следующая постановка вопроса (в топологическом варианте). Рассматривается категория T топологических пространств и их непрерывных отображений. требуется определить для каждого топологического пространства (X, τ) единственную топологическую структуру $P\tau$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1). Для любого непрерывного отображения $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ отображение $Pf : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$ также является непрерывным отображением. Иначе говоря соответствие $P : T \longrightarrow T$, при котором $P((X, \tau)) = (PX, P\tau)$ и $P(f) = Pf$, является функтором.

2). Отображение $i : (X, \tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$, при котором $i(x) = \{x\}$ для любого $x \in X$, является вложением топологического пространства (X, τ) в топологическое пространство $(PX, P\tau)$.

Таких функторов существует много, мы выделим ту часть из них, в каком-то смысле минимальную, которая связана с топологическим пространством (D, δ). Здесь $D = \{0, 1\}, \delta = \tau_r = \{\emptyset, \{0\}, D\}$. Это топологическое пространство интересно тем, что топологическая структура τ любого топологического пространства (X, τ) однозначно определена множеством всех его непрерывных отображений в (D, δ). Произвольному открытому в (X, τ) множеству G соответствует при этом непрерывное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (D, \delta)$, для которого

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ 1, & x \notin G. \end{cases}$$

Фиксируем теперь на PD какую-нибудь топологическую структуру, которую обозначим через $P\delta$ и введем на множестве PX топологическую структуру $P\tau$, как минимальную структуру, для которой отображение $Ph : (PX, P\tau) \longrightarrow (PD, P\delta)$ непрерывно, если непрерывно отображение $h : (X, \tau) \longrightarrow (D, \delta)$. Нетрудно доказать, что при любом выборе структуры $P\delta$, условие 1) выполняется.

Действительно, пусть $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ – непрерывное отображение. Тогда для любого непрерывного отображения $h : (X', \tau') \longrightarrow (D, \delta)$ отображение $hf : (X, \tau) \longrightarrow (D, \delta)$ также непрерывное отображение. По определению $P\tau$ имеем $(Phf)^{-1}(P\delta) \subset P\tau$. Тогда $(Pf)^{-1}(Ph)^{-1}(P\delta) \subset P\tau$, откуда следует, что $(Pf)^{-1}\sup\{(Ph)^{-1}(P\delta)\} \subset P\tau$, где точная верхняя граница берется по всем непрерывным отображениям $h : (X', \tau') \longrightarrow (D, \delta)$. Отсюда, в свою очередь следует, что $(Pf)^{-1}(P\tau') \subset P\tau$, то есть $Pf : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX', \tau')$-непрерывное отображение.

Условие 2) будет выполнено, если $i : (D, \delta) \longrightarrow (PD, P\delta)$ – вложение.

Действительно, пусть $i : X \longrightarrow PX$, $i(x) = \{x\}$ для любого $x \in X$. Отождествляя точки с одноточечными множествами, мы будем считать, что $X \subset PX$ и $D \subset PD$. Тогда $h = Ph|X$ для любого отображения $h : X \longrightarrow D$. Так как $\tau = \sup\{h^{-1})(\delta)\}$ и $P\tau = \sup\{Ph^{-1}(P\delta)\}$, а с другой стороны, $\delta = P\delta|X$, то

$$\tau = \sup\{h^{-1})(\delta)\} = \sup\{h^{-1})(P\delta|X)\} = \\ \sup\{(Ph)^{-1}(P\delta)|X\} = P\tau|X,$$

то есть отображение $i : (X, \tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ является вложением. Так как на PD можно задать только конечное число топологических структур, то все они могут быть перечислены и изучены. Оказывается, что имеется восемь операций $P\tau$, определяемых соответствующим выбором $P\delta$ и удовлетворяющих условиям 1), 2). Это топологические структуры, имеющие следующие предбазы:

1) $\{PG|G \in \tau\}$,
2) $\{QG|G \in \tau\}$,
3) $\{PG, PG \cup P(X \setminus G)|G \in \tau\}$,
4) $\{PG, QG|G \in \tau\}$,
5) $\{QG, QG \cap Q(X \setminus G)|G \in \tau\}$,
6) $\{PG, QG, QG \cap Q(X \setminus G)|G \in \tau\}$,
7) $\{PG, QG, PG \cup P(X \setminus G)|G \in \tau\}$,

8) $\{PG, QG, PG \cup P(X \setminus G), QG \cap Q(X \setminus G) | G \in \tau\}$.

3. Одно специальное условие. Представляют значительный интерес операции $P\tau$, удовлетворяющие еще одному условию, которое мы сейчас сформулируем.

Пусть $f : X \longrightarrow PX'$-некоторое отображение. Тогда можно определить отображение $f^* : PX \longrightarrow PX'$ (будем называть его *естественным продолжением*), для которого $f^*(A) = \bigcup f(x) | x \in A$. Дополнительное условие состоит в следующем:

$*$) Если $f : (X, \tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$ – непрерывное отображение, то его естественное продолжение

$$f^* : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$$

– непрерывное отображение.

Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Операция $P\tau$ обладает свойством $*$) тогда и только тогда, когда естественное продолжение $i^* : (P^2X, P^2\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ тождественного отображения $i : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ является непрерывным отображением.*

Доказательство. Пусть операция $P\tau$ обладает свойством $*$) и (X, τ)-произвольное топологическое пространство. Так как тождественное отображение $i : (PX, P\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ является непрерывным отображением, то в силу $*$) его естественное продолжение $i^* : (P^2X, P^2\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ является непрерывным отображением. Пусть, наоборот, известно, что $i^* : (P^2X, P^2\tau) \longrightarrow (PX, P\tau)$ – непрерывное отображение. Рассмотрим любое непрерывное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (PX', P\tau')$. Тогда в силу того, что P – функтор, будет непрерывным и отображение $Pf : (PX, P\tau) \longrightarrow (P^2X', P^2\tau')$ и, следовательно, будет непрерывной композиция $i^*Pf = f^*$.

Можно доказать, что для операции $P\tau$ варианты 1), 2), 4) предыдущего пункта обладают свойством $*$), а остальные варианты им не обладают.

§13. Нечеткие битопологические структуры

1. Нечеткие множества. Теория нечетких множеств и систем является далеко продвинутой теорией с обширной литературой.

Ее представители объединены в международную ассоциацию со своим периодическим изданием “Fuzzy sets and systems”. Теория нечетких топологических пространств и теория (обычных) битопологических пространств возникли почти одновременно, однако нечеткие битопологические пространства привлекли к себе внимание только в последние годы.

Исходным понятием терии нечетких топологических пространств является понятие *нечеткого множества*, вернее понятие нечеткого подмножества произвольно фиксированного множества. *Нечетким подмножеством* множества X называют, обычно, произвольное отображение $\mu : X \longrightarrow I$, где $I = [0,1]$. Множество всех таких нечетких подмножеств множества X обозначают через I^X. В I^X входят и обычные (четкие) множества A, для которых

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Для нечетких множеств определено отношение включения (порядка), а именно $\mu_1 \leqslant \mu_2 \iff \mu_1(x) \leqslant \mu_2(x)$ для всех $x \in X$. Определены также операции объединения, пересечения и дополнения, а именно

$$(\cup \mu_\iota | \iota \in I)(x) = \sup\,(\mu_\iota(x) | \iota \in I)$$

$$(\cap \mu_\iota | \iota \in I)(x) = \inf(\mu_\iota(x) | \iota \in I)$$

$$(\complement \mu)(x) = 1 - \mu(x)$$

для всех $x \in X$.

Все эти определения согласованы с соответствующими определениями включения, объединения, пересечения и дополнения обычных множеств. Необходимо отметить, однако, что для нечетких множеств формула $A \cup \complement A = X$ не имеет места, если A не является обычным множеством. Например, если нечеткое множество A определяется условием $\mu_A = \frac{1}{2}$ для всех $x \in X$ то $A \cup \complement A = A \neq X$.

2. Нечеткие множества и случайные множества. Формальному определению нечеткого множества можно придать содержательный смысл. Будем считать, что отображение $\mu : X \longrightarrow I$ соответствует нечеткому множеству A_μ. Тогда число $\mu(x)$ можно будет рассматривать, как вероятность события $x \in A_\mu$. Тем самым понятие нечеткого множества приобретает вероятностный характер. Однако мы не имеем здесь полного пространства событий и, тем более, не имеем однозначно определенной на нем вероятностной меры. Нечеткое множество– это сильно усеченное случайное множество. Рассмотрим в связи с этим следующий пример.

Пример. Пусть

$$X = \mathbb{D} = \{0,1\},\ \mu : \mathbb{D} \longrightarrow I,\ \mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}.$$

Событие $0 \in A_\mu$ можно рассматривать, как сложное событие, состоящее из событий $(A = \{0\})$ и $(A = \{0,1\})$, происходящих с какими-то вероятностями, аналогично событие $1 \in A_\mu$ можно рассматривать, как сложное событие состоящее из событий $(A = \{1\})$ и $(A = \{0,1\})$, происходящих с какими-то вероятностями. Пусть $\mu(0)$ и $\mu(1)$ – вероятности этих сложных событий (в нашем примере они равны $\frac{1}{2}$). Однако вероятности осуществления элементарных событий

$$(A = \emptyset), \quad (A = \{0\}), \quad (A = \{1\}), \quad (A = \{0,1\})$$

остаются неизвестными. Эти события образуют полную систему попарно несовместных событий. Вероятностная мера на соответствующем пространстве событий определяется заданием вероятностей p_1, p_2, p_3, p_4 наступления каждого из четырех элементарных событий в указанном порядке. Задание отображения μ означает задание двух соотношений, а именно

$$p_2 + p_4 = \mu(0), \qquad p_3 + p_4 = \mu(1).$$

Эти соотношения и соотношение $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ дают нам в предположении $\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$ равенства

$$p_1 = p_4, \quad p_2 = \frac{1}{2} - p_4, \quad p_3 = \frac{1}{2} - p_4,$$

где $p_4 \leqslant \frac{1}{2}$, но в остальном произвольно. Таким образом существует континуум случайных подмножеств множества $\mathbb{D}$, соответствующих одному и тому же нечеткому множеству.

Заметим теперь что, операции объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств не согласованы с соответствующими операциями для случайных множеств, как показывают следующие вычисления. Рассмотрим два случайных множества в $\mathbb{D}$, а именно

$$A: \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{1}{2}, \quad p_4 = 0$$

$$A': \quad p_1' = \frac{1}{4}, \quad p_2' = \frac{1}{4}, \quad p_3' = \frac{1}{4}, \quad p_4{}' = \frac{1}{4}.$$

Эти случайные множества определяют одно и то же нечеткое множество A_μ, для которого

$$\mu(0) = p_2 + p_4 = p_2' + p_4' = \frac{1}{2}, \quad \mu(1) = p_3 + p_4 = p_3' + p_4' = \frac{1}{2}.$$

Ясно, что при объединении нечетких множеств, мы имеем $A_\mu \cup A_\mu = A_\mu$. Рассмотрим, с другой стороны, объединение $\widetilde{A} = A \cup A'$ случайных множеств, обозначив через $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3, \widetilde{p}_4$ определяющие $\widetilde{A}$ вероятности элементарных событий. Простой подсчет показывает, что в общем случае мы имеем

$\widetilde{p}_1 = p_1 p_1'$
$\widetilde{p}_2 = p_1 p_2' + p_2 p_1' + p_2 p_2'$
$\widetilde{p}_3 = p_1 p_3' + p_3 p_1' + p_3 p_3'$
$\widetilde{p}_1 = p_1 p_4{}' + p_4 p_1{}' + p_2 p_3{}' + p_3 p_1{}' + p_2 p_4{}' + p_4 p_2{}' + p_3 p_4{}' + p_4 p_3{}' + p_4 p_4{}'$,

а в рассматриваемом нами случае получаем

$\widetilde{A}: \quad \widetilde{p}_1 = 0, \widetilde{p}_2 = \frac{1}{4}, \widetilde{p}_3 = \frac{1}{4}, \widetilde{p}_4 = \frac{1}{2}$

Отсюда следует, что $\widetilde{\mu}(0) = \frac{3}{4}, \widetilde{\mu}(1) = \frac{3}{4}$, и потому $A_\mu \neq \widetilde{A}$. Таким образом действительно операция объединения нечетких множеств не согласована с операцией объединения случайных множеств и создается впечатление, что она определена неудачно. Однако использование таких определений имеет и свои плюсы.

Вернемся к рассмотренному нами примеру. Совокупность всех нечетких подмножеств множества $\mathbb{D}$ может быть очевидно представлена единичным квадратом на плоскости (Рис. 2).

Совокупность всех случайных множеств может быть представлена тетраэдром с вершинами $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ в обычном пространстве с декартовыми координатами (Рис. 3).

Каждая точка этого тетраэдра может быть задана барицентрическими координатами (p_1, p_2, p_3, p_4), $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ или же декартовыми координатами. Соответствие между случайными множествами и нечеткими множествами в $\mathbb{D}$ определяет отображение $(p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto (p_2 + p_4, p_3 + p_4)$.

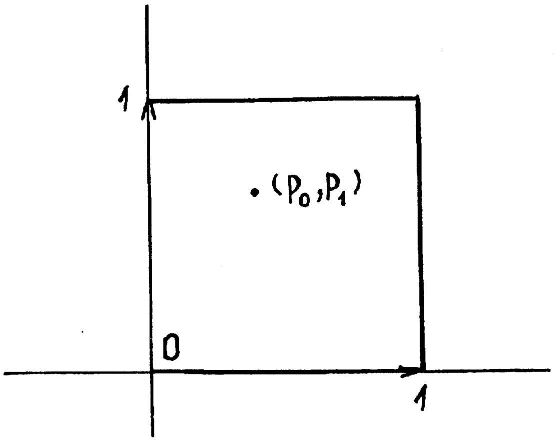

Рис. 2.

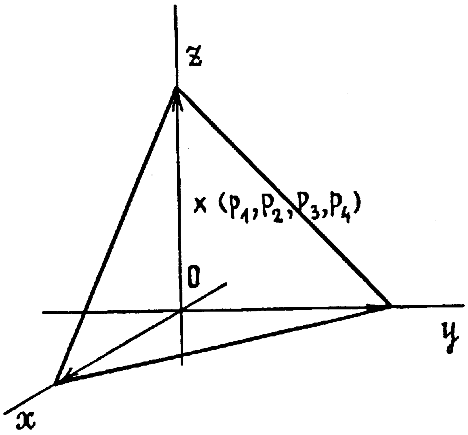

Рис. 3.

3. Случайные точки. Элементы случайности можно вводить на разных уровнях изучаемых структур. Можно вводить случайность и на первом уровне, на уровне точек исходного множества. Так возникает понятие *случайной точки*, являющееся естественным обобщением понятия случайной величины.

Для введения на каком-то множестве X случайной точки x необходимо фиксировать на X какую-нибудь (счетно аддитивную) алгебру $\mathcal{A}$ его подмножеств и какую-нибудь меру μ на этой алгебре. Таким образом случайная точка x на X ассоциируется с тройкой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Обычная (не случайная) точка x – это случайная точка, для которой $\mu(x) = 1$, $\mu(X \setminus \{x\}) = 0$. В рассмотренном нами случае $X = \mathbb{D}$, каждая случайная точка определяется парой неотрицательных чисел $\mu(0)$, $\mu(1)$, $\mu(0) + \mu(1) = 1$ и, таким образом множество всех случайных точек $\mathbb{D}$ может быть представлено отрезком на плоскости между точками $(0, 1)$ и $(1, 0)$ (Рис. 4).

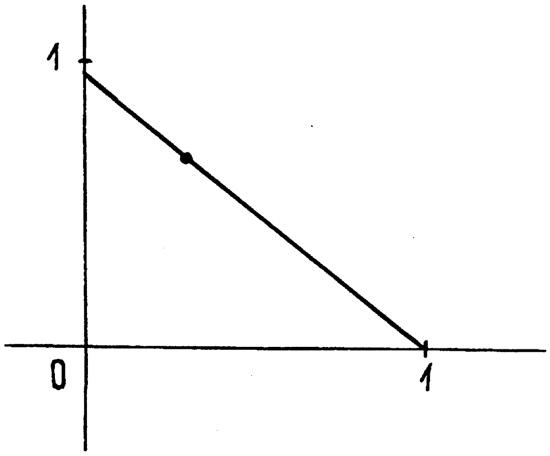

Рис. 4.

4. Нечеткие пространства. В классической теории, основанной на приведенном выше понятии нечеткого множества, *нечеткая топологическая структура* на X определяется, как произвольное подмножество множества I^X, удовлетворяющее обычным аксиомам топологической структуры, в которых объединение и пересечение являются операциями над нечеткими множествами. *Нечеткое битопологическое пространство* определяется, как множество с двумя заданными на нем нечеткими топологическими структурами. Такой подход к понятию нечеткого топологического пространства и понятию нечеткого битопологического пространства вызывает некоторые сомнения, основанные, прежде всего, на гебридности понятия нечеткого множества. Однако выбор нечеткого подхода имеет преимущество простоты обращения с нечеткими множествами по сравнеию с чисто случайными множествами. В этом можно легко убедиться сравнивая нечеткие топологические структуры и топологические структуры случайных множеств, определенные на $\mathbb{D}$. В первом случае мы имеем довольно просто описываемые подмножества единичного квадрата, а во втором–сложно описываемые подмножества тетраэдра.

В третьем из рассмотренных нами подходов к понятию в каком-то смысле нечеткого топологического пространства, а именно к рассмотрению топологических структур на множестве всех случайных точек в фиксированном множестве, мы имеем дело действительно с топологическими и, соответственно, битопологическими объектами. Нечеткость заложена здесь в формирование множества точек соответствующего топологического пространства.

Как было отмечено выше, понятие нечеткого топологического пространства эклектично, но с ним работать удобно, поэтому именно это понятие явилось основой, на которой создавалась теория нечетких битопологических пространств.

§14. Связь с другими структурами

В этом заключительном параграфе первой главы мы еще раз обратимся к вопросу о роли и месте битопологических в смысле Келли пространств в различных областях математики, об их характерных с этой точки зрения особенностях.

Один из основных принципов применения битопологических в смысле Келли пространств состоит в следующем. Допустим, что нас интересует некоторый класс отображений каких-то множеств в себя или же в другие множества. Допустим, далее, что мы хотели бы иметь топологическое описание этого класса, то есть представить этот класс, как класс всех непрерывных отображений этих множеств снабженных соответствующими топологическими структурами. Если это возможно, то будем говорить, что этот класс имеет топологическое представление. К сожалению это не всегда возможно, но в некоторых случаях такой класс $\mathcal{F}$ можно представить в виде пересечения $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ двух классов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, каждый из которых имеет топологическое представление. Класс $\mathcal{F}$ состоит из всех отображений f, для которых $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X', \tau_1')$ и $f : (X, \tau_2) \longrightarrow (X', \tau_2')$ непрерывны и, следовательно, непрерывно отображение $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$. В этой ситуации мы будем говорить, что класс $\mathcal{F}$ имеет битопологическое (в смысле Келли) представление, он является объектом битопологической в смысле Келли теории и его можно изучать в рамках этой теории.

Другим принципом применения битопологических в смысле Келли пространств является замена одной структуры двумя более простыми. Рассмотрим, например, топологизацию множества PX (см. 12.1), в которой множество $\{PG, QG | G \in \tau\}$, где τ – фиксированая на X топологическая структура, образует ее предбазу (см. 12.2). Эту топологическую структуру на PX мы можем заменить двумя структурами – τ_1 и τ_2, из которых одна имеет предбазой совокупность множеств вида PG, а другая – вида QG. Эти топологические структуры изучаются проще, чем исходная. Их совместное изучение есть изучение битопологического пространства (X, τ_1, τ_2).

Другим примером применения того же принципа является замена сходимости $\xi_n \longrightarrow \xi$ вещественных случайных величин, определяемой условием сходимости к нулю вероятности $P(|\xi_n - \xi| \geqslant \epsilon)$ для любого $\epsilon > 0$, на две сходимости, одна из которых определяется условием сходимости к нулю вероятности $P(\xi_n - \xi \geqslant \epsilon)$, а другая определяется условием сходимости к нулю вероятности $P(\xi - \xi_n \geqslant \epsilon)$ для любого $\epsilon > 0$.

Структура битопологического в смысле Келли пространства состоит из двух самостоятельных частей и в этом его принципиальная особенность. Совместное изучение этих частей – особенность теории битопологических пространств. В любой математической теории, в которой объекты могут описываться парами более простых объектов есть возможность применения теории битопологических в смысле Келли пространств.

Глава II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Развивая общую теорию битопологических пространств мы должны ввести, прежде всего, соответствующую систему понятий. Некоторые из этих понятий оказываются более или менее непосредственным обобщением известных понятий теории топологических пространств. С такими понятиями мы познакомились в предыдущей главе. В этой главе будут рассмотрены существенно битопологические понятия и утверждения, не имеющие аналогов в классической теории битопологических пространств. К сожалению, допустимый объем книги не позволяет продвинуть соответствующие этим понятиям разделы битопологической теории так далеко, как этого хотелось бы. В некоторых случаях приходится ограничиться только примерами и указаниями возможных путей дальнейшего развития.

§1. Некоторые определения и конструкции

Здесь будут рассмотрены простейшие понятия и конструкции общей теории битопологических пространств. Уже на этом элементарном уровне проявляются особенности общей теории, ее отличие от классической теории. Имеются в виду такие понятия, как подпространство, факторпространство, прямое произведение битопологических пространств, их свободное объединение и построение соответствующих битопологических пространств.

1. Инвариантность классов относительно операций. Ранее было отмечено, что класс T топологических пространств, класс KT битопологических в смысле Келли пространств и класс BT битопологических пространств можно считать последовательно вложенными друг в друга,

$$T \subset KT \subset BT.$$

При этих вложениях любое топологическое пространство (X, τ) отождествляется с битопологическим в смысле Келли пространством (X, τ, τ), а битопологическое в смысле Келли пространство (X, τ_1, τ_2) отождествляется с битопологическим пространством $(X, \tau_1 \times \tau_2)$.

Рссмотрим какую-нибудь операцию построения битопологического пространства по другим (одному или нескольким) битопологическим пространствам. Может случиться, что эта операция не выводит нас из класса KT (класса T), то есть для любых разложимых битопологических пространств (топологических пространств) результат операции является снова разложимым битопологическим пространством (топологическим пространством). Нетрудно привести примеры операций обладающих этим свойством и операций им не обладающих. Например, переход от битопологического пространства к тривиальному (с тем же множеством точек) битопологическому пространству не выводит нас ни из класса KT ни из класса T. С другой стороны, локализация битопологического пространства, то есть присоединение к его битопологической структуре всех множеств, содержащихся в $(X\times X)\setminus\Delta$, не обладает этим свойством ни для класса KT ни для класса T. Мы рассмотрим сейчас с этой точки зрения некоторые важные операции.

2. Подпространства. Пусть (X,β) – битопологическое пространство и $X'\subset X$. Тогда $X'\times X'\subset X\times X$ и поэтому топологическая структура β, определенная на множестве $X\times X$, индуцирует на $X'\times X'$ топологическую структуру $\beta'=\beta|X'\times X'=\{G\cap (X'\times X')|G\in\beta\}$. Битопологическое пространство (X',β') называют *подпространством битопологического пространства* (X,β). Нетрудно заметить, что если $\beta=\tau_1\times\tau_2$, – разложимая битопологическая структура, то и $\beta'=\tau_1'\times\tau_2'$, где $\tau_1'=\tau_1|X', \tau_2'=\tau_2|X'$ – разложимая битопологическая структура. Если, кроме того, $\tau_1=\tau_2=\tau$, то и $\tau_1'=\tau_2'=\tau'$. Действительно, $\tau_1\times\tau_2|X'\times X'=\tau_1|X'\times\tau_2|X'=\tau_1'\times\tau_2'$, $\tau\times\tau|X'\times X'=\tau|X'\times\tau|X'$. Таким образом переход к битопологическим подпространствам не выводит нас ни из класса KT ни из класса T.

3. Факторпространства. Пусть (X,β) – битопологическое пространство и p-отображение множества X на какое-то множество X''. Тогда $p\times p: X\times X\longrightarrow X''\times X''$. Это отображение позволяет определить на $X''\times X''$ топологическую структуру $\beta''=(p\times p)\beta=\{G|(p\times p)^{-1}(G)\in\beta\}$. Топологическое пространство $(X''\times X'',\beta'')$ будет *факторпространством* топологического пространства $(X\times X,\beta)$, определенным отображением $p\times p$. Битопологическое пространство (X'',β'') называют *факторпространством битопологического пространства* (X,β), определенным отображением p. Нетрудно заметить, что если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$ – разложимая битопологическая структура, то и $\beta'' = \tau_1'' \times \tau_2''$, где $\tau_1'' = p\tau_1$, $\tau_2'' = p\tau_2$, – разложимая битопологическая структура. Если, кроме того, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, то и $\tau_1'' = \tau_2'' = \tau''$. Действительно, $(p \times p)(\tau_1 \times \tau_2) = p\tau_1 \times p\tau_2 = \tau_1'' \times \tau_2''$, $(p \times p)(\tau \times \tau) = p\tau \times p\tau = \tau'' \times \tau''$.

Таким образом, переход к битопологическим факторпространствам не выводит нас ни из класса KT ни из класса T.

4. Прямые произведения. Пусть $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – система битопологических пространств, $X = \prod X_\lambda|\lambda \in \Lambda$ – произведение множеств X_λ, образованное по всем $\lambda \in \Lambda$, $\mathrm{pr}_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ – проекция произведения X на множество X_λ,где $\mathrm{pr}_\lambda(x) = x_\lambda$ для каждого $x = (x_\mu|\mu \in \Lambda) \in X$. Тогда $\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda$ отображает $X \times X$ на $X_\lambda \times X_\lambda$, $(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)(x, y) = (x_\lambda, y_\lambda)$.

Множества $(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(U)$, взятые по всем $\lambda \in \Lambda$ и всем $U \in \beta_\lambda$, порождают на множестве $X \times X$ топологическую структуру β. Битопологическое пространство (X, β) называют *прямым произведением* битопологических пространств семейства $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$.

$$(X, \beta) = \prod (X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda.$$

При изучении произведений битопологических пространств иногда оказываются полезными следующие соображения.

Рассмотрим топологические пространства $(X \times X, \beta)$ и $\prod(X_\lambda \times X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda$. Множества точек этих пространств не совпадают, так как точками топологического пространства $(X \times X, \beta)$ и точками топологического пространства $\prod(X_\lambda \times X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda$, будут, соответственно, точки $((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), (y_\lambda|\lambda \in \Lambda))$ и $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$.

Однако между этими точками имеется каноническое соответствие

$$((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)) \longleftrightarrow ((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda).$$

При этом соответствии множества

$$\{((x_\lambda|\lambda \in \Lambda), (y_\lambda|\lambda \in \Lambda))|(x_\mu, y_\mu) \in G \in \beta_\mu)\}$$

и

$$\{((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)|(x_\mu, y_\mu) \in G \in \beta_\mu\},$$

где $x_\mu = \mathrm{pr}_\mu(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, $y_\mu = \mathrm{pr}_\mu(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$, взаимно переходят друг в друга для любого фиксированного $\mu \in \Lambda$ и любого фиксированного $G \in \beta_\mu$.

Отсюда следует,что указанное соответствие определяет гомеоморфизм между топологическими пространствами $(X \times X, \beta)$ и $\prod(X_\lambda \times X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda$. Топологическая структура второго пространства является произведением $\prod \beta_\lambda|\lambda \in \Lambda$, топологическая структура β первого пространства через β_λ в явной форме в общем случае не выписывается.

Нетрудно проверить, что если все β_λ являются разложимыми битопологическими структурами, то и β будет разложимой битопологической структурой. Действительно, пусть $\beta_\lambda = \tau_\lambda \times \tau'_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Тогда в качестве порождающих топологическую структуру β на $X \times X$ можно будет брать совокупность множеств вида $(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(U)$, ограничиваясь случаем $U = G_\lambda \times G'_\lambda$, где $G_\lambda \in \tau_\lambda$, $G'_\lambda \in \tau'_\lambda$. Но в этом случае $(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(G_\lambda \times G'_\lambda) = \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(G_\lambda) \times \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(G'_\lambda)$. Заметим теперь, что множества вида $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(G_\lambda)$ порождают топологическую структуру $\tau = \prod \tau_\lambda|\lambda \in \Lambda$, а множества вида $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(G'_\lambda)$ порождают топологическую структуру $\tau' = \prod \tau'_\lambda|\lambda \in \Lambda$, поэтому $\beta = \tau \times \tau'$. Если к тому же $\tau_\lambda = \tau'_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то и $\tau = \tau'$.

Таким образом переход к битопологическим произведениям не выводит нас ни из класса KT ни из класса T.

5. Свободные объединения. Пусть $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – система битопологических пространств, причем мы будем предполагать, что $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ для всех $\lambda \neq \mu$ из Λ. Пусть $X = \cup X_\lambda|\lambda \in \Lambda$. Введем на множестве $X \times X$ топологическую структуру β, состоящую из всех множеств $U \subset X \times X$, удовлетворяющих условию

$$U \cap (X_\lambda \times X_\lambda) \in \beta_\lambda$$

для всех $\lambda \in \Lambda$. Битопологическое пространство (X, β) называют *свободным объединением* битопологических пространств семейства $((X_\lambda, \beta_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$.

Заметим, что за исключением тривиального случая, когда Λ – одноточечное множество, объединение $\cup(X_\lambda \times X_\lambda)|\lambda \in \Lambda$ не совпадает с $X \times X$. Поэтому в пространстве $(X \times X, \beta)$ всегда имеется дискретная часть. Этот факт позволяет легко строить примеры, в которых из разложимости всех $\beta_\lambda, \lambda \in \Lambda$, не следует разложимость β. Более того, даже в случае когда $\beta_\lambda = \tau_\lambda \times \tau_\lambda$

для всех $\lambda \in \Lambda$, битопологическое пространство (X, β) являющееся свободным объединением пространств $(X_\lambda, \tau_\lambda \times \tau_\lambda)$, будет, как правило, неразложимым. Простейшим примером такого рода является свободное объединение (X, β) тривиального двухточечного битопологического пространства и одноточечного битопологического пространства. База топологической структуры β изображена на рисунке 5, а на рисунке 6 показана база структуры соответствующего разложимого пространства.

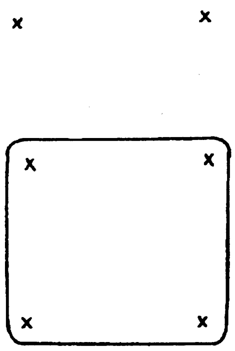

Рис. 5

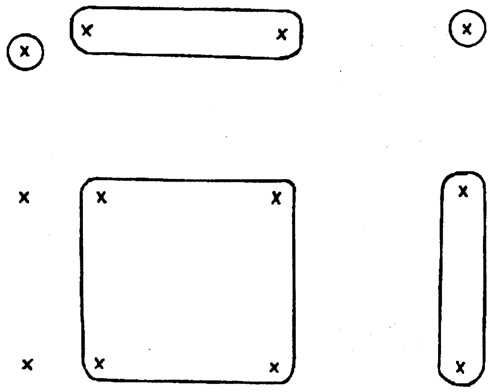

Рис. 6.

6. Объединения. Свободные объединения являются частными случаями произвольных объединений. Пусть X – некоторое множество, $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ – какое-нибудь покрытие множества X. Предположим, что на каждом множестве X_ξ определена битопологическая структура X_ξ, $\xi \in \Xi$ и все эти битопологические структуры согласованы так, что для каждых ξ, η из Ξ структуры β_ξ, β_η индуцируют на $X_\xi \cap X_\eta$ одну и ту же битопологическую структуру $\beta_{\xi\eta}$, причем $(X_\xi \times X_\xi) \cap (X_\eta \times X_\eta)$ принадлежит как β_ξ так и β_η. Битопологическая структура β, индуцирующая на каждом множестве X_ξ, битопологическую структуру β_ξ, называется *объединением* битопологических структур X_ξ, взятым по всем $\xi \in \Xi$.

Ясно, что свободное объединение является его частным случаем. Естественно возникает проблема существования и проблема единственности объединения при тех или иных условиях.

Эта битопологическая проблема сводится, очевидно, к соответствующей топологической проблеме. Каждому множеству $X_\xi \subset X$ соответствует множество $X_\xi \times X_\xi \subset X \times X$. К сожалению множества $X_\xi \times X_\xi$ не образуют, как правило, покрытие множества $X \times X$, хотя они покрывают диагональ Δ. Мы можем, однако, попытаться дополнить систему $(X_\xi \times X_\xi | \xi \in \Xi)$ до какой-нибудь системы $(H_\mu | \mu \in M)$, $\Xi \subset M$, $H_\mu \subset X \times X$, образующей покрытие множества $X \times X$. Если удастся ввести на всех множествах H_μ согласованные друг с другом, в упомянутом выше смысле, топологические структуры β_μ, совпадающие с β_μ для $\mu \in \Xi$, то нам остается только найти на $X \times X$ топологическую структуру β, согласованную со всеми β_μ. Это и будет объединением битопологических структур β_ξ, взятое по всем $\xi \in \Xi$.

Заметим, прежде всего, что такое объединение битопологических структур определено неоднозначно. Эта неоднозначность порождается различными причинами, прежде всего неоднозначностью выбора H_μ и β_μ. Нетрудно показать соответствующими примерами, что и для фиксированных H_μ и β_μ объединение определено неоднозначно. Однако последнюю причину неоднозначности можно преодолеть, рассматривая максимальное объединение, которое всегда существует. Оно состоит из всех $U \subset X \times X$, для которых каждое $U \cap H_\mu \in \beta_\mu$, $\mu \in M$. Для того чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что в наших условиях $\beta_{\xi\eta} \subset (\beta_\xi \cap \beta_\eta)$ для любых ξ и η из M.

7. Ослабления. Пусть (X, β) – некоторое битопологическое пространство и $\mathcal{A}$ – какая-нибудь система подмножеств в $X \times X$. На каждом множестве $A \in \mathcal{A}$ определена топологическая структура β_A индуцированная на $A \subset X \times X$ топологической структурой β, определенной на $X \times X$. Рассмотрим структуру $\beta_{\mathcal{A}}$, состоящую из всех тех подмножеств U множества $X \times X$, для которых из $A \in \mathcal{A}$ следует $U \cap A \in \beta_A$. Структура $\beta_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, топологической структурой на $X \times X$ и $\beta \subset \beta_{\mathcal{A}}$. В частности, если $\mathcal{A}$ состоит только из $X \times X$, то $\beta = \beta_{\mathcal{A}}$, если же $\mathcal{A} = \emptyset$, то $\beta_{\mathcal{A}}$ – дискретная битопологическая структура. Говорят, что битопологическая структура $\beta_{\mathcal{A}}$ получена *ослаблением* битопологической структуры β по системе $\mathcal{A}$.

Возможен, однако, и другой способ ослабления, когда за основу берутся не открытые, а замкнутые множества. В этом варианте рассматривается не β, а $\complement\beta$ – структура замкнутых множеств и структура $(\complement\beta)_{\mathcal{A}}$, состоящая из всех тех подмножеств F множества $X \times X$, для которых из $A \in \mathcal{A}$ следует $F \cap A \in (\complement\beta)_{\mathcal{A}}$. Структура $(\complement\beta)_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, структурой замкнутых множеств на $X \times X$ и $\complement\beta \subset (\complement\beta)_{\mathcal{A}}$. В частности, если $\mathcal{A}$ состоит только из $X \times X$, то $\complement\beta = (\complement\beta)_{\mathcal{A}}$, если же $\mathcal{A} = \emptyset$, то $(\complement\beta)_{\mathcal{A}}$ – дискретная структура замкнутых множеств. И в этом случае будем говорить, что структура $(\complement\beta)_{\mathcal{A}}$ получена ослаблением структуры $\complement\beta$ по системе $\mathcal{A}$. В конечном счете оба варианта ослабления эквивалентны, как эквивалентна структура открытых множеств топологического пространства его структуре замкнутых множеств.

Замечание. Процедура ослабления, описанная здесь, имеет смысл для произвольного топологического пространства (X, τ), а не только для топологического пространства $(X \times X, \beta)$, то есть для битопологического пространства (X, β). В следующем разделе мы рассмотрим общую ситуацию.

8. Наследственность ослабления. Пусть $\tau_{\mathcal{A}}$ – ослабление топологической структуры τ на X посредством некоторой системы $\mathcal{A}$ подмножеств множества X, (X', τ') – подпространство топологического пространства (X, τ). Мы можем рассмотреть три процедуры ослабления структуры τ', а именно процедуру дающую $\tau'_{\mathcal{A}'}$ – ослабление топологической структуры τ' по системе $\mathcal{A}' = \{A \cap X' | A \in \mathcal{A}\}$, процедуру дающую $\tau_{\mathcal{A}'}|X'$ – топологическую структуру, индуцированную на X' ослаблением топологической структуры τ по системе $\mathcal{A}' = \{A \cap X' | A \in \mathcal{A}\}$ и процедуру дающую $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ – топологическую структуру, индуцированную на X' топологической структурой $\tau_{\mathcal{A}}$ заданной на X. Нетрудно доказать, что между этими структурами имеют место следующие включения:

$$\tau_{\mathcal{A}}|X' \subset \tau_{\mathcal{A}'}|X' \subset \tau'_{\mathcal{A}'}$$

Действительно, пусть $U' \in \tau_{\mathcal{A}}|X'$, то есть $U' = U \cap X'$ и $U \cap A \in \tau|A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$. Тогда $U \cap A' \in \tau|A'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}'$. Тем самым доказано первое включение.

Пусть, теперь, $U' \in \tau_{\mathcal{A}'}|X'$ то есть $U' = U \cap X'$ и $U \cap A' \in \tau|A'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}'$. Тогда $(U \cap A) \cap X' \in \tau|A'$, то есть $U' \cap A' \in$

$\tau'|A'$, откуда следует, что $U' \in \tau'_{\mathcal{A}'}$. Тем самым доказано и второе включение.

Второе из этих включений обратимо, так как $U' \in \tau_{\mathcal{A}'}|X' \iff U' = U \cap X'$, где $U \in \tau_{\mathcal{A}'}$, то есть $U \cap A'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}' \iff U' \cap A' \in \tau'$ для каждого $A' \in \mathcal{A}' \iff U' \in \tau'|X'$.

К сожалению, первое из доказанных выше включений необратимо, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{a_0, a_1, a_2\}$, τ – тривиальная топологическая структура на X, $X' = \{a_1, a_2\}$, (X', τ') – подпространство топологического пространства (X, τ), система $\mathcal{A}$ состоит из двух множеств, а именно из множества $A_1 = \{a_0, a_1\}$ и множества $A_2 = \{a_0, a_2\}$ (рис. 7).

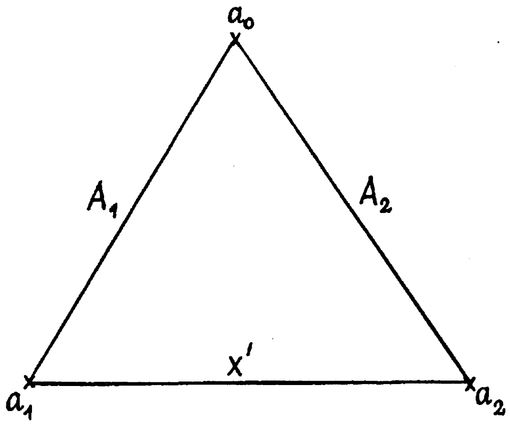

Рис. 7.

Тогда система $\mathcal{A}'$ будет состоять из двух одноточечных множеств $A'_1 = \{a_1\}$ и $X' = \{a_2\}$, исчерпывающих X'. В этом случае структура $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ будет тривиальной. Действительно, пусть $U \in \tau_{\mathcal{A}}$, то есть $U \cap A_1 \in \tau|A_1$ и $U \cap A_2 \in \tau|A_2$ но тогда $U \cap A_1 = A_1$ и $U \cap A_2 = A_2$ и потому $U = X$. Отсюда следует, что $\tau_{\mathcal{A}}$ – также тривиальная топологическая структура на X и поэтому $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ –

тривиальная топологическая структура на X'. С другой стороны, хотя τ – тривиальная топологическая структура на X, но $\mathcal{A}'$ состоит из одноточечных множеств и поэтому $\tau_{\mathcal{A}'}$ – дискретная топологическая структура. Отсюда следует, что топологические структуры $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ и $\tau_{\mathcal{A}'}|X'$ различны.

Из рассмотренного примера следует также, что топологические структуры $\tau_{\mathcal{A}}|X'$ и $\tau'_{\mathcal{A}'}$ вообще различны. Можно, однако, доказать, что в некоторых случаях имеет место их совпадение. Мы рассмотрим здесь следующие случаи:

1) X' – $\tau_{\mathcal{A}}$-открытое множество,

2) X' – $\tau_{\mathcal{A}}$-замкнутое множество,

3) $\mathcal{A}$ состоит из подмножеств множества X'.

Во всех этих случаях нам достаточно доказать включение

$$\tau'_{\mathcal{A}'} \subset \tau_{\mathcal{A}}|X',$$

так как обратное включение всегда имеет место.

Случай 1). Пусть множество G' является $\tau'_{\mathcal{A}'}$-открытым множеством, то есть $G' \cap A' \in \tau'|A'$. Так как $\tau'|A' = \tau|A'$ и $G' \cap A' = G' \cap A$ то $G' \cap A \in \tau|A'$. Заметим, теперь, что для любого $A \in \mathcal{A}$ мы имеем включение $\tau|A' \subset \tau|A$. Действительно, в случае 1) требуется, чтобы $X' \cap A \in \tau|A$ или, что то же самое, $A' \in \tau|A$ откуда требуемое включение и следует. Таким образом, для любого $A \in \mathcal{A}$ мы имеем $G' \cap A \in \tau|A$, то есть $G' \in \tau_{\mathcal{A}}$.

