Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова

ЧИСЛОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫПОЛНИМОСТИ

1. Введение

Продолжая работы [1, 2], мы покажем, как интерпретация пропозициональных переменных вещественными числами делает вопрос о неотрицательной разрешимости и устойчивой неотрицательной разрешимости линейных алгебраических систем очень близким к вопросу о выполнимости пропозициональных формул. При этом устойчивая разрешимость эквивалентна невыполнимости, а умножение матриц устойчиво разрешимых систем слева на произвольную матрицу порождает (с точностью до тривиальных преобразований) все неотрицательно разрешимые однородные системы.

Пусть $V = \{p_1, \dots, p_m, \neg p_1 \dots, \neg p_m\}$ – множество литералов, и заданы n множеств S_j, $j \in 1\colon n$, удовлетворяющих условиям $|\{p_i, \neg p_i\} \cap S_j| \le 1$ при каждом $j \in 1\colon n$ и при каждом $i \in 1\colon m$.

Проинтерпретируем дизъюнкцию $(\bigvee_{v \in S_j} v)$ при каждом $j \in 1\colon n$ множеством K_j всех таких векторов $(A_{1j}, \dots, A_{mj})$ из R^m, что при каждом $i \in 1\colon m$

$$A_{ij} \ge 0, \text{ если } p_i \in S_j;\ A_{ij} \le 0, \text{ если } \neg p_i \in S_j;$$
$$A_{ij} = 0, \text{ если } \{p_i, \neg p_i\} \cap S_j = \emptyset.$$

Рассмотрим КНФ

$$\bigwedge_{j \in 1:n} \bigvee_{v \in S_j} v$$

и произвольную $m \times n$ матрицу A, j-столбец которой принадлежит множеству $K_j, j \in 1\colon n$. Оказывается, что *невыполнимость КНФ эквивалентна устойчивой разрешимости системы*

$$Ax = 0, \quad x \ge 0, \quad x \ne 0, \quad x \in R^n. \tag{1}$$

Результат доложен на заседании семинара 5 февраля 1996 г. и 19 февраля 1996 г.

Действительно, у невыполнимых КНФ при любом переименовании каких-то переменных в их отрицания, а их отрицаний в переменные всегда сохраняется как дизъюнкция литералов без отрицаний, так и дизъюнкция отрицаний литералов. Поэтому при любом векторе $y \in R^m$ вектор yA содержит неположительную компоненту, т.е. система $yA > 0$, $y \in R^m$ не имеет решения. А значит по теореме об альтернативах [3] система (1) имеет решение при любой такой матрице A, и в этом смысле эта система устойчиво разрешима.

С другой стороны, если КНФ выполнима, то существует набор литералов, не содержащий одновременно переменную и ее отрицание и имеющий непустое пересечение с каждым множеством S_j. Поэтому в каждом множестве K_j можно выбрать по одному ненулевому вектору так, чтобы по каждой компоненте у всех этих векторов ненулевые элементы были одного знака. Это значит, что любая нетривиальная неотрицательная линейная комбинация выбранных векторов отлична от нуля и система (1) для матрицы A, составленной из этих векторов, не имеет решения, т.е. система (1) не устойчиво разрешима.

Системы типа (1) описывают равновесные экономические модели [3], что делает вопрос об их устойчивой разрешимости очень значимым.

В параграфе 2 мы дадим более подробное доказательство указанной эквивалентности и, как следствие, представим 2^m таких матриц A, что для выполнимости КНФ необходимо и достаточно неразрешимости системы (1) хотя бы для одной из этих матриц.

В том же параграфе 2 на основе теоремы об альтернативах будет доказано, что, если КНФ *минимально невыполнима*, т.е. перестает быть невыполнимой с удалением хотя бы одного конъюнкта, то система

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x \in R^n$$

разрешима при любой матрице A со столбцами из множеств K_j и любом вещественном векторе b.

В работе [4] мы показали, что любая матрица A, для которой система (1) разрешима, представима (с точностью до выбрасывания и повторения столбцов) в виде произведения матрицы без дополнительных ограничений и матрицы некоторой устойчиво разрешимой системы. Таким образом, порождая невыполнимые КНФ, определяя по ним матрицы A со столбцами из множеств K_j

и умножая каждую такую матрицу слева на произвольную матрицу, можно построить *полное исчисление* для порождения разрешимых систем типа (1). Описанием этого исчисления заканчивается параграф 2.

Аналог теоремы об альтернативах имеет место и при исследовании вопроса о разрешимости систем линейных неравенств с булевыми переменными. По КНФ определим $2m \times n$ матрицу D, полагая для $i \in 1\colon m$ и $j \in 1\colon n$

$$D_{ij} = 1, \text{ если } p_i \in S_j; \ D_{(m+i)j} = 1, \text{ если } \neg p_i \in S_j;$$

$$D_{ij} = D_{(m+i)j} = 0, \text{ если } \{p_i, \neg p_i\} \cap S_j = \emptyset.$$

В параграфе 3 мы докажем, что имеет место только одна из двух альтернатив: *либо КНФ выполнима, либо*

$$\min\{\max\{e_n x \mid Dx \leqslant c; x \geqslant 0\} \mid c \in C_1\} \geq 1,$$

где $C_1 = \{c \in R_+^{2m} \mid c_i + c_{m+i} = 1, \ i \in 1\colon m\}$ *и* $e_n = (1, \dots, 1)$.

Доказательство базируется на нашей работе [5] и обобщает известную теорему Форда–Фалкерсона о равенстве максимального потока минимальному разрезу. Применение аналогичного обобщения к анализу NP-полных задач см. в [6]. В параграфе 3 обсуждается также применение двойственной задачи линейного программирования к проверке выполнимости.

Нетрудно убедиться в том, что выполнимость КНФ эквивалентна разрешимости следующей системы неравенств с *булевыми* переменными

$$uD \geq e_{2m}; \quad u_i + u_{m+i} = 1; \ u_i, u_{m+i} \in \{0, 1\}, \ i = 1, \dots, m,$$

где $2m$-мерный вектор $e_{2m} = (1, \dots, 1)$.

В работе [10] и в ее ссылках единичные элементы матрицы D и вектора e_{2m} заменены целыми положительными числами, и для устанавления разрешимости полученной системы предложен алгоритм, являющийся обобщением метода резолюций. В параграфе 4 мы рассмотрим эту систему с *заменой единичных элементов D* и e_{2m} *на вещественные положительные числа* и сведем ее разрешимость к выполнимости некоторой КНФ. Таким образом *теорема об альтернативах имеет место* и в этом общем случае. Проверку выполнимости КНФ можно проводить, не выписывая в явном виде входящих в нее множеств S_j, $j \in 1\colon n$. Строя семантический вывод, мы можем оценивать каждую его ветвь и отсекать ветви, заведомо не содержащие ни одного из этих множеств, таким же образом, как это делается в известном методе ветвей и границ. Более того, семантический вывод не обязательно строить в виде дерева. Можно рассматривать "сечения" деревьев, сохраняющие полноту. Техника *закрытых диаграмм* [11] позволяет строить такие сечения не только для рассмотренной системы с булевыми переменными, но и для широкого круга дискретных оптимизационных задач [12–17].