Случай 2) рассматривается аналогично.

Случай 3). В этом случае $A = A'$, поэтому условие $G' \cap A' \in \tau'|A'$ совпадает с условием $G' \cap A \in \tau'|A$. С другой стороны $(\tau|X')|A' = \tau|A'$ и, так как $A = A'$, то $\tau'|A = \tau|A$ и поэтому $G' \cap A' \in \tau'|A'$ влечет $G' \cap A \in \tau|A$. Отсюда следует включение $\tau'_{\mathcal{A}'} \subset \tau_{\mathcal{A}}|X'$.

9. Согласованные структуры. Иногда возникает такая ситуация, при которой на некотором множестве X рассматриваются одновременно и битопологическая структура β и топологическая структура τ, например β и $\beta|X$. Если

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \Longrightarrow \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\tau x, \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\tau y, \end{cases}$$

то будем говорить, что битопологическая структура β на X *согласована* с топологической структурой τ. Если же имеет место обратная импликация, то будем говорить, что топологическая структура τ *согласована* с битопологической структурой β. Иначе говоря, β согласована с τ, если β – более тонкая, чем $\tau \times \tau$, структура на $X \times X$, то есть

$$i : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X \times X, \tau \times \tau)$$

непрерывное отображение, и τ согласована с β, если $\tau \times \tau$ – более тонкая, чем β, структура на $X \times X$, то есть

$$i : (X \times X, \tau \times \tau) \longrightarrow (X \times X, \beta)$$

непрерывное отображение. Заметим, что в общем случае ни β не согласована с $\beta|X$ ни $\beta|X$ не согласована с β, если же $\beta = \tau \times \tau$, то согласование имеет место, конечно, в обе стороны.

10. Рефлексивность. Говорят, что битопологическая структура β, определенная на множестве X, *рефлексивна*, если рефлексивно соответствующее ей отношение переноса

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

то есть для любой направленной системы точек $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ в X и любой точки $x \in X$ имеем

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,x} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

Рефлексивность битопологической структуры β эквивалентна условию

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, x),$$

где точка $x \in X$ и система $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ произвольны.

Нетрудно заметить, что *битопологическая структура β рефлексивна тогда и только тогда, когда любое открытое в $(X \times X, \beta)$ множество G либо не имеет общих точек с диагональю либо ее содержит, то есть $G \in \beta, G \cap \Delta \neq \emptyset \implies \Delta \subset G$.*

Действительно, пусть β – некоторая рефлексивная битопологическая структура на X, $G \in \beta$, $(x, x) \in G \cap \Delta$. Рассмотрим произвольную точку $(y, y) \in \Delta$, одноточечное направленное множество Λ и направленную систему $((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$, в которой $x_\lambda = y$. В силу рефлексивности β имеет место сходимость

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, x).$$

Тогда $(x_\lambda, x_\lambda) = (y, y) \in G$, так как G является окрестностью точки (x, x) в $(X \times X, \beta)$. Но это означает, что любая точка (y, y) диагонали принадлежит множеству G. Тем самым доказано, что $\Delta \subset G$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $G \in \beta$, $G \cap \Delta \neq \emptyset \implies \Delta \subset G$. Рассмотрим произвольную точку $(x, x) \in \Delta$. Пусть $((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленная система. Если $(x, x) \in G \in \beta$, то $\Delta \subset G$, поэтому $(x_\lambda, x_\lambda) \in G$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Но это означает, что

$$((x_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, x),$$

то есть β – рефлексивная битопологическая структура.

Рассмотрим теперь произвольную, не обязательно рефлексивную, битопологическую структуру β. По ней можно построить структуру $\operatorname{ref}\beta$, состоящую из всех элементов структуры β, либо не пересекающихся с диагональю (множества первого типа), либо ее содержащих (множества второго типа). Структура $\operatorname{ref}\beta$ будет также битопологической структурой на X, то есть топологической структурой на $X \times X$. Действительно, заметим, прежде всего, что $\emptyset \in \operatorname{ref}\beta$, так как $\emptyset \cap \Delta = \emptyset$, $X \times X \in \operatorname{ref}\beta$, так как $\Delta \subset X \times X$.

Заметим, далее, что если совокупность элементов структуры $\operatorname{ref}\beta$ состоит только из множеств первого (второго) типа, то объединение и пересечение элементов этой совокупности принадлежит первому (второму) типу. Если в эту совокупность входят как множества первого, так и множества второго типа, то их объединение будет множеством второго, а пересечение – первого типа. Итак, $\operatorname{ref}\beta$ есть битопологическая структура. Более того, по построению она рефлексивна.

Дефектом рефлексивности структуры β будем называть структуру $\operatorname{der}\beta = \beta \setminus \operatorname{ref}\beta$.

Для произвольной битопологической структуры β целесообразно рассматривать также следующие структуры: структуру $\Delta\beta$ состоящую из окружений диагонали, то есть из множеств $G \in \beta$, $\Delta \subset G$, и пустого множества, а также структуру $\nabla\beta$ состоящую из β-спутников диагонали,то есть из множеств $G \in \beta$, $\Delta \cap G = \emptyset$, и всего множества $X \times X$. Ясно, что $\Delta\beta \cup \nabla\beta = \operatorname{ref}\beta$.

11. Симметричность. Говорят, что битопологическая структура β на X *симметрична*, если сответствующее ей отношение пе-

реноса
$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$
симметрично, то есть
$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \iff (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,x} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

Условие симметричности структуры β эквивалентно следующему условию
$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff ((y_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, x).$$

Нетрудно заметить,что битопологическая структура β на X является симметричной тогда и только тогда, когда β, как топологическая структура на $X \times X$, симметрична относительно диагонали, то есть отображение $\varphi : (X \times X, \beta) \longrightarrow (X \times X, \beta)$, $\varphi(x, y) = (y, x)$ является гомеоморфизмом.

Каждому битопологическому пространству (X, β) можно сопоставить битопологическое пространство (X, β^{-1}), где
$$\beta^{-1} = \{G^{-1}|G \in \beta\},\ G^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in G\},$$
иначе говоря, $\beta^{-1} = \varphi(\beta)$.

Если битопологическая структура β симметрична, то ничего нового мы при этом не получаем. В противном случае мы можем рассматривать одновременно пространства (X, β) и (X, β^{-1}) образовав к примеру битопологическое пространство $(X, \beta) \times (X, \beta^{-1})$ канонически гомеоморфное пространству $(X \times X, \beta \times \beta^{-1})$ (в литературе рассматривалось ранее пространство $(X \times X, \beta, \beta^{-1})$.

Для произвольной битопологической структуры β можно построить ее верхнюю симметризацию $(\overline{\mathrm{sym}}\,\beta)$ и *нижнюю симметризацию* $(\underline{\mathrm{sym}}\,\beta)$. Под верхней симметризацией мы будем понимать наименьшую симметричную битопологическую структуру на X содержащую β, под нижней симметризацией мы будем понимать наибольшую битопологическую структуру на X содержащуюся в β. Можно ввести также *верхний* $(\overline{\mathrm{des}}\,\beta)$ *и нижний* $(\underline{\mathrm{des}}\,\beta)$ *дефекты* структуры β, положив
$$\overline{\mathrm{des}}\,\beta = \overline{\mathrm{sym}}\,\beta \setminus \beta,$$
$$\underline{\mathrm{des}}\,\beta = \beta \setminus \underline{\mathrm{sym}}\,\beta.$$

12. Транзитивность. Говорят, что битопологическая структура *транзитивна*, если транзитивно соответствующее ей отношение переноса,то есть если

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$$

и

$$(y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,z} (z_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

то

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,z} (z_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

что равносильно следующему условию: если

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, y),$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (y, z),$$

то

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, z),$$

Сформулированное таким образом условие транзитивности дано здесь не в терминах самой битопологической структуры. Можно, однако, ввести дополнительные условия, делающие такое описание возможным. Так, например, нетрудно доказать, что любая разложимая битопологическая структура транзитивна. Действительно, если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, то

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y \end{cases}$$

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z) \iff \begin{cases} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} y \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z \end{cases}$$

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, z) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z. \end{cases}$$

Поэтому, из

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z)$$

следует

$$\begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} y \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (z_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} z \end{cases}$$

и, наконец

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta} (x, z).$$

Однако разложимые битопологические структуры не исчерпывают класс транзитивных, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, β_0 – топологическая структура на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, в которой каждое замкнутое множество, за исключением самого множества $X \times X$, является объединением конечного числа каких-то подмножеств горизонтальных и конечного числа подмножеств вертикальных в $X \times X$ множеств. Такая битопологическая структура неразложима, так как она индуцирует дискретную топологическую структуру на каждом горизонтальном и на каждом вертикальном множестве, но сама не является дискретной топологической структурой. Докажем теперь, что$(\mathbb{R}, \beta_0)$ – транзитивное битопологическое пространство.

Пусть

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (x, y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (y, z),$$

но

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \not\longrightarrow_{\beta_0} (x, z).$$

Тогда для множества $U \in \beta_0$, $(x, z) \in U$, найдется такая конфинальная часть Λ_1 направленного множества Λ, что $(x_\lambda, z_\lambda) \notin U$ для всех $\lambda \in \Lambda_1$, иначе говоря, множество $\{(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_1\}$ содержится в объединении конечного числа каких-то вертикальных и каких-то горизонтальных в $X \times X$ множеств. Но тогда найдется такая конфинальная часть Λ_2 направленного множества Λ_1, что множество $\{(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_2\}$ содержится в каком-нибудь вертикальном или же горизонтальном множестве. Будем, для определенности, считать, что множество $\{(x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_2\}$ содержится в вертикальном множестве $\{x'\} \times \mathbb{R}$, то есть $x_\lambda = x'$ для всех $\lambda \in \Lambda_2$. Так как по предположению $((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_2) \longrightarrow_{\beta_2} (x, z)$, то $x_\lambda = x = x'$ для всех $\lambda \in \Lambda_2$. Мы доказали,таким образом, что $((x, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \not\longrightarrow_{\beta_0} (x, z)$, и поэтому $z_\lambda \neq z$ для $\lambda \in \Lambda_3$, где Λ_3 – некоторая конфинальная часть направленного множества Λ_2. Так как $((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (x, y)$, то $y_\lambda = y$ для $\lambda \in \Lambda_4$, где Λ_4 содержит почти все элементы из Λ_3 и уж во всяком случае является конфинальной частью Λ_3. Рассмотрим теперь направленную систему $((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_4)$ Так как Λ_4 – конфинальная часть направленного множества Λ, то

$$((y, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (y, z).$$

С другой стороны,

$$((y, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda_4) \not\longrightarrow_{\beta_0} (y, z),$$

так как $z_\lambda \neq z$ для всех $\lambda \in \Lambda_4$. Полученное противоречие доказывает транзитивность рассматриваемой неразложимой битопологической структуры β_0.

13. Критерий транзитивности. Разложимые битопологические структуры дают нам хорошо описываемый класс, состоящий из транзитивных структур, но не из всех таких структур. Сейчас мы рассмотрим другой хорошо описываемый класс, также состоящий из транзитивных битопологических структур.

Пусть A и B–произвольные подмножества множества $X \times X$, их композицией будем называть множество

$$A \circ B = \{(x, z)|\exists y|(x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

Битопологическую структуру β на множестве X будем называть *композиционно непрерывной*, если для любых точек x, y, z из X и любой окрестности W точки (x, z) в $(X \times X, \beta)$ найдутся такие окрестности U и V точек (x, y) и (y, z), соответственно, что $U \circ V \subset W$.

Заметим, что любая разложимая битопологическая структура обладает свойством композиционной непрерывности. Действительно, пусть W – окрестность точки (x, z) в $(X \times X, \tau_1 \times \tau_2)$.

Мы имеем право считать, что $W = G_x \times G_z$, где $x \in G_x \in \tau_1$, $z \in G_z \in \tau_2$. Положим $G_y = X$, $U = G_x \times G_y$, $V = G_y \times G_z$. Легко заметить, что $U \circ V = W$, что и доказывает композиционную непрерывность всякой разложимой битопологической структуры.

Докажем, теперь, что любая композиционно непрерывная битопологическая структура транзитивна.

Пусть

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, z).$$

Рассмотрим направленную систему $((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ и докажем, что она сходится в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ к точке (x, z). Пусть W – произвольная окрестность точки (x, z) в $(X \times X, \beta)$. В силу композиционой непрерывности структуры β найдутся такие окрестности U и V точек (x, y) и (y, z), соответственно, что $U \circ V \subset W$. В силу предположений о сходимости, найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $(x_\lambda, y_\lambda) \in U$ и $(y_\lambda, z_\lambda) \in V$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$. Но тогда$(x_\lambda, z_\lambda) \in U \circ V \subset W$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ и, таким образом,

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, z).$$

Тем самым доказано,что битопологическая структура β транзитивна.

Мы получили хорошо описываемый класс, все элементы которого являются транзитивными битопологическими структурами. Этот класс существенно шире, чем класс разложимых битопологических структур. Действительно, продолжим рассмотрение примера предыдущего пункта и покажем,что введенная там битопологическая структура β_0 композиционно непрерывна.

Пусть, как и выше, W – окрестность точки (x, z) в $(X \times X, \beta)$. По определению структуры β_0 найдутся такие конечные множества $A \subset X$, $C \subset X$, что $x \notin A$, $z \notin C$ и

$$(X \times X) \setminus ((A \times X) \cup (X \times C)) \subset W.$$

Ясно, что для окрестностей $U = (X \times X) \setminus (A \times X)$ и $V = (X \times X) \setminus (X \times C)$ точек (x, y) и (y, z), соответственно, верно соотношение $U \circ V \subset W$, что и доказывает композиционную непрерывность структуры β_0.

Заметим,что мы получили дополнительно другое (и более простое) доказательство транзитивности битопологической структуры β_0.

Оказывается, что *класс композиционно непрерывных битопологических структур исчерпывает класс транзитивных битопологических структур*. Действительно, пусть β – некоторая транзитивная битопологическая структура на множестве X. Предположим, что она не является композиционно непрерывной. Тогда в X существуют такие точки x, y, z и такая окрестность W точки (x,z) в $(X \times X, \beta)$, что для любых окрестностей U, V точек (x,y) и (y,z), соответственно, $U \circ V \not\subset W$.

Рассмотрим в качестве Λ направленное по включению множество пар (U,V), обладающих указанным свойством, $(U,V) > (U',V') \iff U \subset U'$, $V \subset V'$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$, то есть для каждой пары (U,V), найдутся такие точки x, y, z, что $(x_\lambda, y_\lambda) \in U$, $(y_\lambda, z_\lambda) \in V$ но $(x_\lambda, z_\lambda) \notin W$. В этой ситуации

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y,z),$$

но

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \not\longrightarrow_{\beta_0} (x,z).$$

Полученное противоречие доказывает композиционную непрерывность структуры β.

14. Вполне транзитивность. В дальнейшем нам понадобится усиление понятия транзитивности, а именно понятие вполне транзитивности. Транзитивное битопологическое пространство (X,β) мы будем называть *вполне транзитивным*, если для любых точек x, y, z из X и любой сходимости

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,z).$$

существуют сходимости

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (x,y)$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_0} (y,z).$$

Иначе говоря вполне транзитивность означает возможность переноса направленных систем из одной точки в другую через любую третью точку.

Для вполне транзитивных битопологических пространств имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть (X,β) – вполне транзитивное битопологическое пространство, U и V – произвольные окрестности произвольно фиксированных точек (x,y) и (y,z) в $(X\times X,\beta)$. Тогда $W=U\circ V$ будет окрестностью точки (x,z) в $(X\times X,\beta)$.*

Доказательство. Пусть

$$((x_\lambda,z_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,z).$$

Тогда, в силу вполне транзитивности (X,β), существуют сходимости

$$((x_\lambda,y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,y)$$

и

$$((y_\lambda,z_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (y,z).$$

Так как U и V – окрестности точек (x,y) и (y,z), соответственно, то найдется такое $\lambda_0\in\Lambda$, что $(x_\lambda,y_\lambda)\in U$ и $(y_\lambda,z_\lambda)\in V$ для всех $\lambda\geqslant\lambda_0$, $\lambda\in\Lambda$. Но тогда $(x_\lambda,z_\lambda)\in W$ для всех $\lambda\geqslant\lambda_0$, $\lambda\in\Lambda$, а это и означает, что W является окрестностью точки (x,z) в $(X\times X,\beta)$.

Замечание. Если (X,β) – вполне транзитивное битопологическое пространство, и

$$((x_\lambda,x_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,x),$$

то для любой точки $y\in X$ существует такая направленная система $(y_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ точек, что

$$((x_\lambda,y_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,y)$$

иначе говоря, направленную систему $(x_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ *можно перенести* в любую точку множества X.

Действительно, если

$$((x_\lambda,x_\lambda)|\lambda\in\Lambda)\longrightarrow_\beta (x,x)$$

и $y \in X$, то в силу вполне транзитивности битопологического пространства (X, β), существуют сходимости

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

и

$$((y_\lambda, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (y, x).$$

Первая из этих сходимостей дает нам перенос

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

вторая же из этих сходимостей дает нам обратный перенос

$$(y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,x} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda).$$

15. Транзитивные объединения. Рассмотрим проблему построения транзитивного объединения β транзитивных битопологических структур. Здесь все исходные битопологические структуры β_ξ, определенные на X_ξ должны быть транзитивными и требуется построить их объединение, также являющееся транзитивной битопологической структурой. При построении транзитивных объединений мы будем предполагать, что выполняются все условия, накладываемые на (X_ξ, β_ξ) при построении объединений (см. 6) и наложим еще условие так называемой *цепной связности*. Это условие состоит в том, что для любых точек x, y из X найдется такая последовательность точек $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, что каждая пара x_i, x_{i+1} ее точек принадлежит какому-нибудь X_ξ, где $\xi \in \Xi$. Саму эту последовательность мы будем называть *цепью, соединяющей точки* x и y.

При построении транзитивных объединений могут быть использованы два метода, а именно *метод переноса* направленных систем точек в X вдоль цепей и *метод цепных* композиций.

Метод переноса состоит в следующем. Мы рассматриваем все пары x, y точек множества X и для каждой такой пары считаем, что

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$$

если найдется какая-нибудь цепь, соединяющая точку x с точкой y, последовательный перенос вдоль точек которой переводит направленную систему $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ в направленную систему $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$. Заметим, что при таком переносе используется то, что каждая пара x_i, x_{i+1} точек цепи $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ принадлежит какому-нибудь X_ξ для $\xi \in \Xi$. Мы получаем в конечном счете некоторую систему сходимостей направленных систем точек в X. Эта система определяет соответствующую топологическую структуру на множестве $X \times X$, являющуюся транзитивной битопологической структурой на X.

Для описания метода цепных композиций необходимо предварительно ввести n-членные композиции. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – подмножества в $X \times X$. *Композицией* этих множеств будем называть множество

$$A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n =$$
$$= \{(x_0, x_n) | (x_0, x_1) \in A_1,\ (x_1, x_2) \in A_2, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\}.$$

Операция n-членной композиции обладает следующим свойством.

$$(A_1 \circ \ldots \circ A_k) \circ (A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n) = A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n.$$

Действительно,

$$A_1 \circ \ldots \circ A_k = \{(x_0, x_k) | (x_0, x_1) \in A_1, \ldots, (x_{k-1}.x_k) \in A_k\},$$

$$A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n = \{(x_k, x_n) | (x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\}$$

Отсюда следует, что

$$(A_1 \circ \ldots \circ A_k) \circ (A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n) =$$
$$= \{(x_0, x_k)) | (x_0, x_1) \in A_1, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in A_k\} \circ$$
$$\{(x_k, x_n) | (x_k, x_{k+1}), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\} =$$
$$\{(x_0, x_n) | (x_0, x_1) \in A_1, (x_1, x_2) \in A_2, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in A_n\} =$$
$$A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n.$$

Тем самым мы доказали, что n-членные композиции являются комбинациями двухэлементных композиций, введенных в п. 12.

Мы можем, теперь, перейти к понятию *цепной композиции*. Под этим мы будем понимать следующее.

Фиксируется какая-нибудь цепь $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, соединяющая точки x и y, и окрестности U_i точек (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ в содержащих эти точки пространствах (X_ξ, β_ξ). Композицию

$$U_1 \circ U_2 \circ \ldots \circ U_n$$

мы и будем называть цепной композицией. Любую такую цепную композицию будем рассматривать как окрестность точки (x, y). Такие цепные композиции, образованные по всем возможным цепям и окрестностям U_i точек (x_{i-1}, x_i) этих цепей дадут нам систему окрестностей порождающую топологическую структуру β на $X \times X$, являющуюся транзитивной битопологической структурой на X.

16. Частный случай транзитивного объединения. Метод переноса, как и метод цепных композиций, дает нам транзитивную битопологическую структуру, однако необходимо еще доказать, что эта структура индуцирует на всех X_ξ именно битопологические структуры β_ξ. В общем случае доказательство этого не представляется возможным и мы ограничимся здесь доказательством при соответствующих довольно сильных ограничениях.

Во-первых, вместо множества X мы будем рассматривать связное топологическое пространство (X, τ), а система $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ должна будет состоять из открытых в (X, τ) множеств, на каждом из которых определена топологическая структура $\tau_\xi = \tau | X_\xi$ и битопологическая структура β_ξ, согласованная с τ_ξ, причем $\beta_\xi | \Delta_\xi = \tau \times \tau | \Delta_\xi$, иначе говоря, имеет место сходимость $((x_\lambda, x_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_\xi} (x, x)$, если $(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_\xi} x$. Все эти битопологические структуры β_ξ, как обычно, попарно согласованы. Во-вторых, и это существенно, проблема транзитивного объединения будет решаться в классе вполне транзитивных, согласованных с τ, битопологических пространств.

При построении транзитивного объединения в этой ситуации мы, как в пункте 14, можем рассматривать цепи. Докажем, прежде всего, что система $(X_\xi | \xi \in \Xi)$, будет цепно связана. Действительно, если мы допустим, что это не так, то фиксировав некоторую точку x, мы сможем образовать два множества, скажем A и B, первое из которых состоит из точек y соединимых с x какой-нибудь цепью, а второе из точек этим свойством не обладающих. Первое из этих множеств будет открыто в (X, τ), так как если $y \in A$, $y \in X_\xi$ то $X_\xi \subset A$. С другой стороны, и множество B будет открыто в (X, τ). Действительно, пусть $y \in B$, тогда найдется такое $\xi \in \Xi$, что $y \in X_\xi$. Заметим теперь, что если некоторая точка z из X_ξ принадлежит A, то есть соединена с x какой-нибудь цепью, то и точка y будет соединена с точкой x цепью, что неверно. Таким образом, если $y \in B \cap X_\xi$, то $X_\xi \subset B$ и потому B открыто в (X,τ). Но $A \cup B = X$ и потому, в силу связности (X,τ), одно из этих множеств должно быть пустым. Так как $A \neq \emptyset$ то $B = \emptyset$, то есть система $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ – цепно связана.

Перейдем теперь к построению транзитивного объединения битопологических структур β_ξ. Мы начнем, как в пункте 14, с переноса направленных систем точек по цепям. При этом, в силу согласованности всех β_ξ с τ, рассматриваемые направленные системы $S_1, S_2, \ldots, S_n$ сходятся к соответствующим точкам пространства (X,τ). Таким образом мы полагаем

$$((x_\nu, y_\nu)|\nu \in N) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

если существует некоторая цепь соединяющая точку x с точкой y и переносящая направленную систему $(x_\nu|\nu \in N)$, сходящуюся к x в направленную систему $(y_\nu|\nu \in N)$, сходящуюся к y.

Докажем теперь что так определенные сходимости не только определяют β, как это было в предыдущем пункте, но даже исчерпывают все β-сходимости. Иначе говоря совокупность так определенных сходимостей удовлетворяет всем аксиомам сходимости. Мы ограничимся здесь единственным нетривиальным доказательством, а именно доказательством выполнения аксиомы композиции. Пусть

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$
$$((x_\nu, y_\nu)|\nu \in N_\lambda) \longrightarrow_\beta (x_\lambda, y_\lambda).$$

Мы должны доказать, что

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

где M является композицией Λ и всех N_λ, то есть доказать существование цепи, переносящей $(x_\mu|\mu \in M)$ в $(y_\mu|\mu \in M)$. Трудность состоит здесь в том, что цепи, вдоль которых осуществляются переносы направленных систем $(x_\nu|\nu \in N_\lambda)$ в направленные системы $(y_\nu|\nu \in N_\lambda)$, в принципе зависят от λ. В качестве основной цепи мы возьмем цепь, соединяющую точку x с точкой y вдоль которой $(x_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ переносится в $(y_\lambda|\lambda \in \Lambda)$. Мы можем рассматривать следующие переносы:

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda|\lambda \in \Lambda),$$

причем перенос осуществляется по основной цепи,

$$(x_\nu|\nu \in N_\lambda) \mapsto_{x_\lambda, y_\lambda} (y_\nu|\nu \in N_\lambda),$$

причем перенос осуществляется по неизвестным нам цепям, зависящим от $\lambda \in \Lambda$

$$(x_\nu | \nu \in N_\lambda) \mapsto_{x_\lambda, y_\lambda} (y'_\nu | \nu \in N_\xi),$$

причем перенос осуществляется не по основной цепи, а по цепям зависящим от $\lambda \in \Lambda$, но близким к основной в следующем смысле.

Основная цепь состоит из точек

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y,$$

причем каждая пара $x_{i-1},\ x_i$ соседних точек этой цепи содержится в некотором множестве X_{ξ_i}, $\xi_i \in \Xi$. Мы фиксируем систему X_{ξ_i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ и любую цепь

$$x' = x'_0, x'_1, \ldots, x'_n = y',$$

для которой

$$x'_0 \in X_{\xi_0},\ x'_1 \in X_{\xi_0}, x'_1 \in X_{\xi_1}, \ldots,\ x'_n \in X_{\xi_n}$$

будем называть близкой к основной. Заметим при этом, что все направленные системы фигурирующие в наших рассуждениях можно заменить направленными системами, состоящими из точек фиксированной нами системы множеств X_{ξ_i}, $i = 0, 1, \ldots, n$.

$$(x_\mu | \mu \in M) \mapsto_{x,y} (y'_\mu | \mu \in M),$$

причем перенос осуществляется по основной цепи.

К сожалению, не видно как эти переносы обеспечивают выполнение аксиомы композиции сходимостей, однако положение меняется, если мы добавим еще одно условие, а именно условие независимости переноса от цепи. Это условие носит глобальный характер, так как оно имеет в виду свойство системы $((X_\xi, \beta_\xi) | \xi \in \Xi$ в целом. Его можно сформулировать следующим образом.

Если

$$(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,x} (x'_\lambda | \lambda \in \Lambda),$$
$$(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y_\lambda | \lambda \in \Lambda),$$
$$(x'_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{x,y} (y'_\lambda | \lambda \in \Lambda),$$

причем последние два переноса могут осуществляться по разным цепям, то

$$(y_\lambda | \lambda \in \Lambda) \mapsto_{y,y} (y'_\lambda | \lambda \in \Lambda).$$

При этом дополнительном условии мы будем иметь переносы

$$(x_\mu|\mu \in M) \mapsto_{x,y} (y'_\mu|\mu \in M),$$
$$(y'_\mu|\mu \in M) \mapsto_{y,y} (y_\mu|\mu \in M),$$

и, следовательно, в силу транзитивности β,

$$(x_\mu|\mu \in M) \mapsto_{x,y} (y_\mu|\mu \in M).$$

то есть

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

По самому построению, мы получаем транзитивную битопологическую структуру β, более того, в силу полной транзитивности всех (X_ξ, β_ξ) структура β также будет вполне транзитивной. Осталось доказать, что построенная нами битопологическая структура β индуцирует на каждом множестве X_ξ исходную битопологическую структуру β_ξ, но это следует непосредственно из дополнительного условия.

§2. Локально разложимые битопологические пространства

1. Локальная разложимость. Битопологическое пространство (X, β) называется *локально разложимым*, если сходимость направленных систем точек в $(X \times X, \beta)$ обладает следующим свойством:

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff \begin{cases} ((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \\ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \end{cases}.$$

В этом случае будем называть локально разложимой и битопологическую структуру β. Схема этого условия локальной разложимости изображена на рис. 8.

Любое разложимое битопологическое пространство является и локально разложимым, так как

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y, \end{cases}$$

а, с другой стороны,

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) \iff (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x$$
$$((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1 \times \tau_2} (x, y) \iff (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} y.$$

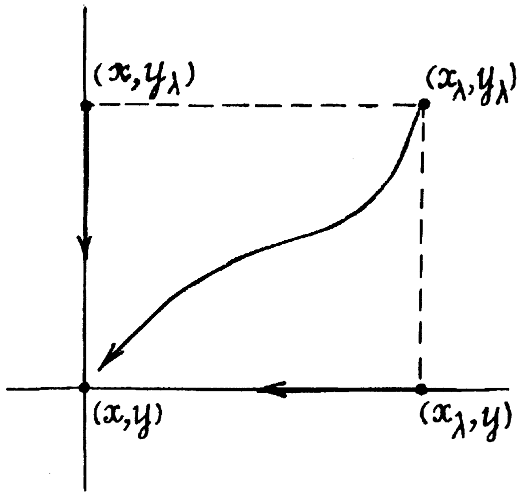

Рис. 8.

Таким образом для локально разложимого пространства, как и для разложимого, сходимости направленных систем точек

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y)$$

в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ для произвольно фиксированной точки (x, y) разлагаются в сходимости к этой точке направленных систем

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y), \ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x, y)$$

по горизонтальному множеству $X \times \{y\}$ и вертикальному множеству $\{x\} \times X$, соответственно. Разница состоит в том, что для локально разложиых пространств эти сходимости могут существенно зависеть от точки (x, y).

Любая локально разложимая битопологическая структура β однозначно определена топологическими структурами $\beta(\ , y)$ и $\beta(x,\ )$, которые β индуцирует на горизонтальных множествах $X \times \{y\}$ и на вертикальных множествах $\{x\} \times X$. Система

$$(\beta(\ , y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$$

всех таких топологических структур (*следов* β на горизонтальных и вертикальных в $X \times X$ множествах) может совпадать, вообще говоря, для различных битопологических структур, но системы следов не совпадающих локально разложимых структур различны.

2. Критерий локальной разложимости. Понятие локальной разложимости битопологического пространства (X, β) можно сформулировать в терминах *прямоугольных окрестностей* точек топологического пространства $(X \times X, \beta)$.

Теорема (локальной разложимости). *Битопологическое пространство (X, β) локально разложимо тогда и только тогда, когда каждая точка топологического пространства $(X \times X, \beta)$ имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств.*

Доказательство. Пусть β является локально разложимой битопологической структурой. Рассмотрим произвольную точку $(x, y) \in X \times X$, ее окрестности $U \times \{y\}$ и $\{x\} \times V$ в подпространствах на $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$ топологического пространства $(X \times X, \beta)$, соответственно, и прямоугольное множество $U \times V$.

Пусть
$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$
тогда, в силу локальной разложимости,
$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$
$$((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

Но тогда найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $(x_\lambda, y) \in U \times \{y\}$, $(x, y_\lambda) \in \{x\} \times V$, а потому $(x_\lambda, y_\lambda) \in U \times V$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$. Тем самым доказано, что $U \times V$ является окрестностью точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$.

Докажем теперь, что совокупность всех таких окрестностей точки (x, y) является базой всех окрестностей этой точки в $(X \times X, \beta)$. Рассмотрим в качестве Λ множество $U \times V$, упорядоченное по включению. Предположим,что существует окрестность W точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$, для которой $U \times V \in \Lambda \implies (U \times V) \setminus W \neq \emptyset$. В этом случае для каждого $U \times V = \lambda \in \Lambda$ найдется точка $(x_\lambda, y_\lambda) \in (U \times V) \setminus W$ и можно рассмотреть направленную систему $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ точек в $(X \times X, \beta)$. Система

$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ не сходится к точке (x, y), так как окрестность W этой точки вообще не содержит точек рассматриваемой здесь системы.

С другой стороны, так как точки (x_λ, y) и (x, y_λ) выбирались в окрестностях $U \times \{y\}$ и $\{x\} \times V$ соответствующих подпространств на множествах $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$, то имеют место сходимости

$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$
$$((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

Но тогда, в силу локальной разложимости β, должна будет иметь место и сходимость

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y),$$

что противоречит нашему предположению. Тем самым доказано, что система $(U \times V)$ образует базу окрестностей точки (x, y) в пространстве $(X \times X, \beta)$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть прямоугольные окрестности $U \times V$ каждой точки в $(X \times X, \beta)$ образуют базу ее окрестностей. Нетрудно заметить, прежде всего, что является окрестностью каждое прямоугольное множество $U \times V$, для которого $U \times \{y\}$ и $\{x\} \times V$ будут окрестностями точки (x, y) в подпространствах топологического пространства $(X \times X, \beta)$ на множествах $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times X$ (горизонтальном и вертикальном множествах).

Действительно, найдется $W \in \beta$ такое, что $W \cap (X \times \{y\}) \subset U$ и $W \cap (\{x\} \times X) \subset V$. Отсюда не следует, конечно, что $W \subset U \times V$, но по нашему предположению найдется окрестность $U_1 \times V_1$ точки (x, y), содержащаяся в W. Так как $U_1 \subset U$ и $V_1 \subset V$, то $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ и, следовательно $U \times V$ является окрестностью точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$.

Пусть, теперь, $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ – произвольная направленная система точек в $X \times X$ и $U \times V$ – произвольная прямоугольная окрестность точки (x, y) в $(X \times X, \beta)$. Тогда

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y) \iff (x_\lambda, y_\lambda) \in U \times V|\lambda \geqslant \lambda_0(U, V) \iff$$
$$(x_\lambda, y) \in U \times \{y\}, (x, y_\lambda) \in \{x\} \times V|\lambda \geqslant \lambda_0(U, V) \iff$$
$$((x_\lambda, y)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y), \ ((x, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x, y).$$

Тем самым доказано,что β – локально разложимая битопологическая структура на X.

3. Открытые прямоугольные окрестности. Прямоугольные окрестности, фигурирующие в альтернативном определении локальной разложимости, *нельзя заменить, в общем случае, на прямоугольные открытые множества*, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X=[0,1]$ – единичный отрезок, β – топологическая структура на единичном квадрате $X\times X$, состоящая из всех открытых множеств G единичного квадрата, удовлетворяющих следующему условию:

$$(*)\begin{cases}(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})\notin G \implies (\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})\notin G\\ (\frac{1}{n},\frac{1}{n+2})\notin G \implies (\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2})\notin G.\end{cases}$$

Докажем, прежде всего, что каждая точка (x,y) топологического пространства $(X\times X,\beta)$ имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств, то есть (X,β) является локально разложимым битопологическим пространством.

В обычной топологии единичного квадрата любое открытое множество, содержащее точку $(0,0)$, содержит некоторое множество $G=[0,\epsilon)\times[0,\epsilon)$. Существует только конечное число точек вида $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})$ и точек вида $(\frac{1}{n},\frac{1}{n+2})$, не принадлежащих G. Удалив из G все точки вида $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})$ и вида $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2})$ для соответствующих n (на самом деле будут удалены только две точки) мы получим открытое в обычной топологии единичного квадрата множество, удовлетворяющее условию $(*)$, то есть β-открытое множество. Таким образом множество $[0,\epsilon)\times[0,\epsilon)$, будет прямоугольной окрестностью точки $(0,0)$ в $(X\times X,\beta)$. Это значит, что точка $(0,0)$ имеет в $(X\times X,\beta)$ базу окрестностей, состоящую из прямоугольных множеств. Каждая точка вида $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})$ будет иметь прямоугольную окрестность, состоящую из двух сколь угодно малых квадратов с центрами в точках $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})$ и $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})$. Такие пряоугольные множества образуют базу окрестностей точки $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})$, так как любое открытое в $(X\times X,\beta)$, содержащее точку $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})$ содержит, в силу условия $(*)$ и точку $(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})$. Аналогичная ситуация имеет место и для точек вида $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2})$. Все остальные точки топологического пространства $(X\times X,\beta)$ будут иметь базы окрестностей, состоящие из сколь угодно малыхъ прямоугольных множеств (квадратов с центрами в этих точках).

Тем самым доказано, что (X, β) является локально разложимым битопологическим пространством. Докажем теперь, что точка $(0,0)$, имея сколь угодно малые прямоугольные окрестности, не иеет сколь угодно малых открытых прямоугольных окрестностей в $(X \times X, \beta)$.

Действительно, пусть $G = A \times B$ – открытая окрестность точки $(0,0)$ в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$. При этом можно считать,что $(1,1) \notin G$. Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ множество $[0,\epsilon) \times [0,\epsilon)$ содержится в G. Пусть $\frac{1}{n+1} < \epsilon \leqslant \frac{1}{n}$ и потому имеет место включение $\{\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\} \subset A \cap B$. Отсюда следует,что точки $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2})$ и $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$ принадлежат G. Но тогда,в силу условия $(*)$, и точки $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+2})$, $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ принадлежат G, а потому имеет место включение $\{\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\} \subset A \cap B$. Повторяя это рассуждение достаточно много раз мы придем в конечном счете к влючению $\{\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}, \ldots, 1\} \subset A \cap B$. Но тогда $(1,1) \in G$, что противоречит принятому выше условию. Тем самым доказано, что точка $(0,0)$ не имеет базу окрестностей, состоящую из прямоугольных открытых множеств.

4. Следы битопологической структуры. Любая локально разложимая битопологическая структура β, определенная на множестве X, однозначно восстанавливается по своей системе следов $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ ) | x \in X,\ y \in X)$ на всех горизонтальных и на всех вертикальных в $(X \times X, \beta)$ множествах. Иногда существуют, кроме того и другие битопологические структуры на X (не локально разложимые) с той же системой следов. С другой стороны, если мы определим произвольно какие-то топологические структуры на всех горизонтальных и на всех вертикальных множествах, то может случиться так, что битопологической структуры с такой системой следов вообще нет или же она есть, но нет локально разложимой. Следующие примеры показывают, что все эти случаи возможны.

Пример 1. Пусть $X = \{0,1\}, \tau(0,\ )$ и $\tau(1,\ )$ тривиальны, $\tau(\ ,0)$ и $\tau(\ ,1)$ содержат кроме тривиальных множеств $\emptyset$ и X только множества $\{(0,0)\}$ и $\{(1,1)\}$, соответственно.

Допустим, что битопологическая структура β с такой системой следов существует. Тогда должно существовать такое множество $G \in \beta$, что $G \cap (X \times \{0\}) = \{(0,0)\}$, так как $\tau(\ ,0)$ содержит множество $\{(0,0)\}$. Но в этом случае и точка $(0,1)$ принадлежит G, так как топологическая структура $\tau(0, \ )$ тривиальна, и точка $(1,1)$ принадлежит G, так как множество $\{(0,1)\} \notin \tau(\ ,1)$, и точка $(1,0)$ принадлежит G, так как топологическая структура $\tau(1, \ )$ тривиальна. Таким образом $G = X \times X$, что противоречит выбору G. Тем самым доказано, что битопологическая структура с указанной системой следов не существует.

Пример 2. Пусть $X = \{0,1\}$, β – битопологическая структура на X, состоящая из $\emptyset$, $X \times X$, $\{(1,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$ (рис. 9).

На каждом горизонтальном и на каждом вертикальном в $X \times X$ множестве структура β индуцирует дискретную топологическую структуру, хотя сама она, как топологическая структура на $X \times X$, не дискретна. С другой стороны, ту же систему следов определяет и дискретная на $X \times X$ топологическая структура, являющаяся локально разложимой битопологической структурой.

Пример 3. Пусть $X = \{0,1\}$, β – битопологическая структура на X, состоящая из множеств $\emptyset$, $X \times X$, $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ (рис. 10).

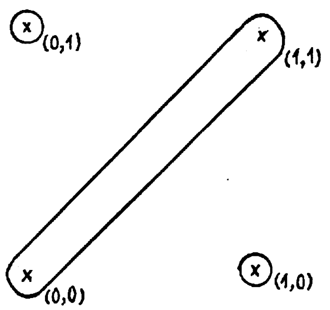

Рис. 9

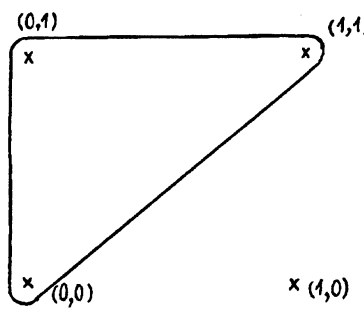

Рис. 10.

Эта битопологическая структура не является локально разложимой, так как $X \times X$ – единственная прямоугольная окрестность точки $(0,0)$, а она не содержится в окрестности $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ этой точки. Другой битопологической структуры β' на $X \times X$, имеющей одинаковую с β систему следов, нет.

Действительно, если $G \in \beta'$ и $G \cap (\{0\} \times X) = \{(0,0)\}$, то и точка $(1,0)$ принадлежит G, так как $\beta(\ ,0)$–тривиальная топологическая структура, и точка $(1,1)$ принадлежит G, так как $\beta(1,\ )$–тривиальная топологическая структура, следовательно $G = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$. Аналогично рассматриваются случаи $G \cap (\{1\} \times X) = \{(1,0),(1,1)\}$, $G \cap (X \times \{0\}) = \{(0,0),(1,0)\}$ и $G \cap (X \times \{1\}) = \{(1,1)\}$. В каждом из эти случаев доказывается, что $G = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ или же $G = X \times X$. Тем самым доказано, что существует единственная битопологическая структура с рассмотренной в этом примере системой следов, причем эта структура не локально разложима.

Пример 4. Пусть $X = \{0,1\}, \beta$ – битопологическая структура, являющаяся тривиальной топологической структурой на $X \times X$. Эта структура локально разложима, а другой битопологической структуры с той же системой следов нет.

5. Непрерывность системы следов. Будем говорить, что система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ *вертикально непрерывна*, если из сходимостей

$$\begin{gathered}((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y_\xi)} (x_\xi, y_\xi),\\ ((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x,y),\\ ((x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x,y),\end{gathered}$$

следует сходимость

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x,y),$$

где M – направленное упорядоченное множество, полученное из упорядоченного множества Ξ и всех $\Lambda_\xi (\xi \in \Xi)$. Элементами этого множества M являются пары (ξ, η), где $\eta : \Xi \longrightarrow \Lambda = \cup \Lambda_\xi | \xi \in \Xi$, причем $\eta(\xi) \in \Lambda_\xi$. Полагают $\eta < \eta'$, если существует такое $\xi_0 \in \Xi$, что $\eta(\xi) = \eta'(\xi)$ для $\xi < \xi_0$ и $\eta(\xi_0) < \eta'(\xi_0), (\xi, \eta) < (\xi', \eta')$, если $\xi < \xi'$ или же $\xi = \xi'$ но $\eta < \eta'$.

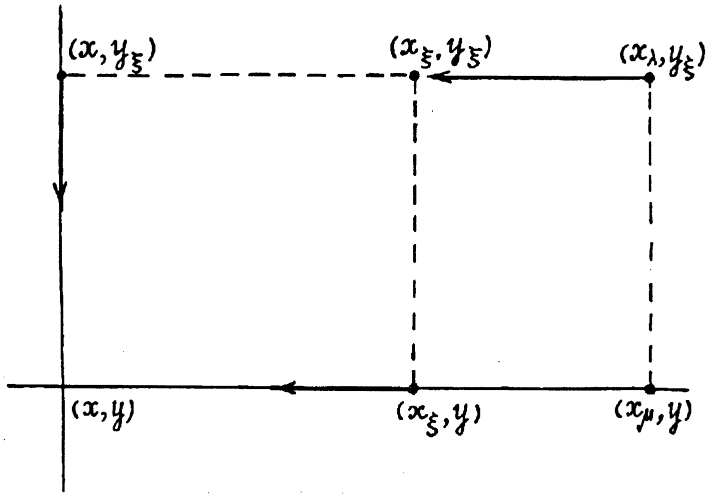

Рис. 11.

Это условие можно представить следующей схемой (рис. 11).

Аналогично формулируется условие *горизонтальной непрерывности* системы $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$. Будем говорить, что система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ *непрерывна*, если она и вертикально и горизонтально непрерывна.

Теорема. *Пусть $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ – система топологических структур, заданных на всех горизонтальных и вертикальных в $X \times X$ множествах. Эта система (однозначно) определяет соответствующую локально разложимую структуру на X тогда и только тогда, когда она непрерывна.*

Доказательство. Предполагая существование локально разложимой структуры β, согласованной с системой $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in$

$X, y \in X)$, докажем непрерывность этой системы. Пусть

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y_\xi)} (x_\xi, y_\xi), \tag{1}$$

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x, y), \tag{2}$$

$$(x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y). \tag{3}$$

Тогда, в силу локальной разложимости β из (2) и (3) следует

$$((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta} (x, y). \tag{4}$$

Из (1) и (4) следует, в силу известного свойства сходимости,

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta} (x, y),$$

где $\mu = (\xi, \eta)$, и потому, в силу локальной разложимости,

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),$$

что доказывает вертикальную непрерывность системы $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$.

Аналогично доказывается горизонтальная непрерывность этой системы. Таким образом система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ непрерывна.

Предположим теперь, что система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X, y \in X)$ непрерывна. Введем на $X \times X$ сходимость, положив

$$((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y),$$

тогда и только тогда, когда

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y) \quad (x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y).$$

Такая сходимость будет определять некоторую топологическую структуру на $X \times X$, если для нее выполняются все аксиомы сходимости. Единственным более или менее нетривиальным рассуждением является здесь проверка выполнения аксиомы сходимости композиции сходящихся направленных систем.

Пусть

$$((x_\xi, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y) \tag{5}$$

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow (x_\xi, y_\xi), \tag{6}$$

для каждого $\xi \in \Xi$. Рассмотрим направленную систему $((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M)$, где $x_\mu = x_\lambda$, для $\mu = (\xi, \eta)$, $\lambda = \eta(\xi)$. По определению сходимости в $X \times X$ из (6) следует

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow (x_\xi, y_\xi), \tag{7}$$

$$((x_\xi, y_\lambda)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x_\xi, y_\xi) \tag{8}$$

и в силу (5)

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y), \tag{9}$$

$$((x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow (x, y). \tag{10}$$

Из (7), (9), (10) в силу вертикальной непрерывности получаем

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow (x, y),$$

аналогично, пользуясь горизонтальной непрерывностью, получаем

$$((x, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow (x, y)$$

и, наконец, в соответствии с определением сходимости в $X \times X$, имеем

$$((x_\mu, y_\mu)|\mu \in M) \longrightarrow (x, y).$$

Теорема доказана.

6. Критерий непрерывности системы следов. В предыдущем пункте был описан метод построения локально разложимой битопологической структуры β на X по заданной системе

$$(\beta(\ \ , y), \beta(x, \ \ )|x \in X,\ y \in X)$$

ее следов, основанный на сходимости направленных систем точек. Рассмотрим теперь другой подход, основанный не на сходимостях, а на окрестностях точек.

Пусть на X определена какая-то непрерывная система следов локально разложимой битопологической структуры β, которую предстоит описать и терминах окрестностей точек. Для каждой точки $(x, y) \in X \times X$ определена система $(U \times V|x \in U \in \beta(\ \ , y),\ y \in V \in \beta(x, \ \ ))$ прямоугольных множеств. Эта система образует базу окрестностей точки (x, y) в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$. Действительно, любая локально разложимая битопологическая структура имеет, как известно, базу прямоугольных окрестностей точек. Но если $A \times B$ является прямоугольной окрестностью некоторой точки (x, y), то A будет окрестностью точки x в топологическом пространстве $(X, \beta(\ ,y))$, а B будет окрестностью точки y в топологическом пространстве $(X, \beta(x,\ ))$ – это следует непосредственно из сходимостных условий локальной разложимости. С другой стороны, условие непрерывности рассматриваемой системы следов может быть сформулировано на языке окрестностей следующим образом:

Система $(\beta(\ ,y), \beta(x,\ )|x \in X,\ y \in X)$ топологических структур на всех горизонтальных и вертикальных в $X \times X$ множествах непрерывна тогда и только тогда, когда для каждых $x \in U \in \beta(\ ,y),\ y \in V \in \beta(x,\ )$ найдутся такие $U', V', x \in U' \in \beta(\ ,y), y \in V' \in \beta(x,\ ))$, что $U \in \beta(\ ,y'),\ V \in \beta(x',\ )$ для всех $x' \in U',\ y' \in V'$. Это условие непосредственно следует из соответствующей аксиомы для окрестностей точек топологического пространства и условия локальной разложимости в терминах окрестностей. Действительно, пусть $x \in U \in \beta(\ ,y),\ y \in V \in \beta(x,\ )$, тогда множество $U \times V$ является окрестностью точки (x, y) в (X, β). Из соответствующей аксиомы для окрестностей следует существование такой окрестности G точки (x, y), что $U \times V$ является окрестностью каждой точки (x', y') из G. С другой стороны, так как прямоугольные окрестности образуют базу окрестностей в локально разложимом битопологическом пространстве, найдется окрестность $U' \times V'$ точки(x, y), содержащаяся в G, поэтому $U \in \beta(\ ,y'),\ V \in \beta(x',\ )$ для всех $x' \in U',\ y' \in V'$.

7. Структуры с одинаковой системой следов. Пусть $(\tau(\ ,y), \tau(x,\ )|x \in X, y \in X)$ произвольно фиксированная система топологических структур на всех горизонтальных и вертикальных в $X \times X$ множествах. Рассмотрим множество всех битопологических структур на X, для которых эта система является системой следов. Это множество может оказаться и пустым, как показывает пример 1 пункта 4. Пусть это множество не пусто, тогда его можно упорядочить по включению. Нетрудно заметить, что *наибольшая из таких структур всегда существует.* Эта структура состоит из всех множеств $G \subset X \times X$, удовлетворяющих условию

$$G \cap (X \times \{y\}) \in \tau(\ ,y),\ G \cap (\{x\} \times X) \in \tau(x,\ )$$

для всех $x \in X,\ y \in X$. С другой стороны, наименьшей среди таких структур может и не существовать, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$, топологические структуры $\tau(\ ,y)$, $\tau(x,\ )$ на всех горизонтальных и вертикальных в $\mathbb{R}^2$ множествах дискретны, β_1 имеет базу, состоящую из множеств точек прямых $y - x = b$, $b \in \mathbb{R}$, β_2 имеет базу, состоящую множеств точек прямых $y + x = b$, $b \in \mathcal{R}$. Следы этих битопологических структур дискретны. В то же время $\beta_1 \cap \beta_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ имеет совсем другие следы (тривиальные) и, таким образом, среди всех битопологических структур на $\mathbb{R}$ с дискретными следами нет наименьшей.

§3. Локальные битопологические пространства

1. Локализация. Диагональ $\Delta \subset X \times X$ играет заметную роль в теории битопологических пространств. Это объясняется, прежде всего, тем, что среди всех вложений X в $X \times X$ естественно выделяется вложение $j : X \longrightarrow X \times X$, $j(x) = (x,x)$, $j(X) = \Delta$. Это естественно определенное вложение позволяет ввести каноническое соответствие $\beta \mapsto \tau$, сопоставляющее каждой битопологической структуре β на X, то есть топологической структуре на $X \times X$, топологическую структуру $\beta|X = j^{-1}(\beta) = \{j^{-1}(G)|G \in \beta\}$ на X. Отображение j является каноническим гомеоморфизмом топологического пространства $(X, \beta|X)$ на топологическое пространство$(\Delta, \beta|\Delta)$. С диагональю связан ряд битопологических понятий. Вот некоторые из такого рода понятий.

Битопологическое пространство (X, β) называется Δ-*нормальным*, если диагональ Δ имеет замкнутый базис окрестностей в $(X \times X, \beta)$.

Битопологическое пространство (X, β) называется Δ-*делимым*, если произвольная окрестность U диагонали Δ в $(X \times X, \beta)$ содержит окрестность диагонали V такую, что $V^2 \subset U$, иначе говоря, если совокупность всех окрестностей диагонали Δ в $(X \times X, \beta)$ образует квазиравномерную структуру.

Битопологическое пространство (X, β) называется Δ-*транзитивным*, если произвольная окрестность U диагонали Δ в $(X \times X, \beta)$ содержит окрестность диагонали V такую, что $V^2 = V$.

Битопологическое пространство (X, β) называется *локально транзитивным*, если из сходимостей

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,x),$$

и

$$((y_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x,x),$$

следует сходимость

$$((x_\lambda, z_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \mapsto_\beta (x, x).$$

Все эти понятия так или иначе связаны с диагональю. С диагональю связано и понятие локального битопологического пространства.

Говорят, что битопологическое пространство (X, β) *локально*, если $G \cap \Delta = \emptyset \implies G \in \beta$. Локальной называют в этом случае и битопологическую структуру β. Нетрудно представить, что *локальная битопологическая структура однозначно определяется сходимостями к точкам диагонали.* Любую битопологическую структуру можно локализовать, то есть оставить только сходимости к точкам диагонали и тривиальные сходимости.

Пусть β – произвольная битопологическая структура. *Локализацией* β называют битопологическую структуру $\operatorname{loc}\beta = \beta \vee P((X \times X) \setminus \Delta)$ – наименьшую топологическую структуру на $X \times X$, содержащую β и $P((X \times X) \setminus \Delta) = \{G | G \cap \Delta = \emptyset\}$. Процедуру перехода от β к $\operatorname{loc}\beta$ будем называть также *локализацией* β.

Так как при локализации к β присоединяются только множества, не содержащие точек диагонали, то совокупность окрестностей любой точки диагонали не меняетсям, в то время как любое множество $G \subset X \times X$, содержащее какую-нибудь точку вне диагонали, становится ее окрестностью. Отсюда следует, как было отмечено выше, что при локализации все сходимости к точкам диагонали сохраняются, а из сходимостей к точкам вне диагонали остаются только тривиальные (сходимости стационарных направленных систем точек).

Нетрудно заметить также, что *любое локальное битопологическое пространство* Δ*-нормально*. Каждая окрестность диагонали является в этом случае замкнутым множеством.

2. Дистализация. В некоторых случаях нас могут интересовать не сходимости к точкам диагонали а, наоборот, сходимости к точкам вне диагонали.

Будем говорить, что битопологическое пространство (X, β) *дистально*, если $G \subset \Delta \implies G \in \beta$. Битопологическую структуру β будем называть в этом случае дистальной, Нетрудно представить, что дистальная битопологическая структура однозначно определяется сходимостями к точкам вне диагонали. Любую битопологическую структуру можно дистализовать, то есть оставить только сходимости к точкам вне диагонали и тривиальные сходимости.

Пусть β – произвольная битопологическая структура. *Дистализацией* β называют битопологическую структуру $\operatorname{dist}\beta = \beta \vee P(\Delta)$ – наименьшую топологическую структуру на $X \times X$, содержащую β и $P(\Delta)$. Процедуру перехода от β к $\operatorname{dist}\beta$ будем называть также *дистализацией.*

Так как при дистализации к β присоединяются только множества, содержащиеся в диагонали, то совокупность окрестностей любой точки вне диагонали не меняется, в то время как любое множество, содержащее какую-нибудь точку диагонали становится ее окрестностью. Отсюда следует, что при дистализации все сходимости к точкам вне диагонали сохраняются, а из сходимостей к точкам диагонали остаются только тривиальные.

3. Локальная и дистальная части. Структуры $\operatorname{loc}\beta$ и $\operatorname{dist}\beta$ дополняют друг друга, давая вместе полную информацию о битопологической структуре β, так как первая из этих структур дает полную информацию о β-сходимости к точкам диагонали, а вторая – о сходимости к точкам вне диагонали, $\beta = \operatorname{loc}\beta \cap \operatorname{dist}\beta$. Структуру $\operatorname{loc}\beta$ будем называть *локальной частью* структуры β, структуру $\operatorname{dist}\beta$ – ее *дистальной частью.*

Возникает следующий естественный вопрос. Если локальная битопологическая структура β_1 и дистальная битопологическая структура β_2 заданы произвольно, то существует ли битопологическая структура β, для которой $\operatorname{loc}\beta = \beta_1$, $\operatorname{dist}\beta = \beta_2$. Следующий пример показывает, что это не всегда так.

Пример. Пусть $X = \{0,1\}$, $\beta_1 = \{\emptyset, X \times X, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(0,0), (0,1), (1,1)\}\}$, (рис. 12), $\beta_2 = \{\emptyset, X \times X, \{(0,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,1), (1,0)\}\}$, (рис. 13).

Допустим, что существует битопологическая структура β с указанными локальной и дистальной частями. Рассмотрим множество $G = \{(0,0),(0,1),(1,1)\} \in \beta_1$. Так как $G \in \beta_1$, то либо $G \in \beta$ либо $G \notin \beta$ и образовалось при локализации β присоединением к Δ точки $(0,1)$. Но этот вариант отпадает, так как $\Delta \notin \beta$. Однако случай $G \in \beta$ тоже невозможен, так как он влечет $G \in \beta_2$, что противоречит определению β_2.

4. Нелокальность произведений. *Класс локальных битопологических пространств замкнут относительно перехода к подпро-*

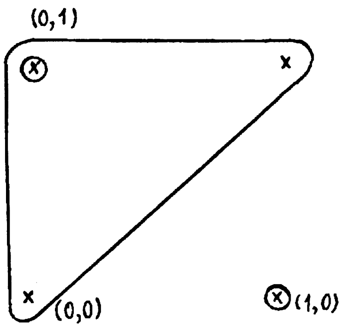

Рис. 12

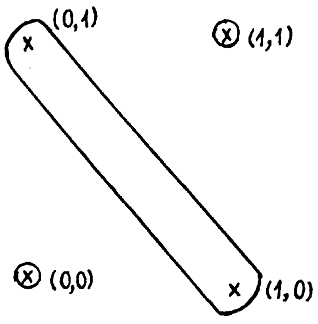

Рис. 13.

странствам, факторпространствам и свободным объединениям, но не замкнут при переходе к произведениям. Действительно, если (X,β) – локальная битопологическая структура, то есть $P((X\times X)\setminus\Delta)\subset\beta$ и $X'\subset X$, то $P((X'\times X')\setminus\Delta')\subset P((X\times X)\setminus\Delta)$ и потому $P((X'\times X')\setminus\Delta')\subset\beta|X'=\beta'$, то есть (X',β') – локальное битопологическое пространство. Если, теперь, (X'',β'') – факторпространство локального битопологического пространства (X,β), порожденного отображением $p: X\longrightarrow X''$, то для любой точки (x'',y''), из $X''\times X''$, не принадлежащей Δ'', ее $(p\times p)$-прообраз не имеет общих точек с Δ и потому является открытым в (X,β) множеством. Отсюда следует, что одноточечное множество $\{(x'',y'')\}$ является открытым в $(X''\times X'',\beta'')$ множеством, а это означает, что (X'',β'') – локальное битопологическое пространство. Аналогично доказывается локальность свободного объединения локальных битопологических пространств. Совсем другая ситуация имеет место для произведений битопологических пространств. Пусть (X_1,β_1) и (X_2,β_2) – неодноточечные локальные битопологические пространства с тривиальными топологическими структурами на диагоналях Δ_1 и Δ_2, (X,β) – произведение этих битопологических пространств, $X=X_1\times X_2$, точка $((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ – произвольная точка из $X\times X$, $(x_1,y_1)\in X_1\times X_1$,

$(x_2, y_2) \in X_2 \times X_2$. Точка $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ принадлежит диагонали $\Delta \subset X \times X$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Поэтому точка $((x_1, x_2), (x_1, y_2))$, $x_2 \neq y_2$ не принадлежит Δ. Тем не менее $\{((x_1, x_2), (x_1, y_2))\} \notin \beta$, так как $\{(x_1, x_1)\} \notin \beta_1$. Тем самым доказано, что (X, β) не является локальным битопологическим пространством.

5. Локальные объединения. Локальные битопологические пространства естественно возникают при построении объединений битопологических структур. Рассматривая объединения битопологических пространств (см. 1.6) мы заметили, что в общем случае они определены неоднозначно. Однако в классе транзитивных битопологических пространств однозначность объединения имела место при соответствующих условиях (см. 1.15). Аналогичная ситуация имеет место и в классе локальных битопологических в смысле Келли пространств.

Пусть X–некоторое множество, $(X_\xi | \xi \in \Xi)$ – какое-нибудь покрытие множества X. Предположим, что на каждом множестве X_ξ определена локальная битопологическая структура X_ξ, $\xi \in \Xi$ и все эти битопологические структуры согласованы так, что для каждых ξ, η из Ξ структуры β_ξ, β_η индуцируют на $X_\xi \cap X_\eta$ одну и ту же битопологическую структуру $\beta_{\xi\eta}$, причем $(X_\xi \times X_\xi) \cap (X_\eta \times X_\eta)$ принадлежит как β_ξ так и β_η. При построении объединения всех этих битопологических структур в классе локальных битопологических пространств мы дополняем систему $(X_\xi \times X_\xi | \xi \in \Xi)$ одноточечными множествами $\{(x, y)\}$, взятыми по всем $x \neq y$ из X. В классе локальных битопологических структур проблема объединения получает более простое и естественное решение, этот класс как бы приспособлен к ней.

§4. Δ-РАВНОМЕРНЫЕ БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Категория $\Delta Unif$. Систему $\mathfrak{U}$ окружений диагонали в $X \times X$ будем называть Δ-*равномерной структурой* на X, если она удовлетворяет следующим условиям:

P1. Если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset U'$, то $U' \in \mathfrak{U}$,

P2. Если $U_1 \in \mathfrak{U}$ и $U_2 \in \mathfrak{U}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$.

Иначе говоря, Δ-равномерной структурой на X называется любой фильтр, состоящий из окружений диагонали $\Delta \subset X \times X$. Пару $(X, \mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$-некоторая Δ-равномерная структура на X, будем называть Δ-*равномерным пространством*.

Отображение $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ двух Δ-равномерных пространств будем называть Δ-*равномерным* или просто равномерным отображением, если $f^{-1}(U') \in \mathfrak{U}$ для любого окружения $U' \in \mathfrak{U}'$.

Категорию всех Δ-равномерных пространств и их равномерных отображений будем обозначать через $\Delta Unif$ или просто через ΔU

2. Вложения ΔU в BT. Определим следующее каноническое вложение категории ΔU в категорию BT. Пусть $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на множестве X. Присоединим к $\mathfrak{U}$ еще один элемент, а именно пустое множество $\emptyset$. Полученная таким образом структура $\beta_0\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$ будет, очевидно, битопологической структурой на X. Будем называть эту структуру Δ-*равномерной битопологической структурой.* Так как различие между $\mathfrak{U}$ и $\beta_0\mathfrak{U}$ несущественно, то мы будем называть $\beta_0\mathfrak{U}$ просто Δ-равномерной структурой, как и $\mathfrak{U}$, а пару $(X, \beta_0\mathfrak{U})$ будем называть Δ-равномерным (битопологическим) пространством. Положим $\beta_0(X, \mathfrak{U}) = (X, \beta_0\mathfrak{U})$.

Если $f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$ – равномерное отображение, то $\beta_0 f : (X, \beta_0\mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \beta_0\mathfrak{U}')$ – бинепрерывное отображение. Тем самым определен ковариантный функтор $\beta_0 : \Delta U \longrightarrow BT$, переводящий категорию ΔU в полную подкатегорию категории BT. Категория ΔU оказывается канонически изоморфной соответствующей подкатегории категории BT, что *позволяет рассматривать теорию Δ-равномерных пространств, как специальную часть общей теории битопологических пространств.*

Возможно и другое вложение категории ΔU в категорию BT, осуществляемое локализацией структуры. Это вложение переводит Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}$ в локальную битопологическую структуру $\beta_1\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \vee P((X \times X) \setminus \Delta)$. Нетрудно доказать, что и здесь Δ-равномерная структура $\mathfrak{U}$ однозначно восстанавливается по битопологической структуре $\beta_1\mathfrak{U}$, а отображение

$$f : (X, \mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \mathfrak{U}')$$

равномерно тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 f : (X, \beta_1\mathfrak{U}) \longrightarrow (X', \beta_1\mathfrak{U}')$$

является бинепрерывным отображением.

3. Проекция BT на ΔU. Рассмотрим произвольное битопологическое пространство (X, β) и структуру $\mathfrak{U}$, состоящую из всех окрестностей диагонали Δ в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$. Эта структура является, очевидно, Δ-равномерной структурой на X. Будем обозначать ее через $\Delta\beta$ и говорить, что β и $\Delta\beta$ *согласованы* (битопологическое пространство (X, β) и Δ-равномерное пространство $(X, \Delta\beta)$ согласованы). Любому бинепрерывному отображению $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ будет сответствовать равномерное отображение $\Delta f : (X, \Delta\beta) \longrightarrow (X', \Delta\beta')$. Тем самым определен ковариантный функтор

$$\Delta : BT \longrightarrow \Delta U.$$

Функтор $\Delta\beta_0$ является, очевидно, тождественным функтором, определенным на категории ΔU. Если мы условимся отождествлять каждую Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}$ с битопологической структурой $\beta_0\mathfrak{U}$, то категория ΔU окажется *ретрактом* категории BT.

Функторы Δ и β_0 являются естественной основой совместного изучения битопологических и Δ-равномерных структур, функтор β_1 является просто локализацией функтора β_0, $\beta_1\mathfrak{U} = \operatorname{loc}(\beta_0\mathfrak{U})$.

4. Δ-расслоение категории BT. На множестве всех битопологических пространств, согласованных с некоторым фиксированым Δ-равномерным пространством, можно ввести отношение порядка, положив $(X, \beta') \leqslant (X, \beta)$, если $i : (X, \beta) \longrightarrow (X, \beta')$-бинепрерывное отображение или, что то же самое, $\beta' \subset \beta$ $(\beta' \leqslant \beta)$. *Для каждого Δ-равномерного пространства это множество непусто и, в общем случае, в нем нет ни наибольшего ни наименьшего элемента.*

Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на множестве X. Тогда $\beta_0\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$ – битопологическая структура на множестве X, (X, β_0)-битопологическое пространство, согласованное с $(X, \mathfrak{U})$. Заметим теперь, что для любой точки $x \in X \times X$ структура $\beta_x = \mathfrak{U} \cup \{G | G \cap \Delta \subset \{x\},\ G \subset X \times X\}$ также является битопологической структурой, согласованной с $\mathfrak{U}$. Пусть β – некоторая битопологическая структура на X, содержащая β_x для всех $x \in X \times X$. Тогда для произвольного множества $G \subset X \times X$ будет иметь место соотношение $G = \cup G_x | x \in G$, где $G_x = (G \setminus \Delta) \cup (G \cap \{x\}) \in \beta_x \subset \beta$ и потому $G \in \beta$. Но это означает, что $\beta = P(X \times X)$ – дискретная топологическая структура на $X \times X$ и $\Delta\beta$ состоит из всех подмножеств множества $X \times X$, содержащих Δ.

Рассмотрим теперь произвольную битопологическую структуру β содержащуюся в $\beta_0\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$ и согласованную с $\mathfrak{U}$. Структура β должна состоять из пустого множества и некоторых, не обязательно всех, множеств входящих в $\mathfrak{U}$. Эти множества будут образовывать базу Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$ в том смысле, что каждое окружение диагонали, входящее в $\mathfrak{U}$, содержит некоторое окружение, входящее в $\Delta\beta$, то есть являющееся окрестностью диагонали в $(X \times X, \beta)$. Пусть β содержит какие-то два множества G_1, G_2, причем $X \times X \neq G_2 \not\subset G_1 \neq \emptyset$. Образуем битопологическую структуру $\beta' = (\beta \wedge G_1) \cup \{X \times X\} \subset \beta$. Так как $G_2 \neq X \times X$ и $G_2 \notin \beta \wedge G_1$, то $G_2 \notin \beta'$ и потому β' строго содержится в β. Отсюда следует то, что минимальная битопологическая структура, согласованная с $\mathfrak{U}$, должна состоять только из трех элементов,а именно $\emptyset, G, X \times X$ и потому G должно быть наименьшим элементом Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$, возможно совпадающим с $X \times X$. Заметим, что, если этот наименьший элемент Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$ совпадает с диагональю, то $\mathfrak{U}$ состоит из всех окружений диагонали, а наименьшая битопологическая структура, согласованная с $\mathfrak{U}$ есть $\{\emptyset, \Delta, X \times X\}$. Это единственный случай, когда среди всех битопологических структур, согласованных с $\mathfrak{U}$ есть и наибольший и наименьший элементы.

5. Частичное вложение $\beta_l : \Delta U \longrightarrow BT$**.** Мы рассмотрели два варианта канонического построения битопологических структур по Δ-равномерным структурам (см. 2). Это операции β_0 и β_1. Они применимы к любой Δ-равномерной структуре $\mathfrak{U}$ и дают $\beta_0(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U} \cup \{\emptyset\}$, $\beta_1(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U} \cup P((X \times X) \setminus \Delta)$, $\beta_1(\mathfrak{U}) = \operatorname{loc} \beta_0(\mathfrak{U})$. Введем теперь еще две операции β_l и β_d, сопоставляющие некоторым (не всем!) Δ-равномерным структурам $\mathfrak{U}$ битопологические структуры $\beta_l(\mathfrak{U})$ и $\beta_d(\mathfrak{U})$ соответственно. Начнем с операции β_l.

Пусть $\mathfrak{U}$ – некоторая Δ-равномерная структура на X. Рассмотрим битопологическую структуру $\beta_1(\mathfrak{U})$ и ее систему следов

$$(\beta_1(\ ,y), \beta_1(x,\ ) | x \in X, y \in X).$$

Если эта система следов окажется непрерывной, то она определяет локально разложимую битопологическую структуру, которую мы будем обозначать через β_l. Таким образом любой Δ-

равномерной структуре $\mathfrak{U}$, для которой система следов структуры $\beta_1(\mathfrak{U})$ непрерывна, мы можем сопоставить локально разложимую битопологическую структуру β_l, являющуюся, к тому же, и локальной битопологической структурой.

Пусть,теперь, β – произвольная локальная локально разложимая битопологическая структура. Ее система следов будет, непрерывной (см. 2.5). Рассмотрим Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U} = \Delta\beta$, состоящую, по определению, из всех окрестностей диагонали в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$ и битопологическую структуру $\beta_1(\Delta\beta)$. Возникает естественный вопрос о совпадении систем следов битопологических структур β и $\beta_1(\Delta\beta)$. Если эти системы следов совпадают, то $\beta = \beta_l(\Delta\beta)$. К сожалению, такое совпадение не имеет, в общем случае, места, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $X = \{0,1\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$, $\beta = (\tau_1 \times \tau_2) \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\}$. Предбазы топологических структур $\tau_1 \times \tau_2$ и β на $X \times X$ изображены на рис. 14 и рис. 15, соответственно.

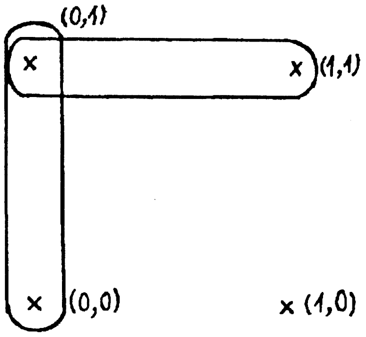

Рис. 14

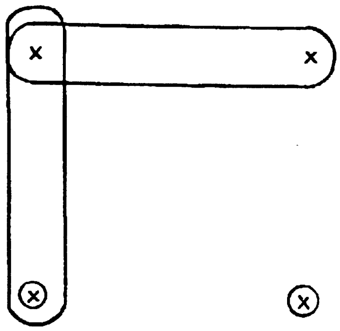

Рис. 15.

Топологическая структура β имеет предбазу, состоящую из прямоугольных множеств, поэтому она локально разложима. Δ-равномерная структура $\mathfrak{U} = \Delta\beta$ состоит из множеств $\{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ и $X \times X$ – рис. 16. Битопологическая структура

$\beta_1(\mathfrak{U})$ получается присоединением к $\mathfrak{U}$ всех подмножеств множества $X \times X$, имеющих пустое пересечение с диагональю, а именно множеств $\emptyset$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(0,1),\ (1,0)\}$. База $\beta_1(\mathfrak{U})$, как топологической структуры на $X \times X$ изображена на рис. 17.

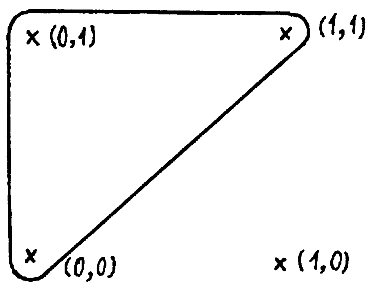

Рис. 16

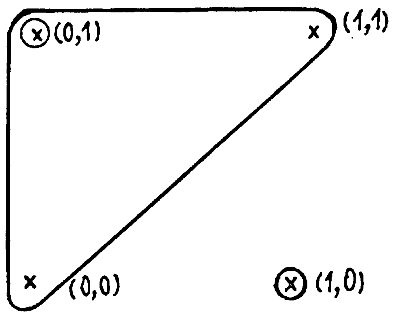

Рис. 17.

Нетрудно теперь заметить, что $\beta(0,\ )$ не совпадает с $\beta_1(0,\ )$, то есть системы следов битопологических структур β и $\beta_1(\Delta\beta)$ не совпадают.

Можно, однако, сформулировать условие, при котором система следов локальной, локально разложимой битопологической структуры β и система следов битопологической структуры $\beta_1(\Delta\beta)$ совпадают и, следовательно, $\beta = \beta_l(\Delta\beta)$.

Битопологическую структуру β на X будем называть Δ-*отделимой*, если для любых несовпадающих точек x, y из X найдется такое окружение диагонали $U \in \Delta\beta$, что $(x,y) \notin U$, иначе говоря, если $\Delta = \cap U | U \in \Delta\beta$.

Теорема. *Для любой* Δ-*отделимой, локальной, локально разложимой битопологической структуры* β, *системы следов* β *и* $\beta_1(\Delta\beta)$ *совпадают и поэтому* $\beta = \beta_l(\Delta\beta)$.

Доказательство. Пусть β – локальная, локально разложимая, Δ-отделимая битопологическая структура на X и $\beta_1 = \beta_1(\Delta\beta)$.

Достаточно доказать, что $\beta(x,\ ) = \beta_1(x,\ )$ для любой точки $x \in X$, так как все условия теоремы симметричны относительно x и y. Более того, достаточно доказать, что $\beta(x,\ ) \subset \beta_1(x,\ )$ для любой точки $x \in X$, так как обратное включение имеет место всегда, по построению битопологической структуры β_1. Нам надо доказать, что из $G \in \beta(x,\ )$ следует $G \in \beta_1(x,\ )$. При этом, в силу локальности β и β_1, достаточно рассмотреть только случай $(x, x) \in G \subset \{x\} \times X$.

Итак, фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$, $\beta(x_0,\ )$-окрестность G_0 точки (x, x_0) и докажем, что G_0 является также и $\beta_1(x_0,\ )$-окрестностью точки (x, x_0). Для этого достаточно доказать существование такого окружения $U \in \beta$ диагонали, что $U \cap (\{x_0\} \times X) \subset G_0$. Действительно, $U \cap (\{x_0\} \times X) \subset G_0$ будет тогда $\beta_1(x_0,\ )$-окрестностью точки (x_0, x_0), а потому и G_0 будет $\beta_1(x_0,\ )$-окрестностью этой точки. Такое окружение диагонали будет существовать, если для каждой точки $x \in X$ найдется окрестность U_x точки (x, x) в топологическом пространстве $(X \times X, \beta)$, для которой $U_x \cap (\{x\} \times X) \subset G_0$. В этом случае можно будет взять в качестве U множество $\cup U_x | x \in X$.

Предположим теперь, что такое окружение $U \in \beta$ диагонали не существует и, следовательно, найдется точка $x_1 \in X$ такая, что $U_{x_1} \cap (\{x_0\} \times X) \not\subset G_0$ для любой окрестности U_{x_1} точки (x_1, x_1) в $(X \times X, \beta)$. Для нас существенно здесь только то, что $U_{x_1} \cap (\{x_0\} \times X) \neq \emptyset$, и потому существует такая направленная система точек $((x_0, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$, что $((x_0, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_\beta (x_1, x_1)$

Тогда, в силу локальной разложимости битопологической структуры β, мы будем иметь сходимость $(x_0, x_1) \longrightarrow_{\beta(\ , x_1)} (x_1, x_1)$ Последнее означает, что $(x_0, x_1) \in U_{x_1}$ для любой окрестности U_{x_1} точки (x_1, x_1) в $(X \times X, \beta)$ в частности $(x_0, x_1) \in U$ для любого окружения $U \in \beta$ диагонали. Но последнее противоречит условию Δ -отделимости битопологической структуры β и потому неверно наше предположение о несуществования соответствующего окружения диагонали.

Замечание. В предыдущем примере битопологическая структура β не была Δ-отделимой, поэтому условие Δ-отделимости в только что доказанной теореме существенно.

6. Достаточное условие Δ-отделимости. Пусть τ_1 и τ_2 – некоторые топологические структуры на множестве X, β – топологическая структура на $X \times X$, база которой состоит из всех одноточечных множеств, не содержащихся в диагонали $\Delta \subset X \times X$ и прямоугольных множеств $G_1 \times G_2$, взятых по всем $G_1 \in \tau_1$ и всем $G_2 \in \tau_2$. Из определения структуры β непосредственно следует, что β – *локальная, локально разложимая битопологическая структура. Если, кроме того, битопологическое пространство* (X, τ_1, τ_2) *является парно* T_0*-пространством, то* β, *будет* Δ*-отделимой битопологической структурой.*

Действительно, пусть $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Тогда для любой точки $(z, z) \in \Delta$ либо $z \neq x$ либо $z \neq y$, так как $x \neq y$. В первом случае, в силу парной T_0-отделимости (X, τ_1, τ_2), найдется $G_1 \in \tau_1$ такое, что $z \in G_1, x \notin G_1$ и поэтому $(x, y) \notin G_1 \times G_2$ для любого $G_2 \in \tau_2$, во втором случае, опять в силу парной T_0-отделимости (X, τ_1, τ_2), найдется $G_2 \in \tau_2$ такое, что $z \in G_2, y \notin G_2$ и поэтому $(x, y) \notin G_1 \times G_2$ для любого $G_1 \in \tau_1$. В обоих случаях найдется открытое в $(X \times X, \beta)$ множество U_z, для которого $(z, z) \in U_z, (x, y) \notin U_z$. Тогда $(x, y) \notin \cup U_z | z \in X = U \in \Delta\beta$, что и доказывает Δ-отделимость битопологического пространства (X, β).

7. Частичное вложение $\beta_d : \Delta U \longrightarrow BT$. Будем говорить, что система $(\beta(\ , y),\ \beta(x,\ )|x \in X,\ y \in X)$ *вертикально вполне непрерывна*, если из сходимостей

$$((x_\lambda, y_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\beta(y_\xi)} (x_\xi, y_\xi),$$
$$((x_\xi, y)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),$$

следует сходимость

$$((x_\mu, y)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta(\ ,y)} (x, y),$$

где M – направленное упорядоченное множество, полученное из упорядоченного множества Ξ и всех $\Lambda_\xi (\xi \in \Xi)$. Элементами этого множества M являются пары (ξ, η), где $\eta : \Xi \longrightarrow \Lambda = \cup \Lambda_\xi | \xi \in \Xi$, причем $\eta(\xi) \in \Lambda_\xi$. Полагают $\eta < \eta'$, если существует такое $\xi_0 \in \Xi$, что $\eta(\xi) = \eta'(\xi)$ для $\xi < \xi_0$ и $\eta(\xi_0) < \eta'(\xi_0)$, $(\xi, \eta) < (\xi', \eta')$, если $\xi = \xi'$ или же $\xi < \xi'$ но $\eta < \eta'$.

Заметим, что условие вертикальной вполне непрерывности отличается от условия вертикальной непрерывности только тем, что оно не требует сходимости

$$((x, y_\xi)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta(x,\ )} (x, y),$$

Таким образом условие вертикальной вполне непрерывности сильнее, чем условие вертикальной непрерывности.

Аналогично определяется условие *горизонтальной вполне непрерывности*. Систему следов будем называть *вполне непрерывной*, если она вполне непрерывна и вертикально и горизонтально.

Рассмотрим произвольную Δ-равномерную структуру $\mathfrak{U}$ с вполне непрерывной системой следов (имеется в виду соответствующая битопологическая структура $\beta_0\mathfrak{U}$). Тогда можно будет определить разложимую битопологическую структуру $\beta_d = \tau_1 \times \tau_2$, положив

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_1} x \iff ((x_\lambda, x)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_1(\;,x)} (x, x).$$

$$(x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_2} x \iff ((x, x_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_1(x,\;)} (x, x).$$

То, что эти условия действительно определяют топологические структуры τ_1 и τ_2, доказывается проверкой выполнения аксиом сходимости. При этом, как обычно, единственно нетривиальной является проверка выполнения аксиомы композиции.

Если

$$(x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\tau_1} x, \quad (x_\lambda|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\tau_1} x_\xi,$$

то

$$((x_\xi, x)|\xi \in \Xi) \longrightarrow_{\beta_1(\;,x)} (x, x), \; ((x_\lambda, x_\xi)|\lambda \in \Lambda_\xi) \longrightarrow_{\beta_1(\;,x_\xi)} (x_\xi, x_\xi)$$

и, в силу вполне непрерывности рассматриваемой системы следов, мы получаем тогда

$$((x_\mu, x)|\mu \in M) \longrightarrow_{\beta(\;,x)} (x, x)$$

и потому

$$(x_\mu|\mu \in M) \longrightarrow_{\tau_1} x.$$

Тем самым доказано выполнение аксиомы композиции для τ_1. Аналогично доказывается выполнение этой аксиомы для τ_2.

Рассмотрим теперь произвольную разложимую битопологическую структуру $\beta = \tau_1 \times \tau_2$. Ее система следов будет очевидно вполне непрерывной. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\beta)$ – согласованная с β, Δ-равномерная структура. Заметим, прежде всего, что $\beta_d(\mathfrak{U}(\beta))$ может и не совпадать с β, как показывает следующий пример.

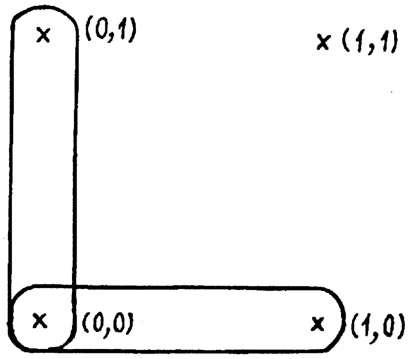

Рис. 18.

Пример. Пусть $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, $\beta = \tau \times \tau$ (рис. 18). Тогда $\mathfrak{U}(\beta) = \{X \times X\}$, $\beta_d = \{\emptyset, X \times X\} \neq \beta$.