2. Матричные представления

2.1. Устойчиво-разрешимые матрицы.

Пусть F – формула типа

$$\bigwedge_{j\in 1:n} \bigvee_{v\in S_j} v, \tag{2}$$

где S_j – множества пропозициональных переменных или их отрицаний, и для каждой переменной p_i, $i \in 1\colon m$, и для каждого $j \in 1\colon n$ предполагается выполненным условие

$$|\{p_i, \neg p_i\} \cap S_j| \leq 1. \tag{3}$$

Определение 1. *Будем называть $m \times n$ матрицу параметров $A(F) = \{a_{ij}\}$ с областью значений параметра a_{ij} равной:*

R^+, *если* $p_i \in S_j$; $\quad R^-$, *если* $\neg p_i \in S_j$; $\quad \{0\}$, *если* $\{p_i, \neg p_i\} \cap S_j = \emptyset$,

матричным представлением формулы F, а матрицу A, получающуюся из $A(F)$ фиксированием значений всех параметров, – его значением.

В [2] доказано, что *невыполнимость* формулы F эквивалентна *разрешимости* системы (1) для любого значения A матричного представления $A(F)$. Ниже мы представим другое доказательство, основанное на теореме об альтернативах (см., например, [3]). Частично оно опубликовано в [4].

Пример 1. Матричным представлением формулы

$$F = (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee \neg p_1)$$

является матрица

$$A(F) = \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12} & b_{13} & 0 & -b_{15} \\ b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & -b_{32} & 0 & -b_{34} & b_{35} \end{pmatrix},$$

в которой область значений каждого параметра b_{ij} состоит из положительных вещественных чисел. Легко проверить, что формула F невыполнима: при любых значениях пропозициональных переменных найдется множество S_j, в котором все литералы окажутся со значениями *ложь*. Это значит, что система $Ax = 0$, $x \geq 0$ имеет нетривиальные решения при любом значении A матричного представления $A(F)$.

Определение 2. *Вещественная матрица A называется разрешимой, если разрешима система $Ax = 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, $x \in R^n$, и устойчиво-разрешимой, если она остается разрешимой при любом изменении ее элементов, сохраняющем знаки.*

Определение 3. *Вещественная матрица A называется знакоустойчивой, если при любом умножении ее строк на 1 или -1 мы получим матрицу C, содержащую неотрицательный столбец.*

В примере 1 легко убедиться в том, что любое значение A матричного представления $A(F)$ оказывается знакоустойчивой матрицей.

Очевидно, что знакоустойчивая матрица A (также как и любая матрица, получающаяся из A умножением ее строк на 1 или -1) содержит кроме неотрицательного и неположительный столбец.

Теорема 1. *Формула F невыполнима $\Longleftrightarrow$ любое значение A матричного представления $A(F)$ является знакоустойчивой матрицей.*

Доказательство состоит в установлении взаимно-однозначного соответствия между знаками множетелей строк матрицы A и логическими значениями соответствующих пропозициональных переменных.

Теорема 2. *Формула F невыполнима $\Longleftrightarrow$ любое значение A матричного представления $A(F)$ является устойчиво-разрешимой матрицей.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть A – произвольное значение матричного представления $A(F)$. Мы покажем, что, если формула F невыполнима, то при любом другом значении C этого представления система $yC > 0$ не будет иметь решений. В этом случае из теоремы об альтернативах (см. например, [3]) следует, что система $Cx = 0$, $x \geq 0$ имеет нетривиальные решения. Но это и будет означать устойчивую разрешимость матрицы A.

Итак, пусть y – ненулевой вектор. Определим множества

$$M_+ = \{i \mid y_i > 0\}, M_- = \{i \mid y_i < 0\}, M_0 = \{i \mid y_i = 0\}$$

и, кроме того, значения пропозициональных переменных $\{p_i\}$:

$$p_i = \textit{истина}, \text{ если } i \in M_+ \text{ и } p_i = \textit{ложь}, \text{ если } i \in M_- \cup M_0.$$

Так как формула F невыполнима, то существует множество S_j, в котором все литералы получили значение *ложь*. Поэтому для каждой переменной p_i мы имеем:

если $p_i \in S_j$, то $y_i \le 0$ и $C_{ij} > 0$
если $\neg p_i \in S_j$, то $y_i > 0$ и $C_{ij} < 0$
если $\{p_i, \neg p_i\} \cap S_j = \emptyset$, то $C_{ij} = 0$.
Следовательно, неравенство

$$\sum_{i \in 1:m} y_i C_{ij} > 0$$

не может быть выполнено.

$\Longleftarrow$ Пусть для формулы F существует выполняющий набор, т.е. такие значения логических переменных, что в каждом S_j найдется литерал v_j со значением *истина*. Положим

$$\pi = \{v_j \mid j \in 1:n\}; \quad M^+ = \{p_i \mid p_i \in \pi\}; \quad M^- = \{p_i \mid \neg p_i \in \pi\}.$$

Определим значение C матричного представления $A(F)$, полагая

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & A(F)_{ij} > 0, \quad i \in 1:m \\ -1/n, & A(F)_{ij} < 0, \quad i \in M^+ \\ -n, & A(F)_{ij} < 0, \quad i \in 1:m \setminus M^+ \end{cases}$$

для каждого $j \in 1:n$. Покажем, что матрица C неразрешима. Действительно, если бы система $Cx = 0$, $x \ge 0$, $x \ne 0$ оказалась разрешимой, тогда существовал бы и такой вектор x, что

$$\sum_{j \in 1:n} x_j = 1 \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{C_{ij} > 0} x_j = 1/n \sum_{C_{ij} < 0} x_j, i \in M^+,$$

$$\sum_{C_{ij} < 0} x_j = 1/n \sum_{C_{ij} > 0} x_j, i \in M^-.$$

Из определения множеств M^+ и M^- следует, что для каждого $j \in 1:n$ найдется такой индекс i из M^+ или M^-, что x_j окажется в левой стороне соответствующего уравнения. Поэтому для каждого $j \in 1:n$ будет $x_j < 1/n$, что противоречит (2.1). $\square$

Из доказательства достаточности в теореме 2 следует, что для проверки выполнимости формулы F достаточно рассматривать только 2^m следующих матриц [7]. Назовем вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *параметром*, если каждая его компонента $b_i \in \{n, 1/n\}$, и определим $m \times n$ матрицу $A(b)$, полагая:

$$A_{ij}(b) = \begin{cases} \ \ 1, & p_i \in S_j, \\ -b_i, & \neg p_i \in S_j, \\ \ \ 0, & \{p_i, \neg p_i\} \cap S_j = \emptyset. \end{cases}$$

Теорема 3. *Формула F выполнима $\iff$ существует значение параметра b, при котором матрица $A(b)$ неразрешима.*

Теорема 3 обобщает результат М. Захаревича [8]. Там матрица $A = A(b)$ определена для единственного значения параметра $b = \{b_i = 1, i \in 1:m\}$, и получено достаточное условие: если система (1) для этой матрицы A не имеет решения, то формула F выполнима. В [7] показано, что это условие охватывает только 2 из всех требуемых 2^m случаев.