С другой стороны, если β – разложимая, Δ-отделимая битопологическая структура, то ее локализация (полученная присоединением к β всех подмножеств множества X, имеющих пустое пересечение с диагональю Δ) является локальной, локально разложимой, Δ-отделимой битопологической структурой β_1. Имеем, очевидно, $\mathfrak{U}(\beta_1) = \mathfrak{U}(\beta)$. В силу теоремы предыдущего пункта, $\beta_1 = \beta_1(\mathfrak{U}(\beta_1)) = \beta_1(\mathfrak{U}(\beta))$ и потому $\beta = \beta_d(\mathfrak{U}(\beta))$. Таким образом справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть β – разложимая, Δ-отделимая битопологическая структура, тогда $\beta = \beta_d(\mathfrak{U}(\beta))$.*

Замечание. В предыдущем примере битопологическая структура β не была Δ-отделимой, поэтому условие Δ-отделимости в только что доказанной теореме существенно.

§5. Расширения битопологических пространств

1. Расширения, слабые расширения. Битопологическое пространство (X', β') называется *расширением* битопологического пространства (X, β), если (X, β) является подпространством битопологического пространства (X', β') и β'-замыкание множества

$X \times X$ равно $X' \times X'$,

$$\beta' - \mathrm{cl}\,(X \times X) = X' \times X'.$$

Битопологическое пространство (X', β') называется *слабым расширением* битопологического пространства (X, β), если (X, β) является подпространством битопологического пространства (X', β') и для каждой точки $x \in X'$ существует такая точка $y \in X'$, что или (x, y) или (y, x) принадлежит β'-$\mathrm{cl}\,(X \times X)$.

Нетрудно заметить, что эти определения являются непосредственными обобщениями соответствующих определений для разложимых битопологических пространств. Заметим также, что в общем случае для слабого расширения прямоугольная оболочка $[\beta'\text{-}\mathrm{cl}\,(X \times X)]$ не обязательно совпадает с $X' \times X'$.

2. Тривиальная конструкция. Следующая конструкция позволяет строить расширения любой мощности произвольно фиксированного битопологического пространства (X, β). Пусть X_0-произвольное множество, не имеющее общих точек с X. Рассмотрим множество $X' = X \cup X_0$ и определим на X' битопологическую структуру $\beta' = \beta \cup \{X' \times X'\}$. Нетрудно доказать, что битопологическое пространство (X', β') является расширением битопологического пространства (X, β).

Действительно, если $(x, y) \notin X \times X$, то единственной окрестностью этой точки в $(X' \times X', \beta')$ является множество $X' \times X'$, имеющее непустое пересечение с $X \times X$.

Нетрудно также превратить это расширение в слабое расширение, добавив к β' еще одно множество, а именно $X_0 \times X_0$.

Заметим, что в построенных расширениях множество X_0 присоединяемых к X точек (нарост расширения) никак не связано с исходным битопологическим пространством, мы присоединяли совершенно произвольное множество. Такая же ситуация возникает и в теории расширений топологических пространств, если на расширения не накладываются дополнительные условия. Чтобы получить содержательную теорию, необходимо наложить на расширения те или иные условия. В теории расширений топологических пространств такими условиями были строгость и точность расширений. В теории расширений битопологических в смысле Келли пространств понятие топологической точности расщепилось на точность и слабую точность (понятие строгости сохранилось в несколько иной форме). В теории произвольных расширений битопологических пространств можно сформулировать разные варианты понятия точности расширения за счет различного понимания битопологической различимости точек нароста, то есть точек множества $X' \setminus X$ из X.

3. Диагональная конструкция. Наиболее простыми являются так называемые диагональные расширения. Будем говорить, что расширение (X', β') битопологического пространства (X, β) является его *диагональным расширением*, если $(\Delta', \beta'|\Delta')$ является расширением топологического пространства $(\Delta, \beta|\Delta)$. Нетрудно заметить, что в классе локальных битопологических пространств существуют только диагональные расширения, причем только слабые расширения.

Пусть (X, β)-произвольное битопологическое пространство и (Δ', τ')-некоторое регулярное расширение топологического пространства $(\Delta, \beta|\Delta)$. Без нарушения общности можно считать, что $\Delta' = \{(x, x)|x \in X'\}$. Кроме того можно также считать, что на множестве $(X \times X) \cup \Delta'$ определена топологическая структура, являющаяся объединением топологических структур β и τ'.

Действительно, точки нароста расширения (Δ', τ') топологического пространства $(\Delta, \beta|\Delta)$ являются открытыми фильтрами в $(\Delta, \beta|\Delta)$. Каждому такому фильтру можно сопоставить открытый фильтр в $(X \times X, \beta)$, заменяя его элементы открытыми в $(X \times X, \beta)$ множествами, пересечение каждого из которых принадлежит исходному фильтру. Таким образом мы можем присоединять к $X \times X$ не открытые фильтры в $(\Delta, \beta|\Delta)$, а взаимно однозначно соответствующие им открытые фильтры в $(X \times X, \beta)$, получая,таким образом, расширение пространства $(X \times X, \beta)$. Отсюда следует, что на множестве $X' \times X'$ существует хоть одна топологическая структура β', индуцирующая на $X \times X$ и на Δ' топологические структуры β и τ', соответственно. Битопологическое пространство (X', β'), как в этом нетрудно убедиться, является диагональным расширением битопологического пространства (X, β). Если при этом (X, β)-локальное битопологическое пространство, то и (X', β')-локальное битопологическое пространство.

Диагональные расширения будем также называть Δ-*расширениями*. Δ-расширения являются частным случаем слабых расширений, определяемых расширениями топологических пространств $(X \times X, \beta)$.

4. Крест конструкция. Пусть (X, β) – произвольное битопологическое пространство, (x, y) – произвольная точка в $X \times X$. Рассмотрим крест $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times X)$ и, соответствующее этому кресту, битопологическое в смысле Келли пространство $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$. Пусть, далее, (X', τ_1', τ_2') – расширение, возможно слабое, пространства $(X, \beta(\ , y), \beta(x,\ ))$. Тогда можно будет рассмотреть крест $(X' \times \{y\}) \cup (\{x\} \times X')$, множества $X' \times X'$. На этом кресте можно ввести топологическую структуру, перенеся ее с креста в $(X', \tau_1' \times \tau_2')$, определенного той же точкой (x, y). Топологическую структуру β' на $X' \times X'$ можно определить, теперь, как минимальную топологическую структуру на $X' \times X'$, индуцирующую заданные топологические структуры на подмножествах $X \times X$ и $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times X)$ множества $X' \times X'$.

5. Рамочная конструкция. Пусть (Y, τ') является каким-то расширением топологического пространства $(X \times X, \beta)$, то есть $(X \times X, \beta)$ – подпространство топологического пространства (Y, τ') и τ'-$\mathrm{cl}\,(X \times X) = Y$. Тогда, для любого множества X' достаточно большой мощности, содержащего X, $X \times X \subset X' \times X'$, найдется вложение $g : Y \longrightarrow X' \times X'$ тождественное на $X \times X$. Пусть $g(Y) = Y'$. Фиксируем это вложение и его образ Y'. Можно тогда считать,что X' нельзя уменьшить при условии, что $Y' \subset X' \times X'$. Перенесем топологическую структуру τ' с Y на Y' посредством отображения g, обозначив ее опять через τ'. Тогда (Y', τ') будет расширением топологического пространства $(X \times X, \beta)$. Если мы теперь зафиксируем некоторую топологическую структуру β' на $X' \times X'$, индуцирующую на Y' топологическую структуру τ', то битопологическое пространство (X', β') будет слабым расширением битопологического пространства (X, β).

Построение такого расширения содержит много элементов произвола. Во-первых, мы рассматриваем произвольное расширение (Y, τ) исходного топологического пространства $(X \times X, \beta)$, затем некоторое вложение g множества Y в множество $X' \times X'$, тождественное на $X \times X$ (выбор самого множества $X' \times X'$ несущественен) и, наконец, мы выбираем какую-нибудь топологическую структуру β' на множестве $X' \times X'$, индуцирующую на Y' топологическую структуру $g(\tau)$. Если мы возьмем в качестве g отображение Y на $X' \times X'$, то получим в конечном счете (не слабое) расширение битопологического пространства (X, β). Представляет интерес описание расширений (слабых расширений) канонически определяемых в терминах исходных битопологических структур. Тривиальным примером расширения такого типа является следующее расширение.

Пусть (X, β) – некоторое битопологическое пространство. Фиксируем какую-нибудь точку $x \in X$, топологическую структуру $\beta(x,\ )$ на множестве $\{x\} \times X$ и некоторую систему Ω открытых в $(\{x\} \times X, \beta(x,\ ))$ фильтров. Как топологическую структуру, так и систему открытых фильтров можно перенести на X и, следовательно, можно рассмотреть Ω-расширение топологического пространства $(X, \beta(x,\ )$ с множеством точек X'. Это расширение можно,в свою очередь, перенести в $X' \times X'$. Тем самым в множестве $X' \times X'$, будут содержаться два множества $X \times X$ и $\{x\} \times X'$, на которых определены топологические структуры. Естественно определяется, как для рассмотренного выше диагонального расширения, топологическая структура на объединении этих множеств и, наконец, вводится топологическая структура β' на $X' \times X'$, $\beta' = \beta \vee \complement((X \times X) \cup (\{x\} \times X'))$.

§6. Категория битопологических пространств и их бинепрерывных отображений

В этом параграфе мы будем исходить из того, что структурно описанные битопологические пространства и их бинепрерывные отображения образуют категорию и, следовательно, мы можем обращаться с ними, как с объектами и, соответственно, морфизмами конкретной категории. Будут даны, в частности, категорные варианты некоторых структурных понятий, отношений и утверждений.

1. Основные подкатегории. Мы уже имели дело с некоторыми подкатегориями категории BT, а именно с категорией KT битопологических в смысле Келли пространств или, в другой терминологии, разложимых битопологических пространств и их бинепрерывных отображений, а также с категорией T топологических пространств и их непрерывных отображений. При этом мы отождествляли (X, τ) с $(X, \tau \times \tau)$ и (X, τ_1, τ_2) с $(X, \tau_1 \times \tau_2)$.

$$T \subset KT \subset BT.$$

Это полные подкатегории категории BT, в том смысле, что любое бинепрерывное отображение (морфизм) объектов подкатегории принадлежит этой подкатегории.

Рассматривались также и другие полные подкатегории категории BT:

ΔU – категория всех Δ-равномерных пространств и их равномерных отображений,

$ldBT$ – категория всех локально разложимых битопологических пространств и их бинепрерывных отображений,

lBT – категория всех локальных битопологических пространств и их бинепрерывных отображений,

$rfBT$ – категория всех рефлексивных битопологических пространств и их бинепрерывных отображений,

sBT – категория всех симметричных битопологических пространств и их бинепрерывных отображений,

$trBT$ – категория всех транзитивных битопологических пространств и их бинепрерывных отображений.

Между этими подкатегориями категории BT имеются соотношения включения, а именно

$$\Delta U \subset rfBT,\ lBT \subset trBT,\ T \subset ldBT,\ T \subset trBT,$$

и некоторые другие

2. Ретракции. Рассмотрим категорию lBT и функтор $\mathrm{loc} : BT \longrightarrow lBT$, сопоставляющий каждому битопологическому пространству его локализацию и сохраняющий бинепрерывные отображения. Локальному битопологическому пространству будет сопоставляться при этом оно само, то есть функтор loc тождественен на рассматриваемой подкатегории. При этом, если $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ – бинепрерывное отображение, то $f : (X, \mathrm{loc}\,\beta) \longrightarrow (X', \mathrm{loc}\,\beta')$ – бинепрерывное отображение. Таким образом *категория lBT является ретрактом категории BT, а функтор loc – ретракция категории BT на категорию lBT.*

В 4.3 рассматривалась ретракция $\Delta : BT \longrightarrow \Delta U$, где категория ΔU рассматривалась, как подкатегория категории BT и, таким образом, категория ΔU также является ретрактом категории BT. Существуют и другие ретракции категории BT на ее подкатегории. Эти ретракции можно строить следующим образом.

Рассмотрим произвольную подкатегорию $\mathcal{C}$ категории BT, для которой $\sup \mathcal{X}$ существует и принадлежит $\mathcal{C}$ для любой упорядоченной совокупности $\mathcal{X}$ объектов категории $\mathcal{C}$. Пусть (X, β) – какое-то битопологическое пространство. Предположим, что в $\mathcal{C}$

существует битопологическое пространство (X, β'), для которого $\beta' \subset \beta$. Тогда мы можем образовать $\sup\{\beta'\}$ взятый по всем таким β'. Если наше предположение оказывается верным для всех (X, β), то мы сможем сопоставить каждому битопологическому пространству (X, β) битопологическое пространство $\underline{\mathcal{P}}(X, \beta)$ из $\mathcal{C}$, положив $\underline{\mathcal{P}}(X, \beta) = (X, \underline{\mathcal{P}}(\beta))$, где $\underline{\mathcal{P}}(\beta) = \sup\{\beta'\}$. Операцию $\underline{\mathcal{P}}$ будем называть нижней $\mathcal{P}$-операцией. Аналогично вводится соответствие $\overline{\mathcal{P}}$ – верхняя $\mathcal{P}$-операция, которую можно построить, если $\inf \mathcal{X}$ существует и принадлежит $\mathcal{C}$ для любой совокупности $\mathcal{X}$ объектов категории $\mathcal{C}$, а для любого битопологического пространства (X, β) существует битопологическое пространство (X, β'), для которого $\beta \subset \beta'$. Именно так строились верхняя симметризация $\overline{\mathrm{sym}}\,\beta$ и нижняя симметризация $\underline{\mathrm{sym}}\,\beta$ для произвольной битопологической структуры β (см. 1.10). Во многих случаях верхняя и нижняя $\mathcal{P}$-операции совпадают, так обстояло дело для операций loc и Δ. Заметим при этом, что верхняя и нижняя $\mathcal{P}$-операции всегда тождественны на объектах категории $\mathcal{C}$. Ретракция будет полностью определена, если нам удастся продолжить $\mathcal{P}$-операцию на произвольные бинепрерывные отображения.

3. Аксиомы ретракции. В общем случае подкатегория $\mathcal{C}$ может и не быть полной подкатегорией категории BT, а расположение $\mathcal{C}$ в BT может оказаться, с той или иной точки зрения, неудачным. В связи с этим желательно выделить специальные свойства расположения $\mathcal{C}$ в BT (аксиомы ретракции). Мы не будем связывать дальнейшие рассуждения именно с категорией BT, а рассмотрим более общую ситуацию, в которой категория $\mathcal{C}$ является ретрактом категории $\mathcal{C}'$. Пусть $\mathcal{P} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ – некоторая ретракция. Введем следующие термины и обозначения.

Пусть A' – объект категории $\mathcal{C}'$ и $A = \mathcal{P}(A')$. Будем говорить тогда, что A' является *детализацией* объекта A (*накрывает* объект A) или же, что A является *схематизацией* объекта A' (*накрывается* объектом A'). Следовало бы говорить об $\mathcal{P}$-детализации и об $\mathcal{P}$-схематизации, но для фиксированной ретракции ее обозначение будем опускать. Класс всех детализаций объекта A будем обозначать через $\mathcal{C}'(A)$. В каждом таком классе можно ввести отношение предпорядка, положив $A'_2 \leqslant A'_1$ тогда и только тогда, когда существует такой морфизм $h' : A'_1 \longrightarrow A'_2$, что $\mathcal{P}(h') = 1_A$ –тождественное отображение A на себя. Аналогичные понятия и обозначения вводятся для морфизмов. Мы можем, теперь, сформулировать требуемые аксиомы ретракции.

1.*Существование точной нижней границы накрывающих объектов.* Для любой совокупности $(A'_\xi|\xi \in \Xi) \subset \mathcal{C}'(A)$ существует точная нижняя граница $\inf A'_\xi|\xi \in \Xi$, принадлежащая к тому же классу $\mathcal{C}'(A)$.

$1'$. *Существование точной верхней границы накрывающих объектов.* Для любой совокупности $(A'_\xi|\xi \in \Xi) \subset \mathcal{C}'(A)$ существует точная верхняя граница $\sup A'_\xi|\xi \in \Xi$, принадлежащая к тому же классу $\mathcal{C}'(A)$.

Замечание. Эти условия двойственны друг другу, то есть они переходят друг в друга при переходе к двойственным категориям, получаемым обращением всех морфизмов.

2. *Существование точной нижней границы левых накрытий.* Если $(A'_\xi|\xi \in \Xi) \subset \mathcal{C}'(A)$, $A' = \inf A'_\xi|\xi \in \Xi$, $u_\xi : A'_\xi \longrightarrow B'$ и $\mathcal{P}(u'_\xi) = u : A \longrightarrow B$ для всех $\xi \in \Xi$, то существует $u' : A' \longrightarrow B'$, для которого $\mathcal{P}(u') = u$.

$2'$. *Существование точной верхней границы правых накрытий.* Если $(A'_\xi|\xi \in \Xi) \subset \mathcal{C}'(A)$, $A' = \sup A'_\xi|\xi \in \Xi$, $u_\xi : B' \longrightarrow A'_\xi$ и $\mathcal{P}(u'_\xi) = u : B \longrightarrow A$ для всех $\xi \in \Xi$, то существует $u' : B' \longrightarrow A'$, для которого $\mathcal{P}(u') = u$.

Эти условия также двойствены друг другу.

3. *Существование левых накрытий.* Если $u : A \longrightarrow B$ в категории $\mathcal{C}$ и $B' \in \mathcal{C}'$, $\mathcal{P}(B') = B$, то существуют в $\mathcal{C}'$ такие u', A', что $u' : A' \longrightarrow B'$, $\mathcal{P}(A') = A$, $\mathcal{P}(u') = u$.

$3'$. *Существование правых накрытий.* Если $u : B \longrightarrow A$ в категории $\mathcal{C}$ и $B' \in \mathcal{C}'$, $\mathcal{P}(B') = B$, то существуют в $\mathcal{C}'$ такие u', A', что $u' : B' \longrightarrow A'$, $\mathcal{P}(A') = A$, $\mathcal{P}(u') = u$.

Эти условия также двойственны друг другу, следующие же условия самодвойственны, то есть двойственны сами себе.

4. *Разложимость накрытий.* Если $u : A \longrightarrow B$, $v : B \longrightarrow C$ в категории $\mathcal{C}$, $w' : A' \longrightarrow C'$ в категории $\mathcal{C}'$, $\mathcal{P}(A') = A$, $\mathcal{P}(C') = C$, $\mathcal{P}(w') = vu$, то существуют такие B', u', v' в категории $\mathcal{C}'$, что $u' : A' \longrightarrow B'$, $v' : B' \longrightarrow C'$, $\mathcal{P}(u') = u$, $\mathcal{P}(v') = v$, $w' = v'u'$.

5. *Единственность накрытий морфизмов.* Если A', B' – объекты категории $\mathcal{C}'$, $\mathcal{P}(A') = A$, $\mathcal{P}(B') = B$, то соответствие $u' \longrightarrow \mathcal{P}(u')$ является взаимно однозначным соответствием между множеством $\mathrm{Hom}(A', B')$ отображений A' в B' и множеством $\mathrm{Hom}(A, B)$ отображений A в B.

Построением соответствующих примеров можно доказать, что все эти аксиомы не зависят друг от друга. При этом, если доказана независимость какой-то аксиомы от остальных, то независимость от остальных двойственной ей аксиомы доказывается аналогично с использованием двойственного примера.

Особое место занимает *условие минимальности* вложения $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$ и двойственное ему условие *максимальности вложения* $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$. Вложение минимально, если $A = \inf A'|A' \in \mathcal{C}'(A)$, вложение максимально, если $A = \sup A'|A' \in \mathcal{C}'(A)$.

4. Инвариантность прямых произведений и свободных объединений для ретрактов. В общей ситуации, когда рассматриваемые категории не конкретны, прямые произведения и свободные объединения также не имеют конкретный характер. Задание, например, прямого произведения каких-то объектов $A_\xi|\xi \in \Xi$ требует не только задания некоторого объекта A, но и задания системы (pr_ξ) – проекций этого объекта на все перемножаемые объекты, $\mathrm{pr}_\xi : A \longrightarrow A_\xi$. Таким образом произведение определяется, как система $(A, \mathrm{pr}_\xi|\xi \in \Xi)$, имеющая следующее свойство: для любой системы $(B,\ f_\xi,\ f_\xi : B \longrightarrow A_\xi)$ существует отображение $f : B \longrightarrow A$ такое, что $f_\xi = \mathrm{pr}_\xi f$. Заметим, при этом, что понятие свободного объединения двойственно понятию прямого произведения, оно получается обращением всех стрелок (морфизмов). Нам достаточно, поэтому, рассмотреть только прямые произведения. Свойство инвариантности прямых произведений для ретрактов состоит из двух частей, а именно:

Если $A' = \prod A'_\xi|\xi \in \Xi$, $A = \mathcal{P}(A')$, $A_\xi = \mathcal{P}(A_\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$, то $A = \prod A_\xi|\xi \in \Xi$. Иначе говоря, ретракция переводит прямые произведения в прямые произведения. С другой стороны, если $A = \prod A_\xi|\xi \in \Xi$ и A'_ξ таковы, что $\mathcal{P}(A'_\xi) = A_\xi$, то $(\prod A_\xi|\xi \in \Xi) \in \mathcal{C}'(A)$. Иначе говоря, произведение детализаций является детализацией произведения.

Теорема (ретракции). *Если выполняются аксиомы* $1'$ *и 3 то ретракция переводит прямые произведения в прямые произведения.*

Теорема (детализации). *Если выполняются аксиомы* $1', 3, 3', 5$, *то существует произведение детализаций являющееся детализацией произведения.*

Замечание. В категории BT нет необходимости говорить о существовании произведения детализаций, так как в ней произведение определено однозначно. Можно просто говорить о том, что произведение детализаций является детализацией произведения.

Доказательство. (теоремы ретракции). Пусть $A' = \prod A'_\xi | \xi \in \Xi$, $A = \mathcal{P}(A')$, $A_\xi = \mathcal{P}(A'_\xi)$ для всех $\xi \in \Xi$. Нам надо доказать, что $A = \prod A_\xi | \xi \in \Xi$.

Пусть $f_\xi : B \longrightarrow A_\xi$ для некоторого $B \in \mathcal{C}$, тогда в силу аксиомы 3 существует для каждого $\xi \in \Xi$ такой объект B'_ξ и такой морфизм $f'_\xi : B'_\xi \longrightarrow A'_\xi$, что $\mathcal{P}(B'_\xi) = B$ и $\mathcal{P}(f'_\xi) = f_\xi$. В силу аксиомы $1'$ существует $B' = \sup B'_\xi | \xi \in \Xi$, причем $\mathcal{P}(B') = B$. Но тогда мы имеем $g'_\xi : B' \longrightarrow A'_\xi$ для $g'_\xi = f'_\xi h'_\xi$, $h'_\xi : B' \longrightarrow B'_\xi$. Так как A' является произведением всех A'_ξ, то существует такое $g' : B' \longrightarrow A'$, что $f'_\xi = \mathrm{pr}'_\xi g'$. Положим $f = \mathcal{P}(g')$, $\mathrm{pr}_\xi = \mathcal{P}(\mathrm{pr}'_\xi)$ тогда $f : B \longrightarrow A_\xi$, $f_\xi = \mathrm{pr}_\xi f$. Тем самым доказано, что $A = \prod A_\xi | \xi \in \Xi$.

Доказательство. (теоремы детализации). Пусть $A = \prod A_\xi | \xi \in \Xi$ и для каждого $\xi \in \Xi$ фиксирован объект A'_ξ являющийся детализацией A_ξ. Надо доказать существование произведения $A' = \prod A'_\xi$, являющегося детализацией A. Так как $A = \prod A_\xi | \xi \in \Xi$, то для всех $\xi \in \Xi$ определены проекции $\mathrm{pr}_\xi : A \longrightarrow A_\xi$. В силу аксиомы 3 будут определены морфизмы $\widetilde{pr}'_\xi : \widetilde{A}'_\xi \longrightarrow A'_\xi$, являющиеся детализациями морфизмов pr_ξ. Теперь, в силу аксиомы $1'$ мы можем рассмотреть $A' = \sup \widetilde{A}'_\xi | \xi \in \Xi$ и проекции $\mathrm{pr}'_\xi : A' \longrightarrow A'_\xi$, где $\mathrm{pr}_\xi = \widetilde{\mathrm{pr}}'_\xi h_\xi$, $h_\xi : A' \longrightarrow \widetilde{A}_\xi$. По самому построению, A' является детализацией A, нам осталось только доказать, что A' с указанными проекциями является произведением $\prod A'_\xi | \xi \in \Xi$. Рассмотрим для этого произвольный объект B' и его отображения $f'_\xi : B' \longrightarrow A'_\xi$, а также их ретракции B, f_ξ. Так как $A = \prod A_\xi | \xi \in \Xi$, то существует такое отображение $f : B \longrightarrow A$, что $f_\xi = f \mathrm{pr}_\xi$. тогда в силу аксиомы $3'$ и аксиомы 5 однозначно определено отображение f', накрывающее f. Из той же аксиомы 5 следует тогда, что $f'_\xi = \mathrm{pr}_\xi f'$. Теорема доказана.

Следствие. *Если $\mathcal{C}$ минимально вложено в $\mathcal{C}'$, то в условиях предыдущей теоремы произведение A объектов $A_\xi | \xi \in \Xi$ в категории $\mathcal{C}$ является также и произведением этих объектов в категории $\mathcal{C}'$.*

Действительно, в силу теоремы детализации, существует в категории $\mathcal{C}'$ произведение $A' = \prod A_\xi | \xi \in \Xi$, являющееся детализацией объекта A. В силу минимальности вложения $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, существует морфизм $h : A' \longrightarrow A$, $\mathcal{P}(h) = 1_A$. Тогда, если даны некоторые B', $f'_\xi : B' \longrightarrow A_\xi$, то существует морфизм $f : B' \longrightarrow A'$, для которого $f'_\xi = \mathrm{pr}_\xi f'$. Но тогда $hf : B' \longrightarrow A$ и $f'_\xi = \mathrm{pr}_\xi hf$. Следствие доказано.

5. Ретракты и аксиомы ретракции. Нам известны различные подкатегории категории BT, большинство из них являются ее ретрактами. Характер расположения этих подкатегорий в категории BT описывается, прежде всего, соответствующими ретракциями и выполнением для них аксиом ретракций. Например при изучении Δ-равномерных структур мы убедились в том, что ретракция $\Delta : BT \longrightarrow \Delta U$ не удовлетворяет аксиоме существования точной верхней границы накрывающих объектов и аксиоме существования точной нижней границы накрывающих объектов, выполнение других аксиом ретракции мы не проверяли. И сейчас мы займемся только проверкой выполнения некоторых аксиом для некоторых ретракций, полная проверка для той или иной подкатегории может быть осуществлена в случае необходимости.

Ретракции $\overline{\mathrm{sym}}$ и $\underline{\mathrm{sym}}$ сопоставляют каждому битопологическому пространству (X, β) симметричные битопологические пространства $(X, \overline{\mathrm{sym}}\,\beta)$ и $(X, \underline{\mathrm{sym}}\,\beta)$, поэтому мы имеем, во всяком случае, две ретракции категории BT на категорию sBT. Эти ретракции обладают разными свойствами. Рассмотрим, например, ретракцию $\underline{\mathrm{sym}}$. Мы докажем, приведя соответствующий пример, что эта ретракция не удовлетворяет аксиоме существования точной верхней границы накрывающих объектов.

Действительно, пусть (X, β_0) – битопологическое пространство на $X = \mathbb{R}$ с тривиальной битопологической структурой $\beta_0 = \{\emptyset, X \times X\}$. Рассмотрим еще битопологическое пространство (X, β) с $\beta = \{\emptyset, U, X \times X\}$, где U – некоторое произвольно фиксированное множество, для которого $U \neq U^{-1}$, $U \cap U^{-1} \neq \emptyset$. Тогда $\underline{\mathrm{sym}}(X, \beta) = (X, \beta_0)$ и $\underline{\mathrm{sym}}(X, \beta^{-1}) = (X, \beta_0)$. Однако $\sup\{\beta, \beta^{-1}\} = \{\emptyset, U, U^{-1}, U \cap U^{-1}, X \times X\} = \beta'$ – симметричная битопологическая структура, причем $\underline{\mathrm{sym}}(X, \beta') \neq (X, \beta_0)$.

С другой стороны, нетрудно доказать, что ретракция $\underline{\mathrm{sym}}$ удовлетворяет аксиоме существования точной нижней границы накрывающих объектов.

Действительно, пусть $(X_\lambda, \beta_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ – некоторая система битопологических пространств с одним и тем же $\underline{\mathrm{sym}}$-образом, пространством (X, β). Тогда $\beta \subset \beta_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и потому

$\beta \subset \bigcap \beta_\lambda | \lambda \in \Lambda = \beta'$ и $\underline{\mathrm{sym}}(X, \beta') = (X, \beta_0)$.

Можно доказать, что для ретракции $\overline{\mathrm{sym}}$ ситуация прямо противоположна. Таким образом мы имеем существенно различные ретракции на одну и ту же категорию.

§7. Битопологические представления

1.Некоторые классы функций. Изучение тех или иных классов отображейий составляет во многих случаях важную часть исследований. Более того, такая деятельность приводит подчас к возникновению новых идей и новых конструкций. Так появились, например, равномерные пространства и битопологические пространства, они позволили описать новые классы отображений. Мы рассмотрим сейчас ряд примеров такого описания некоторых классов вещественных функций. Это довольно экзотические примеры, возможно и не имеющие самостоятельного значения, но демонстрирующие возможности битопологического подхода.

Пусть $X = \mathbb{R}$ – числовая прямая, τ_u – ее обычная топологическая структура. Фиксация на $\mathbb{R}$ топологической структуры τ_u выделяет класс непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}$. Рассмотрим, теперь, топологическую структуру τ_r, состоящую из $\mathbb{R}, \emptyset$ и множеств $G_a = \{x | x > a\}$, для всех $a \in \mathbb{R}$. По определению топологической структуры τ_r любое множество $G \subset \mathbb{R}$ принадлежит ей тогда и только тогда, когда оно обладает следующим свойством: если $x \in G$ и $x < y$ то $y \in G$. Если, теперь, мы фиксируем на $\mathbb{R}$ топологическую структуру τ_r, то тем самым выделим соответствующий этой структуре класс функций. Докажем, что *это есть класс всех неубывающих функций.*

Пусть $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное относительно τ_r отображение и $x < y$ – точки из $\mathbb{R}$. Допустим, что $f(x) > f(y)$ и рассмотрим в этом случае множество $f^{-1}(G_{\frac{f(x)+f(y)}{2}})$. С одной стороны это множество должно принадлежать τ, однако, с другой стороны, точка x принадлежит ему, а точка $y > x$ не принадлежит. Полученное противоречие доказывает, что, в действительности, из $x < y$ следует $f(x) \leqslant f(y)$, то есть f–неубывающая функция. То, что любая неубывающая функция принадлежит этому классу, очевидно.

Если мы фиксируем, теперь, на $\mathbb{R}$ и топологическую структуру τ_u и топологическую структуру τ_r, то есть рассмотрим битопологическое пространство $(\mathbb{R}, \tau_u, \tau_r)$, то мы определим этим *класс всех непрерывных неубывающих вещественных функций.*

Рассмотрим еще одну топологическую структуру, а именно $\tau_a = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{a\}\}$. Нетрудно понять, что такая топологическая структура на $\mathbb{R}$ определяет класс вещественных функций тождественных на a и постоянных функций. В соответствии с этим, класс всех бинепрерывных отображений $(\mathbb{R}, \tau_u, \tau_a)$ состоит из всех *непрерывных вещественных функций тождественных в точке a и, конечно, постоянных функций.*

Еще один пример. Рациональной точкой в $\mathbb{R}^2$ будем называть точку (x, y) с рациональными координатами. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ битопологическую структуру β, совпадающую с $\tau_u \times \tau_u$ на Δ, а вне Δ состояую только из всех подмножеств множества рациональных точек, не принадлежащих Δ (здесь опять τ_u – обычная топологическая структура на $\mathbb{R}$). Ясно, что класс всех бинепрерывных отображений $(\mathbb{R}, \beta)$ в себя состоит из непрерывных вещественных функций, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию. Это следует из того,что отображение $f \times f$ отображает Δ в себя. Для того найти это условие, рассмотрим произвольную рациональную точку (x, y), не принадлежащую Δ. Ее $(f \times f)$-прообраз, также не имеет общих точек с Δ. Множество $(f \times f)^{-1}(x, y)$ должно быть открытым в $(X \times X, \beta)$ множеством и потому должно состоять только из рациональных точек. Это означает, что рациональные точки, не принадлежащие Δ, могут быть образами только рациональных точек и потому рациональные числа могут быть образами только рациональных чисел, если, конечно, f не является постоянной функцией.

2. Битопологические детализации. Битопологическую структуру β, определенную на множестве X, можно рассматривать, как некую дополнительную структуру, определенную на топологическом пространстве $(X, \beta|X)$. Здесь $\beta|X$ – топологическая структура, индуцированная на X топологической структурой β при отображении $j : X \longrightarrow X \times X$, $j(x) = (x, x)$, $\beta|X = \{j^{-1}(G) | G \in \beta\}$. Процедуру построения любой такой дополнительной структуры на произвольно фиксированном топологическом пространстве (X, τ) можно описать следующим образом.

Вложением $j : X \longrightarrow X \times X$ переносим топологическую структуру τ с X на $\Delta \subset X \times X$ и затем, полученную таким образом, структуру $j\tau = \{j(G) | G \in \tau\}$ продолжаем до некоторой топологической структуры β на $X \times X$ так, что $G \cap \Delta \in j\tau$ для каждого $G \in \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta|X = \{j^{-1}(G)|G \in \beta\} = \{j^{-1}(G \cap \Delta)|G \in \beta\} = \\ = \{j^{-1}(G \cap \Delta|G \cap \Delta \in j\tau\} = \\ = \{j^{-1}(G')|G' \in j\tau\} = \{H|H \in \tau\} = \tau. \end{aligned}$$

Если $\beta|X = \tau$, то мы будем говорить, что битопологическая структура β является детализацией топологической структуры τ (при переходе от τ к β появляется дополнительная структурная информация) или же, что τ является схематизацией β (при переходе от β к τ часть структурной информации теряется).

Пусть β и β' – битопологические структуры на множествах X и X', соответственно, $\tau = \beta|X$, $\tau' = \beta'|X'$ и $f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$ – бинепрерывное отображение. Тогда $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ – непрерывное отображение. Обратное утверждение,вообще говоря, неверно, поэтому следует соответствующим образом подбирать битопологические детализации топологических структур, если мы хотим чтобы непрерывным отображениям соответствовали бинепрерывные отображения. Этим обстоятельством можно пользоваться для выделения тех или иных классов непрерывных отображений.

3. Одно битопологическое представление. Будем говорить, что некоторый класс $\mathcal{F}$ непрерывных отображений топологических пространств имеет *битопологическое представление* классом $\mathcal{B}$ битопологических пространств, если $\mathcal{F}$ совпадает с классом всех бинепрерывных отображений

$$f : (X, \beta) \longrightarrow (X', \beta')$$

для всевозможных битопологических структур β и β' из $\mathcal{B}$.

Так как любая битопологическая структура является одновременно топологической структурой на соответствующем множестве, то битопологическое представление класса $\mathcal{F}$ является, в конечном счете, своеобразным топологическим описанием этого класса. Иногда, впрочем, приходится рассматривать не произвольные непрерывные отображения топологических пространств, а непрерывные отображения принадлежащие хорошо описанному классу $\mathcal{A}$, например классу *взаимно однозначных отображений* (*мономорфизмов*) или классу *отображений на все пространство* (*эпиморфизмов*).

Приведем характерный пример битопологического представления.

Теорема. *Пусть (X,τ) – связное топологическое пространство и $\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$ – непрерывное отображение без неподвижной точки. Тогда множество всех перестановочных с φ непрерывных отображений (X,τ) в себя имеет битопологическое представление в классе всех взаимно однозначных отображений.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_\varphi=\{(x,\varphi(x))|x\in X\}$, β_φ – топологическая структура на X, определяемая следующими условиями:

Если $G\cap\Gamma_\varphi=\emptyset$, то $G\in\beta_\varphi\cap\complement\beta_\varphi$

$\beta|\Gamma_\varphi=(\tau\times\tau)|\Gamma_\varphi$.

Пусть $f:(X,\beta_\varphi)\longrightarrow(X,\beta_\varphi)$ – взаимно однозначное бинепрерывное отображение. Тогда $f\times f:(X\times X,\beta_\varphi)\longrightarrow(X\times X,\beta_\varphi)$ – непрерывное отображение. Так как $\Gamma_\varphi=\{(x,\varphi(x))|x\in X\}$, то $\Gamma_\varphi=(1\times\varphi)(X)$. С другой стороны, отображение $1\times\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X\times X,\tau\times\tau)$ непрерывно, а $\beta|\Gamma_\varphi=(\tau\times\tau)|\Gamma_\varphi$, поэтому отображение $1\times\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X\times X,\beta_\varphi)$ также непрерывно и, в силу связности топологического пространства (X,τ), множество Γ_φ является связным подмножеством топологического пространства $(X\times X,\beta_\varphi)$. Заметим теперь, что X и, следовательно, Γ_φ содержит более чем одну точку, так как отображение φ не имеет неподвижной точки. Поэтому Γ_φ является единственной неодноточечной компонентой связности в топологическом пространстве $(X\times X,\beta_\varphi)$. Отсюда следует, что либо $(f\times f)(\Gamma_\varphi)\subset\Gamma_\varphi$ либо $(f\times f)(\Gamma_\varphi)$ – одноточечное множество. Но последний вариант отпадает, так как f – взаимно однозначное отображение, а X содержит более одной точки. Таким образом, если $x\in X$, то $(f\times f)$ $(x,\varphi(x))=(f(x),f\varphi(x))\in\Gamma_\varphi$ и потому $f\varphi(x)=\varphi f(x)$, то есть отображение f перестановочно с отображением φ. Тем самым доказано,что из бинепрерывности взаимно однозначного отображения $f:(X,\beta_\varphi)\longrightarrow(X,\beta_\varphi)$ следует перестановочность отображения f с отображеним φ.

Рассмотрим теперь произвольное взаимно однозначное непрерывное отображение $f:(X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$ перестановочное с φ. Тогда $(f\times f)(x,\varphi(x))=(f(x),f\varphi(x))=(f(x),\varphi f(x))\in\Gamma_\varphi$ для всех $x\in X$, то есть $(f\times f)(\Gamma_\varphi)\subset\Gamma_\varphi$.

Так как $f:(X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$ – непрерывное отображение, то $(f\times f):(X\times X,\tau\times\tau)\longrightarrow(X\times X,\tau\times\tau)$ – непрерывное отображение. Заметим теперь, что по определению структуры β_φ имеет место соотношение $\tau\times\tau|\Gamma_\varphi=\beta_\varphi|\Gamma_\varphi$ и потому отображение

$$(f\times f)|\Gamma_\varphi:(\Gamma_\varphi,\beta_\varphi|\Gamma_\varphi)\longrightarrow(\Gamma_\varphi,\beta_\varphi|\Gamma_\varphi)$$

является непрерывным отображением.

Мы доказали, что ограничение отображения $f\times f:(X\times X,\beta_\varphi)\longrightarrow(X\times X,\beta_\varphi)$ на Γ_φ является непрерывным отображением. С другой стороны, и ограничение этого отображения на $(X\times X)\setminus\Gamma_\varphi$ также является непрерывным отображением, так как топологическая структура β_φ индуцирует на этом множестве дискретную топологию. Но оба этих множества открыты в $(X\times X,\beta_\varphi)$, поэтому $f\times f:(X\times X,\beta_\varphi)\longrightarrow(X\times X,\beta_\varphi)$ – непрерывное отображение, то есть $f:(X,\beta_\varphi)\longrightarrow(X,\beta_\varphi)$ – бинепрерывное отображение. Теорема доказана.

4. Битопологическая полнота. Пусть теперь Φ – некоторое множество непрерывных отображений топологического пространства (X,τ) в себя. Рассмотрим систему $(\Gamma_\varphi|\varphi\in\Phi)$ графиков отображений $\varphi\in\Phi$. На каждом Γ_φ фиксируем топологическую структуру $\beta_\varphi=\tau\times\tau|\Gamma_\varphi$. Введем теперь топологическую структуру β_Φ на $X\times X$, положив $G\in\beta_\Phi$ тогда и только тогда, когда $G\cap\Gamma_\varphi\in\beta_\varphi$ для каждого $\varphi\in\Phi$. Непрерывное отображение $\psi:(X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$ будем называть Φ-*отображением*, если отображение $1\times\psi:(X,\tau)\longrightarrow(X\times X,\beta_\Phi)$ непрерывно.

Лемма. *Любое отображение $\varphi\in\Phi$ является Φ-отображением.*

Доказательство. Так как $(1\times\varphi)(x)=(x,\varphi(x))\in\Gamma_\varphi$ для каждого $x\in X$, то $(1\times\varphi)(X)\subset\Gamma_\varphi$. С другой стороны, $\beta_\varphi=(\tau\times\tau)|\Gamma_\varphi$ и потому из непрерывности отображения $1\times\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X\times X,\tau\times\tau)$ следует непрерывность отображения $1\times\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(\Gamma_\varphi,\beta_\varphi)$ и, в силу того,что $\beta_\Phi|\Gamma_\varphi=\beta_\varphi$, непрерывность отображения $1\times\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X\times X,\beta_\Phi)$. Лемма доказана.