2.2. Неоднородные системы.

Определение 4. *Невыполнимая формула F называется минимально невыполнимой, если она перестает быть выполнимой с удалением хотя бы одного конъюнкта.*

Теорема 4. 1. *Если формула F минимально невыполнима, то для любого значения A матричного представления $A(F)$ и любого вектора b система*

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{1b}$$

имеет решение.

2. *Если формула F выполнима, то существуют значение A матричного представления $A(F)$ и вектор b, при которых система (1b) не имеет решения.*

Доказательство.

1. Так же, как при доказательстве теоремы 2, воспользуемся теоремой об альтернативах [3]. Однако здесь альтернативой к разрешимости системы $(1b)$ является разрешимость системы $yA \geq 0$, $yb < 0$.

Индукцией по числу логических переменных m покажем, что если формула F минимально невыполнима, то для произвольного значения A матричного представления $A(F)$ система $yA \geq 0$ имеет только нулевое решение. Это будет означать невыполнение условия $yb < 0$ при любом векторе b и, следовательно, требуемую разрешимость системы $(1b)$.

При $m = 1$ минимально невыполнимая формула F имеет вид $p_1 \wedge \neg p_1$ и ее матричным представлением является однострочная матрица $A(F) = (a_1 a_2)$, где $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Очевидно, что при любых значениях параметров $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ система $ya_1 \geq 0$, $ya_2 \geq 0$ имеет единственное решение $y = 0$.

Пусть утверждение выполнено для любых минимально невыполнимых формул с числом переменных меньше m. Рассмотрим минимально невыполнимую формулу F с m переменными и произвольное значение A ее матричного представления $A(F)$.

Предположим, что существует вектор y, для которого $yA \geq 0$. Это значит, что в каждом столбце $j \in 1\!:\!n$ матрицы A найдется такой индекс i, что $A_{ij} \neq 0$ и $y_i A_{ij} \geq 0$. Образуем множество литералов π, включая в него переменную p_i, если $A_{ij} > 0$, и отрицание переменной в противном случае. Из невыполнимости F следует, что существует такая переменная p_{i_0}, что и она и ее отрицание содержатся в π. Это значит, что для некоторых $j_1 \neq j_2$ одновременно выполняются неравенства

$$y_{i_0} A_{i_0 j_1} \geq 0 \text{ и } y_{i_0} A_{i_0 j_2} \geq 0 \text{ при } A_{i_0 j_1} \cdot A_{i_0 j_2} < 0.$$

Отсюда следует $y_{i_0} = 0$.

По формуле F определим две формулы F_1 и F_2. Будем считать формулу F_1 (соответственно F_2) пустой, если в F существует дизъюнкция, состоящая только из переменной (отрицания переменной) p_{i_0}. Иначе удалим переменную (отрицание переменной) p_{i_0} из каждой ее (его) содержащей дизъюнкции. Эти дизъюнкции можно дополнить дизъюнкциями, не содержащими отрицания переменной (переменной) p_{i_0}, до минимально невыполнимой F_1 (соответственно F_2).

Если одна из формул F_1 или F_2 пуста, то другая содержит все переменные, кроме p_{i_0}. Иначе каждая из формул содержит свое множество переменных, но объединение этих переменных совпадает со всем множеством переменных за вычетом p_{i_0}.

Из того, что $yA \geq 0$ для вектора y и $y_{i_0} = 0$, следует $y^1 A_1 \geq 0$ и $y^2 A_2 \geq 0$, где A_1 (соответсвенно A_2) – значение матричного представления $A(F_1)$ $(A(F_2))$, совпадающее с соответствующей подматрицей A, а векторы y^1 и y^2 – соответствующие подвекторы вектора y. Из индукционного предположения следует, что каждый из векторов y^1 и y^2 равен нулю. Таким образом, равны нулю все компоненты вектора y.

2. Из доказательства достаточности теоремы 2 следует, что в случае выполнимости формулы F существует такое значение A матричного представления $A(F)$, что однородная система $Ax = 0, x \geq 0$ имеет только нулевое решение. Положим $b = -A^j$, где A^j – произвольный столбец матрицы A. Тогда система $Ax = b, x \geq 0$ не имеет решения. Действительно, если бы она имела решение x, то полагая $x_j := x_j + 1$ и не меняя остальных компонент вектора x, мы бы получили нетривиальное решение однородной системы. □

2.3. Базисные матрицы.

Определение 5. *Матрица B называется базисной, если перестановкой строк и столбцов ее можно свести к матрице вида*

$$\begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ b_1 & b_2 \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix}$$

где как B_1, так и B_2 являются базисными или пустыми матрицами; b_1 (соответственно b_2) – неотрицательный (неположительный) ненулевой вектор; и если B_1 (или B_2) – пустая матрица, то вектор b_1 (или b_2) – число.

Например, матрица со схемой расположения знаков $(+-)$ является базисной, а любая матрица B из примера 1 не является базисной.

Теорема 5. *Если B – базисная матрица, то*

(a) *число столбцов в B на 1 больше числа строк;*

(b) *B устойчиво-разрешима;*

(c) *строки в B линейно независимы;*

(d) *система $Ax = 0; Bx = 0$ имеет нетривиальное решение $\Longleftrightarrow$ каждая строка матрицы A является линейной комбинацией строк B;*

(e) *система* $Bx = 0$, $x \geq 0$ *имеет единственное с точностью до положительного множителя решение.*

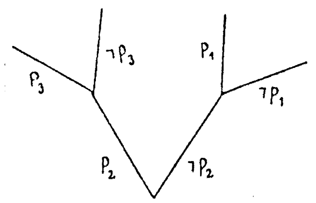
Доказательство теоремы приведено в [4].

Предположим, что $A(F)$ – матричное представление некоторой формулы F. Если каждая матрица A, являющаяся значением $A(F)$, является базисной, то $A(F)$ мы также будем называть *базисным.* Легко видеть, что формула F с базисным представлением тривиально невыполнима: она сама является семантическим деревом. В этом смысле матрица $A(F)$ тоже древовидна, что позволяет определить единственный положительный луч решений системы $A(F)x = 0$, $x \geq 0$ как вектор, каждая компонента которого является однородной функцией от параметров представления $A(F)$. Продемонстрируем это следующим примером.

Пример 2. Рассмотрим формулу

$$F = (p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2).$$

Она невыполнима, и дерево



является ее семантическим выводом. Матрица

$$A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & -b_{14} \\ b_{21} & 0 & -b_{23} & -b_{24} \\ b_{31} & -b_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $b_{ij} > 0$ является базисным матричным представлением формулы F.

Систему $A(F)x = 0$ с параметрическими коэффициентами можно переписать в виде

$$\begin{aligned} b_{13}x_3 &= b_{14}x_4 \\ b_{21}x_1 &= b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ b_{31}x_1 &= b_{32}x_2 \end{aligned}$$

Построим точку, определяющую единственный параметрический луч положительных решений системы $A(F)x = 0, x \geq 0$:

1. Положим $x_3^0 = b_{14}$, $x_4^0 = b_{13}$. Тогда при любом $t_1 > 0$ мы имеем луч $t_1(x_3^0, x_4^0)$ положительных решений первого уравнения.

2. Полагая $x_1^0 = b_{32}$, $x_2^0 = b_{31}$, получаем при любом $t_2 > 0$ луч $t_2(x_1^0, x_2^0)$ положительных решений третьего уравнения.

3. Подставляя найденные значения переменных x_j во второе уравнение, получим уравнение относительно множителей t_1, t_2:

$$t_2 b_{21} x_1^0 = t_1(b_{23}x_3^0 + b_{24}x_4^0).$$

Откуда

$$t_2 = (b_{23}x_3^0 + b_{24}x_4^0), \quad t_1 = b_{21}x_1^0.$$

4. Окончательно получаем, что луч положительных решений системы $A(F)x = 0$ представим в виде $t \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $t > 0$ и

$$\begin{aligned}
x_1 &= t_2 x_1^0 = (b_{23}b_{14} + b_{24}b_{13})b_{32}, \\
x_2 &= t_2 x_2^0 = (b_{23}b_{14} + b_{24}b_{13})b_{31}, \\
x_3 &= t_1 x_3^0 = b_{21}b_{32}b_{14}, \\
x_4 &= t_1 x_4^0 = b_{21}b_{32}b_{13}.
\end{aligned}$$

Семантический вывод формулы F определил последовательность действий. Мы начали с уравнений, соответствующих листьям дерева, а кончили корневым уравнением.

Любой семантический вывод невыполнимой формулы F позволяет свести ее матричное представление $A(F)$ к базисному $B(F)$ таким образом, что единственный луч положительных решений системы $B(F)y = 0$ определит некоторый луч неотрицательных ненулевых решений системы $A(F)x = 0$. Такое сведение можно проводить непосредственно в терминах матриц. Продемонстрируем это на примере 1.

Пример 1 (продолжение) Продублируем в матрице $A(F)$ четвертый столбец и переставим столбцы так, чтобы получилась матрица

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & -b_{15} & 0 & -b_{12} \\ b_{21} & b_{24} & -b_{23} & 0 & b_{24} & -b_{22} \\ b_{31} & -b_{34} & 0 & b_{35} & -b_{34} & -b_{32} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что, если y – решение системы $Cy = 0$, то вектор x с координатами

$$x_1 = y_1, x_2 = y_6, x_3 = y_3, x_4 = y_2 + y_5, x_5 = y_4$$

будет решением системы $A(F)x = 0$.

Оставив первую строку в C без изменения и расслоив каждую из оставшихся на две, мы получим базисную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{31} & -b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{24} & -b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & 0 & b_{13} & -b_{15} & 0 & -b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & b_{35} & -b_{34} & -b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{24} & -b_{22} \end{pmatrix}.$$

Любое положительное y, удовлетворяющее условию $By = 0$, будет удовлетворять и условию $Cy = 0$. Поэтому единственный луч положительных решений ty окажется лучом положительных решений и системы $Cy = 0$. А соответствующий луч tx будет лучом положительных решений системы $A(F)x = 0$, и компоненты вектора x, также как и в случае базисной матрицы, представимы в виде однородных функций от параметров $b_{ij} > 0$.

Оказывается, что любая матрица A, для которой однородная система имеет нетривиальные неотрицательные решения (такую матрицу мы называем *разрешимой*), представима (с точностью до удаления и повторения столбцов) в виде произведения матрицы без дополнительных ограничений и базисной матрицы.

2.4. Сводимость разрешимых матриц.

Следуя [4], введем следующие понятия.

Определение 6. *Пусть A – вещественная матрица и $R(A)$ – множество различных столбцов в A. Матрица A называется следствием матрицы B и обозначается $B \to A$, если существуют такие матрицы C и L, что $R(C) \subseteq R(A)$ и $C = LB$, т.е. каждая строка матрицы C является линейной комбинацией строк матрицы B.*

Теорема 6. *Матрица A размера $m \times n$ разрешима $\Longleftrightarrow$ существует такая базисная $r \times k$ матрица B, что $r \leq (2^m - 1)$, $k \leq 2^m$ и $B \to A$.*

Достаточность очевидна. Действительно, если B – базисная матрица, то, как следует из теоремы 5(е), существует $x > 0$, для которого $Bx = 0$. Из определения следствия имеем и $Cx = 0$. Но матрица A отличается от C разве лишь добавлением некоторых столбцов и склеиванием некоторых одинаковых столбцов. Поэтому по x легко построить такой ненулевой вектор $y \geq 0$, что $Ay = 0$.

Необходимость доказывается индукцией по числу m строк матрицы A. При $m = 1$ из разрешимости однострочной матрицы $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ следует существование в ней такой пары чисел (a_j, a_s), что $a_j \cdot a_s < 0$. Матрица $B = (a_j \ a_s)$ – базисная, и для $C := B$ требуемые условия выполнены: $R(C) \subseteq R(A)$ и $C = LB$, где $L = (1)$. Таким образом $B \to A$.

Полное описание индукционного перехода содержится в [4]. В отличие от сведения устойчиво-разрешимых матриц в этом переходе приходится расщеплять не только значения переменных, но и значения элементов разрешимых матриц. Кроме того, само расщепление переменных вызывает, вообще говоря, экспоненциальный рост числа столбцов матрицы.