Множество Φ непрерывных отображений (X,τ) в себя будем называть *битопологически полным*, если любое Φ-отображение принадлежит Φ.

Теорема. *Если Φ – битопологически полная система непрерывных отображений $\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$, то гомеоморфизм $\psi:(X,\tau)\longrightarrow$*

(X,τ) будет бинепрерывным отображением (X,β_Φ) на себя тогда и только тогда, когда $\psi\varphi\psi^{-1}\in\Phi$ для каждого $\varphi\in\Phi$.

Доказательство. Пусть ψ – гомеоморфизм (X,τ) на себя и $\psi\varphi\psi^{-1}\in\Phi$ для каждого $\varphi\in\Phi$. Докажем, что в этом случае $\psi:(X,\beta_\Phi)\longrightarrow(X,\beta_\Phi)$ – бинепрерывное отображение. Если $(x,y)\in\Gamma_\varphi$, то есть $y=\varphi(x)$, тогда $(\psi\times\psi)(x,y)==(\psi(x),\psi(y))=(\psi(x),\psi\varphi(x))=(\psi(x),\varphi'\psi(x))\in\Gamma_{\varphi'}$, где $\varphi'=\psi\varphi\psi^{-1}\in\Phi$. Таким образом $(\psi\times\psi)(\Gamma_\varphi)\subset\Gamma_{\varphi'}$. Так как $\beta_\varphi=(\tau\times\tau)|\Gamma_\varphi$ и $\beta_{\varphi'}=(\tau\times\tau)|\Gamma_{\varphi'}$, то отображение $\psi\times\psi:(X\times X,\beta_\Phi)\longrightarrow(X\times X,\beta_\Phi)$ – непрерывно на каждом множестве Γ_φ, $\varphi\in\Phi$ и, следовательно, в силу определения β_Φ, оно непрерывно на всем пространстве $(X\times X,\beta_\Phi)$, то есть $\psi:(X,\beta_\Phi)\longrightarrow(X,\beta_\Phi)$ – непрерывное отображение.

Пусть теперь ψ – гомеоморфизм (X,τ) на себя, являющийся бинепрерывным отображением (X,β_Φ) на себя. Отображение ψ^{-1} будет непрерывным отображением (X,τ) на себя. Пусть $\varphi\in\Phi$, тогда $1\times\varphi:(X,\tau)\longrightarrow(X\times X,\beta_\Phi)$ – непрерывное отображение, в силу предыдущей леммы. Но тогда композиция $(\psi\times\psi)(1\times\varphi)\psi^{-1}=(1\times\psi\varphi\psi^{-1})$, также будет непрерывным отображением (X,τ) в $(X\times X,\beta_\Phi)$, то есть $\psi\varphi\psi^{-1}$ будет Φ-отображением. Отсюда, в силу битопологической полноты Φ,следует $\psi\varphi\psi^{-1}\in\Phi$. Теорема доказана.

Следствие. *Если Φ – битопологически полная система непрерывных отображений топологического пространства (X,τ) в себя, то множество гомеоморфизмов (X,τ) в себя перестановочных с Φ имеет битопологическое представление.*

Действительно, перестановочность ψ с Φ $(\psi\Phi=\Phi\psi)$ означает, что для любого $\varphi\in\Phi$ имеет место соотношение $\psi\varphi=\varphi'\psi$, где $\varphi'\in\Phi$ и потому $\psi\varphi\psi^{-1}\in\Phi$. Битопологическим представлением рассматриваемого множества гомеоморфизмов (X,τ) на себя будет битопологическая структура β_Φ.

§8. Бияструктурные пространства

Идея битопологического пространства, основанная на формуле "множество X + топология на $X\times X$" может быть распространена на другие структуры например "множество X + метрика на $X\times X$" или "множество X + равномерность на $X\times X$" и так далее. Так мы получаем биметрические пространства, биравномерные пространства и ряд других биструктурных пространств. Мы рассмотрим здесь некоторые типы бипространств.

1. Биметрики. *Биметрикой* заданной на множестве X мы будем называть метрику d на множестве $X \times X$, пару (X, d) будем называть *биметрическим пространством*. В общем случае биметрика d никак не связана с разложимостью множества, на котором она задана, в произведение $X \times X$. В частности сходимости на $X \times X$ могут быть слабо связаны со сходимостями на горизонтальных множествах и со сходимостями на вертикальных множествах, как показывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть $X = [0,1], Y = \{(0,0)\} \cup ((0,1] \times (0,1]) \cup \{(-1,y) | y \in (0,1]\} \cup \{(x,-1) | x \in (0,1]\}$. Метрику d на $X \times X$ мы определим перенеся обычную метрику определенную на Y посредством специального отображения $f : X \times X \longrightarrow Y$, а именно

$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0), & x = 0, \quad y = 0 \\ (x,y), & xy \neq 0 \\ (x,-1), & x \neq 0, \quad y = 0 \\ (-1,y), & x = 0, \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Полагаем тогда

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = r((f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)),$$

где r-обычная метрика (рис. 19).

Нетрудно заметить, что из $d((x,y),(x_0,y_0)) \longrightarrow 0$ не обязательно следует $d((x_0,y),(x_0,y_0)) \longrightarrow 0$ и $d((x,y_0),(x_0,y_0)) \longrightarrow 0$.

Пример 2. Пусть $X = [0,1], Y = ((0,1] \times (0,1]) \cup (([-1,0] \times [-1,0]) \setminus ((-1,0] \times (-1,0])$. Метрику d на $X \times X$ мы определим, как в примере 1, перенеся обычную метрику определенную на Y посредством специального отображения $f : X \times X \longrightarrow Y$, а именно

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & xy \neq 0 \\ (x-1,-1), & y = 0 \\ (-1,y-1), & x = 0. \end{cases}$$

Полагаем тогда

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = r((f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)),$$

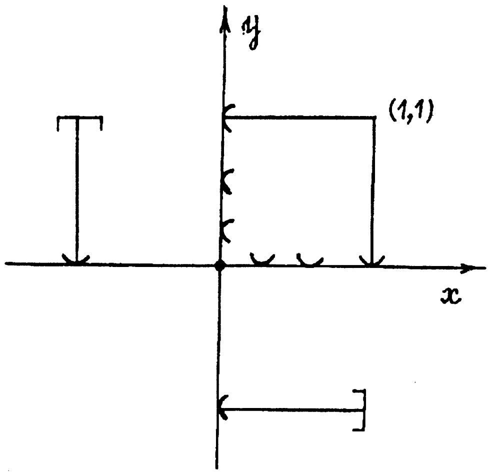

Рис. 19.

где r-обычная метрика (рис. 20).

Нетрудно заметить, что из $d((x_0, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0$ и $d((x, y_0), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0$ не обязательно следует $d((x, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0$.

2. Разложимые биметрики. Будем говорить, что биметрика d, заданная на X, *разложима*, если $d = \max(d_1, d_2)$, где d_1, d_2 – метрики на X. Разложимая биметрика, рассматриваемая, как метрика заданная на соответствующем множестве, тесно связана с разложением этого множества в произведение $X \times X$, в отличие от произвольной биметрики. В частности, битопологическая структура на X, определенная разложимой биметрикой d на X *является разложимой битопологической структурой*. Это следует из того, что $\tau_d = \tau_{d_1} \times \tau_{d_2}$, где τ_d, τ_{d_1} и τ_{d_2} – топологические структуры, определяемые метриками d, d_1, d_2 на $X \times X$, X и X, соответственно. Действительно, мы имеем

$$((x_\lambda, y_\lambda) | \lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_d} (x, y) \iff d((x_\lambda, y_\lambda), (x, y)) \longrightarrow 0,$$

$$d((x_\lambda, y_\lambda), (x, y)) \longrightarrow 0 \iff \begin{cases} d_1(x_\lambda, x) \longrightarrow 0, \\ d_2(y_\lambda, y) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

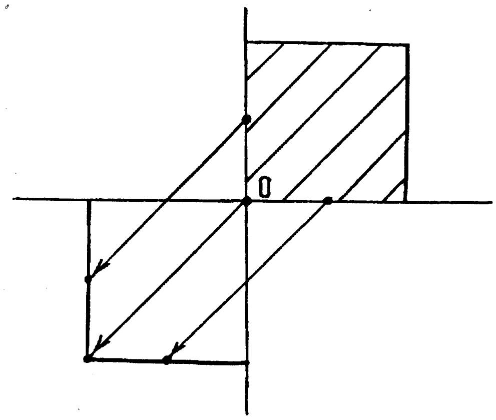

Рис. 20.

и поэтому

$$((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_d} (x, y) \iff \begin{cases} (x_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_{d_1}} x, \\ (y_\lambda|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\tau_{d_2}} y. \end{cases}$$

3. Равномерная скошенность биметрики. Будем говорить, что биметрика d на X *равномерно скошена*, если существует такое число $C > 0$, что

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geqslant Cd((x_1, y_1), (x_1, y_2))$$
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geqslant Cd((x_1, y_1), (x_2, y_1))$$

Теорема. *Если биметрика d на X равномерно скошена, то*

$$d((x, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0 \iff \begin{cases} d((x_0, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0 \\ d((x, y_0), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если $d((x, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0$, то по условию равномерной скошенности

$$d((x_0, y),\, (x_0, y_0)) \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad d((x, y_0),\, (x_0, y_0)) \longrightarrow 0.$$

С другой стороны, если

$$d((x_0, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad d((x, y_0), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0,$$

то по аксиоме треугольника $d((x, y_0), (x_0, y)) \longrightarrow 0$. Отсюда по условию равномерной скошенности следует,что $d((x, y), (x, y_0)) \longrightarrow 0$ и опять используя аксиому треугольника получаем $d((x, y), (x_0, y_0)) \longrightarrow 0$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы следует то, что *равномерно скошенная биметрика на X определяет на X локально разложимую битопологическую структуру.*

4. Биметрическая теорема о неподвижной точке. В качестве примера использования условия равномерной скошенности мы рассмотрим одну теорему о неподвижной точке для отображений биметрических пространств. Пусть $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$-отображение биметрического прстранства (X, d) в себя. Будем называть это отображение *вертикально сжимающим*, если существует такое неотрицательное число $\alpha < 1$, что

$$d((f(x), f(y_1)), (f(x), f(y_2))) \leqslant \alpha d((x, y_1), (x, y_2))$$

для любых x, y_1, y_2. Аналогично определяются *горизонтально сжимающие* отображения. Биметрическое пространство (X, d) называется *полным*, если $(X \times X, d)$ – полное метрическое пространство.

Теорема. *Пусть (X, d)-полное биметрическое пространство с равномерно скошенной биметрикой и $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$-вертикально и горизонтально сжимающее отображение. Тогда f имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Для произвольно фиксированных точек x, y из X рассмотрим последовательности (u_n), (v_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $u_n = (x_n, y_n)$, $v_n = (x_n, y_{n+1})$, $x_n = f^n(x)$, $y_n = f^n(y)$. Имеем, очевидно,

$$d(u_n, u_{n+k}) \leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} d(u_i, u_{i+1}) \leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} (d(u_i, v_i) + d(v_i, u_{i+1})).$$

С другой стороны,

$$d(u_i, v_i) = d((f^i(x), f^i(y)), (f^i(x), f^{i+1}(y)) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha d((f^{i-1}(x), f^{i-1}(y)), (f^{i-1}(x), f^i(y)) = \alpha d(u_{i-1}, v_{i-1})$$
$$d(v_i, u_{i+1}) = d((f^i(x), (f^{i+1}(y)), (f^{i+1}(x), f^{i+1}(y))) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha d((f^{i-1}(x), f^i(y)), (f^i(x), f^i(y)) = \alpha d(v_{i-1}, u_i),$$

где α – коэффициент сжатия как вертикального так и горизонтального (можно считать без нарушения общности что эти сжатия имеют одинаковый коэффициент). Из выше приведенных оценок легко получается следующая оценка для $d(u_n, u_{n+k})$

$$d(u_n, u_{n+k}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}[d(u_0, v_0) + d(u_0, v_1)],$$

из которой следует, что $(u_n|n = 0, 1, 2, \ldots)$-фундаментальная последовательность Коши в $(X \times X, d)$, сходящаяся в силу полноты этого метрического пространства к некоторой точке $u = (\xi, \eta)$. Тогда $d(u, u_n) \longrightarrow 0$, при $n \longrightarrow \infty$ и в силу равномерной скошенности биметрики d имеют место сходимости

$$d((\xi, y_n), (\xi, \eta)) \longrightarrow 0, \quad d((x_n, \eta), (\xi, \eta)) \longrightarrow 0.$$

Отсюда следуют сходимости

$$d((f(\xi), y_{n+1}), (f(\xi), f(\eta)) \longrightarrow 0, \quad d(x_{n+1}, f(\eta)), (f(\xi), f(\eta))) \longrightarrow 0,$$

так как f является горизонтально и вертикально сжимающим отображением (X, d) в себя и, следовательно, мы имеем сходимость

$$d((x_n, y_n), (f(\xi), f(\eta))) \longrightarrow 0,$$

откуда следует, что $f(\xi) = \xi, f(\eta) = \eta$. Наконец из неравенства

$$d((\xi, \xi), (\xi, \eta)) \leqslant \alpha((\xi, \xi), (\xi, \eta))$$

следует $\xi = \eta$. Теорема доказана.

5. Δ-биравномерные пространства. Δ-*биравномерной* структурой, определенной на X мы будем называть Δ-равномерную структуру, определенную на $X \times X$. Заметим, прежде всего, что диагональ Δ_2 в $(X \times X) \times (X \times X)$ не совпадает с $\Delta \times \Delta$, где Δ – диагональ в $X \times X$. Первое множество состоит из всех точек $((x,y),(x,y))$, а второе из всех точек $((x,x),(y,y))$, $x \in X$, $y \in X$. Однако между точками этих множеств имеется каноническое соответствие, а именно $((x,y),(x,y)) \longleftrightarrow ((x,x),(y,y))$. Эти множества можно канонически вложить в X^4, $((x,y),(x,y)) \longrightarrow (x,y,x,y), ((x,x),(y,y)) \longrightarrow (x,x,y,y)$, причем одно переходит в другое при перестановке второй и третьей координат, $(x,y,x,y) \longleftrightarrow (x,x,y,y)$, то есть при отображении $\varphi : X^4 \longrightarrow X^4, \varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_3,x_2,x_4)$. Соответственно и их окружения переходят друг в друга при перестановке второй и третьей координат.

Как и в случае биметрик, задание произвольной Δ-биравномерной структуры вообще говоря никак не связано с разложимостью множества, на котором она задана, в произведение $X \times X$.

6. Разложимые Δ-биравномерные структуры. Будем говорить, что Δ-биравномерная структура $\mathfrak{U}$ *разложима*, если существуют такие Δ-равномерные структуры $\mathfrak{U}_1$ $\mathfrak{U}_2$ на X, что $(X \times X, \mathfrak{U}) = (X, \mathfrak{U}_1) \times (X, \mathfrak{U}_2)$.

Несмотря на то, что $(X \times X, \mathfrak{U}) = (X, \mathfrak{U}_1) \times (X, \mathfrak{U}_2)$, *равенство* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$ не имеет места, так как перемножаются не топологические, а битопологические пространства. Как было уже отмечено, Δ_2 – диагональ в $((X \times X) \times (X \times X))$ не совпадает с $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$ – квадратом диагонали в $X \times X$, они переходят друг в друга при перестановке второй и третьей координат в X^4. Соответственно этому и множества $U_1 \times U_2$, $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $U_2 \in \mathfrak{U}_2$, из которых образовано произведение $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$, переходят в окружения диагонали Δ_2 при перестановке второй и третьей координат в X^4. Именно эти окружения диагонали Δ_2 и образуют $\mathfrak{U}$.

Для разложимого Δ-биравномерного пространства можно пользоваться и другой записью, а именно $(X, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ – Δ-биравномерное в смысле Келли пространство.

Рассмотрим некоторые свойства разложимых Δ-биравномерных пространств $(X, \mathfrak{U})$, то есть свойства Δ-равномерных пространств $(X \times X, \mathfrak{U})$, представимых в виде $(X, \mathfrak{U}_1) \times (X, \mathfrak{U}_2)$, где $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ – некоторые Δ-равномерные структуры на X.

Теорема. *Если $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ – симметричные Δ-равномерные структуры на X и $(X \times X, \mathfrak{U}) = (X, \mathfrak{U}_1) \times (X, \mathfrak{U}_2)$, то $\mathfrak{U}$ – симметричная Δ-равномерная структура на $X \times X$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что окружения $U =$

$\{((x_1,x_2),(y_1,y_2))\ |(x_1,y_1)\in U_1\in\mathfrak{U}_1,\ (x_2,y_2)\in U_2\in\mathfrak{U}_2\}$ образуют базу Δ-равномерной структуры $\mathfrak{U}$ на $X\times X$. При этом вместо самих структур $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ можно брать любые их базы, в частности базы, состоящие из симметричных множеств $U_1=U_1^{-1}$, $U_2=U_2^{-1}$. Но тогда

$$U^{-1}=\{((y_1,y_2),(x_1,x_2))|(x_1,y_1)\in U_1\in\mathfrak{U}_1,(x_2,y_2)\in U_2\in\mathfrak{U}_2\}=$$
$$=\{((y_1,y_2),(x_1,x_2))|(y_1,x_1)\in U_1\in\mathfrak{U}_1,\ (y_2,x_2)\in U_2\in\mathfrak{U}_2\}=U.$$

Тем самым доказано, что $\mathfrak{U}$ имеет базу, состоящую из симметричных множеств, то есть является симметричной Δ-равномерной структурой.

Теорема. *Если $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ являются Δ-отделимыми Δ-равномерными структурами на X, то $(X,\mathfrak{U})=(X,\mathfrak{U}_1)\times(X,\mathfrak{U}_2)$ являются Δ-отделимой Δ-равномерной структурой на $X\times X$.*

Доказательство. Пусть $((\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2),(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2))$ точка, не принадлежащая диагонали $\Delta\subset(X\times X)\times(X\times X)$. Тогда $(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)\neq(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2)$, то есть либо $\widetilde{x}_1\neq\widetilde{y}_1$, либо $\widetilde{x}_2\neq\widetilde{y}_2$. Пусть, для определенности, $\widetilde{x}_1\neq\widetilde{y}_1$. В силу Δ-отделимости структуры $\mathfrak{U}_1$, найдется такое окружение $U_1\in\mathfrak{U}_1$, что $(\widetilde{x}_1\neq\widetilde{y}_1\,\bar{\in}\,U_1$. Но тогда

$$((\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2),(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2))\,\bar{\in}\,U=$$
$$=\{((x_1,x_2),(y_1,y_2))|(x_1,y_2)\in U_1\in\mathfrak{U}_1,\ (x_2,y_2)\in U_2\in\mathfrak{U}_2\},$$

что и доказывает Δ-отделимость структуры $\mathfrak{U}$.

Теорема. *Если $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ – вейлевские равномерные структуры на X и $(X\times X,\mathfrak{U})=(X_1,\mathfrak{U}_1)\times(X_2,\mathfrak{U}_2)$, то $\mathfrak{U}$ – вейлевская равномерная структура на $\times X$.*

Доказательство. Следует из доказанных выше теорем и из соотношения

$$U\circ U=\{((x_1,x_2),(y_1,y_2))|(x_1,y_2)\in U_1\circ U_1\in\mathfrak{U}_1,$$
$$(x_2,y_2)\in U_2\circ U_2\in\mathfrak{U}_2\}.$$

ГЛАВА III.

БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Говоря о битопологических многообразиях, то есть о топологических многообразиях, на которых определены те или иные битопологические структуры, мы сталкиваемся прежде всего с проблемой связи между их топологическими и битопологическими структурами. В первых публикациях, посвященных этой проблеме, выдвигались довольно жесткие требования, налагаемые на битопологические структуры битопологических многообразий. Считалось необходимым, например, чтобы битопологическая структура β топологического многообразия (M, τ) была строго согласована с его топологической структурой, то есть $\tau = \beta|M$. Другим требованием, также представлявшимся естественным, была секвенциальность β, как топологической структуры на $M \times M$. И уж совершенно бесспорным требованием считалась однородность битопологической структуры топологического многообразия, соответствующая его топологической однородности. Здесь нас будут интересовать различные битопологические структуры, определенные на топологических многообразиях, без каких-либо предварительных ограничений.

Заметим, кстати, что условие строгой согласованности β и τ можно заменить ограничением класса рассматриваемых отображений. Например, если мы рассматриваем бинепрерывные отображения $f : (M, \beta) \longrightarrow (M', \beta')$, то для $\beta|M = \tau$, $\beta'|M' = \tau'$ любое такое отображение является, как известно, непрерывным отображением (M, τ) в (M', τ'). Однако, если такого согласования нет, то мы можем рассматривать только те бинепрерывные отображения $f : (M, \beta) \longrightarrow (M', \beta')$, для которых отображение $f : (M, \tau) \longrightarrow (M', \tau')$ непрерывно.

В этой главе будут изложены основы теории произвольных битопологических многообразий, однако будут иметься в виду, прежде всего, битопологически представленные кусочно линейные многообразия.

§1. Битопологические структуры на $\mathbb{R}$

Простейшими топологическими многообразиями являются евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ с обычной топологической структурой. К тому же они являются эталонными многообразиями, на них основано само понятие топологического многообразия. Поэтому мы начнем изучение битопологических многообразий именно с изучения различных битопологических структур на $\mathbb{R}^n$ и прежде всего на $\mathbb{R}$. Рассмотрим сначала некоторые битопологические многообразия $(\mathbb{R}, \beta)$, структура которых β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$, посредством какой-нибудь системы прямых. При этом нас будут интересовать бинепрерывные отображения соответствующих битопологических пространств в себя. Некоторые из приводимых в §1 и §2 примеров битопологических многообразий имеют, по-видимому, чисто академический интерес, демонстрируя возможности битопологического подхода, другие же имеют фундаментальное значение.

1. Условия кусочной линейности отображений $\mathbb{R}$ в себя.

Пример 1. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ посредством системы всех прямых $y - a = \lambda(x - a)$ в $\mathbb{R}^2$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda > 0$. Можно доказать в этой ситуации, что *отображение* $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ *бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.*

Действительно, пусть β – топологическая структура на $\mathbb{R}^2$, полученная ослаблением обычной топологической структуры посредством указанной системы прямых. Сразу заметим, что β индуцирует дискретную топологию на каждой горизонтальной и на каждой вертикальной прямой, так как пересечение любого подмножества любой горизонтальной и любой вертикальной прямой с любой наклонной прямой либо пусто либо одноточечно. Рассмотрим теперь произвольное бинепрерывное отображение $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ и докажем, что оно является кусочно линейным отображением. Для этого достаточно доказать, что f линейно на отрезках $[x, x + \epsilon]$ и $[x - \epsilon, x]$ для каждого $x \in \mathbb{R}$, где $\epsilon > 0$ зависит от x. Заметим, что можно ограничиться только случаем $x = 0$, $f(0) = 0$, комбинируя f, в случае необходимости с параллельными переносами на $\mathbb{R}$. Более того мы можем ограничиться отрезками $[0, \epsilon]$, так как β и, одновременно, понятие кусочной линейности инвариантны относительно перехода от (x, y) к $(-x, -y)$. Наша ближайшая цель доказать, что f либо не обращается в ноль ни в одной точке внутри некоторого отрезка $[0, \epsilon]$ либо тождественно равно нулю на нем.

Допустим, что f не тождественно равна нулю на всех отрезках $[0,\epsilon]$, но существует такая сходящаяся к нулю последовательность $(x_n|n \in \mathbb{N})$, что $f(x_n) = 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через A множество всех точек отрезка $[0,1]$, для которых $f(x) = 0$. Точка 0 будет тогда предельной точкой множества A на отрезке $[0,1]$ в обычной топологии. Фиксируем теперь произвольное число $\lambda \in (0,1)$. По определению β, система $(x, \lambda x)|x \in A)$, где A – естественно упорядоченное числовое множество, сходится к точке $(0,0)$, поэтому в силу бинепрерывности f система $((f(x), f(\lambda x))|x \in A) \longrightarrow_\beta (0,0)$. Но тогда, опять же в силу определения структуры β, найдется такое $\epsilon = \epsilon(\lambda)$, что $f(\lambda x) = 0$ для всех $x \in A_\epsilon = \{x|x \in A, x \leq \epsilon\}$. Это значит, что для каждого положительного $\epsilon \leqslant \epsilon(\lambda)$ имеет место включение

$$\lambda A_\epsilon = \{\lambda x | x \in A_\epsilon\} \subset A_\epsilon.$$

Более того можно считать, что

$$\lambda A_\epsilon = \{\lambda x | x \in A_\epsilon\} \subset A_{\lambda\epsilon}.$$

Тем же рассуждением можно доказать, что

$$\frac{1}{\lambda} A_{\lambda\epsilon} \subset A_\epsilon,$$

где ϵ – достаточно малое положительное число не большее, чем $\epsilon_1(\lambda)$. Мы доказали, таким образом, что

$$\lambda A_\epsilon = A_{\lambda\epsilon}$$

для всех $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, зависящего от фиксированного нами λ. Фиксируем и λ и ϵ_0, обладающие указанным выше свойством. Так как такие ϵ зависят от λ, то для другого числа μ мы будем иметь соотношение

$$\mu A_\delta = A_{\mu\delta},$$

однако, если $\mu = \sqrt[n]{\lambda}$, то в качестве δ можно взять то же самое ϵ, что и для λ.

Действительно, в качестве δ можно взять $\lambda^m \epsilon$, для достаточно большого m. Таким образом

$$\sqrt[n]{\lambda} A_{\lambda^m \epsilon} = A_{\sqrt[n]{\lambda}\lambda^m \epsilon},$$

отсюда

$$\lambda^{-m} \sqrt[n]{\lambda} A_{\lambda^m \epsilon} = \lambda^{-m} A_{\sqrt[n]{\lambda}\lambda^m \epsilon}$$

и, следовательно,

$$\sqrt[n]{\lambda}A_\epsilon = A_{\sqrt[n]{\lambda}\epsilon}$$

Так как $\epsilon \in A$, то

$$\{\epsilon\lambda^{\frac{m}{n}} | m, n \in \mathbb{N}\} \subset A,$$

откуда следует

$$A = [0, \epsilon].$$

Мы доказали, таким образом, что существует некоторый отрезок $[0, \epsilon]$, на котором функция f либо тождественно равна нулю либо в ноль не обращается. В первом случае f линейна на этом отрезке, докажем ее линейность во втором случае. Без нарушения общности можно предполагать, что $f(x) > 0$ на $(0, 1]$. Заметим, прежде всего, что для каждого $\lambda > 0$ существуют $\lambda' > 0$ и $\epsilon > 0$ такие, что $f(\lambda x) = \lambda' x$ для всех $x \in [0, \epsilon]$. Действительно, если это не так, то найдется сходящаяся к нулю последовательность (x_n), для которой $f(\lambda x_n) = {\lambda'}_n f(x_n)$, причем последовательность (λ'_n) не стабилизируется. Так как $\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$ является непрерывной функцией на $(0, \epsilon]$, то слегка изменив значения x_n мы сможем перейти к последовательности $(x_n) \longrightarrow 0$, для которой $f(\lambda x_n) = {\lambda'}_n f(x_n)$ и все ${\lambda'}_n$ различны. Но тогда $(x_n, \lambda x_n) \longrightarrow_\beta (0, 0)$ и в то же время $(f(x_n), f(\lambda x_n)) \not\longrightarrow_\beta (0, 0)$, что противоречит бинепрерывности f. Таким образом мы можем считать, что $f(\lambda x) = \lambda' f(x)$ для $x \in (0, \epsilon]$.

Исследуем теперь функцию $\lambda' = \lambda'(\lambda)$, то есть отмеченную только что зависимость λ' от λ. Фиксируем некоторое $\lambda > 0$, Пусть $\alpha > 0$ такое число, что ${\lambda'}^\alpha = \lambda$. Введем новую функцию $g(x)$, положив $g(x) = f^\alpha(x)$ для всех $x \in [0, \epsilon]$. Для этой функции $g(\lambda x) = (f(\lambda x))^\alpha = (\lambda')^\alpha f^\alpha(x) = \lambda g(x)$. Таким образом

$$g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Отсюда конечно не следует линейность функции $g(x)$, так как равенство $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ доказано только для некоторого фиксированного λ. Для другого числа λ_1 мы будем иметь, возможно, другую функцию g_1 и, соответственно, другое соотношение

$$g_1(\lambda_1 x) = \lambda_1 g_1(x).$$

Фиксируем два числа $\lambda < 1$, $\lambda_1 < 1$ и, соответственно, две функции $g(x)$ и $g_1(x)$. Без нарушения общности можно считать, что они заданы на $[0, \epsilon]$. Рассмотрим точки $\epsilon, \lambda\epsilon, \ldots, \lambda^n\epsilon, \ldots$ и отрезки $[\lambda^{n+1}\epsilon, \lambda^n\epsilon]$, $n = 0, 1, \ldots, k, \ldots$. Эти отрезки переходят друг в друга при λ-сжатии. Точки $(\epsilon, g(\epsilon)), (\lambda\epsilon, \lambda g(\epsilon)), \ldots, (\lambda^n\epsilon, \lambda^n g(\epsilon)), \ldots$ находятся на графике функции $g(x)$ и также переходят друг в друга при λ-сжатии. Таким образом график функции $g(x)$ можно получить последовательным λ-сжатием ее графика над отрезком $[\lambda\epsilon, \epsilon]$. Отсюда следует, что график функции $g(x)$ лежит между прямыми $y = kx$ и $y = k'x$, $k > k'$ (рис. 21). Аналогично, график функции $g_1(x)$ лежит между прямыми $y = k_1 x$ $y = k'_1 x$. Перейдя к функции $f(x)$, мы получим неравенства

$$kx \leqslant f^\alpha(x) \leqslant k'x$$

$$k_1 x \leqslant f_1^\alpha(x) \leqslant k'_1 x$$

или, что то же самое,

$$(kx)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant f(x) \leqslant (k'x)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(k_1 x)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leqslant f(x) \leqslant (k'_1 x)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

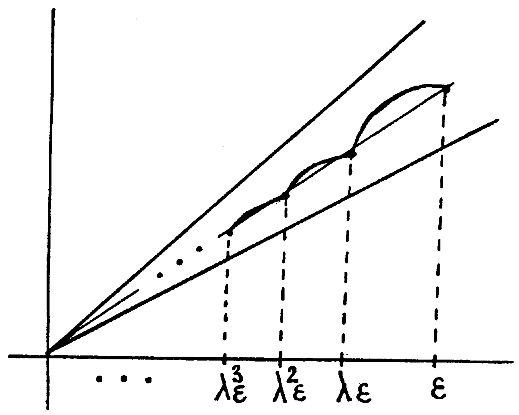

Рис. 21.

Без нарушения общности можно считать, что $\alpha \leqslant \alpha_1$ или $\frac{1}{\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha_1}$. Если это неравенство строгое, то для достаточно малых x имеет место неравенство $(k'x)^{\frac{1}{\alpha}} < (k_1 x)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ и мы приходим к противоречию

$$f(x) \leqslant (k'x)^{\frac{1}{\alpha}} < (k_1 x)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leqslant f(x)$$

для достаточно малых x. Тем самым доказано, что $\alpha = \alpha'$. Таким образом функции $g(x)$ и $g_1(x)$ совпадают, соотношение $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ справедливо для всех $\lambda < 1$ и поэтому функция $g(x) = ax$ является линейной функцией а $f(x) = (ax)^{\frac{1}{\alpha}}$. Если мы теперь перейдем к другой точке x_0, то вместо функции $f(x)$ мы должны будем рассматривать функцию $f'(x') = f(x' + x_0) - f(x_0)$. По доказанному ранее должно иметь место следующее равенство: $f(x' + x_0) - f(x_0) = (cx')^{\frac{1}{\gamma}}$ для каких-то c и γ, что возможно только для $\alpha = 1$. Тем самым доказано, что $f(x) = ax$ – линейная функция на $[0, \epsilon]$ и кусочно линейная функция на $\mathbb{R}$.

Замечание. Битопологическая структура этого примера является, как нетрудно доказать, симметричной и транзитивной битопологической структурой на $\mathbb{R}$. Симметричность следует из того, что при отображении симметрии относительно диагонали прямая $y - b = \lambda(x - a), \lambda > 0$ переходит в прямую $x - a = \frac{1}{\lambda}(y - b), \frac{1}{\lambda} > 0$. Транзитивность следует из того, что если $y = \lambda x$ и $z = \mu y, \lambda > 0, \mu > 0$,то $z = \lambda\mu x, \lambda\mu > 0$.

В следующем примере битопологическая структура, также описывающая кусочно линейные отображения $\mathbb{R}$ в себя, уже не будет симметричной хоти и останется транзитивной битопологической структурой.

Пример 2. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ посредством системы всех прямых $y - a = \lambda(x - a)$ в $\mathbb{R}^2$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и всех λ. Можно доказать в этой ситуации, что отображение $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ *бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно.*

Просматривая доказательство результирующей части Примера 1 мы легко убеждаемся в том, что оно проходит и в условиях Примера 2. Хотя расширение системы прямых по сравнению с Примером 1, по которой осуществляется замкнутое ослабление исходной (одной и той же для обоих примеров) топологической структуры на $\mathbb{R}^2$, приводит к более грубой, чем в

Примере 1, топологической структуре, тем не менее основное ее свойство, а именно дискретность на каждой вертикальной прямой, сохраняется. Тот факт, что в Примере 1 топологическая структура на горизонтальных прямых дискретна а в Примере 2 – обычная топология прямой, на возможность дословного переноса доказательства не влияет, так как эта дискретность в процессе доказательства не используется.

2. Пример призывающий к осторожности. В следующем примере мы еще более расширим систему прямых в $\mathbb{R}^2$, по которой осуществляется ослабление обычной топологии, перейдя к более грубой, чем в Примере 2 и тем более в Примере 1, топологической структуре на $\mathbb{R}^2$. Относительно этой битопологической структуры на $\mathbb{R}$, бинепрерывными окажутся уже не только кусочно линейные отображения.

Пример 3. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ посредством системы всех прямых в $\mathbb{R}^2$ (системы прямых предыдущего примера, дополненной всеми вертикальными прямыми). Можно доказать в этой ситуации, что *существует бинепрерывное отображение* $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$, не являющееся кусочно линейным отображением.

Для построения соответствующего отображения рассмотрим некоторую возрастающую последовательность (α_n) положительных чисел, сходящуюся к 1, и систему отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 = 1, a_1 = \alpha_1, \ldots, b_{n+1} = a_n{}^2, a_{n+1} = \alpha_{n+1} b_{n+1}, \ldots$. Положим (Рис. 22)

$$f(x) = \begin{cases} x - a_n, & a_n \leqslant x \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} \\ -x + b_n, & \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant x \leqslant b_n \\ 0, & x \notin [a_1, b_1], \ldots, x \notin [a_n, b_n], \ldots. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что f не является кусочно линейным отображением в любой окрестности точки 0. Докажем теперь, что тем не менее f – бинепрерывное отображение $(\mathbb{R}, \beta)$ в себя. Для этого достаточно доказать, что из любой сходимости $(x_n, \lambda x_n) \longrightarrow_\beta (0, 0)$ для $0 < \lambda < 1$ следует сходимость $(f(x_n), f(\lambda x_n) \longrightarrow_\beta (0, 0)$, случай $\lambda > 1$ следует отсюда в силу симметрии β относительно диагонали $y = x$, сохранение сходимостей на вертикальных и горизонтальных прямых, а также на диагонали, следует из непрерывности f на $\mathbb{R}$.

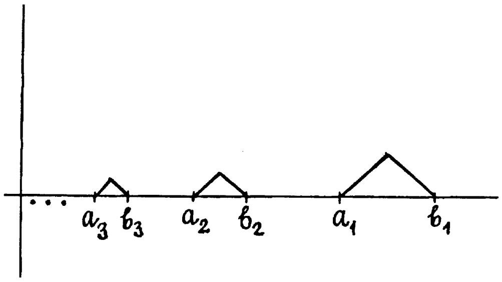

Рис. 22.

Мы докажем прежде всего, что любая прямая $y = \lambda x, 0 < \lambda < 1$ имеет непустое пересечение только с конечным числом прямоугольников $[a_m, b_m] \times [a_n, b_n], m \leqslant n$ (Рис. 23).

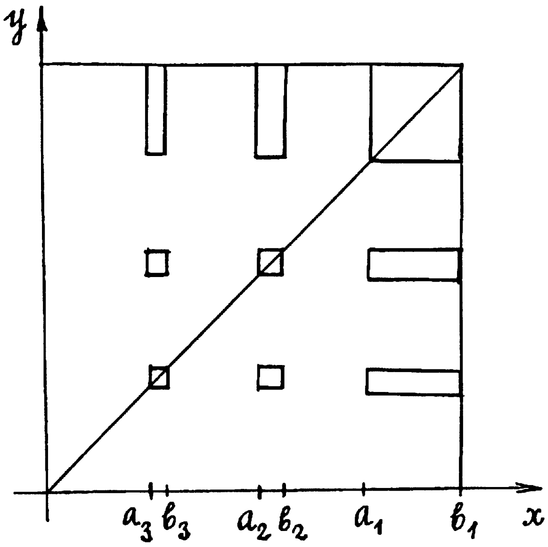

Рис. 23.

Действительно, пусть такое пересечение имеет место, то есть для некоторого $x \in [a_m, b_m], \lambda x \in [a_n, b_n]$ или, что то же самое, $a_m \leqslant x \leqslant b_m, a_n \leqslant \lambda x \leqslant b_n$. Мы рассмотрим отдельно случаи $n = m$ и $m < n$. Пусть $m = n$, то есть $a_n \leqslant x \leqslant b_n, a_n \leqslant \lambda x \leqslant b_n$. Тогда $a_n \leqslant \lambda x$ поэтому $\frac{a_n}{x} \leqslant \lambda$, $\frac{a_n}{b_n} \leqslant \lambda$, $\alpha_n \leqslant \lambda$. Но это неравенство может быть верным только для конечного числа элементов последовательности (α_n), так как $(\alpha_n) \longrightarrow 1$, а $\lambda < 1$. Случай $m = n$ рассмотрен. Пусть теперь $m < n$, то есть $a_m \leqslant x \leqslant b_m, a_n \leqslant \lambda x \leqslant b_n$, Тогда $\lambda \leqslant \frac{b_n}{a_m}$, но $\frac{b_n}{a_m} = \frac{a_{n-1}^2}{a_m} = a_{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_m} \leqslant a_{n-1}$. Таким образом $\lambda \leqslant a_{n-1}$ и, так как $(a_n) \longrightarrow 0$, существует только конечное число элементов последовательности (a_n), для которых это неравенство верно.

Итак произвольно фиксированная прямая $y = \lambda x$ не пересекается с прямоугольниками $[a_m, b_m] \times [a_n, b_n]$ для достаточно малых значений x и, таким образом, $f(x)f(\lambda x) = 0$ для всех достаточно малых значений x, последовательность $(f(x_n), f(\lambda x_n))$ является объединением двух последовательностей, одна из которых сходится к $(0,0)$ на горизонтальной прямой, а другая сходится к $(0,0)$ на вертикальной прямой. Отсюда следует сходимость $(f(x_n), f(\lambda x_n) \longrightarrow_\beta (0,0)$. Бинепрерывность отображения f доказана.

3. Монотонная кусочно линейность. Следующий пример показывает, что варьируя систему прямых можно доказать наличие специальных свойств у соответствующих этой системе кусочно линейных отображений.

Пример 4. Пусть β получена ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^2$ посредством системы всех прямых $y - a = \lambda(x - a)$ в $\mathbb{R}^2$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda < 0$. Можно доказать в этой ситуации, что отображение $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ *бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно кусочно линейно и либо строго монотонно либо постоянно.*

Этот пример в общем аналогичен Примеру 1, различие состоит только в том,что вместо условия $\lambda > 0$ вводится условие $\lambda < 0$. Соответственно и многие рассуждения здесь фактически повторяют рассуждения, использованные в Примере 1.

Пусть β – топологическая структура на $\mathbb{R}^2$, полученная ослаблением обычной топологической структуры посредством указанной системы прямых. Сразу заметим, что и в этом примере, β индуцирует дискретную топологию на каждой горизонгальной и на каждой вертикальной прямой. Рвссмотрим теперь произвольное бинепрерывное отображение $f : (\mathbb{R}, \beta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta)$ и докажем, что оно является кусочно линейным отображением. Для этого достаточно доказать, что f линейно на отрезках $[x, x+\epsilon]$, $[x-\epsilon, x]$ для каждого $x \in \mathbb{R}$, где ϵ зависит от x. Заметим, что можно считать $f(0) = 0$, рассмотрев, в случае необходимости, композицию f со сдвигом на $\mathbb{R}$. Наша ближайшая цель доказать, что f либо не обращается в ноль ни в одной точке отрезков $[-\epsilon, 0], [0, \epsilon]$ для некоторого $\epsilon > 0$ либо тождественно равно нулю на них (здесь проявляется различие между условием $\lambda > 0$ и условием $\lambda < 0$).

Дальнейшее рассуждение аналогично соответствующему рассуждению Примера 1 с той разницей, что для $\lambda < 0$ последовательность $(f(\lambda x_n))$ принадлежит, начиная с некоторого n, не отрезку $[0,1]$, а отрезку $[-1,0]$. Поэтому приходится сначала рассматривать последовательность $(x_n, -\sqrt{\lambda}x_n)$, $\lambda > 0$, для которой все $f(x_n) = 0$ и поэтому начиная с некоторого n все $f(-\sqrt{\lambda}x_n) = 0$, и уж затем рассматривать последовательность $(-\sqrt{\lambda}x_n), \lambda x_n)$, для которой, начиная с некоторого n все $f(\lambda x_n) = 0$. В дальнейших рассуждениях также приходится использовать вместо одного перехода от последовательности (x_n) к последовательности $(\sqrt[n]{\lambda}x_n)$ два перехода, а именно сначала от (x_n) к $(-\sqrt[2n]{\lambda}x_n)$ и затем от $(-\sqrt[2n]{\lambda}x_n)$ к $(\sqrt[n]{\lambda}x_n)$.

Таким образом будет доказано, что для некоторого $\epsilon > 0$ функция $f(x)$ обращается в ноль на $[-\epsilon, \epsilon]$ либо только в точке 0 либо на всем этом отрезке. Дальнейшие рассуждения приводящие к установлению линейности f на $[-\epsilon, 0]$ и на $[0, \epsilon]$ проходят в Примере 4 в точности так же, как в Примере 1. Остается доказать, что отображение f либо строго монотонно либо постоянно.

Пусть f – не постоянное отображение, то есть оно не постоянно и линейно на некотором отрезке, причем можно считать, что оно строго монотонно на этом отрезке. Этот отрезок содержится в некоторой максимальной области строгой монотонности рассматриваемой функции. Допустим, что эта область не совпадает с $\mathbb{R}$, тогда найдется хоть одна точка ограничивающая эту область. Без нарушения общности можно считать, что эта точка x_0 является общим концом двух отрезков, на одном из которых функция f линейна и возрастает, а на другом она не возрастает, иначе говоря, существуют $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \leqslant 0$ такие, что

$$f(x) = \begin{cases} f(x_0) + \lambda_1(x - x_0), & x < x_0 \\ f(x_0) + \lambda_2(x - x_0), & x > x_0. \end{cases}$$

Тогда имеет место сходимость $(x_0-2^{-n}, x_0+2^{-n}) \longrightarrow (x_0, x_0)$ и в то же время $f(x_0-2^{-n}) = f(x_0)+\lambda_1(-2^{-n}), f(x_0+2^{-n}) = f(x_0)+\lambda_2 2^{-n}$. Отсюда следует, что точка $f(x_0)$ не лежит между точками $f(x_0)+\lambda_1(-2^{-n}$ и $f(x_0)+\lambda_2 2^{-n})$ и поэтому $(f(x_0)+\lambda_1(-2^{-n}, f(x_0)+\lambda_2 2^{-n}) \not\longrightarrow (f(x_0, f(x_0))$. Тем самым доказано, что $f(x)$ является строго монотонной функцией.

4. Локализация и секвенциальность. Следующий пример показывает, что локализация секвенциальной структуры может оказаться в интересующих нас ситуациях не секвенциальной структурой.

Пример 5. Рассмотрим теперь локализацию β_0 битопологической структуры β Примера 2. Бинепрерывные отображения $f : (\mathbb{R}, \beta_0) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta_0)$ будут и в этом случае кусочно линейными отображениями, но не это нас сейчас интересует. Можно доказать, что до локализации топологическая структура на $\mathbb{R}^2$ будет секвенциальной, а ее локализация не будет секвенциальной топологической структурой на $\mathbb{R}^2$.

Действительно, пусть H – произвольное замкнутое в $(\mathbb{R}^2, \beta)$ множество. Если последовательность $(x_n|n \in \mathbb{N})$,состоящая из точек множества H, сходится в $(\mathbb{R}^2, \beta)$ к некоторой точке $x \in \mathbb{R}^2$, то найдется такая не вертикальная прямая, проходящая через точку x, что пересечение этой последовательности с этой прямой является сходящейся к x последовательностью. Так как пересечение множества H с этой прямой является замкнутым множеством, то $x \in H$. Но тогда множество H содержит все точки к которым сходятся последовательности точек принадлежащих H. Пусть теперь H – некоторое множество, содержащее все точки к которым сходятся последовательности точек из H. Тогда пересечение этого множества с любой прямой обладает тем же свойством и потому является замкнутым множеством, откуда следует, что и H является замкнутым множеством. Тем самым доказано, что β – секвенциальная топологическая структура.

Перейдем теперь к битопологическому пространству $(\mathbb{R}, \beta_0)$. Рассмотрим множество $H = \{(x.y)|0 < x < 1, o < y < x^2\}$ (Рис. 24).

Точка $(0, 0)$ является предельной точкой множества H в топологическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \beta)$, поэтому она является предельной точкой этого множества и в пространстве $(\mathbb{R}^2, \beta_0)$. С другой стороны в H нет последовательности точек сходящейся к

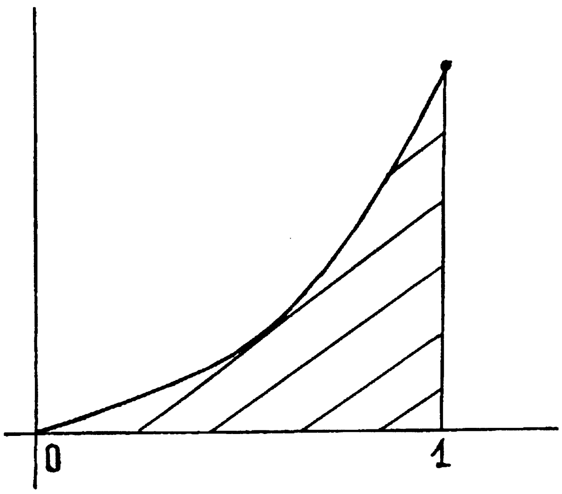

Рис. 24.

какой-нибудь точке вне H, что противоречит предположению о секвенциальности $(\mathbb{R}^2, \beta_0)$.

§2. Битопологические структуры на $\mathbb{R}^n$, $n > 1$

Наша ближайшая цель – рассмотреть отображения $\mathbb{R}^n$ в себя и в какой-то степени оценить возможность выделения того или иного класса таких отображений фиксацией на $\mathbb{R}^n$ соответствующей битопологической структуры. Мы будем, как правило, рассматривать здесь $\mathbb{R}^n$ только для $n > 1$, не оговаривая каждый раз это условие.

1. Экзотические примеры. Мы рассмотрим здесь три примера, прикладная ценность которых быть может и проблематична, но, тем не менее, теоретическая значимость бесспорна.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, β – топологическая структура на $X \times X$, определенная следуюшим образом:

на сферическом цилиндре $S_1 \times \Delta = \{(x, y) | d(x, y) = 1\}$, осью которого является диагональ $\Delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ а d – обычная метрика на $\mathbb{R}^{2n}$, топологическая структура индуцирована обычной топологией евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$ и каждое множество, не имеющее общих точек с этим сферическим цилиндром, принадлежит β.

Можно доказать, что любое отображение f битопологического пространства $(\mathbb{R}^n, \beta)$ в себя бинепрерывно тогда и только тогда, когда оно постоянно или является изометрией.

Действительно, пусть f не постоянное отображение. Тогда отмеченный в описании примера цилиндр отображается в себя, так как он является единственным связным неодноточечным множеством. Из этого определения следует, что любое бинепрерывное отображение (X, β) в себя либо постоянно (имеет одноточечный образ) либо отображдет выделенный сферический цилиндр в себя, то есть сохраняет единичное расстояние между точками x, y в $\mathbb{R}^n$. Можно доказать, что отображение $\mathbb{R}^n$ в себя, сохраняющее единичные расстояния между точками, является изометрией при $n > 1$, для $n = 1$ это более сложное отображение.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, β – топологическая структура на $X \times X$, определенная следуюшим образом:

на цилиндрах $S_a \times \Delta = \{(x, y) | d(x, y) = a\}$, $a \geqslant 0$, осью которых является диагональ $\Delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ а d – обычная метрика на $\mathbb{R}^{2n}$, топологическая структура индуцирована обычной топологией евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$ и каждый такой сферический цилиндр, включая диагональ (случай $a = 0$), является открыто-замкнутым в (X, β) множеством.

Из этого определения следует, что любое бинепрерывное отображение (X, β) в себя переводит пары точек с одинаковым расстоянием в пары точек с одинаковым (возможно другим) расстоянием. Можно доказать, что такие отображения являются отображениями подобия.

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, β – топологическая структура на $X \times X$, определенная следуюшим образом:

на всех множествах в $\mathbb{R}^{2n}$ параллельных диагонали $\Delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ топологическая структура индуцирована обычной топологией в $\mathbb{R}^{2n}$ и каждое такое множество открыто и, одновременно, замкнуто в (X, β).

Из этого определения следует, что любое бинепрерывное отображение (X, β) в себя переводит равные векторы евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в равные векторы. Можно доказать, что такие отображения являются линейными отображениями.

2. Условия кусочно линейности отображения $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Более содержательными являются следующие два примера, относящиеся к теории кусочно линейных многообразий.

Пример 4. Пусть β_n – топологическая структура, являющаяся ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ посредством системы n-мерных гиперплоскостей $y - a = \lambda(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$. Можно доказать тогда, что отображение $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$ *бинепрерывно тогда и только тогда, когда f является кусочно линейным отображением $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$*.

Действительно, случай $p = q = 1$ уже рассмотрен в Примере 1 предыдущего параграфа. Рассмотрим теперь случай $p = 1, q > 1$. Пусть $f : (\mathbb{R}, \beta_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$-бинепрерывное отображение. Тогда $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$, где каждое f_i отображает битопологическое пространство $(\mathbb{R}, \beta)$ Примера 1 в себя. В соответствии с заключительной частью этого примера, все f_i являются кусочно линейными отображениями и поэтому f – кусочно линейное отображение. Дальнейшее рассуждение использует индукцию по p при произвольном q.

Рассмотрим произвольно фиксированное бинепрерывное отображение $f : (\mathbb{R}^{p+1}, \beta_{p+1}) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$. Наша цель доказать, что это отображение будет кусочно линейным в предположении кусочно линейности любого бинепрерывного отображения $g : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$. Для этого достаточно доказать, что f-кусочно линейно в некоторой окрестности любой точки $x \in \mathbb{R}^{p+1}$. Без нарушения общности можно ограничиться изучением отображения f в окрестности точки O, все координаты которой равны нулю, и считать при этом, что $f(O) = O$. По предположению f – кусочно линейно на каждом луче L с начальной точкой O и поэтому линейно на некотором отрезке $[O, l]$ этого луча. Будем считать при этом, что это максимальный отрезок линейности отображения f на луче L (в частности может оказаться, что f линейно на всем луче L). Будем называть его *первым отрезком линейности* на луче L. Мы докажем, прежде всего, что совокупность точек первых отрезков линейности, взятых по всем лучам из O, является окрестностью точки O в $\mathbb{R}^{p+1}$.

Действительно, допустим, что существуют первые отрезки линейности сколь угодно малой длины. Рассмотрим тогда последовательность $[O, l_k]$ таких отрезков на лучах L_k, для которых $(l_k) \longrightarrow O$. Пусть $[l_k, l_k']$ – второй отрезок линейности отображения f на луче L_k. Фиксируем некоторое число λ, $0 < \lambda < 1$. На каждом луче L_k фиксируем затем такую точку $x_k \in [l_k, l_k']$, что $\lambda x_k \in [O, l_k]$. Ясно, что $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_{p+1}} (O, O)$. С другой стороны докажем, что эти точки $x_k, \lambda x_k$ можно выбрать так, что $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$. Для доказательства этого нам придется рассмотреть несколько случаев.

1) $f(l_k) = O$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае $f(l_k') \neq O$, так как $[O, l_k]$ – максимальный отрезок линейности отображения f на луче L_k. Тогда $f(x_k) \neq O$, но $f(\lambda x_k) = O$, поэтому $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$.

2) $f(l_k) \neq O$, точки $O, f(l_k), f(l_k')$ не лежат на одной прямой и поэтому не существует λ', для которого $f(\lambda x_k) = \lambda' f(x_k)$.

3) $f(l_k) \neq O$, точки $O, f(l_k), f(l_k')$ лежат на одной прямой. Без нарушения общности можно считать, что эти точки лежат на луче $L_k, f(l_k) = \mu_k l_k, \mu_k > 0, f(l_k') - f(l_k) = \mu'(l_k - l_k')$, причем $\mu_k' \neq \mu_k$, так как $[O, l_k]$ – максимальный отрезок линейности отображения f. Тогда

$$f(x_k) - f(l_k) = \mu_k'(x_k - l_k), f(\lambda x_k) = \mu \lambda x_k,$$

$$\frac{f(\lambda x_k)}{f(x_k)} = \lambda \mu_k \frac{x_k}{f(l_k) + \mu'(x_k - l_k)} = \lambda \mu_k \frac{x_k}{\mu_k l_k + \mu_k'(x_k - l_k)}$$

Если x_k близко к l_k $(x_k \sim l_k)$, то $\lambda_k' = \frac{f(\lambda x_k)}{f(x_k)} \sim \frac{\lambda}{l_k} x_k$, поэтому мы можем варьировать величину λ_k' слегка меняя x_k. Таким образом и в этом случае мы найдем последовательность x_k такую, что $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_{p+1}} (O, O)$, но $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$.

Ясно, что для любой последовательности $(l_k) \longrightarrow O$ мы будем иметь один из этих трех случаев, переходя, если это необходимо, к ее подпоследовательности, поэтому существование такой последовательности приводит нас к противоречию. Тем самым доказано, что точки всех отрезков линейности $[O, l]$ образуют окрестность точки O. В этой окрестности можно взять $(p+1)$-мерный симплекс, содержащий внутри точку O. Тогда, по индуктивному предположению, отображение f кусочно линейно на границе этого симплекса, а на отрезках, соединяющих точку O с точками границы симплекса, это отображение, по доказанному выше, линейно. Отсюда следует, что f – кусочно линейно на всем симплексе, то есть кусочно линейно на некоторой окрестности точки O.

Мы доказали, что из бинепрерывности отображения $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}_q, \beta_q)$ следует кусочно линейность отображения $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ – кусочно линейное отображение докажем, что в этом случае отображение $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}_q, \beta_q)$ будет бинепрерывным отображением. Без нарушения общности можно предполагать, что $f(O) = O$. Пусть $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_p} (O, O)$, докажем, что $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$. Опять же без нарушения общности можно предполагать, что вся последовательность $(\lambda x_k, x_k)$ целиком содержится в некотором симплексе содержащемся в $\mathbb{R}^q$ и f отображает этот симплекс линейно на некоторый симплекс содержащийся в $\mathbb{R}^q$. Но тогда любая пара точек $\lambda x_k, x_k$ переходит при отображении f в пару точек $f(\lambda x_k) = \lambda f(x_k), f(x_k)$ и, таким образом, $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно заметить, что битопологическая структура этого примера симметрична и транзитивна, однако условие $\lambda > 0$, обеспечивающее симметричность, несущественно для результативной части примера. Тот же результат мы получим, если опустим условие $\lambda > 0$. Иначе говоря, справедливо заключение следующего примера.

Пример 5. Пусть β_n – топологическая структура, являющаяся ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ посредством системы n-мерных гиперплоскостей $y - a = \lambda(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$. Можно доказать тогда, что отображение $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^q, \beta_q)$ *бинепрерывно, тогда и только тогда, когда f является кусочно линейным отображением $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$.*

Пример 6. Пусть β_n – топологическая структура, являющаяся ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ посредством системы n-мерных гиперплоскостей $y - a = \lambda(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^n$ (здесь $\lambda(x - a)$ рассматривается, как точка в $\mathbb{R}^n$ с координатами $\lambda_i(x_i - a_i)$). Можно доказать тогда, что отображение $f : (\mathbb{R}^p, \beta_p) \longrightarrow (\mathbb{R}_q, \beta_q)$ бинепрерывно, тогда и только тогда, когда f является кусочно линейным отображением $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$.

Действительно, случай $p = 1$, q – произвольно, рассматривается, как в Примере 4. Отклонения от рассуждений этого примера начинается в той его части, которая касается множества всех точек первых отрезков линейности отображения на лучах выходящих из точки O. Нам надо доказать, что точка O является внутренней точкой этого множества. Как в Примере 4, мы допускаем, что это неверно, то есть существует какая-то последовательность $[O, l_k]$ первых отрезков линейности на лучах L_k, для которых $(l_k) \longrightarrow O$. Пусть $[l_k, l_k{}']$ – второй отрезок линейности отображения f на луче L_k. Фиксируем некоторое число $\lambda, 0 < \lambda < 1$. На каждом луче L_k фиксируем затем такую точку $x_k \in [l_k, l'_k]$, что $\lambda x_k \in [O, l_k]$. Ясно, что $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_{p+1}} (O, O)$. С другой стороны докажем,что эти точки $x_k, \lambda x_k$ можно выбрать так, что $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$. Для доказательства этого нам придется рассмотреть,как в Примере 4, несколько случаев.

1) $f(l_k) = O$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае $f(l'_k) \neq O$, так как $[O, l_k]$ – максимальный отрезок линейности отображения f на луче L_k. Тогда $f(x_k) \neq O$, но $f(\lambda x_k) = O$, поэтому $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$.

2) $f(l_k) \neq O$, точки $O, f(l_k), f(l'_k)$ не лежат на одной прямой. В этом случае рассуждения отличны от рассуждений аналогичного случая Примера 4. Дело в том, что для Примера 4 расположение точек O, $f(x_k)$ и $f(\lambda x_k)$ не на одной прямой противоречит условию, в то время как для примера 6 этот факт, сам по себе, условию не противоречит. Точки O, $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ и $(\lambda_1 t_1, \lambda_2 t_2, \ldots, \lambda_q t_q)$ могут и не лежать на одной прямой.

Поэтому в этом случае необходимо дополнительное исследование. Так как для всех k последующие рассуждения и вычисления одинаковы, то индекс k мы будем опускать. Итак мы имеем следующую ситуацию. Рассматривается ограничение отображения f на отрезок, лежащий в $\mathbb{R}^p$. По условию этот отрезок состоит из двух отрезков $[O_p, l]$ и $[l, l']$, на каждом из которых отображение f линейно и потому определяется образами $f(l)$ и $f(l')$ точек l и l', соответственно. Пусть (Рис. 25)

$$f(l) = (t_1, t_2, \ldots, t_p),\ f(l') = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_p),$$

$$x = \mu l + (1-\mu) l',\ l' = \alpha l,\ x = \mu l + (1-\mu)\alpha l = (\mu + (1-\mu)\alpha) l.$$

$$\lambda x = \lambda(\mu + (1-\mu)\alpha) l \text{ и поэтому}$$

$$f(x) = (\mu t_1 + (1-\mu) t'_1, \mu t_2 + (1-\mu) t'_2, \ldots, \mu t_q + (1-\mu) t'_q),$$

$$f(\lambda x) = (\lambda(\mu + (1-\mu)\alpha) t_1, \lambda(\mu + (1-\mu)\alpha) t_2, \ldots, \lambda(\mu + (1-\mu)\alpha) t_q).$$

Заметим, при этом, что в случае 2 хотя бы для одного из $i = 1, 2, \ldots, q$ выполняется условие $t'_i \neq \alpha t_i$. Действительно, если

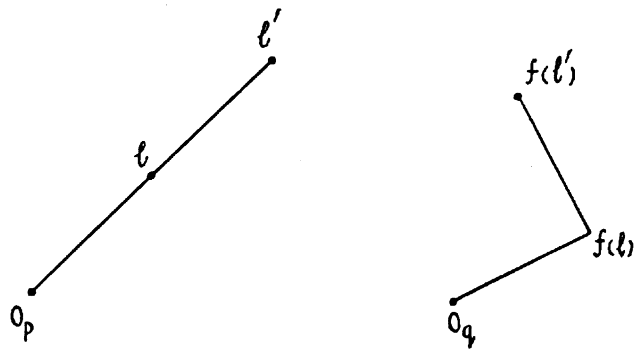

Рис. 25.

$t'_i = \alpha t_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, q$, то точки O_q, $f(l)$, $f(l')$ будут лежать на одной прямой в $\mathbb{R}^q$, а линейные отображения отрезка $[O_p, l]$ на отрезок $[O_q, f(l)]$ и отрезка $[l, l']$ на отрезок $[f(l), f(l')]$ будут иметь одинаковый коэффициент растяжения. Но это противоречит тому, что отрезок $[O_p, l]$ является первым отрезком линейности отображения f на луче L. В дальнейшем мы будем рассматривать только i-тые координаты всех точек.

Рассмотрим отношение i-тых координат точек $f(x)$ и $f(\lambda x)$.

$$\frac{f(x)_i}{f(\lambda x)_i} = \frac{\mu t_i + (1-\mu)t'_i}{\lambda(\mu t_i + \alpha(1-\mu)t_i)} = \phi(\mu).$$

Вычислим, теперь, производную этой функции в точке $\mu = 1$.

$$\phi'(\mu) = \left(\frac{\mu t_i + (1-\mu)t'_i}{\lambda(\mu t_i + \alpha(1-\mu)t_i)}\right)' =$$
$$= \frac{(t_i - t'_i)\lambda(\mu t_i + \alpha(1-\mu)t_i) - (t_i - \alpha t_i)(\mu t_i + (1-\mu)t_i)}{(\lambda(\mu t_i + \alpha(1-\mu)t_i)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\phi'(1) = \frac{\alpha t_i - t'_i}{\lambda t_i} \neq 0,$$

так как $t_i' \neq \alpha t_i$. Но это значит, что изменение значения μ вблизи 1 приводит к изменению значения $\frac{f(x)_i}{f(\lambda x)_i}$ и, тем самым к изменению значения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$.

Тем самым доказано, при сделанном нами предположении о существовании сколь угодно малых первых отрезков линейности, существование такой последовательности точек x_k, что $(\lambda x_k, x_k) \longrightarrow_{\beta_{p+1}} (O, O)$, а $(f(\lambda x_k), f(x_k)) \not\longrightarrow_{\beta_q} (O, O)$. Дальнейшее рассуждение то же самое, что и в Примере 4.

§3. Битопологически полные системы отображений $\mathbb{R}^n$ в себя

В этом разделе мы рассмотрим некоторые битопологически полные системы непрерывных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя.

1. Кусочно линейные отображения.

Теорема 1.. *Множество Φ_l всех кусочно линейных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя битопологически полно.*

Доказательство. Напомним, что β_{Φ_l} – топологическая структура на $\mathbb{R}^{2n}$, порожденная графиками Γ_φ всех отображений φ, принадлежащих Φ_l. На каждом из этих графиков его топологическая структура индуцирована обычной топологией евклидова пространства, а $G \in \beta_{\Phi_l}$, если $G \cap \Gamma_\varphi$ – открытое в Γ_φ множество для всех $\varphi \in \Phi_l$.

Пусть $\psi : (R^n, \tau) \longrightarrow (R^n, \tau)$ – Φ_l-отображение (τ – обычная топология евклидова пространства), то есть $1 \times \psi : (R^n, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \beta_{\Phi_l})$ – непрерывное отображение. Предположим, что $\psi \notin \Phi_l$. Тогда найдется точка $\mathcal{M}_0 \in \mathbb{R}^n$, в любой окрестности которой отображение ψ не кусочно линейно. Фиксируем в дальнейшем эту точку $\mathcal{M}_0$ и некоторую последовательность (ϵ_i) положительных чисел, стремящуюся к нулю. Выберем точки $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ в R^n, находящиеся в общем положении, так, что $|\mathcal{M}_0\mathcal{M}_k| < \epsilon_k; k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда существует единственное линейное отображение $\varphi : R^n \longrightarrow R^n$, совпадающее с ψ в этих точках. Так как в ϵ_{n+1}-окрестности точки $\mathcal{M}_0$ отображение ψ не кусочно ленейно, то в этой окрестности найдется точка $\mathcal{M}_{n+1}$, для которой $\varphi(\mathcal{M}_{n+1}) \neq \psi(\mathcal{M}_{n+1})$ и точки $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n+1}$ находятся в общем положении. Тогда существует лишь конечное число линейных отображений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, совпадающих с ψ на $n+1$-членных подмножествах последовательности $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n+1}$. Так как в ϵ_{n+2}-окрестности точки $\mathcal{M}_0$ отображение ψ не кусочно линейно, то в этой окрестности найдется точка $\mathcal{M}_{n+2}$, в которой значение отображения ψ не совпадает со значениями функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, а точки $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n+2}$ находятся в общем положении. Продолжая это индуктивное построение, мы получим бесконечную последовательность $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N})$, обладающую следующими свойствами:

1) $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N}) \longrightarrow_\tau \mathcal{M}_0$.

2) $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N})$ – последовательность точек в общем положении.

3) Каковы бы ни были точки $\mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2} \ldots, \mathcal{M}_{i_n}$ этой последовательности, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, и линейное отображение φ, совпадающее с ψ на этих точках, $\varphi(\mathcal{M}_i) \neq \psi(\mathcal{M}_i)$ для $i > i_n$.

Так как $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N}) \longrightarrow_\tau \mathcal{M}_0$, а ψ является Φ_l-отображением, то $(\mathcal{M}_i, \psi(\mathcal{M}_i)) | i \in \mathbb{N}) \longrightarrow_{\beta_{\Phi_l}} (\mathcal{M}_0, \psi(\mathcal{M}_0))$, и существует множество Γ_φ для $\varphi \in \Phi_l$, содержащее бесконечно много точек из $\{\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N}\}$, то есть существуют линейные отображения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, графики которых, в совокупности, содержат бесконечно много точек из $\{\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N}\}$, а потому один из этих графиков содержит бесконечно много таких точек. Без нарушения общности можно считать, что вся последовательность $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N})$ содержится в этом графике, то есть существует линейное отображение φ такое, что $\varphi(\mathcal{M}_i) = \psi(\mathcal{M}_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Но это противоречит свойству 3, а именно тому, что $\varphi(\mathcal{M}_{n+1}) \neq \psi(\mathcal{M}_{n+1})$. Теорема доказана.

Мы перейдем теперь к кусочно полиномиальным отображениям, определяемым, подобно кусочно линейным, системами функций вида $y_i = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, но теперь $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольный многочлен.

2. Кусочно полиномиальные отображения.

Теорема 2. *Множество Φ_p всех кусочно полиномиальных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя битопологически полно.*

Доказательство. Схема доказательства этой теоремы аналогична схеме доказательства предыдущей теоремы. Различие состоит в разном понимании общего положения точек конечной или бесконечной последовательности $(\mathcal{M}_i)$. При этом возникают определенные трудности. Если $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, то все его компоненты являются линейными функциями и потому любое линейное отображение однозначно определяется $n+1$ точками, находящимися в общем положении. В случае, когда мы имеем дело с полиномиальными отображениями, их компоненты являются многочленами, каждый из которых имеет свою степень. Поэтому количество точек, требуемых для однозначного определения такого отображения зависит от степеней этих многочленов, оно различно для разных полиномиальных отображений. В связи с этим, приходится вводить сответствующее понятие полиномиально общего положения точек в $\mathbb{R}^n$. Доказательство теоремы требует некоторых результатов, относящихся к этому понятию, которые нам сейчас придется рассмотреть.

Существуют различные классификации многочленов. Основной характеристикой многочлена является его *степень*, однако для нас нужна будет и другая характеристика, которую мы будем называть длиной многочлена.

Как обычно *одночленом* называется произведение

$$x_1{}^{m_1} x_2{}^{m_2} \dots x_n{}^{m_n},$$

линейную комбинацию k различных одночленов будем называть *многочленом длины* k. Будем говорить, что точки $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$ находятся в P_k-общем положении, если любой многочлен $P_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ длины k может быть однозначно определен своими значениями в этих точках. Будем говорить, что конечное или бесконечное множество $\{\mathcal{M}_i\} \subset \mathbb{R}^n$ находится в полиномиально общем положении, если любые k точек этого множества находятся в P_k-общем положении для всех возможных k.

Будем говорить, что полиномиальное отображение имеет длину k, если все его составляющие имеют длину не больше k и хоть одна составляющая имеет длину k. В соответствии с этим определением, k точек в $\mathbb{R}^n$ находится в P_k-общем положении, если каждое полиномиальное отображение длины k однозначно определено его значениями в этих точках.

Лемма. *Пусть* $\{\mathcal{M}_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ *– некоторое множество точек, находящееся в полиномиально общем положении. Тогда множество точек* $\mathcal{M}$*, для которых* $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ *снова находится в полиномиально общем положении, всюду плотно в* $\mathbb{R}^n$*. При* *этом это множество остается всюду плотным после удаления из него любого счетного обведининия нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Множество $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_i | i = 1, 2, \ldots, m\}$ находится в полиномиально общем положении, если множество $\{\mathcal{M}_i | i = 1, 2, \ldots, m\}$ находится в полиномиально общем положении и каждое множество $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2}, \ldots, \mathcal{M}_{i_k}\}$ находится в P_{k+1}-общем положении, для каждого $k = 1.2, \ldots, m$. Иначе говоря $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_i | i = 1, 2, \ldots, m\}$ не находится в полиномиально общем положении, если хоть одно из множеств $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2}, \ldots, \mathcal{M}_{i_k}\}$ не находится в P_k-общем положении. Если точки $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_{m+1}$ не находятся в P_{m+1}-общем положении, то координаты точки $\mathcal{M}$ удовлетворяют не более чем счетному числу нетривиальных уравнению (равенств нулю соответствующих определителей). Поэтому все такие точки содержатся в не более чем счетном числе нигде не плотных множеств. Отсюда следует, что множество точек $\mathcal{M}$, для которых $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}_i | i = 1, 2, \ldots, m\}$ находится в полиномиально общем положении, содержит дополнение до не более чем счетного числа нигде не плотных множеств и потому является всюду плотным множеством. Если теперь мы снова удаляем из этого множества какое-то счетное объединение нигде не плотных множеств, то мы получаем множество того же типа, то есть всюду плотное множество. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству самой теоремы.

Мы можем приступить, теперь, к построению последовательности $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N})$, обладающей следующими свойствами:

1) $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N}) \longrightarrow_\tau \mathcal{M}_0$,

2) $(\mathcal{M}_i | i \in \mathbb{N})$ – бесконечная последовательность в полиномиально общем положении,

3) Каковы бы ни были точки $\mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2} \ldots, \mathcal{M}_{i_k}$ этой последовательности, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, и полиномиальное отображение φ длины k и степени не более k, совпадающее с ψ на этих точках, $\varphi(\mathcal{M}_i) \neq \psi(\mathcal{M}_i)$ для $i > i_k$.

Пусть $\psi : (\mathbb{R}^n, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \tau)$ – Φ_p-отображение (τ – обычная топология евклидова пространства), то есть $1 \times \psi : (\mathbb{R}^n, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \beta_{\Phi_p})$ – непрерывное отображение. Предположим, что $\psi \notin \Phi_p$. Тогда найдется точка $\mathcal{M}_0 \in R^n$, в любой окрестности которой отображение ψ не кусочно полиномиально. Фиксируем в дальнейшем эту точку $\mathcal{M}_0$ и некоторую последовательность (ϵ_i) положительных чисел, стремящуюся к нулю. Выберем точку $\mathcal{M}_1$

в ϵ_1-окрестности точки $\mathcal{M}_0$ так, чтобы все ее координаты были отличны от нуля. Тогда эта точка образует систему точек в полиномиально общем положении, так как любой многочлен длины $k = 1$, то есть одночлен, однозначно определяется своим значением в точке $\mathcal{M}_1$. В силу леммы мы можем, теперь, выбрать в ϵ_2-окрестности точки $\mathcal{M}_0$ такую точку $\mathcal{M}_2$, что последовательность $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ находится в полиномиально общем положении и для любого полиномиального отображения $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ длины два, совпадающего с ψ на точке $\mathcal{M}_1$, его значение в точке $\mathcal{M}_2$ не совпадает с $\psi(\mathcal{M}_2)$.

Пусть построена последовательность $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_m$, находящаяся в полиномиально общем положении, для которой $|\mathcal{M}_0\mathcal{M}_i| < \epsilon_i$, причем для любых точек $\mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2} \ldots, \mathcal{M}_{i_k}$ этой последовательности, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, и полиномиального отображения φ длины k и степени не больше k, совпадающего с ψ на этих точках, $\varphi(\mathcal{M}_i) \neq \psi(\mathcal{M}_i)$ для $i > i_k$. Для индуктивного перехода к последовательности $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_{m+1}$ воспользуемся леммой. Лемма гарантирует существование точки $\mathcal{M}_{m+1}$, присоединение которой сохраняет полиномиально общее положение. При этом выбор такой точки можно осуществить, удовлетворяя некоторым дополнительным условиям, так можно считать, что $|\mathcal{M}_0\mathcal{M}_{m+1}| < \epsilon_{m+1}$. Заметим теперь, что имеется только конечное число полиномиальных отображений длины не больше k и степени не больше k, совпадающих с ψ на соответствующих точках. С другой стороны, отображние ψ не является, по предположению, кусочно полиномиальным отображением, поэтому можно удовлетворить еще одному условию, а именно:

для любых точек $\mathcal{M}_{i_1}, \mathcal{M}_{i_2} \ldots, \mathcal{M}_{i_k}$ этой последовательности, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m+1$, и полиномиального отображения φ длины k и степени не больше k, совпадающего с ψ на этих точках, $\varphi(\mathcal{M}_i) \neq \psi(\mathcal{M}_i)$ для $i > i_k$.

Последующие рассуждения повторяют заключительную часть доказательства предыдущей теоремы. Теорема доказана.

§4. Инициальные системы

1. Инициальные типы битопологических многообразий. Мы условились, что в качестве битопологических многообразий будем рассматривать произвольные топологические многообразия вместе с заданными на них битопологическими структурами, никак не связанными с топологическими структурами этих многообразий. Рассмотренные ранее примеры показывают, что и в такой ситуации мы можем получить интересные результаты. Согласование битопологической и топологической структуры является, таким образом, дополнительным свойством того или иного топологического многообразия. То же самое относится и к секвенциальности и к однородности битопологических многообразий.

Рассмотрим следующую конструкцию, дающую нам широкий класс битопологических многообразий. Фиксируем, прежде всего, некоторую битопологическую структуру β_{in} на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем называть ее инициальной. Пусть $\mathbb{M}$ – произвольное топологическое многообразие размерности n и $s = (U_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ – некоторое его открытое покрытие, причем все U_λ гомеоморфны евклидову пространству $\mathbb{R}^n$. Фиксируем некоторый гомеоморфизм $\phi_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ для каждого U_λ из s. Тогда для каждого U_λ будет определена битопологическая структура $\beta_\lambda = (\phi_\lambda)^{-1}(\beta_{in})$, иначе говоря, определена топологическая структура β_λ на $U_\lambda \times U_\lambda$.

Для любых U_λ и $U\mu$ из s рассматривается их пересечение $U_{\lambda\mu}$ и битопологическая структура $\beta_{\lambda\mu} = \beta_\lambda | U_{\lambda\mu}$. Если

$$\beta_{\lambda\mu} = \beta_{\mu\lambda} \subset \beta_\lambda$$

для всех $\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda$, то будем говорить, что система $((U_\lambda, \phi_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$ согласована. Будем говорить, что эта система имеет тип β_{in} и определена на топологическом многообразии $\mathbb{M}$.

Задание на $\mathbb{M}$ некоторой согласованной системы $((U_\lambda, \phi_\lambda)|\lambda \in \Lambda)$, позволяет вводить на $\mathbb{M}$ различные битопологические структуры, получаемые соответствующими объединениями битопологических структур этой системы. Сюда относятся,прежде всего, локальные объединения и транзитивные объединения.

Замечание. Существование системы типа β_{in} на заданном многообразии $\mathbb{M}$, зависит как от битопологической структуры β_{in} так и от самого многообразия. Например для любого открытого покрытия $(U_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ топологического многообразия $\mathbb{R}^n$ система типа β_{in} существует для любой битопологической структуры β_{in} на $\mathbb{R}^n$ и любого открытого покрытия $(U_\lambda|\lambda \in \Lambda)$. В качестве ϕ_λ можно взять тождественные отображения. С другой стороны *можно построить пример инициальной битопологической структуры β_{in} и топологического многообразия $\mathbb{M}$, на котором не существует системы типа β_{in}.*

Пример. Фиксируем на прямой $\mathbb{R}$ в качестве инициальной структуры локальную битопологическую структуру β^1_{in}, такую, что невозможен никакой бигомеоморфизм ее интервалов кроме тождественного. Такую битопологическую структуру на $\mathbb{R}$ можно определить, например, следующим образом. Перенумеруем все рациональные точки прямой и проведем через каждую рациональную точку прямой $y = x$ столько прямых в $\mathbb{R}^2$ каков номер этой точки, через остальные точки прямые проводить не будем. В качестве β^1_{in} возьмем локализацию ослабления обычной топологии на $\mathbb{R}^2$ посредством указанной системы прямых. Так определенная битопологическая структура на $\mathbb{R}$ обладает указанным выше свойством, а именно невозможен никакой бигомеоморфизм между интервалами битопологической прямой $(\mathbb{R}, \beta^1_{in})$ кроме тождественного. Действительно, допустим, что φ – бигомеоморфизм некоторого интервала (a_1, b_1) на интервал (a_2, b_2), не являющийся тождественным отображением. Тогда найдется такая точка $x \in (a_1, b_1)$, что $\varphi(x) \neq x$. Мы можем считать, что x является рациональной точкой, так как φ-образы рациональных точек достаточно близких к точке x будут близки к $\varphi(x)$ и потому на этих рациональных точках отображение φ не тождественно. Итак, найдется рациональная точка x, для которой $x' = \varphi(x) \neq x$. Точки x и x' будут иметь разные номера и потому при определении β^1_{in} через них проводится в $\mathbb{R}^2$ разное количество прямых. Без нарушения общности можно считать, что номер точки x больше номера точки x' и поэтому через нее было проведено больше прямых. Но тогда $\varphi\times\varphi$-образ какой-то проведенной через x прямой не будет прямой проведенной через точку x', поэтому $\varphi \times \varphi$-образы последовательностей на этой прямой, сходящихся к точке (x, x), не будут сходиться к точке $x' \times x'$. Тем самым мы доказали, что β^1_{in} имеет интересующее нас свойство.

Пусть $\mathbb{M}$ – окружность и s – некоторое открытое покрытие этой окружности. Допустим, что это покрытие можно дополнить до системы типа β_{in}, указав соответствующие вложения всех его элементов в $\mathbb{R}$. Тогда можно будет указать конечное покрытие окружности, вписанное в s, и состоящее из интервалов, вложения которых в $\mathbb{R}$ являются ограничениями вложений содержащих их элементов покрытия s, взятых по одному для каждого из этих интервалов. Нетрудно заметить, что мы получим таким способом новую, более простую систему типа β_{in}. При этом можно считать без нарушения общности, что интервалы рассматриваемого покрытия окружности образуют цепочку, в которой пересекаются только соседние в этой цепочке интервалы. Тогда найдется хоть одно из пересечений двух соседних интервалов U_i, U_{i+1}, на котором вложения ϕ_i, ϕ_{i+1} различны, что противоречит данному выше определениюю битопологической структуры на $\mathbb{R}$.

2. Свойства инициальных битопологий. Мы не накладывали пока никаких ограничений на инициальные битопологические структуры. Теперь будут рассмотрены некоторые свойства инициальных битопологий, то есть битопологических структур на $\mathbb{R}^n$. Хотелось бы, прежде всего, установить связи между инициальными битопологиями на пространствах $\mathbb{R}^n$ различной размерности так, чтобы они составляли единые, в каком-то смысле, системы битопологических структур, составляющие основы единых теорий. Примером такого рода систем инициальных битопологических структур на пространствах $\mathbb{R}^n$ всех размерностей являются структуры β_{npl}, получаемые ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ посредством совокупности графиков всех кусочно линейных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя. Другим примером является система, состоящая из локализаций таких структур. В этих примерах инициальные битопологические структуры обладают следующим свойством:

Пусть $(\beta^n_{in} | n \in \mathbb{N})$ – некоторая система инициальных битопологических структур (инициальная система) на евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ и $j : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – изометричное вложение, $m \leqslant n$. Тогда $(j \times j)^{-1}(\beta^n_{in}) = \beta^m_{in}$.

Действительно, пусть $j : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – вложение евклидова пространства, $m \leqslant n$, надо доказать, что $(j \times j)^{-1}(\beta_{npl}) = \beta_{mpl}$. Заметим, прежде всего, что график Γ_φ любого кусочно линейного отображения $\mathbb{R}^m$ в себя можно представить в виде $\Gamma_\varphi = (j \times j)^{-1}(\Gamma_\psi)$, где ψ – некоторое кусочно линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в себя. С другой стороны, если ψ – некоторое кусочно линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в себя, то $(j \times j)^{-1}(\Gamma_\psi)$ может и не быть графиком какого-нибудь кусочно линейного отображения $\mathbb{R}^m$ в себя. Однако в этом случае найдется кусочно линейное отображение ψ', совпадающее с ψ на j, для которого $(j \times j)^{-1}(\Gamma_{\psi'})$ уже является графиком кусочно линейного отображения. Это отображение ψ' можно определить, как композицию ψ и кусочно линейного отображения $\mathbb{R}^n$ на $j(\mathbb{R}^m)$, тождественного на подпространстве $j(\mathbb{R}^m)$. Нетрудно теперь заметить, что $(j \times j)^{-1}(\Gamma_\psi)$, будет замкнутым подмножеством множества $(j \times j)^{-1}(\Gamma'_\psi)$.