Для некоторых разрешимых матриц возможно сведение к базисным вообще без увеличения числа столбцов. Например, пусть P – *стохастическая* $n \times n$ матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sum_i P_{ij} = 1 \quad \text{и все} \quad P_{ij} > 0.$$

Матрица $A = P - E$ разрешима ([3]).

Первая строка матрицы A является линейной комбинацией всех остальных. Удаляя из A первую строку и применяя метод Гаусса, мы можем построить $(n-1) \times n$ базисную матрицу B со схемой расположения знаков

$$\begin{pmatrix} + & + & \dots & + & - \\ + & + & \dots & - & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ + & - & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

такую, что каждая строка A будет линейной комбинацией строк B.

Поэтому имеем $B \to A$ (здесь роль промежуточной матрицы C играет сама матрица A). Более того, так как каждая строка матрицы B очевидно является линейной комбинацией строк матрицы A, начиная со второй, то любое решение системы $Ax = 0$

является решением системы $Bx = 0$. Таким образом множества решений этих систем совпадают, и мы получили подтверждение известного результата: система $Px = x$ для стохастической матрицы с положительными элементами имеет единственное, с точностью до положительного множителя, положительное решение. Заметим, что матрица B является значением матричного представления формулы

$$(p_1 \vee \ldots \vee p_{n-1}) \wedge (p_1 \vee \ldots \vee p_{n-2} \vee \neg p_{n-1}) \wedge \ldots \wedge (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1),$$

которая оказывается хорошо известной *хорновской* формулой.

2.5. Исчисление разрешимых линейных систем.

Вводя операцию умножения слева устойчиво-разрешимой матрицы на произвольную вещественную матрицу, мы можем построить полное исчисление разрешимых линейных систем типа (1). За основу этого исчисления можно взять любое полное исчисление, порождающее невыполнимые КНФ, и добавить к нему правила:

(a) Правило матричного представления КНФ: $\frac{F}{A(F)}$.
(b) Правило, фиксирующее значение матричного представления $A(F)$.
(c) Правило добавления произвольного столбца к матрице и правило удаления повторяющихся столбцов.
(d) Правило умножения слева на произвольную матрицу: $\frac{A}{L \cdot A}$, где A и L – матрицы.
(e) Правило превращения матрицы в линейную систему: $\frac{A}{Ax=0, x\geq 0, x\neq 0}$, где A – матрица, а x – вектор вещественных переменных.

Полнота представленного исчисления следует из теоремы 6.

3. Теорема об альтернативах для систем с булевыми переменными

3.1. Потоковое сведение выполнимости.

Пусть F – формула типа (2), M – множество переменных в ней, V – множество всех литералов, $N = \{1, \ldots, n\}$, $S = \{S_j \mid j \in N\}$ и, как и ранее, предполагается выполненным условие

$$|\{a, \neg a\} \cap S_j| \leq 1$$

для каждой переменной $a \in M$ и для каждого $j \in N$.

По формуле F определим обобщение задачи о максимальном потоке [9]. Свяжем с каждым литералом $v \in V$ пропускную способность $c(v) \geq 0$. Но в отличие от обычной задачи о максимальном потоке ограничимся пропускными способностями из множества отображений

$$C_1 = \{c : V \to \mathcal{R}^1_+ \mid c(a) + c(\neg a) = 1,\ a \in M\}.$$

Определение 7. *Для каждого отображения $c \in C_1$ определим максимальный поток:*

$$f(c) = \max \left\{ \sum_{j \in N} y_j \;\middle|\; \sum_{\{j|v \in S_j\}} y_j \leqslant c(v),\ v \in V; \quad y_j \geqslant 0,\ j \in N \right\}.$$

Назовем $L(F) = \min\{f(c) \mid c \in C_1\}$ потоковым значением F.

Теорема 7. *Имеет место ровно одна из альтернатив:*

либо формула F выполнима, либо потоковое значение $L(F) \geq 1$.

Доказательство. Пусть в формуле F существует выполняющий набор. Определим отображение c, полагая

$c(v) = 0$, если в этом наборе $v =$ *истина*, и

$c(v) = 1$ для остальных v.

Очевидно, что $c \in C_1$. Так как в каждом множестве S_j окажется литерал со значением *истина*, то для каждого y_j в задаче, определяющей $f(c)$, найдется содержащее его неравенство с нулевой пропускной способностью. Поэтому единственным допустимым планом в этой задаче является $y_j = 0$ для всех $j \in N$. Следовательно, $f(c) = 0 < 1$.

С другой стороны, пусть F невыполнима и существует $c \in C_1$ такое, что

$$f(c) < 1 \qquad (3.1).$$

Пусть y_j, $j \in N$, таковы, что максимальный поток равен

$$f(c) = \sum_{j \in N} y_j. \qquad (3.2)$$

Для каждого $v \in V$ определим множество индексов $N_v = \{j \in N | v \in S_j\}$.

В случае (3.1) для каждой переменной $a \in M$ существует такой литерал $v \in \{a, \neg a\}$, что

$$\sum_{j \in N_v} y_j < c(v). \tag{3.3}$$

Иначе существовала бы переменная $a \in M$, для которой

$$\sum_{j \in N} y_j \geq \sum_{j \in N_a} y_j + \sum_{j \in N_{\neg a}} y_j = c(a) + c(\neg a) = 1,$$

и мы бы имели противоречие с (3.1) и (3.2).

Зафиксируем для каждой переменной $a \in M$ один литерал $v(a) \in \{a, \neg a\}$, удовлетворяющий (3.3). Полагая $v(a) =$*ложь* для всех $a \in M$, получим набор значений переменных. Так как F невыполнима, то существует множество S_j, в котором все литералы примут значение *ложь*. Поэтому соответствующее y_j может быть увеличено, что противоречит (3.2). $\square$

Пример 3. Пусть $M = \{x, t, z\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$ и $S_1 = \{x, \neg t, z\}$, $S_2 = \{x, \neg z\}$, $S_3 = \{\neg x, \neg t, \neg z\}$, $S_4 = \{t, z\}$.

Тогда

$$f(c) = \max_{\substack{y_1+y_2 \leq c(x) \\ y_3 \leq c(\neg x) \\ y_1 + y_3 \leq c(\neg t) \\ y_4 \leq c(t) \\ y_1 + y_4 \leq c(z) \\ y_2 + y_3 \leq c(\neg z) \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0}} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Положив $c(x) = c(\neg t) = c(z) = 0$ и $c(\neg x) = c(t) = c(\neg z) = 1$, получим $f(c) = 0$. Соответствующим выполняющим набором будет $x = z =$ *истина*, $t =$ *ложь*.

3.2. Замечания.