Структуры β_{npl} и β_{mpl} являются ослаблениями обычных топологических структур пространств $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2m}$, соответственно, посредством систем графиков всех кусочно линейных отображений этих пространств в себя. Добавление к таким графикам их замкнутых подмножеств не изменит результат ослабления. Мы пришли таким образом к ситуации раздела 2.8, в котором рассматривалась наследственность ослабления. Мы имеем в $\mathbb{R}^{2n}$ замкнутое подпространство $(j \times j)(\mathbb{R}^{2m})$, систему $\mathcal{A}$ подмножеств, состоящую из графиков кусочно линейных отображений $\mathbb{R}^{2n}$ в себя, ослабления обычных топологических структур β и β' на $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2m}$ по системам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}' = \{A \cap (j \times j)(\mathbb{R}^{2m}) | A \in \mathcal{A}\}$. В этих условиях $(j \times j)(\beta_{mpl})$ будет совпадать с $\beta_{\mathcal{A}}|(j \times j)(\mathbb{R}^{2m})$ и поэтому $\beta_{mpl} = (j \times j)^{-1}(\beta_{npl})$.

Если инициальная система обладает этим свойством, то будем говорить, что она *наследственно инициальна*. Мы доказали, что системы (β_{npl}) и $(loc\beta_{npl})$ – наследственно инициальны.

Будем говорить, что инициальная система $(\beta^n_{in} | n \in \mathcal{N})$ инвариатна (соответственно *горизонтально* или *вертикально* инвариантна), если для любой сохраняющей оринтацию изометрии $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ и любого $n \in \mathbb{N}$ отображение $g \times g$ (соответственно $g \times i$ или $i \times g$) является гомеоморфизмом.

Примером горизонтально и вертикально инвариантной инициальной систеиы является система (β_{npl}).

Другим специальным свойством инициальных систем является их *мультипликативность*. Инициальная система называется мультипликативной, если $(\mathbb{R}^p, \beta^p_{in}) \times (\mathbb{R}^q, \beta^q_{in}) = (\mathbb{R}^{p+q}, \beta^{p+q}_{in})$.

Для построения мультипликативной инициальной системы достаточно ввести некоторую инициальную структуру β_{in} на $\mathbb{R}$. На всех остальных евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ инициальные структуры β^n_{in} определяются одномерной инициальной битопологической структурой, так как $(\mathbb{R}^n, \beta^n_{in}) = (\mathbb{R}, \beta_{in})^n$.

Особенно интересны инициальные битопологические системы, обладающие всеми этими свойствами. Для задания такой инициальной системы достаточно определить систему окрестностей в $\mathbb{R}^2$ только для какой-нибудь одной точки. Если же мы рассматриваем локальную инициальную систему, то для нее отсутствует горизонтальная или вертикальная инвариантность, которые заменяются, в случае необходимости, инвариантностью. В этой ситуации достаточно определить систему окрестностей в $\mathbb{R}^2$ только для какой-нибудь одной точки диагонали, например в нулевой точке. Можно рассмотреть, например, сходимость направленных систем точек плоскости $\mathbb{R}^2$ к точке $(0,0)$, положив $(x_n, y_n)|n \in N) \longrightarrow (0,0)$, если $y_n = \lambda x_n$ для всех $n \geqslant n_0$. такая сходимость определяет инвариантную, наследственную, мультипликативную инициальную систему, для которой сходимость в $\mathbb{R}^{2n}$ к нулевой точке определяется условием

$$((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \longrightarrow (0, 0, \dots, 0)),$$

если

$$y_1 = \lambda_1 x_1, \ y_2 = \lambda_2 x_2, \dots, y_n = \lambda_n x_n.$$

3. Мультипликативные инициальные системы. Мультипликативные инициальные системы определяются достаточно просто и легче других поддаются изучению. Для того чтобы ввести какую-нибудь мультипликативную инициальную систему достаточно задать на $\mathbb{R}$ некоторую битопологическую структуру β. На всех остальных евклидовых пространствах битопологическая структура определяется тогда условием мультипликативности. Соответствующая инициальная структура β_n на $\mathbb{R}^n$ будет битопологической структурой произведения $(\mathbb{R}, \beta)^n$, она конечно не равна β^n и в общем случае не будет даже разложимой битопологической структурой. Нетрудно догадаться, что в этой ситуации β_n разложима тогда и только тогда, когда β разложимая битопологическая структура. Действительно, пусть $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, тогда битопологическая структура произведения $(\mathbb{R}, \tau_1 \times \tau_2)^n$ равна ${\tau_1}^n \times {\tau_2}^n$. С другой стороны, пусть для некоторого n битопологическая структура β_n разложима. Так как $(\mathbb{R}^n, \beta_n)$-разложимое битопологическое пространство, а битопологическое прстранство $(\mathbb{R}, \beta)$ является, как сомножитель в $(\mathbb{R}, \beta)^n = (\mathbb{R}^n, \beta_n)$ его подпространством, то и $(\mathbb{R}, \beta)$ =разложимое битопологическое пространство. Приведенное здесь рассуждение позволяет утверждать, что *если хоть одна из битопологических структур мультипликативной инициальной системы разложима*, то и все остальные битопологические структуры этой системы разложимы. Инициальную систему, состоящую из разложимых битопологических структур будем называть *разложимой*.

4. Разложимые инициальные структуры. Разложимость является мультипликативным и наследственным свойством битопологических структур. Приведенное в предыдущем пункте доказательство того, что мультипликативная инициальная система разложима тогда и только тогда, когда хоть одна из структур системы разложима, основано только на мультипликативности и наследственности зтого свойства. Поэтому можно утверждать, что справедливо следующее утверждение:

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое свойство битопологических структур, обладающее мультипликативностью и наследственностью. Тогда, если хоть одна из битопологических структур инициальной системы обладает свойством $\mathcal{P}$, то и все битопологические структуры этой системы обладают свойством $\mathcal{P}$. В этом случае мы будем говорить, что сама инициальная система обладает свойством $\mathcal{P}$. Так, например, мы можем говорить о парно хаусдорфовых инициальных системах, локально разложимых инициальных системах и так далее.

Мультипликативость инициальной системы обеспечить легко. Выше было отмечено, что для этого достаточно ввести на $\mathbb{R}$ любую инициальную структуру β_{in}, а на всех остальных евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ ввести инициальные структуры β^n_{in}, являющиеся битопологическими структурами битопологических пространств $(\mathbb{R},\beta_{in})^n$. Ясно, что свойства битопологической структуры β определят тогда свойства инициальной системы $(\beta^n_{in}|n\in\mathbb{N})$ в целом. Возникает сразу проблема зависимости свойств мультипликативной инициальной системы от свойств одномерной инициальной битопологической структуры.

5. Сжимаемость инициальной структуры. Следующее рассуждение показывает характер требований, предъявляемых к одномерной битопологической структуре β, для обеспечения наследственности мультипликативной инициальной системы (β^n_{in}), порожденной β. Наследственность такой системы означает, в частности, что $(j\times j)^{-1}(\beta^2_{in})=\beta$ для любого изометричного вложения

$$j:(\mathbb{R},\beta)\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\beta^2_{in}).$$

Пусть $j(t)=(x_1,x_2)$, где $x_1=l_1t,\ x_2=l_2t,\ l_1^2+l_2^2=1,\ G\in\beta$ – произвольная окрестность нуля в $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\beta)$. Тогда множество

$U = \{(x_1, x_2, y_1, y_2)|(x_1, y_1) \in G,\ (x_2, y_2) \in G\} \in \beta^2_{in}$ и поэтому $G' = (j \times j)^{-1}(U) \in \beta$. Но $(j \times j)(t_1, t_2) \in U \iff (l_1t_1, l_1t_2) \in G, (l_2t_1, l_2t_2) \in G$. Отсюда следует, что $G' = G$, если $l_1 = 0$ или $l_2 = 0$. Если же $l_1l_2 \neq 0$, то $G' = \frac{1}{l_1}G \cap \frac{1}{l_2}G$, то есть $G \subset G'$. Таким образом возникает условие

$$G \in \beta \iff lG \in \beta$$

для любого $l > 0$ и любой окрестности нуля $G \in \beta$.

Выполнение этого условия мы будем называть *сжимаемостью* β. Нетрудно также доказать, что для наследственности любой мультипликативной инициальной системы необходима вдобавок инвариантность битопологической структуры β. Заметим теперь, что выполнение условий инвариантности и сжимаемости битопологической структуры β обеспечивает наследственность мультипликативной инициальной системы в более широком смысле, когда рассматриваются не только изометричные, но и любые линейные вложения.

§5. Классы битопологических многообразий

1. Инициальные классы битопологических многообразий. Понятие класса битопологических многообразий, являющееся основой различных конкретных теорий, в свою очередь основывается на двух понятиях, а именно на понятии инициальной системы и на понятии топологического многообразия. С инициальными системами мы познакомились в предыдущем параграфе, рассмотрим теперь понятие топологического многообразия.

Топологическое пространство M мы будем называть n-мерным топологическим многообразием без границы, если на нем может быть указано не более чем счетное открытое покрытие множествами гомеоморфными $\mathbb{R}^n$. О топологических многообразиях с границей мы говорить здесь не будем, тем более мы не будем говорить о битопологических многообразиях с границей.

Фиксируем некоторую инициальную систему $\mathcal{I} = (\beta^n_{in}|n \in \mathcal{N})$. $\mathcal{I}$-битопологическим многообразием мы будем называть n-мерное топологическое многообразие $\mathbb{M}$, на котором определена некоторая битопологическая структура β, определено некоторое не более чем счетное открытое покрытие (G_λ) и гомеоморфизмы $g_\lambda : G_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\beta|G_\lambda = g^{-1}(\beta^n_{in})$ для каждого элемента G_λ этого покрытия. Если исходная инициальная система состоит из локальных битопологических пространств, то рассматриваются только локальные битопологические структуры β и мы получаем некоторый класс $\mathcal{I}$ локальных битопологических многообразий. Если исходная инициальная система состоит из транзитивных битопологических пространств, то рассматриваются только транзитивные битопологические структуры β и мы получаем некоторый класс $\mathcal{I}$ транзитивных битопологических многообразий. В этих случаях битопологическая структура соответствующего многообразия определена системой $(g^{-1}(\beta_{in}^n)|n \in \mathbb{N})$.

2. Глобальность битопологического метода. Рассмотренное нами определение понятия битопологического многообразия отчасти копирует соответствующие определения гладких многообразий и кусочно линейных многообразий. Правда там рассматриваются системы покрытий, составляющих так называемые атласы, но это обстоятельство вызвано невозможностью глобального определения соответствующей структуры. В теории битопологических многообразий такая возможность есть и в этом состоит преимущество битопологического подхода. Рассмотрим, например, классическое определение кусочно линейного многообразия (без границы) и сравним это определение с битопологическим.

Кусочно линейным n-мерным многообразием называется топологическое многообразие снабженное так называемыми атласами карт. Каждый атлас является каким-то открытым покрытием этого многообразия, состоящим из множеств гомеоморфных областям в $\mathbb{R}^n$ (открытым множествам), причем для каждой из этих областей G_i фиксирован такой гомеоморфизм g_i. Эти фиксированные гомеоморфизмы согласованы друг с другом в следующем смысле:

Для любой пары гомеоморфизмов $g_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g_j : G_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$ рассматривается пересечение $G_{ij} = G_i \cap G_j$. На этом пересечении определены два вложения $g_{ij} = g_i|G_{ij} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ и $g_{ji} = g_j|G_{ji} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Требуется чтобы каждое отображение $g_{ji}g_{ij}^{-1}$ было кусочно линейным отображением области $g_{ij}(G_{ij})$ в $\mathbb{R}^n$.

Требуется также, чтобы все атласы были согласованы так, чтобы объединение любых атласов было бы снова атласом. Совокупность всех таких атласов будем называть кусочно линейной структурой, рассматриваемого кусочно линейного многообразия.

При битопологическом определении кусочно линейного многообразия нет необходимости фиксировать на топологическом многообразии атласы. Достаточно ввести на нем соответствующую битопологическую структуру. Для этого можно воспользоваться, например, инициальной структурой β_{npl}, перенеся эту структуру на гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ области в топологическом многообразии так, чтобы было возможно построить их объединение.

3. Битопологические классы $\mathcal{I}$-многообразий. Для произвольно фиксированной инициальной системы $\mathcal{I}$ можно не только ввести класс $\mathcal{I}$-многообразий, но и развивать соответствующую теорию. Конечно содержание такой теории определяется наличием тех или иных свойств данной инициальной системы, однако некоторую ее часть можно развивать в общей ситуации. Так, например, в любом классе $\mathcal{I}$ можно ввести понятие подмногообразия.

Будем говорить, что $\mathcal{I}$ – многообразие $\mathbb{M}^m$ является $\mathcal{I}$-подмногообразием $\mathcal{I}$-многообразия $\mathbb{M}^n$, если $\mathbb{M}^m$ является подпространством $\mathbb{M}^n$ и битопологическая структура $\mathcal{I}$-многообразия $\mathbb{M}^m$ индуцируется битопологической структурой $\mathcal{I}$-многообразия $\mathbb{M}^n$.

Можно рассматривать также $\mathcal{I}$-функции, то есть бинепрерывные отображения $\mathcal{I}$ в $(\mathbb{R}, \beta_{1in})$ и развивать аналог теории Морса, но в общем случае мы не получим содержательную теорию. Мы столкнемся на этом пути прежде всего с такой проблемой. Пусть $f : \mathbb{M} \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta_{1in})$ – бинепрерывное отображение и $f^{-1}(x)$ является топологическим многообразием. Будет ли оно $\mathcal{I}$-подмногообразием в $\mathbb{M}$?

4. Один класс $\mathcal{I}$-многообразий. Мы рассмотрим сейчас один интересный класс $\mathcal{I}$-битопологических многообразий. Он будет определен, как мультипликативный класс, для которого β^1_{in} является ослаблением обычной топологической структуры евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ посредством системы всех прямых $y - b = k(x - a)$, (a, b) – произвольная точка плоскости, $k \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Нетрудно доказать, что в этом случае каждая инициальная битопологическая структура β^n_{in} будет ослаблением обычной топологической структуры евклидова пространства $\mathcal{R}^{2n}$ посредством системы всех n-мерных гиперплоскостей

$$y_i - b_i = k_i(x_i - a_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – произвольная точка из $\mathbb{R}^{2n}$.

§6. Ростки сходимостей в битопологических многообразиях

1. Ростки направленных систем точек. Пусть X – некоторое множество и Ξ – направленное множество. Рассмотрим множество X^Ξ всех направленных систем $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ точек множества X. Говорят, что две *направленные системы точек* $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ и $(x'_\xi|\xi \in \Xi)$ *принадлежат одному и тому же ростку*, если найдется такое ξ_0, что $x_\xi = x'_\xi$ для всех $\xi > \xi_0$. Во многих случаях изучение множества всех направленных систем можно заменить изучением множества их ростков. В частности, такая возможность имеется в теории сходимости направленных систем. Дело в том, что если две направленные системы точек $(x_\xi|\xi \in \Xi)$ и $(x'_\xi|\xi \in \Xi)$ в топологическом пространстве (X, τ) принадлежат одному и тому же ростку, то они одновременно либо сходятся к некоторой точке $x \in X$ либо к ней не сходятся. Действительно, пусть $(x_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow_\tau x$, то есть для любого $G \in \tau$ содержащего x найдется такое $\xi_1 \in \Xi$, что $x_\xi \in G$ для всех $\xi > \xi_1$. С другой стороны, найдется такое $\xi_2 \in \Xi$, что $x_\xi = x'_\xi$ для всех $\xi > \xi_2$. Так как Ξ – направленное множество, то найдется такое $\xi_0 \in \Xi$, что $\xi_0 > \xi_1$, $\xi_0 > \xi_2$. Отсюда следует, что $x'_\xi \in G$ для каждого $\xi > \xi_0$ и данного G и, тем самым, доказана сходимость $(x'_\xi|\xi \in \Xi) \longrightarrow_\tau x$.

Пусть $\mathbb{M} = (M, \beta)$ – произвольное битопологическое многообразие. Его битопологическая структура β, являясь топологическщй структурой на $M \times M$, может быть задана соответствующими сходимостями направленных систем точек в $M \times M$. В свою очередь, сходимость направленных систем точек может быть задана ростками сходящихся направленных систем. Особенно просто выглядит такое задание при соответствующих ограничениях накладываемых на β. Прежде всего это относится к секвенциальности β, так как тогда можно ограничиться сходимостями последовательностей точек в $M \times M$. С другой стороны ясно, что секвенциальность битопологических многообразий является непосредственным следствием секвенциальности инициальных битопологических структур β^n_{in}, поэтому следует начинать с изучения сходимости в $(\mathbb{R}^{2n}, \beta^n_{in})$. Ситуация становится еще проще, если инициальные битопологические структуры согласованы с топологическими структурами евклидовых пространств. В этом случае достаточно рассматривать пары сходящихся в $\mathbb{R}^n$ последовательностей точек или же переносы сходящихся в $\mathbb{R}^n$ последовательностей точек. От последовательностей мы можем перейти к их росткам, а от ростков сходящихся последовательностей мы можем перейти в рамках нестандартного анализа к точкам бесконечно близким к точкам из $\mathbb{R}^n$.

2. Локальные ростки. Битопологическая структура β битопологического многообразия $\mathcal{M}$,заданная на топологическом многообразии M, является топологической структурой на $M \times M$. Если β – локальная битопологическая структура, то достаточно рассматривать ее на $M \times \mathbb{R}^n$, отождествляя M с диагональю произведения $M \times M$. Более того, в этом случае достаточно рассматривать ростки сходимостей $((x_\lambda, y_\lambda)|\lambda \in \Lambda) \longrightarrow_{\beta_\xi} (x, x)$.

§7. Инфинитезимальные структуры на $\mathbb{R}^n$

1. Структура бесконечно малых. Теория кусочно линейных многообразий является далеко продвинутой теорией, причем в некоторых ее разделах, в частности при изучении четырехмерных многообразий, существенно используются сложные и далеко не топологические методы. В связи с этим возникает естественное желание как минимум переизложить соответствующие результаты на более топологическом и, следовательно, более естественном для топологов языке, а может быть и получить при этом новые результаты. Битопологический подход представляется пригодным для этой цели, так как он позволяет описывать кусочно линейные структуры, в рамках явно топологической теории. Мы видели, что теория кусочно линейных многообразий может быть построена на основе различных инициальных систем, однако мы будем пользоваться здесь только битопологическими структурами β_n, определяемыми следующим образом. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ инициальная битопологическая структура β_n является ослаблением обычной топологической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ посредством системы n-мерных гиперплоскостей $y - a = \lambda(x - a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$. Напомним, что топологическая структура β_n определяется сходимостями $((x_k + a, \lambda x_k + a)|k \in \mathbb{N}) \longrightarrow_{\beta_n} (a, a)$, рассматриваемыми для всех $a \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ и всех последовательностей $(x_k|k \in \mathbb{N})$ сходящихся к $0 \in \mathbb{R}^n$ в обычной топологии на $\mathbb{R}^n$.

От сходящихся в $\mathbb{R}^n$ последовательностей $(x_k|k \in \mathbb{N}) \longrightarrow 0$ мы можем перейти к их росткам, но гораздо удобнее со многих точек зрения рассматривать не ростки таких последовательностей, а соответствующие им бесконечно близкие к нулю в $(\mathbb{R}^*)^n$ (бесконечно малые) точки нестандартного анализа. Такое соответствие может быть осуществлено следующим образом. Фиксируем в $\mathbb{N}$ некоторый непустой исчезающий ультрафильтр γ. Такой ультрафильтр обладает следующими свойствами:

$$A \cup B \in \gamma \iff A \in \gamma \ \text{ или } B \in \gamma,$$

$$A \cap B \in \gamma \iff A \in \gamma \ \text{ и } B \in \gamma.$$

Фиксированный нами ультрафильтр γ позволяет ввести отношение эквивалентности для сходящихся к нулю в $\mathbb{R}^n$ последовательностей точек. Будем считать, что последовательности

$$(x_k | k \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad (x'_k | k \in \mathbb{N})$$

γ-эквивалентны, если $x_k = x'_k$ для всех k принадлежащих некоторому множеству $A \in \gamma$. Введенное таким образом отношение *является отношением эквивалентности*. Его рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность же доказывается следующим рассуждением. Пусть γ-эквивалетны последовательности $(x_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x'_k|k \in \mathbb{N})$, а также последовательности $(x'_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x''_k|k \in \mathbb{N})$. Зто значит, что $x_k = x'_k$ для всех k принадлежащих некоторому множеству $A \in \gamma$, а также $x'_k = x''_k$ для всех k, принадлежащих некоторому множеству $B \in \gamma$. Но тогда $x_k = x''_k$ для всех k, принадлежащих множеству $A \cap B \in \gamma$, то есть последовательности $(x_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x''_k|k \in \mathbb{N})$ будут также γ-эквивалентны.

Замечание. Мы говорили о классах γ-эквивалентности сходящихся к нулю последовательностей. Однако таким последовательностям могут оказаться γ-эквивалентными и последовательности вещественных чисел не сходящиеся к нулю. Например, если ультрафильтру γ принадлежит множество всех четных натуральных чисел, то ему не будет принадлежать множество всех нечетных натуральных чисел и поэтому последовательность $(x'_k|k \in \mathbb{N})$, совпадающая с последовательностью $(x_k = \frac{1}{k}|n \in \mathbb{N})$ для всех четных k и равная 1 для всех нечетных k не будет сходиться к нулю, но будет γ-эквивалентной сходящейся к нулю последовательности. Рассматривая бесконечно малые числа, как классы эквивалентности последовательностей, мы будем включать в них не только сходящиеся к нулю последовательности, но и γ-эквивалентные им не сходящиеся последовательности.

Каждый класс γ-эквивалентности рассматривается, как нестандартная точка из $(\mathbb{R}^*)^n$ бесконечно близкая к нулю. Так как любые последовательности $(x_k|k \in \mathbb{N})$ и $(x'_k|k \in \mathbb{N})$, принадлежащие одному и тому же ростку, совпадают почти для всех $k \in \mathbb{N}$, то каждому ростку соответствует однозначно определяемая им бесконечно малая точка. Более того разным росткам может соответствовать одна и та же бесконечно малая точка. Таким образом структура бесконечно малых точек грубее структуры ростков.

2. Линейное пространство бесконечно малых. Множество всех бесконечно малых точек можно рассматривать, как линейное пространство, перенося на последовательности точек и затем на классы их γ-эквивалентности операции сложения точек линейного пространства $\mathbb{R}^n$ и умножения их на вещественные числа (точки линейного пространства $\mathbb{R}$).

Рассмотрим сначала бесконечно малые числа. Множество всех бесконечно малых чисел (классов γ-эквивалентности последовательностей вещественных чисел) обозначим через $\mathcal{I}^*$. Это множество можно превратить в упорядоченное кольцо, введя на нем соответствующим образом сложение, умножение и отношение порядка, согласованное с этими операциями.

Операции сложения бесконечно малых чисел определяются следующим образом. Пусть

$$(x_k|n \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad (x'_k|k \in \mathbb{N})$$

– произвольные представители двух бесконечно малых чисел, то есть классов γ-эквивалентности α и α'. Тогда в качестве суммы $\alpha+\alpha'$, берется класс γ-эквивалентности, содержащий последовательность $(x_k + x'_k|k \in \mathbb{N})$. Нетрудно доказать, что класс $\alpha+\alpha'$ не зависит от выбора представителей классов α и α'. Аналогично вводится умножение бесконечно малых чисел и их умножение на вещественные числа.

Рассмотрим теперь отношение порядка на $\mathcal{I}^*$, при котором любые два бесконечно малых числа оказываются сравнимыми. Пусть

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) \quad \text{и} \quad (x'_k|k \in \mathbb{N})$$

– произвольные представители двух бесконечно малых чисел α и α'. Положим в $\mathcal{I}^*$

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) < (x'_k|k \in \mathbb{N}),$$

если $x_k < x'_k$ для всех k принадлежащих некоторому множеству $A \in \gamma$. Обозначим через $A_<$, $A_=$, $A_>$ – множества тех $k \in \mathbb{N}$, для которых мы имеем, соответственно, $x_k < x'_k$, $x_k = x'_k$, $x_k > x'_k$

Эти множества, очевидно, попарно не пересекаются и $A_< \cup A_= \cup A_> = \mathbb{N} \in \gamma$. Поэтому одно и только одно из этих множеств принадлежит γ и в соответствии с этим мы имеем один и только один из случаев:

$$(x_k|n \in \mathbb{N}) < (x'_k|k \in \mathbb{N}) \text{ то есть } \alpha < \alpha',$$

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) = (x'_k|k \in \mathbb{N}) \text{ то есть } \alpha = \alpha',$$

$$(x_k|k \in \mathbb{N}) > (x'_k|k \in \mathbb{N}) \text{ то есть } \alpha > \alpha'.$$

Нетрудно доказать, что такое сравнение не зависит от выбора представителей классов эквивалентности.

Множество всех бесконечно малых точек можно рассматривать теперь, как $(\mathcal{I}^*)^n$, операции сложения его элементов и операция умножения на вещественные числа покомпонентны. Удобнее, однако, рассматривать непосредственно классы γ-эквивалентности последовательностей точек пространства $\mathbb{R}^n$ и оперировать с этими классами подобно тому, как мы оперировали с классами последовательностей вещественных чисел.

3. Стандартная инфинитезимальная структура. Битопологическая структура β_n на $\mathbb{R}^n$ определялась так, чтобы класс всех бинепрерывных отображений $(\mathbb{R}^n, \beta_n)$ в себя совпадал с классом всех кусочно линейных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя. Это совпадение обеспечивается сохранением при таких отображениях структуры сходимости, определяемой сходимостями $((x_k, \lambda x_k)|k \in \mathbb{N}) \longrightarrow (0,0)$. Изучение этой структуры сходимости представляет большие трудности даже после перехода от последовательностей к их росткам, поэтому переход к нестандартному анализу представляет значительный интерес.

Рассмотрим новую структуру, состоящую из так называемых *инфинитезимальных лучей*. Инфинитезимальным лучем точки a будем называть любое множество $\{\lambda x + a|\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$, где x – произвольно фиксированная ненулевая точка из $(\mathcal{I}^*)^n$, a – произвольная точка из $\mathbb{R}^n$. В соответствии с этим определением каждое множество $\{x + a|x \in (\mathcal{I}^*)^n\} \setminus \{a\}$ разбивается на непересекающиеся инфинитезимальные лучи. Совокупность всех таких инфинитезимальных лучей будем называть *стандартной инфинитезимальной структурой* на $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что *отображение* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *сохраняет эту инфинитезимальную структуру, если его естественное продолжение* $f^* : (\mathbb{R}^*)^n \longrightarrow (\mathbb{R}^*)^n$ *переводит инфинитезимальные лучи в инфинитезимальные лучи.* Оказывается верным следующее утверждение.

Теорема. *Любое отображение* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *является кусочно линейным отображением тогда и только тогда, когда оно сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру.*

Доказательство. Пусть f – кусочно линейное отображение. Докажем, что оно сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру. Достаточно доказать это только для случая когда a и $f(a)$ – нулевые точки, комбинируя f в случае необходимости с соответствующими линейными отображениями. Так как f – кусочно линейное отображение, то оно сохраняет β_n-сходимость в $\mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим $x \in (\mathcal{I}^*)^n, \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда x и λx принадлежат некоторому инфинитезимальному лучу. Точка x является классом последовательностей, пусть $(x_n | n \in \mathbb{N})$ – произвольная последовательность из этого класса. Тогда последовательность $(\lambda x_k | k \in \mathbb{N})$ является представителем класса λx. Так как отображение f кусочно линейно на каждом луче в $\mathbb{R}^n$, то $f^*(\lambda x) = \lambda f^*(x)$ и, тем самым, отображение f сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру.

Пусть теперь известно, что f сохраняет стандартную инфинитезимальную структуру. Докажем, что в этом случае f является кусочно линейным отображением, то есть сохраняет β_n-сходимость в $\mathbb{R}^{2n}$. Допустим, что это не так и найдется последовательность $((x_k)|k \in \mathbb{N})$, для которой

$$((x_k, \lambda x_k)|n \in \mathbb{N}) \longrightarrow_{\beta_n} O,$$

но

$$((f(x_k), f(\lambda x_k))|n \in \mathbb{N}) \not\longrightarrow_{\beta_n} O,$$

где O – нулевая точка в $\mathbb{R}^{2n}$. Мы опять можем свести общий случай сходимости в $\mathbb{R}^{2n}$ к случаю сходимости к нулевой точке). Рассмотрим тогда последовательности $(f(x_k)|k \in \mathbb{N})$ и $(f(\lambda x_k)|k \in \mathbb{N})$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ либо найдется такое $\mu_k > 0$, что $f(\lambda x_k) = \mu_k f(x_k)$, либо такого числа не найдется, то есть

$f(\lambda x_k) \neq \mu f(x_k)$ для каждого $\mu \in \mathbb{R}$. Заметим теперь, что в силу нашего предположения относительно f-образа последовательности опять можем предположить, что f переводит нулевую точку в себя). Рассмотрим тогда последовательности $(f(x_k)|k \in \mathbb{N})$ и $(f(\lambda x_k)|k \in \mathbb{N})$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ либо найдется такое $\mu_k > 0$, что $f(\lambda x_k) = \mu_k f(x_k)$, либо такого числа не найдется, то есть $f(\lambda x_k) \neq \mu f(x_k)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$. Заметим, теперь, что в силу нашего предположения относительно f-образа последовательности $((x_k, \lambda x_k)|k \in \mathbb{N})$, либо множество $\{\mu_k | f(\lambda x_k) = \mu_k f(x_k)\}$ либо множество тех k, для которых $\{\mu | f(\lambda x_k) = \mu f(x_k)\} = \emptyset$, бесконечно. Действительно, если оба эти множества конечны, то последовательность $((f(x_k), f(\lambda x_k))|k \in \mathbb{N})$ будет объединением конечного числа, β_n-сходящихся к нулевой точке последовательностей и, следовательно, сама будет сходиться к нулевой точке.

Нам осталось рассмотреть отдельно два этих случая. В первом случае можно без нарушения общности считать, рассматривая, если надо, соответствующую подпоследовательность, что все μ_k различны. Переходя от последовательностей к соответствующим им классам γ-эквивалентности мы получаем бесконечно малые точки x, λx, $f(x)$, $f(\lambda x) = \lambda' x$, причем $\lambda' \notin \mathbb{R}$, что противоречит сохранению отображением f стандартной инфинитезимальной структуры. Во втором случае можно считать, что $f(\lambda x) = \lambda' x + y$, где λ' может, вообще говоря, принадлежать $\mathbb{R}^*$, но $y \neq \mu x$ ни для какого $\mu \in \mathbb{R}$, что опять противоречит сохранению отображением f стандартной инфинитезимальной структуры.

§8. Инфинитезимальные структуры на кусочно линейных многообразиях

1. Построение инфинитезимальной структуры на кусочно линейном многообразии. Пусть $\mathbb{M}^n$ – некоторое n-мерное кусочно линейное многообразие. Это значит, что на соответствующем топологическом многообразии заданы карты атласов, определяющие это кусочно линейное многообразие. При этом, как нетрудно заметить, мы можем ограничиться атласами, карты которых являются областями гомеоморфными $\mathbb{R}^n$, с фиксированным на них гомеоморфизмами $g_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольно фиксированную точку a из $\mathbb{M}^n$, произвольную карту G, содержащую эту точку, и $g : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – фиксированный для этой карты гомеоморфизм. Этот гомеоморфизм переводит точку a в точку $g(a) \in \mathbb{R}^n$. Он переводит также классы γ-эквивалентности сходящихся к a последовательностей точек из G в классы γ-эквивалентности сходящихся к $g(a)$ последовательностей точек из $\mathbb{R}^n$. Обратное отображение g^{-1}, наоборот, переводит классы γ-эквивалентности сходящихся к $g(a)$ последовательностей точек из $\mathbb{R}^n$ в классы γ-эквивалентности сходящихся к a последовательностей точек из G. При этом отображение g^{-1} переводит инфинитезимальные лучи точки $g(a)$ в совокупности бесконечно близких к a точек, которые мы будем также называть инфинитезимальными лучами точки a. Можно доказать, что разбиение множества всех бесконечно близких к a точек на инфинитезимальные лучи не зависит от карты кусочно линейного многообразия. Действительно, пусть G' – другая карта рассматриваемого кусочно линейного многообразия, содержащая точку a, и g' – фиксированное для этой карты отображение на $\mathbb{R}^n$. Тогда частичное отображение $g'g^{-1}$, являющееся кусочно линейным отображением, переводит точку $g(a)$ в точку $g'(a)$ и каждый инфинитезимальный луч в точке $g(a)$ переводит в инфинитезимальный луч в точке $g'(a)$. Отсюда непосредственно следует независимость разбиения всего множества точек бесконечно близких к точке a на инфинитезимальные лучи.

Тем самым доказано, что на кусочно линейном многообразии $\mathbb{M}$ однозначно определена инфинитезимальная структура, определяющая, в свою очередь, его кусочно линейную структуру, как соответствующую совокупность всех ее атласов.

2. Представления инфинитезимальной структуры. Мы определили инфинитезимальную структуру кусочно линейного многообразия, как разбиение каждого множества точек бесконечно близких к точке из $\mathbb{M}$ на инфинитезимальные лучи. Сейчас мы уточним это понятие. Пусть M^n – множество точек кусочно линейного многообразия $\mathbb{M}^n$. Как нам известно, это кусочно линейное многообразие можно представить некоторым битопологическим пространством (M^n, β). Рассмотрим топологическое пространство (M^n, τ), являющееся топологическим многообразием (будем обозначать его просто через M^n) и произведение $M^n \times \mathcal{I}^{*n}$. Множество $M^n \times (\mathcal{I}^*)^n$, можно рассматривать как расслоенное пространство с базой $\mathbb{M}^n$ и слоями $\{a\} \times (\mathcal{I}^*)^n$, $a \in M^n$. На каждый такой слой $\{a\} \times (\mathcal{I}^*)^n$ можно перенести стандартную инфинитезимальную структуру. Для этого, как мы только что убедились, достаточно фиксировать некоторый кусочно линейный гомеоморфизм g пространства $\mathbb{R}^n$ на какую-нибудь окрестность точки a. Таким образом мы получаем интерпретацию кусочно линейной структуры на топологическом многообразии (M^n, τ) расслоенным пространством с базой M^n, слоями $\{a\}\times(\mathcal{I}^*)^n$, $a \in M^n$ и соответствующими инфинитезимальными структурами на слоях.

Возможна и другая интерпретация. В ней мы рассматриваем нестандартное n-мерное топологическое многообразие $(\mathbb{M}^*)^n$ и выделяем в нем конечную часть, состоящую из всех конечных точек этого пространство, то есть всех точек, каждая из которых бесконечно близка какой- нибудь точке из $\mathbb{M}^n$. Как множество, это ни что иное как $M^n \times (\mathcal{I}^*)^n$, но слои $\{a\} \times (\mathcal{I}^*)^n$ "повернуты" по другому.

3. Инфинитезимальные структуры в кусочно линейной топологии. Нам представляется, что применение инфинитезимальных структур на топологических многообразиях может стать хорошим аппаратом теории кусочно линейных многообразий. Рассмотрим, например, задачу построения фальшивых $\mathbb{R}^4$. Нетрудно доказать, что она сводится к следующей задаче.

Рассматривается линейное пространство $\mathbb{R}^4$ и стандартно вложенное в него линейное пространство $\mathbb{R}^3$, определяемое уравнением $x_1 = 0$. Это линейное подпространство разбивает $\mathbb{R}^4$ на две области $\mathbb{R}^4_-$ и $\mathbb{R}^4_+$, определяемые неравенствами $x_1 < 0$ и $x_1 > 0$, соответственно. Требуется построить на $\mathbb{R}^4$ структуру кусочно линейного многообразия так, что она будет кусочно линейно изоморфна стандартной на $\mathbb{R}^4_-$ и на $\mathbb{R}^4_+$, но не будет кусочно линейно изоморфна стандартной на всем $\mathbb{R}^4$.

В связи с этой задачей возникает проблема описания инфинитезимальной структуры, определяющей стандартную кусочно линейную структуру, и построения инфинитезимальных структур, определяющих кусочно линейные структуры, отличные от стандартной (фальшивых структур). Эта проблема заслуживает особого внимания и изучения, соответствующие результаты не вошли в эту книгу.

Глава IV

БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

§1. Проблема битопологизации групп

1. Постановка проблемы. Попытки создания достаточно далеко продвинутой теории битопологических групп, естественно обобщающей теорию топологических групп, оказывались, как правило, мало результативными. Эти попытки заканчивались на этапе формирования основных понятий. Не удавалось даже сформулировать исходное понятие битопологической группы, которое стало бы общепризнанной основой соответствующей теории. Разные авторы предлагали существенно различные варианты.

Формулируя тот или иной вариант понятия битопологической группы, следует, конечно, исходить из определения топологической группы, изменяя его подходящим образом. Топологическая группа определяется, обычно, как пара (G, τ), где G-некоторая группа, а τ-топологическая структура на G. При этом требуется, чтобы групповая структура и топологическая структура на G были связаны следующими условиями:

отображение $p : (G \times G, \tau \times \tau) \longrightarrow (G, \tau)$, $p(x, y) = xy$, должно быть непрерывным отображением,

отображение $q : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$, $q(x) = x^{-1}$, должно быть гомеоморфизмом.

Исходя из этого понятия и формулировались, в основном, различные понятия битопологической группы. Можно ввести, например, на G не одну топологическую структуру τ, а две τ_1 и τ_2, рассматривая битопологические группы, как тройки (G, τ_1, τ_2), удовлетворяющие соответствующим условиям. С другой стороны, можно просто заменить в определении топологической группы структуру $\tau \times \tau$ на произвольную топологическую структуру β, рассматривая битопологические группы, как тройки (G, β, τ), удовлетворяющие соответствующим условиям. При этом можно не связывать β и τ дополнительными условиями, а с другой стороны можно потребовать, чтобы $\tau = \beta | X$.

Значительное количество различных определений понятия битопологической группы можно получить, исходя из другого, эквивалентного приведенному выше, понятия топологической группы, в формулировке которого фигурируют только отображения топологического пространства $(G \times G, \tau \times \tau)$ в себя. При переходе к понятию битопологической группы мы можем рассматривать только отображения топологического пространства $(G \times G, \beta)$, опять удовлетворяющие тем или иным условиям. Таким образом мы встаем перед необходимостью выбора, какого-то варианта понятия битопологического пространства из большого количества в принципе возможных вариантов и изучать значительное количество различных теорий.

2. Битопологические группы как тройки (G, τ_1, τ_2)**.** Повидимому первый из существующих в битопологической литературе вариантов понятия битопологической группы состоит в следующем:

Битопологической группой называется тройка (G, τ_1, τ_2), где G – какая-нибудь группа, а τ_1 и τ_2 – топологические структуры на G, связанные следующими условиями:

отображение $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1, \tau_2 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_1, \tau_2)$, $p(x, y) = xy$, должно быть бинепрерывным отображением,

отображение $q : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_2)$, $q(x) = x^{-1}$ должно быть гомеоморфизмом.

Нетрудно заметить, однако, что на самом деле задание любой такой битопологической группы эквивалентно заданию на G только одной топологической структуры, например τ_1, удовлетворяющей только одному условию, а именно

отображение $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_1)$, $p(x, y) = xy$, должно быть непрерывным отображением.

Действительно, топологическая структура τ_2 очевидным образом определяется топологической структурой τ_1, а именно $\tau_2 = \tau_1^{-1} = \{G^{-1} | G \in \tau_1\}, G^{-1} = \{x^{-1} | x \in G\}$, причем непрерывность отображения $p : (G \times G, \tau_2 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_2)$ следует из непрерывности отображения $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_1)$.

Таким образом рассматриваемое сейчас понятие битопологической группы получается,в действительности, из понятия топологической группы простым отбрасыванием условия

$q : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau), q(x) = x^{-1}$, – непрерывное отображение. *В таком понятии нет ничего битопологического.*

Не лучше обстоит дело, если мы будем рассматривать битопологическую группу, как тройку (X, τ_1, τ_2), но налагая на τ_1 и τ_2 другие условия, а именно:

отображения

$$p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_1)$$

$$p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_2)$$

должны быть непрерывными отображениями,

отображение

$$q : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_2)$$

должно быть гомеоморфизмом.

Такое понятие битопологической группы действительно является непосредственным обобщением понятия топологической группы, так как при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ мы приходим к обычному групповому определению. Однако *из сформулированных выше условий как раз и следует $\tau_1 = \tau_2$, то есть битопологическая* в этом смысле группа всегда является топологической группой.

Действительно, рассмотрим вложения

$$j_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2)$$

и

$$j_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2),$$

где $j_1(x) = (x, 1_G)$, $j_2(x) = (1_G, x)$. Отображения

$$pj_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_2), \quad pj_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_1)$$

будут взаимно однозначными непрерывными отображениями и потому $\tau_2 \subset \tau_1, \tau_1 \subset \tau_2$, то есть $\tau_1 = \tau_2$.

3. Битопологические группы, как тройки (G, β, τ)**.** Перейдем теперь к варианту, в котором *битопологическая группа понимается, как тройка* (G, β, τ), где β некоторая битопологическая структура на группе G, τ некоторая топологическая структура на G. При этом требуется, чтобы G, β, τ были связаны следующими условиями.

отображение $p : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G, \tau)$, $p(x, y) = xy$, должно быть непрерывным отображением,

отображение $q : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$, $q(x) = x^{-1}$, длжно быть гомеоморфизмом.

Очевидно, что такое понятие является непосредственным обобщением понятия топологической группы, однако в нем структуры β и τ слишком мало связаны друг с другом. В связи с этим было предложено связать β и τ, потребовав дополнительно, чтобы $\tau = \beta|G$. Оказалось, однако, что это условие слишком сильно. Если, например, $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, то $\tau_1 = \tau_2$.

Действительно, топологическая структура $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, определенная на $G \times G$, индуцирует на G при диагональном вложении $j : G \longrightarrow (G \times G), j(x) = (x, x)$, топологическую структуру $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2\} = \beta|G$. Так как отображения

$$p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau),$$
$$j_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2),$$
$$j_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2),$$

непрерывны, то непрерывны и отображения

$$pj_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau),$$
$$pj_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G, \tau),$$

и потому, в силу взаимной однозначности отображений pj_1 и pj_2, мы будем иметь включения $\tau \subset \tau_1$ и $\tau \subset \tau_2$, откуда следует $\tau_1 = \tau_2$.

Мы заметили, что *дополнительное условие* $\tau = \beta|G$ *слишком обременительно*. Его можно, однако, заменить другим, менее обременительным, условием, например потребовать, чтобы нельзя было при фиксированной битопологической структуре β расширить топологическую структуру τ.

Битопологические группы в измененном таким образом смысле фактически рассматривались в литературе, например изучались так называемые *полутопологические группы*.

Условия, накладываемые на полутопологическую группу, отличаются от условий накладываемых на топологическую группу тем, что вместо непрерывности отображения $p : (G \times G, \tau_1 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau)$ требуется непрерывность этого отображения на каждом горизонтальном в $G \times G$ множестве $G \times \{y\}$ и на каждом вертикальном множестве $\{x\} \times G$. Грубо говоря, вместо непрерывности отображения p по совокупности переменных x, y, как это требуется для топологической группы, требуется непрерывность по каждой из переменных в отдельности. Это условие непрерывности по каждой из переменных в отдельности можно заменить на условие непрерывности отображения p на всем топологическом пространстве (G, β) при подходящем выборе топологической структуры β. В качестве β можно взять топологическую структуру на $G \times G$, для которой множество F замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым горизонтальным и с каждым вертикальным в $G \times G$ множеством замкнуто относительно топологий индуцированных на этих множествах топологической структурой $\tau \times \tau$.

4. Чисто битопологический подход. Мы перейдем теперь к принципиально другому подходу к понятию битопологической группы, при котором в накладываемые на нее условия входят только отображения битопологического пространства в себя. Рассмотрим один из вариантов такого подхода, имеющийся в литературе.

Битопологическое пространство (G, β) называют *битопологической группой*, если G является группой, причем выполняются следующие условия:

отображение $m : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta)$, $m(x, y) = (xy, y^{-1}x)$, должно быть непрерывным отображением,

отображение $n : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta)$, $n(x, y) = (x^{-1}, y^{-1})$ должно быть непрерывным отображением.

Так как в формулировку понятия битопологической группы входит только битопологическое пространство (G, β), то нет необходимости рассматривать на G и некоторую топологическую структуру. Заметим,что если $\beta = \tau \times \tau$, то указанные выше условия переходят в условия непрерывности следующих отображений:

$$p : (G \times G, \tau \times \tau) \longrightarrow (G, \tau),\ p(x, y) = xy,$$

$$p' : (G \times G, \tau \times \tau) \longrightarrow (G, \tau),\ p'(x, y) = y^{-1}x,$$

$$q : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau),\ q(x) = x^{-1}.$$

Эти условия эквивалентны условиям обычного определения топологической группы и, следовательно, понятие битопологической группы в этом смысле является обобщением понятия топологической группы. Однако этот вариант имеет тот же недостаток, что и предыдущие, а именно, если $\beta = \tau_1 \times \tau_2$, то $\tau_1 = \tau_2$.

Действительно, пусть $\beta = \tau_1 \times \tau_2$. Тогда отображение $mj_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G \times G, \tau_1 \times \tau_2)$ непрерывно, $mj_1(x) = (x, x)$, так как $j_1(x) = (x, 1_G)$ и $m(x, 1_G) = (x, x)$. Заметим теперь, что отображение $j^{-1} : (\Delta, \beta|\Delta) \longrightarrow (G, \beta|G)$, $j^{-1}(x, x) = x$ также непрерывно, поэтому и отображение $j^{-1}mj_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau)$, где

$\tau = \beta|G = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ непрерывно. Отсюда следует вкдючение $\tau \subset \tau_1$. Аналогично доказывается включение $\tau \subset \tau_2$ (вместо отображения j_1 используется отображение j_2). Из этих включений следует $\tau_1 = \tau_2$.

5. Корректный вариант. Рассмотрим теперь еще один подход к понятию битопологической группы. Этот подход будет свободен от недостатков, присущих уже представленным здесь вариантам.

Битопологической группой будем называть пару (G, β), где G – некоторая группа, β – битопологическая структура на множестве G, такие, что отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta), \quad p(x, y) = xy,$$

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta), \quad q(x) = x^{-1}$$

бинепрерывны, то есть отображения $\overline{p} = p \times p$ и $\overline{q} = q \times q$ являются непрерывными отображениями соответствующих топологических пространств,

$$\overline{p}((x, y), (x', y')) = (xx', yy'),$$

$$\overline{q}(x, y) = (x^{-1}, y^{-1}).$$

Пусть (G, τ_1) и (G, τ_2) – топологические группы. Нетрудно доказать, что $(G, \tau_1 \times \tau_2)$ – битопологическая группа в только что определенном понимании. Действительно, в этом случае $(G, \beta) \times (G, \beta) = (G, \tau_1 \times \tau_2) \times (G, \tau_1 \times \tau_2) = (G \times G, \tau_1 \times \tau_1, \tau_2 \times \tau_2)$. Соответствующее топологическое пространство есть не что иное, как $(G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \times (G \times G, \tau_2 \times \tau_2)$ и $\overline{p}$ отображает $(G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \times (G \times G, \tau_2 \times \tau_2)$ в топогическое пространство $(G \times G, \tau_1 \times \tau_2) = (G, \tau_1) \times (G, \tau_2)$. Это отображение $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ непрерывно, так как непрерывны его составляющие

$$\overline{p}_1 : (G \times G, \tau_1 \times \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_1)$$

$$\overline{p}_2 : (G \times G, \tau_2 \times \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_2).$$

Аналогично, оказывается непрерывным и отображение $\overline{q} = (\overline{q}_1, \overline{q}_2)$, так как непрерывны его составляющие

$$\overline{q}_1 : (G, \tau_1) \longrightarrow (G, \tau_1), \overline{q}_1(x) = x^{-1}$$

$$\overline{q}_2 : (G, \tau_2) \longrightarrow (G, \tau_2), \overline{q}_2(y) = y^{-1}.$$

Таким образом, если (G, τ_1) и (G, τ_2) – топологические группы, то $(G, \tau_1 \times \tau_2)$ – битопологическая группа, очевидно и обратное утверждение. В качестве τ_1 можно взять для любой группы G дискретную топологическую структуру, а в качестве τ_2 – тривиальную. Это доказывает существование разложимой битопологической группы $(G, \tau_1 \times \tau_2)$ с $\tau_1 \neq \tau_2$ для любой группы G кроме, конечно, одноэлементной.

С другой стороны, если $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, то (G, τ) – топологическая группа тогда и только тогда, когда $(G, \tau \times \tau)$ – битопологическая группа. Таким образом рассматриваемое нами сейчас понятие битопологической группы является естественным обобщением понятия топологической группы. С другой стороны, это существенно битопологическое понятие, так как существуют неразложимые битопологические в этом смысле группы.

6. Примеры битопологических групп. Пусть G – произвольная не одноэлементная коммутативная группа. Рассмотрим множества $U_z = \{(x, y) | xy^{-1} = z\}$, для всех $z \in G$. Если $z_1 \neq z_2$, то $U_{z_1} \cap U_{z_2} = \emptyset$. Такие множетва, в совокупности, образуют базу некоторой топологической структуры β на $G \times G$. Докажем, что (G, β) является битопологической группой, то есть отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta),$$

$$q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

непрерывны. Для этого достаточно доказать справедливость следующих соотношений:

$$\overline{p}^{\,-1}(U_z) = \bigcup U_{z_1} \times U_{z_2} | z_1 z_2 = z$$

$$\overline{q}^{\,-1}(U_z) = U_{z^{-1}},$$

которые, в свою очередь, следуют из следующих эквивалентностей:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \overline{p}^{\,-1}(U_z) \iff \overline{p}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in U_z \iff$$

$$(x_1 x_2, y_1 y_2) \in U_z \iff (x_1 x_2)(y_1 y_2)^{-1} = z \iff (x_1 y_1^{-1})(x_2 y_2^{-1}) = z$$

$$\iff x_1 y_1^{-1} = z_1, x_2 y_2^{-1} = z_2, z_1 z_2 = z \iff$$

$$(x_1, y_1) \in U_{z_1}, (x_2, y_2) \in U_{z_2}, z_1 z_2 = z \iff$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in U_{z_1} \times U_{z_2}, z_1z_2 = z \iff$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \bigcup (U_{z_1} \times U_{z_2} | z_1z_2 = z$$

$$(x,y) \in \overline{q}^{-1}(U_z) \iff \overline{q}(x,y) \in U_z \iff (x^{-1},y^{-1}) \in U_z \iff$$

$$x^{-1}y = z \iff xy^{-1} = z^{-1} \iff (x,y) \in U_{z^{-1}}.$$

Такая битопологическая группа (G,β) будет неразложимой битопологической группой, она не будет даже локально разложимой битопологической группой. Например, открытое в (G,β) множество Δ не представимо объединением прямоугольных окрестностей его точек в (G,β).

Для некоммутативных групп, коммутант которых не совпадает со всей группой, можно предложить свое построение неразложимой битопологической группы. Пусть G' – коммутант группы G. Рассмотрим множества $U_z = \{(x,y)|xy^{-1} \in zG'\}$. Любые два из таких множеств либо совпадают либо не имеют общих точек. Это следует из того, что z_1G' и z_2G', являясь смежными классами разложения группы G по ее нормальному делителю G', либо совпадают (в том случае когда $z_1z_2^{-1} \in G'$) либо не имеют общих элементов. Множества U_z, взятые по всем $z \in G$ образуют базу топологической структуры β' на $G \times G$. Доказательство бинепрерывности отображений p и q при таком определении битопологической группы (G,β') осуществляется по той же схеме, что и в коммутативном случае. различие будет состоять лишь в том, что вместо условий типа $u = z$ рассматриваются условия типа $u \in zG'$. При этом используется тот факт, что факторгруппа G/G' является коммутативной группой.

7. Прямые и косые битопологические группы. Понятие битопологической группы, как группы G с фиксированной на ней битопологической структурой β, то есть пары (G,β), при условии бинепрерывности отображений

$$p : (G,\beta) \times (G,\beta) \longrightarrow (G,\beta), \quad p(x,y) = xy,$$

$$q : (G,\beta) \longrightarrow (G,\beta), \quad q(x) = x^{-1}$$

представляется, на первый взгляд, единственной основой теории битопологических групп. Оно выгодно отличается от других, имеющихся в литературе, вариантов и свободно от их недостатков. Однако, как можно заметить, возможен и другой, не менее интересный вариант, отличающийся от уже описанного. Он получается заменой условия непрерывности отображения $\overline{q}$ (бинепрерывности отображения q) на условие непрерывности отображения

$$\overline{r} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \quad \overline{r}(x, y) = (y^{-1}, x^{-1}).$$

Это новое условие может быть записано, как условие бинепрерывности отображения $q : (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$, где $\beta^{-1} = \{U^{-1} | U \in \beta\}, U^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in U\}$.

Битопологическую группу в таком понимании будем называть *косой битопологической группой*. Примером косой битопологической группы является битопологическая прямая (R, τ_r, τ_l), рассматриваемая, как группа относительно сложения вещественных чисел. Здесь

$$\tau_r = \{\emptyset, R, (x, \infty) | x \in R\},$$

$$\tau_l = \{\emptyset, R, (-\infty, x) | x \in R\}.$$

Множества $U_{x,y} = (x, \infty) \times (-\infty, y), \{x, y\} \subset R\}$ образуют, в совокупности, базу топологической структуры β на $R \times R$. Соответственно, множества $U_{x,y}^{-1} = (-\infty, y) \times (x, \infty)$ образуют, в совокупности, базу битопологической структуры β^{-1}. Проверим непрерывность отображений $\overline{p}$ и $\overline{r}$.

$\overline{p}^{-1}(U_{x_0, y_0}) = \{((x_1, y_1), (x_2 . y_2)) | x_1 + x_2 > x_0, y_1 + y_2 < y_0\} = \{((x_1, y_1), (x_2 . y_2)) | x_1 + x_2 > x_0\} \cap \{((x_1, y_1), (x_2 . y_2)) | y_1 + y_2 < y_0\} = (\bigcup [(x_1, \infty) \times R \times (x_2, \infty) \times R] | x_1 + x_2 > x_0) \cap (\bigcup [R \times (-\infty, y_1) \times R \times (-\infty, y_2)] | y_1 + y_2 < y_0) \in \tau_r \times \tau_l \times \tau_r \times \tau_l$

$\overline{q}^{-1}(U_{x_0, y_0}^{-1}) = \{(x, y) | (-y, -x) \in U_{x_0, y_0}\} = \{(x, y) | -y \in (x_0, \infty), -x \in (-\infty, y_0\} = \{(x, y) | x \in (-y_0, \infty),\ y \in (-\infty, -x_0 = U_{-y_0, -x_0} \in \tau_r \times \tau_l$

Если β – симметричная битопологическая структура, то понятия битопологической группы (G, β) и косой битопологической группы (G, β) для нее совпадают, так как в этом случае $\beta = \beta^{-1}$.

8. Отсутствие других вариантов. На первый взгляд представляется возможным использовать идею скашивания битопологических групп и посредством изменения условия бинепрерывности отображения

$$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

– условия 1. Это означает переход к условию бинепрерывности одного из следующих отображений:

2) $$p : (G, \beta) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta)$$

3) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta)$$

4) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta)$$

5) $$p : (G, \beta) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

6) $$p : (G, \beta) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

7) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

8) $$p : (G, \beta^{-1}) \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta^{-1})$$

– всего восемь различных условий, считая вместе с исходным условием 1.

На самом деле условие 8 эквивалентно условию 1, а условия 2–7 являются даже более сильными условиями, чем условие 1, так как выполнение любого из условий 2–7 влечет симметричность битопологической структуры β, а для симметричных битопологических структур все условия 1–8 совпадают.

Действительно, каждое из условий 1–8 выполняется тогда и только тогда, когда выполняется двойственное ему условие, получаемое из исходного заменой β на β^{-1}. Дело в том, что переход от β к β^{-1} соответствует перестановке координат в $G \times G$, то есть переходу от точек (x, y) к точкам (y, x). Так как

$$(p \times p)\,((y, x), (y', x')) = (yy', xx'),$$

то непрерывность исходного отображения в точке $((y, x), (y', x'))$ означает непрерывность двойственного отображения в точке $((y, x), (y', x'))$. Поэтому достаточно рассмотреть условия 2–4. Мы докажем, что выполнение любого из условий 2–4 влечет симметричность битопологической структуры β.

Действительно, в этой ситуации одно из отображений

$$p : \{(1, 1)\} \times (G, \beta^{-1}) \longrightarrow (G, \beta), \quad P : (G, \beta) \times \{(1, 1)\} \longrightarrow (G, \beta)$$

бинепрерывно, следовательно $\beta \subset \beta^{-1}$, отсюда, заменяя β на β^{-1}, получаем $\beta^{-1} \subset \beta$ и поэтому $\beta = \beta^{-1}$.

Таким образом мы доказали, что условия 2–4 сильнее условия 1, что и означает невозможность “скашивания” за счет изменения условий 1 или 8. Вместе с тем доказано, что *других вариантов определения битопологической группы кроме прямой и косой нет.*

§2. Некоторые определения и конструкции

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые элементарные понятия и конструкции теории битопологических групп. При этом под битопологической группой будет пониматься пара (G, β) , удовлетворяющая условию непрерывности отображения $\overline{p}$,

$$\overline{p} : (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta),$$
$$\overline{p}((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

и отображения $\overline{q}$,

$$\overline{q} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \quad \overline{q}(x, y) = (x^{-1}, y^{-1})$$

или же (в косом варианте) отображения $\overline{r}$,

$$\overline{r} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \quad \overline{r}(x, y) = (y^{-1}, x^{-1})$$

1. Битопологические подгруппы. Пусть (G, β) – битопологическая группа и G' подгруппа группы G. Так как $G' \times G' \subset G \times G$, то топологическая структура β определяет на $G' \times G'$ топологическую структуру β' подпространства $(G' \times G', \beta')$ топологического пространства $(G \times G, \beta)$. Нетрудно заметить, что (G', β') будет битопологической группой в обоих вариантах.

Действительно, отображения $\overline{p}$ и $\overline{q}$ (или $\overline{r}$) сопоставляют точкам пространств $(G' \times G', \beta') \times (G' \times G', \beta')$ и $(G' \times G', \beta')$ точки пространства $(G' \times G', \beta')$. С другой стороны, эти топологические пространства являются подпространствами топологических пространств $(G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta)$ и $(G \times G, \beta)$, сответственно. В силу этого ограничения $\overline{p}\,'$, $\overline{q}\,'$ (или $\overline{r}\,'$) отображений $\overline{p}$, $\overline{q}$ (или $\overline{r}$) на эти подпространства будут непрерывными отображениями. Битопологическую группу (G', β'), будем называть подгруппой битопологической группы (G, β).

2. Битопологические факторгруппы. Пусть (G, β) – битопологическая группа и G' – нормальный делитель группы G. Разложению группы G на смежные классы нормального делителя

G' соответствует разбиение множества $G \times G$ на попарно непересекающиеся множества $aG' \times bG'$, $a \in G$, $b \in G$. Это разбиение определяет факторпространство $(G'' \times G'', \beta'')$. Здесь G'' – факторгруппа группы G по нормальному делителю G', а β'' – топологическая структура факторпространства пространства $(G \times G, \beta)$ по указанному разбиению множества $G \times G$. Отображение $\overline{u} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G'' \times G'', \beta'')$, где $\overline{u}(x, y) = xG' \times yG'$ будет, очевидно, непрерывным отображением. Естественно определяются отображения $\overline{p}''$ и $\overline{q}''$ (или $\overline{r}''$), при этом диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) & \xrightarrow{\overline{p}} & (G \times G, \beta) \\ {\scriptstyle \overline{u} \times \overline{u}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{u}}\Big\downarrow \\ (G'' \times G'', \beta'') \times (G'' \times G'', \beta'') & \xrightarrow{\overline{p}''} & (G'' \times G'', \beta'') \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} (G \times G, \beta) & \xrightarrow{\overline{q}} & (G \times G, \beta) \\ {\scriptstyle \overline{u}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{u}}\Big\downarrow \\ (G'' \times G'', \beta'') & \xrightarrow{\overline{q}''} & (G'' \times G'', \beta'') \end{array} \tag{2}$$

или же (в косом варианте)

$$\begin{array}{ccc} (G \times G, \beta) & \xrightarrow{\overline{r}} & (G \times G, \beta) \\ {\scriptstyle \overline{u}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{u}}\Big\downarrow \\ (G'' \times G'', \beta'') & \xrightarrow{\overline{r}''} & (G'' \times G'', \beta'') \end{array} \tag{3}$$

будут коммутативны.

Из непрерывности отображений $\overline{p}, \overline{q}$ (или $\overline{r}$), $\overline{u}$, и коммутативности диаграмм следует непрерывность отображений p, q (или r). Отсюда следует, что (G'', β'') является битопологической группой (в обоих вариантах). Будем называть ее факторгруппой битопологической группы (G, β) по нормальному делителю $G' \subset G$, $G'' = G/G'$.

3. Прямые произведения битопологических групп. Пусть $((G_\lambda, \beta_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$ – семейство битопологических групп, (G, β) – прямое произведение битопологических пространств $(G_\lambda, \beta_\lambda)$, взятое по всем $\lambda \in \Lambda$. Здесь $G = \prod G_\lambda | \lambda \in \Lambda$ – группа, являющаяся прямым произведением всех групп $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$, а топологическая структура β на $G \times G$ построена следующим образом:

Рассматриваются координатные проекции

$$\mathrm{pr}_\lambda : G \longrightarrow G_\lambda, \lambda \in \Lambda, \quad \mathrm{pr}_\mu(x_\lambda | \lambda \in \Lambda) = x_\mu,$$

и отображения

$$\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda : G \times G \longrightarrow G_\lambda \times G_\lambda.$$

Топологическая структура β порождается множествами $(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)^{-1}(U)$, взятыми по всем $\lambda \in \Lambda$ и по всем $U \in \beta_\lambda$. Иначе говоря, β есть наименьшая из топологических структур β' на множестве $G \times G$, для которых все $\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda : (G \times G, \beta') \longrightarrow (G_\lambda \times G_\lambda, \beta_\lambda)$ непрерывны.

Докажем тепепь, что (G, β) является битопологической группой. Заметим, прежде всего, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (G,\beta) \times (G,\beta)) & \xrightarrow{\overline{p}} & (G,\beta) \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda} \Big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{pr}_\lambda} \Big\downarrow \\ (G_\lambda,\beta_\lambda) \times (G_\lambda,\beta_\lambda) & \xrightarrow{\overline{p}_\lambda} & (G_\lambda,\beta_\lambda) \end{array}$$

коммутативна для каждого $\lambda \in \Lambda$.

Действительно,

$$(\mathrm{pr}_\lambda)\overline{p}((x,y),(x',y')) = \mathrm{pr}_\lambda(xx', yy') = ((xx')_\lambda, (yy')_\lambda) = (x_\lambda x'_\lambda, y_\lambda y'_\lambda)$$

$$\overline{p}_\lambda(\mathrm{pr}_\lambda \times \mathrm{pr}_\lambda)((x,y),(x',y')) = \overline{p}_\lambda((x_\lambda, y_\lambda),(x'_\lambda, y'_\lambda)) = (x_\lambda x'_\lambda, y_\lambda y'_\lambda)$$

что доказывает коммутативность диаграммы. С другой стороны, множества $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U)$, взятые по всем $\lambda \in \Lambda$ и $U \in \beta_\lambda$ порождают топологическую структуру β на множестве $G \times G$, поэтому непрерывность $\overline{p}$ будет доказана, если все $\overline{p}^{\,-1}(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U))$ – открытые множества. Но последнее утверждение следует из коммутативности той же диаграммы и бинепрерывности отображений $\overline{p}_\lambda$ и pr_λ для всех $\lambda \in \Lambda$.

4. Послойные отображения. Пусть (G, β) – некоторая битопологическая группа, прямая или косая. Тогда

$$\overline{p} : (G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta),$$

является непрерывным отображением,

$$\overline{p}((x,y),(x',y'))=(xx',yy').$$

Пусть, далее,

$$\overline{p}_{a,b}:\{(a,b)\}\times(G\times G,\beta)\longrightarrow(G\times G,\beta),$$

где

$$\overline{p}((a,b),(x,y))=(ax,by)$$

Это отображение непрерывно, как ограничение непрерывного отображения. Рассмотрим также отображение

$$\overline{j}_{a,b}:(G\times G,\beta)\longrightarrow(G\times G,\beta)\times(G\times G,\beta),$$

где

$$\overline{j}_{a,b}(x,y)=((a,b),(x,y)).$$

Это отображение является, очевидно, вложением, осуществляя гомеоморфизм $(G\times G)$ на $\{(a,b)\}\times(G\times G,\beta)$ Нетрудно заметить, что $\overline{p}_{a,b}$ также является гомеоморфизмом. Действительно, композиция

$$\overline{p}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{j}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{p}_{a,b}\overline{j}_{a,b}(x,y)$$

является тождественным отображением $(G\times G,\beta)$ на себя, так как

$$\overline{p}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{j}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{p}_{a,b}\overline{j}_{a,b}(x,y)=\overline{p}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{j}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{p}_{a,b}((a,b),(x,y))=$$

$$\overline{p}_{a_{-1},b_{-1}}\overline{j}_{a_{-1},b_{-1}}(ax,by)=\overline{p}_{a_{-1},b_{-1}}((a_{-1},b_{-1}),(ax,by))=(x,y).$$

Поэтому каждое отображение, входящее в эту композицию, в частности $\overline{p}_{a,b}$ является гомеоморфизмом.

§3. Битопологические и топологические группы

1. Диагональная топологическая группа. Пусть (G,β) – произвольно фиксированная битопологическая группа (прямая или косая) с бинепрерывным умножением

$$p:(G,\beta)\times(G,\beta)\longrightarrow(G,\beta),p(x,y)=xy,$$

и бинепрерывным обращением элементов

$$q:(G,\beta)\longrightarrow(G,\beta),q(x)=x^{-1}$$

или, (в косом варианте),

$$r : (G,\beta) \longrightarrow (G,\beta^{-1}), q(x) = x^{-1}.$$

Отображения

$$\overline{p} : (G\times G,\beta)\times(G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta),$$
$$\overline{p}((x_1,y_2),(x_2,y_2)) = (x_1x_2,y_1y_2)$$

и отображения $\overline{q}$,

$$\overline{q} : (G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta),\ \overline{q}(x,y) = (x^{-1},y^{-1}),$$

для прямой битопологической группы,

$$\overline{r} : (G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta),\ \overline{r}(x,y) = (x^{-1},y^{-1}),$$

для косой битопологической группы, будут непрерывными отображениями.

Пусть $j : G \longrightarrow G\times G$ – диагональное вложение, $j(x) = (x,x)$ для каждого $x \in G$, $\tau = \beta|G$ – топологическая структура на G, индуцируемая топологической структурой β при вложении $j : G \longrightarrow G\times G$. *Нетрудно заметить, что* (G,τ) *будет топологической группой при умножении и обращении элементов, индуцированными умножением и обращением на битопологической группе* (G,β).

Будем, для простоты изложения, отождествлять x с (x,x) для каждого $x \in G$. Тогда группа G будет подмножеством множества $G\times G$, (G,τ) будет подпространством топологического пространства $(G\times G,\beta)$, $(G,\tau)\times(G,\tau)$ будет подпространством топологического пространства $(G\times G,\beta)\times(G\times G,\beta)$.

Умножение $\overline{p}$ на $(G\times G,\beta)$ индуцирует на (G,τ) умножение p, а именно

$$p(x,y) = \overline{p}((x,x),(y,y)) = (xy,xy) = xy.$$

Аналогично, обращение элементов на $(G\times G,\beta)$ индуцирует на (G,τ) обращение элементов, а именно

$$q(x) = \overline{q}(x,x) = (x^{-1},x^{-1}) = x^{-1},$$

как для косой так и для прямой битопологической группы $(G\beta)$. Непрерывность такого умножения и такого обращения элементов в (G,τ) следует из того, что они являются просто ограничениями на соответствующие подпространства операций умножения и обращения элементов в битопологической группе (G,β), неважно прямой или косой.

2. Диагональный функтор. Определенное выше сопоставление каждой битопологической группе (G,β) топологической группы (G,τ), где $\tau=\beta|G$, имеет функторный характер, то есть каждый бинепрерывный гомоморфизм переходит при этом в непрерывный гомоморфизм, соответствующих топологических групп.

Действительно, пусть

$$\varphi:(G,\beta)\longrightarrow(G',\beta')$$

– бинепрерывный гомоморфизм битопологических групп. Тогда можно считать, что то же самое отображение φ является непрерывным гомоморфизмом группы (G,τ) в группу (G',β'), так как, в силу принятого ранее соглашения, $G\subset G\times G$, а потому отображения p и q, соответственно r, являются ограничениями отображений $\overline{p}$ и $\overline{q}$, соответственно $\overline{r}$.

Нетрудно проверить, что тем самым определен ковариантный функтор $\mathcal{P}$, определенный на категории TG_+ и категории TG_- всех битопологических групп (прямых и, соответственно, косых) и их бинепрерывных гомоморфизмов в категорию TG топологических групп и их непрерывных гомоморфизмов. С другой стороны каждой топологической группе (G,τ) можно однозначно сопоставить битопологическую группу $(G,\tau\times\tau)$, для которой $\overline{p}=p\times p$ и $\overline{q}=q\times q$. Любой непрерывный гомоморфизм φ переходит при этом в бинепрерывный гомоморфизм $\varphi\times\varphi$.

Нетрудно проверить, что тем самым определен ковариантный функтор $\mathcal{I}$, определенный на категории всех топологических групп и их непрерывных гомоморфизмов, в категорию всех битопологических групп (прямых или, соответственно, косых) и их бинепрерывных гомоморфизмов. Нетрудно также заметить, что композиция этих функторов $\mathcal{PI}$ является тождественным функтором. Таким образом каждую из категорий битопологических групп (прямых и, соответственно, косых) можно рассматривать, как детализации категории топологических групп.

Функтор $\mathcal{I}$ вкладывает категорию TG в общую часть категорий TG_+ и TG_-. Можно считать, условившись о соответствующих отождествлениях, что TG просто содержится в этих категориях. При таком предположении можно считать, что функтор $\mathcal{P}$ является ретракцией категорий TG_+ и TG_- на их подкатегорию TG.

3. Горизонтальные и вертикальные вложения. Ограничение структуры битопологической группы (G,β) на диагональ $\Delta \subset G \times G$ определяет, как мы убедились, топологическую группу $(G,\beta|G)$. При этом топологическая группа $(G,\beta|G)$ не зависит от того была ли битопологическая группа (G,β) прямой или косой (на диагонали разница между ними стирается). Рассматривая ограничения структуры битопологической группы на горизонтальные и вертикальные множества мы приходим к другой ситуации.

Пусть

$$h_b : G \longrightarrow G \times \{b\},\ \ h_b(x) = (x, b)$$

$$v_a : G \longrightarrow \{a\} \times G,\ \ v_a(y) = (a, y).$$

Эти отображения являются вложениями G в $(G \times G, \beta)$, они позволяют индуцировать на G топологические структуры $h_b^{-1}(\beta)$ и $v_a^{-1}(\beta)$, h_b и v_a становятся топологическими вложениями $(G, h_b^{-1}(\beta))$ и (G, v_a^{-1}) в $(G \times G, \beta)$ – горизонтальным и, соответственно, вертикальным вложениями.

В частности, мы имеем вложения

$$h_1 : G \longrightarrow G \times \{1_G\},\ \ h_1(x) = (x, 1_G),$$

$$v_1 : G \longrightarrow \{1_G\} \times G,\ \ v_1(y) = (1_G, y).$$

Эти вложения мы будем называть *стандартными*.

Расмотрим также следующие вложения G в $(G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta)$:

$$h_{c,d;1} : G \longrightarrow (G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta),\ \ h_{c,d;1}(x) = (c, d, x, 1_G),$$

$$h_{1;c.d} : G \longrightarrow (G \times G.\beta) \times (G \times G.\beta),\ \ h_{1;c,d}(x) = (x, 1_G; c, d).$$

Нетрудно заметить, что топологическая структура $\beta \times \beta$ индуцирует на G посредством $h_{c,d;1}$ и $h_{1;c.d}$ одну и ту же топологическую структуру τ_1 для всех c и d из G. Иначе говоря, для любых c и d из G эти отображения являются топологическими вложениями (G, τ_1) в $(G \times G, \beta) \times (G \times G, \beta)$. Нас будут интересовать, главным образом, вложения $h_{c,1;1}$ и $h_{1;c.1}$, их мы будем называть *стандартными* для любого $c \in G$. Образуем теперь композицию $h_1^{-1} p h_{c,1;1}$, являющуюся непрерывным отображением (G, τ_1) в себя, $h_1^{-1} p h_{c,1;1}(x) = cx$ – левый сдвиг на G. Отображение $h_1^{-1} p h_{c^{-1},1;1}$ даст нам обратный левый сдвиг, так как $h_1^{-1} p h_{c^{-1},1;1}(cx) = x$. Следовательно $h_1^{-1} p h_{c,1;1}$ топологическое отображение (G,τ_1) на себя для каждого $c\in G$. Правые сдвиги мы получаем композицией $h_1^{-1}ph_{1;c,1}$. Таким образом, битопологической группе (G,β) соответствует группа (G,τ_1) с непрерывными левыми и правыми сдвигами. Если (G,β) – прямая битопологическая группа, то в (G,τ_1) непрерывно и обращение элементов.

Аналогичная ситуация возникает при переходе от горизонтальных вложений $h_{c,d;1}$ и $h_{1;c,d}$ к вертикальным вложениям $v_{c,d;1}$ и $v_{1;c,d}$, а именно:

$$v_{c,d;1}: G \longrightarrow (G\times G.\beta)\times(G\times G.\beta),\ \ v_{c,d;1}(y)=(c,d,1_G,y),$$

$$v_{1;c,d}: G \longrightarrow (G\times G.\beta)\times(G\times G.\beta),\ \ v_{1;c,d}(y)=(1_G,y,c,d).$$

Топологическая структура $\beta\times\beta$ индуцирует на G посредством вложений $v_{c,d;1}$ и $v_{1;c,d}$ одну и ту же топологическую структуру τ_2 для всех c и d из G. Введя стандартные вложения $v_{c,1;1}$ и $v_{1;c,1}$ и образовав композиции $v_1^{-1}pv_{c,1;1}$ и $v_1^{-1}pv_{1;c,1}$ мы получаем непрерывные левые и правые сдвиги на (G,τ_2).

Если (G,β) прямая битопологическая группа, то в (G,τ_1) непрерывно и обращение элементов. Для косой битопологической группы операция обращения элементов определяет топологический изоморфизм групп (G,τ_1) и (G,τ_2). В отличие от диагонального вложения, горизонтальные и вертикальные вложения отличают прямые битопологические группы от косых.

§4. Конечные битопологические группы

1. Описание конечных прямых битопологических групп. Рассмотрим произвольную конечную прямую битопологическую группу (G,β). Пусть U – наименьшее открытое в $(G\times G,\beta)$ множество, содержащее точку $(1,1)$, где 1 – единица группы G. Само множество $G\times G$ можно рассматривать, как прямое произведение группы G на себя, элемент $(1,1)$, как единицу группы $G\times G$, умножение элементов группы $G\times G$ покомпонентное.

Лемма 1. *Если $(x,y)\in U$ то $(x^{-1},y^{-1})\in U$.*

Доказательство. Пусть $(x,y)\in U$, тогда множество $(x^{-1},y^{-1})U$ содержит $(1,1)$, так как $(x^{-1},y^{-1})(x,y)=(1,1)$. Множество $U\cap(x^{-1},y^{-1})U$ также содержит единицу группы $G\times G$ и потому $U\cap(x^{-1},y^{-1})U=U$, в силу минимальности U. Более того $(x^{-1},y^{-1})U=U$, в силу конечности U, следовательно $(x^{-1},y^{-1})\in U$.

Лемма 2. *Если* $(x_1, y_1) \in U$ *и* $(x_2, y_2) \in U$, *то* $(x_1x_2, y_1y_2) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) \in U$.

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1) \in U$ и $(x_2, y_2) \in U$, тогда, в силу леммы 1, $(x^{-1}, y^{-1}) \in U$ и, следовательно, $(1, 1) \in U$. Поэтому $U \cap (x_1, y_1)U = U$, в силу минимальности U. Более того, $(x_1, y_1)U = U$, в силу конечности U. Но так как и $(x_2, y_2) \in U$, то и $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in U$.

Следствие. *Наименьшее открытое в* $(G \times G, \beta)$ *множество, содержащее* $(1, 1)$, *является подгруппой группы* $G \times G$.

Лемма 3. *Наименьшее открытое в* $(G \times G, \beta)$ *множество, содержащее* $(1, 1)$, *является нормальным делителем группы* $G \times G$.

Доказательство. Как уже доказано, наименьшее открытое в $(G\times G, \beta)$, содержащее единицу, является подгруппой группы $G \times G$. Рассмотрим теперь произвольный элемент (x, y) в G и множество $(x, y)U(x^{-1}, y^{-1})$. Это множество открыто в $(G \times G, \beta)$ и содержит $(1, 1)$ группы $(G \times G)$ и потому $U \cap (x, y)U(x^{-1}, y^{-1}) = U$, в силу минимальности U. Более того$(x, y)U(x^{-1}, y^{-1}) = U$, в силу конечности U. Последнее означает, что U – нормальный делитель.

Лемма 4. *Каждый класс смежности минимального открытого в* $(G \times G, \beta)$, *содержащего* $(1, 1)$, *является минимальным открытым в* $(G \times G, \beta)$ *множеством.*

Доказательство. Очевидно.

Лемма 5. *Битопологическая структура* β *состоит из всевозможных объединений классов смежности минимального открытого в* $(G \times G, \beta)$ *множества* U, *содержащего* $(1, 1)$.

Доказательство. Очевидно.

Теорема. *Пусть* G *– произвольная конечная группа. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями группы* $G \times G$ *и всеми прямыми битопологическими группами на* G.

Доказательство. Пусть G – произвольная конечная группа и U – некоторый нормальный делитель группы $G \times G$, β – топологическая структура на $G \times G$, состоящая из всевозможных объединений смежных классов нормального делителя U в группе $G \times G$.

Положим $\overline{p}((x,y),(x',y')) = (xx',yy')$, $\overline{q}(x,y) = (x^{-1},y^{-1})$ и докажем, что отображения

$$\overline{p} : (G\times G,\beta)\times(G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta),$$

$$\overline{q} : (G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta),$$

непрерывны. Для этого достаточно доказать, что

$$\overline{p}^{\,-1}((x,y)U)\in\beta\times\beta,\quad \overline{q}^{\,-1}((x,y)U)\in\beta.$$

Но $\overline{p}((x_1,y_1)U \times (x_2,y_2)U) = \overline{p}((x_1,y_1)(x_2,y_2)U \times U) = (x_1x_2,y_1y_2)U = (x,y)U$ для $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$. С другой стороны, если $\overline{p}((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in(x,y)U$, то $x_1x_2 = xv$, $y_1y_2 = yw$, где $(v,w)\in U$ и поэтому $(x_1,y_1)\in(x_1,y_1U,(x_2y_2)\in(x_2v^{-1},y_2w^{-1})U$, то есть $((x_1,y_1)(x_2,y_2))\in(x_1,y_1)U\times(x_2v^{-1},\,y_2w^{-1}U$, причем $x_1x_2v^{-1} = x, y_1y_2w^{-1} = y$. Отсюда следует, что

$$\overline{p}((x,y)U) = \bigcup (x_1,y_1)U\times(x_2,y_2)U | x_1x_2 = x,\quad y_1y_2 = y,$$

что и доказывает непрерывность отображения $\overline{p}$.

Непрерывность отображения $\overline{q}$ следует из равенства $\overline{q}^{\,-1}((x, y)U) = (x^{-1},y^{-1})U$.

Обратное заключение теоремы следует из лемм 1–5.

Замечание. Минимальное открытое в $(G\times G,\beta)$, множество U, содержащее $(1,1)$, имеет вид $N_1\times N_2$, где N_1 и N_2 являются нормальными делителями группы G. Здесь $N_1 = \{x|(x,y)\in U\}$, $N_2 = \{y|(x,y)\in U\}$.

2. Описание конечных косых битопологических групп. Рассмотрим произвольную конечную косую битопологическую группу (G,β). Пусть U – наименьшее открытое в (G,β) множество, содержащее точку $(1,1)$, где 1 – единица группы G. Само множество $G\times G$ можно рассматривать, как прямое произведение группы G на себя, элемент $(1,1)$, как единицу группы $G\times G$, умножение элементов группы $G\times G$ покомпонентное.

Так как доказательства лемм 1–5 предыдущего раздела используют только непрерывность отображения

$$\overline{p} : (G\times G,\beta)\times(G\times G,\beta) \longrightarrow (G\times G,\beta),$$

то эти леммы будут справедливы и для косого варианта. Однако непрерывность отображения

$$\overline{r} : (G \times G, \beta) \longrightarrow (G \times G, \beta), \quad \overline{r}(x, y) = (y^{-1}, x^{-1})$$

позволяет доказать еще одну лемму, не имеющую места в прямом варианте.

Лемма 6. *Если* $(x, y) \in U$, *то* $(y, x) \in U$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$(x, y) \in U \iff (x^{-1}, y^{-1}) \in U.$$

Пусть $U' = \{(y^{-1}, x^{-1}) | (x, y) \in U$. В силу непрерывности отображения $\overline{r}$ множество U' является открытым в $(G \times G, \beta)$ множеством, содержащим к тому же $(1, 1)$. Поэтому множество $U \cap U'$ также является открытым в $(G \times G, \beta)$, содержащим $(1, 1)$. В силу минимальности U

$$U \cap U' = U,$$

а в силу конечности U, $U' = U$. Таким образом

$$(x^{-1}, y^{-1}) \in U \iff (y, x) \in U.$$

Из двух доказанных нами эквивалентностей следует

$$(x, y) \in U \iff (y, x) \in U.$$

Теорема. *Пусть G конечная группа. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между всеми нормальными делителями группы G и всеми косыми битопологическими группами на G.*

Доказательство. Пусть $U = N \times N$, где N – нормальный делитель группы G. Отображения $\overline{p}$ и $\overline{r}$ определяются, как обычно. Непрерывность отображения $\overline{p}$ доказывается, как для предыдущей теоремы, а непрерывность отображения $\overline{r}$ следует из соотношения

$$\overline{r}^{-1}((x, y)U) = U(y^{-1}, x^{-1}).$$

Тем самым доказано, что каждому нормальному делителю N группы G сопоставляется косая битопологическая группа на G. Обратное соответствие следует из лемм 1–6 и из того, что любой симметричный относительно диагонали нормальный делитель U группы $G \times G$ имеет вид $N \times N$, где N – нормальный делитель группы G. Последнее следует из замечания к предыдущей теореме.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что каждая конечная косая битопологическая группа (G, β) является одновременно прямой битопологической группой, для которой минимальное открытое в $(G \times G, \beta)$ множество U, содержащее $(1, 1)$, симметрично относительно диагонали.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 сентября 1996 г.