Заметим, **во-первых**, что, если в определение $f(c)$ мы добавим новые условия

$$\sum_{j \in N} y_j \leq c(a) + c(\neg a), \quad a \in M, \tag{3.4}$$

то теорема 7 оказывается обобщением известной теоремы Форда–Фалкерсона о равенстве максимального потока минимальному разрезу:

$$f(c) = \min\{c(a) + c(\neg a) \mid a \in M\} \iff F \text{ невыполнима.}$$

Каждое множество $B_a = \{a, \neg a\}$ играет здесь роль разреза, а невыполнимость означает, что любое множество литералов (дуг), имеющее непустое пресечение с каждым множеством из системы $S = \{S_j \mid j \in N\}$, содержит некоторый разрез из системы разрезов $B = \{B_a, a \in M\}$.

Более того, пара систем множеств (S, B) оказывается обобщением пары (клаттер S, блокер $B(S)$) в терминах Ловаса [6]. Блокер $B(S)$ содержит все такие минимальные множества l, что $l \cap S_j \neq \emptyset$ для всех $j \in N$. Условия типа (3.4) в этом случае выполняются автоматически. Система B полностью представляет блокер $B(S)$ в том смысле, что для каждого $l \in B(S)$ существует $a \in M$, для которого $B_a \subseteq l$ (в случае невыполнимости F). Далее в разделе 4 мы покажем, как пары систем множеств (S, B) с указанным свойством можно применять при поиске оптимума в дискретных задачах.

Второе замечание состоит в том, что для поиска минимума вогнутой функции $f(c)$ в выпуклой области C_1 мы можем использовать оптимальные *двойственные* переменные в задаче линейного программирования, определяющей $f(c)$. Двойственная задача имеет вид

$$f(c) = \min\left\{ \sum_{v \in V} c(v) u_v \;\middle|\; \sum_{v \in S_j} u_v \geqslant 1, j \in N; u_v \geqslant 0, v \in V \right\}. \tag{3.5}$$

Пусть c – некоторое фиксированное отображение из C_1. Переход к новому отображению c_1 осуществляется *процедурой*:

1. Решаем задачу линейного программирования $f(c)$. Пусть $\{u(v), v \in V\}$ – оптимальные двойственные переменные.
2. Для $v \in V$ цикл: если $u(v) > 0$, то полагаем $c_1(v) = 0$, $c_1(\neg v) = 1$.
3. Если $c_1(v) = c(v)$ для каждого $v \in V$, то *конец*, иначе переход к 1.

Так как оптимальные двойственные переменные являются, вообще говоря, частными производными функции $f(c)$, то эта процедура определяет локальный минимум $f(c)$. Выбирая случайным образом точки c в C_1, вычисляя $f(c)$ и переходя с помощью указанной процедуры в локальный минимум, мы получим метод проверки выполнимости без расщепления переменных. Предварительные эксперименты с одной из реализаций этого метода обнадеживающи.

Третье замечание относится к разрешимости булевой системы

$$\sum_{v \in S_j} u_v \geqslant 1, j \in N; \quad u_v \in \{0\ ,\ 1\}, v \in V;\ u_a + u_{\neg a} = 1, a \in M, \quad (3.6)$$

где множества N, V, M и S_j имеют прежний смысл, и условие

$$|\{a, \neg a\} \cap S_j| \leq 1$$

предполагается выполненным.

Ограничения в двойственной задаче (3.5) являются ослаблением системы (3.6). Кроме того, легко видеть, что *выполнимость формулы F эквивалентна разрешимости системы* (3.6): по выполняющему набору мы можем построить решение системы (3.6), полагая $u_v = 1$ для литералов v со значением *истина*, и наоборот, по решению системы (3.6) мы можем построить выполняющий набор, полагая $v =$ *истина*, если $u_v = 1$. Таким образом, теорема 7 принимает вид.

Теорема 8. *Имеет место ровно одна из альтернатив: либо система*

$$\sum_{v \in S_j} u_v \geqslant 1, j \in N; \quad u_v \in \{0\ ,\ 1\}, v \in V; \quad u_a + u_{\neg a} = 1, a \in M,$$

разрешима, либо

$$\min\left\{ \max\left\{ \sum_{j \in N} y_j \;\middle|\; \sum_{\{j | v \in S_j\}} y_j \leqslant c(v), \right.\right.$$

$$\left.\left. v \in V;\ y_j \geqslant 0,\ j \in N \right\} \;\middle|\; c \in C_1 \right\} \geq 1.$$

В работе [10] система (3.6), в которой коэффициенты и правые части неравенств заменены целыми положительными числами, называется системой псевдо-булевых неравенств. Там же для устанавления ее разрешимости предложен алгоритм, являющийся обобщением метода резолюций.

В следующем разделе мы рассмотрим эту систему с произвольными положительными коэффициентами и сведем ее разрешимость к обычной выполнимости некоторой пропозициональной формулы. В предлагаемом сведении можно использовать технику, основанную на понятии *закрытой диаграммы* [11] и используемую нами в дискретной оптимизации [12–17].

4. Дискретная оптимизация

4.1. Системы с булевыми переменными.

Пусть M – множество пропозициональных переменных, V – множество всех литералов и заданы множества $S_j \subset V$, $j \in N$, такие, что

$$|\{a, \neg a\} \cap S_j| \leq 1 \tag{3}$$

для каждой переменной $a \in M$ и для каждого $j \in N$.

Рассмотрим систему неравенств и равенств

$$\sum_{v \in S_j} b_{jv} u_v \geqslant d_j, j \in N; \tag{4.1}$$

$$u_v \in \{0\ ,\ 1\},\ v \in V; \quad u_a + u_{\neg a} = 1,\ a \in M, \tag{4.2}$$

относительно булевых переменных u_v с положительными вещественными коэффициентами b_{jv} и d_j.

Определение 8. *Любое минимальное (по включению) множество литералов r, для которого существует такое $j \in N$, что*

$$\sum_{v \in S_j \setminus r} b_{jv} < d_j,$$

назывется опровержением системы (4.1)–(4.2).

Пусть R – совокупность всех опровержений системы (4.1)–(4.2). *Формула*

$$F(R) = \bigwedge_{r \in R} \bigvee_{v \in r} v$$

называется формулой системы (4.1)–(4.2).

Теорема 9. *Система* (4.1)–(4.2) *разрешима* $\Longleftrightarrow$ *ее формула выполнима.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Предположим, что система (4.1)–(4.2) разрешима. Пусть $u = \{u_v \mid v \in V\}$ – некоторое ее решение и $\pi = \{v \mid u_v = 1\}$.

Покажем, что $\pi \cap r \neq \emptyset$ для любого опровержения $r \in R$. Из того, что r является опровержением, следует существование такого $j \in N$, что

$$\sum_{v \in S_j \setminus r} b_{jv} < d_j.$$

Так как u – решение, то существует такое множество $\pi_j \subseteq \pi$, что

$$\sum_{v \in \pi_j} b_{jv} \geq d_j.$$

Сравнение этих неравенств показывает, что $\pi_j \nsubseteq (S_j \setminus r)$. Это значит, что $\pi_j \cap r \neq \emptyset$, и, следовательно, $\pi \cap r \neq \emptyset$.

Определим теперь для формулы $F(R)$ рассматриваемой системы набор значений, полагая $v =$ *истина* для $v \in \pi$. Тогда в каждом множестве $r \in R$ окажется литерал со значением *истина*, построенный набор будет выполняющим, а формула $F(R)$ выполнима.

$\Longleftarrow$ Покажем, что из неразрешимости системы (4.1)–(4.2) следует невыполнимость ее формулы $F(R)$. Фиксируем произвольный набор значений для $F(R)$ и полагаем $\rho = \{v \in V \mid v =$ *ложь* $\}$. Определим значения булевых переменных в системе (4.1)–(4.2), полагая

$$u_v = 0 \text{ для } v \in \rho; \quad u_v = 1 \text{ для } v \notin \rho.$$

Из неразрешимости системы (4.1)–(4.2) следует существование такого $j \in N$ и такого множества π_j, что

$$\sum_{v \in \pi_j} b_{jv} < d_j \quad \text{ и } \quad r_j = (S_j \setminus \pi_j) \subseteq \rho.$$

Таким образом, множество r_j содержит опровержение. Поэтому в R найдется множество, все литералы которого имеют значение *ложь*, т.е. $F(R)$ невыполнима. $\square$

Следствием теорем 7 и 9 является следующая теорема об альтернативах для систем с булевыми переменными.

Теорема 10. *Имеет место ровно одна из альтернатив: либо система*

$$\sum_{v\in S_j} b_{jv}u_v \geqslant d_j, j\in N;\quad u_v\in\{0\ ,\ 1\}, v\in V;\ u_a+u_{\neg a}=1, a\in M,$$

разрешима при положительных b_{jv} *и* d_j, *либо*

$$\min\left\{\max\left\{\sum_{r\in R} y_r \;\middle|\; \sum_{\{r|v\in r\}} y_r\leqslant c(v),\right.\right.$$

$$\left.\left. v\in V; y_r\geqslant 0, r\in R\right\}\mid c\in C_1\right\}\geq 1,$$

где R *– совокупность всех опровержений рассматриваемой системы и*

$$C_1=\{c:\ V\to\mathcal{R}^1_+\mid c(a)+c(\neg a)=1,\ a\in M\}.$$

Кроме того, из теоремы 9 следует, что система (4.1)–(4.2) разрешима, если выполнима формула $F(R)$. Проверку выполнимости формулы $F(R)$ можно проводить, не зная заранее совокупности R всех опровержений. Будем строить семантический вывод T формулы $F(R)$, рассматривая каждую ветвь W в T как множество литералов W.

Определение 9. *Ветвь* W *называется оцененной, если она содержит некоторое опровержение булевой системы.*

При построении T оцененные ветви можно не расщеплять. Если в какой-то момент все ветви в T окажутся оцененными, то построенный вывод является обоснованием невыполнимости формулы $F(R)$.

Действительно, если набор значений логических переменных рассматривать как множество литералов, принимающих значение *ложь*, то оцененность ветви вывода означает, что каждый набор значений, являющийся продолжением этой ветви, содержит некоторое минимальное опровержение из R. Так как на каждом шаге построения вывода сохраняется полнота (объединение всех продолжений всех ветвей совпадает с множеством всех наборов значений), то каждый набор значений будет содержать некоторое множество из R, что и означает невыполнимость формулы $F(R)$.

Если в выводе T окажутся полные неоцененные ветви, то это свидетельствует о выполнимости формулы $F(R)$. Каждая такая ветвь W имеет мощность $|W| = m$ и определяет решение булевой систем: $u_v = 0$ для всех $v \in W$. При этом определяются все ее решения.

Семантический вывод можно строить не обязательно в виде дерева. Можно рассматривать "сечения" деревьев, сохраняющих полноту. Техника *закрытых диаграмм* позволяет строить такие сечения не только для рассмотренной булевой системы, но и для широкого круга дискретных оптимизационных задач.

4.2. Закрытые диаграммы.

Определение 10. *Пусть A – конечное множество, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ – непустые системы непустых подмножеств A. Тройка $\langle A, \mathbf{B}, \mathbf{D}\rangle$ называется диаграммой. Минимальное множество π, для которого $\pi \cap b \neq \emptyset$ при каждом $b \in \mathbf{B}$ называется путем в $\mathbf{B}$. Диаграмма $\langle A, \mathbf{B}, \mathbf{D}\rangle$ называется закрытой, если каждый путь в $\mathbf{B}$ содержит некоторое множество из $\mathbf{D}$.*

Теорема 11 (Двойственность)**.** *Если диаграмма $\langle A, \mathbf{B}, \mathbf{D}\rangle$ закрыта, то диаграмма $\langle A, \mathbf{D}, \mathbf{B}\rangle$ также закрыта.*

Доказательство двойственности приведено в [11].

Невыполнимые КНФ могут быть проинтерпретированы закрытыми диаграммами следующим образом. Пусть $p_i, i \in 1{:}\,m$, – пропозициональные переменнные, V – множество литералов и $S_j, j \in 1{:}\,n$, – подмножества V. Положим $\mathbf{B} = \{\{p_i, \neg p_i\} \mid i \in 1{:}\,m\}$ и $\mathbf{D} = \{S_j \mid j \in 1{:}\,n\}$. Тогда *закрытость* диаграммы $\langle A, \mathbf{B}, \mathbf{D}\rangle$ *эквивалентна* тому, что КНФ

$$\bigwedge_{j \in 1:n} \bigvee_{v \in S_j} v$$

невыполнима. Действительно, рассматривая каждый набор значений переменных как множество литералов, принимающих значение *ложь*, мы получим, что утверждение "каждый путь в $\mathbf{B}$ содержит некоторое множество из $\mathbf{D}$" эквивалентно утверждению "каждый набор значений является опровержением." Таким образом, в пропозициональном случае закрытая диаграмма совпадает с "допустимыми связями (acceptable mating)" Андрюса [18] и "матрицами связности (connection matrix)" Бибеля [19]. Связями для системы $\mathbf{D}$ являются множества из $\mathbf{B}$. Двойственность закрытой диаграммы позволяет описать *метод резолюций* Робинсона [20] и *обратный метод* Маслова [21] в инвариантных терминах [11].

4.3. Интерпретация дискретных задач оптимизации закрытыми диаграммами.

Под дискретной задачей оптимизации (ДЗО) мы понимаем задачу:
Пусть $Q = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, *где* B_i , $i \in 1{:}n$, *заданные различные конечные множества, и* $f : Q \longrightarrow R^1$ *– функционал, определенный на* Q. *Требуется найти некоторое* $q^* \in Q$ *такое, что* $f(q^*) = \max\{f(q) \mid q \in Q\}$.

Многие известные дискретные задачи могут быть представимы в виде ДЗО. Например, задача о рюкзаке (здесь $B_i = \{i, \neg i\}$, где i означает укладку i предмета в рюкзак, а $\neg i$ – не укладку); задача оптимального размещения производства (здесь B_i – множество всех возможных вариантов строительства в пункте i) и т.д.

Определение 11. *Любой элемент* $q \in Q$ *называется решением, а* q^* *– оптимальным решением. Пусть* I *– фиксированное подмножество множества индексов* $1{:}n$. *Любой элемент* $\delta[I] \in \prod_{i \in I} B_i$ *называется частичным решением. Решение* q *называется расширением частичного решения* $\delta[I]$, *если* $q[I] = \delta[I]$.

Проинтерпретируем в диаграмме $\langle A, \mathbf{B}, \mathbf{D}\rangle$ систему $\mathbf{B}$ как $\{B_i \mid i \in 1{:}n\}$, а систему $\mathbf{D}$ как некоторый набор частичных решений. Тогда *закрытость диаграммы эквивалентна полноте набора* $\mathbf{D}$ *в том смысле, что каждое решение из* Q *есть расширение некоторого частичного решения из* $\mathbf{D}$ [14].

Набор $\mathbf{D}$ частичных решений будем назвать *оцененным*, если в результате некоторого анализа либо стало ясно, что множество $R(\mathbf{D})$ всех расширений всех частичных решений из $\mathbf{D}$ не содержит оптимального решения q^* либо стало известным такое решение q_0, что $f(q_0) = \max\{f(q) \mid q \in R(\mathbf{D})\}$. В методе ветвей и границ таким анализом является оценивание путем релаксации ДЗО. Если диаграмма $\langle A, \mathbf{B}, \mathbf{D}\rangle$ для оцененного набора $\mathbf{D}$ окажется закрытой, то множество $R(\mathbf{D})$ совпадает с множеством всех решений Q и обязательно содержит оптимальное решение q^*, равное найденному q_0.

Таким образом, для поиска оптимального решения мы можем использовать *прямой* и *двойственный* подходы: в прямом (соответственно двойственном) последовательно строятся полные (оцененные) наборы **D** частичных решений, и процесс кончается, когда очередной набор станет оцененным (полным). Метод ветвей и границ реализует прямой подход, строя полные наборы частичных решений в виде дерева частичных решений. Закрытые диаграммы позволяют строить и "недревовидные" полные наборы. Техника их построения с соответствующими примерами и метод *плетей и границ*, базирующийся на этой технике, описаны в [17].

Двойственность закрытых диаграмм позволяет реализовать и двойственный подход. Предположим, что из эвристических соображений мы построили оцененный набор частичных решений **D**. Из теоремы двойственности следует, что для проверки полноты **D** мы должны рассматривать пути в **D**. Если каждый такой путь содержит некоторое множество из системы $\mathbf{B} = \{B_i \mid i \in 1{:}n\}$, то **D** полон. Иначе к **D** можно добавить новое частичное решение, делающее набор **D** "более полным." Реализующий этот подход *двойственный метод ветвей и границ* был предложен в [14, 15].

Литература

1. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *О разрешимости системы $Ax = 0, x \geq 0$, с неопределенными коэффициентами.* — Известия ВУЗов, Математика **No. 9** (1990), 85–88.
2. G. Davydov, I. Davydova, *Tautologies and positive solvability of homogeneous systems.* — Annals of Pure and Applied Logic **57, No. 1** (1992), 27–43.
3. D. Gale, *The theory of linear economic models.* McGraw-Hill Book Company, New York, (1960).
4. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Разрешимые матрицы.* Вестник СПбУ, Математика, No. 1, (1993), 3–9.
5. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Потоковая интерпретация NP-полных задач.* — Известия ВУЗов, Математика **No. 12** (1988), 59–62.
6. L. Lovász, *An algorithmic Theory of Numbers, Graphs and Convexity.* Philadelphia, (1986).
7. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Разрешимость линейных систем и выполнимость.* — Вестник СПбУ, Математика **в. 4** (1995), 14–17.
8. М. И. Захаревич, *Разрешимые формулы и системы линейных неравенств.* — В кн.: Семиотические аспекты формализации интеллектуальной деятельности, М. (1988), 14–15.
9. Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, *Потоки в сетях.* М. (1966).

10. P. Barth, *A Davis-Putnam Based Enumeration Algorithm for Linear Pseudo-Boolean Optimization.* Tech. report of MPI Informatik, MPI-I-95-2-003, Jan. 1995.
11. Г. В. Давыдов, *Синтез метода резолюций с обратным методом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **20** (1971), 24–35.
12. И. М. Давыдова, *Схемы перебора в задачах размещения.* Уч. пособие, ЛГУ (1985), 100 с.
13. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Двойственный критерий оптимальности в дискретных задачах.* — Известия ВУЗов, Математика **No. 1** (1985), 57–59.
14. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Двойственные алгоритмы в дискретной оптимизации.* — Вопросы кибернетики **131** (1987), 90–117.
15. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Двойственность и недревовидный поиск в дискретной оптимизации.* — Известия АН СССР, Техническая кибернетика **No. 1** (1987), 86–93.
16. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Недревовидные покрытия в дискретной оптимизации.* — Известия ВУЗов, Математика **No. 3** (1988), 66–69.
17. Г. В. Давыдов, И. М. Давыдова, *Метод плетей и границ.* — В кн.: Исследование операций и стат. модел. **6**, (1994), 14–30.
18. P. B. Andrews, *Refutations by matings.* — IEEE Transactions on Computer **25** (1976), 801–807.
19. W. Bibel, *Automated Theorem Proving.* Braunschweig (1982).
20. J. A. Robinson, *On automatic deduction.* — Rice Univ. Studies **50, (1)** (1964), 69–89.
21. С. Ю. Маслов, *Обратный метод установления выводимости в классическом исчислении предикатов.* — Доклады АН СССР **159** (1964), 17–20.

Davydov G. V., Davydova I. M. Number representations of satisfiability.

Propositional formulas are represented by real-valued matrices in such way that unsatisfiability is proved to be equivalent to stable non-negative solvability of linear algebraic systems. Complete calculus for the generation of all non-negatively solvable linear homogeneous systems is presented as consequence.

Solvability of systems of linear inequalities with real coefficients and Boolean variables is reduced to satisfiability of some formula. Alternative's theorem is proved for solvability of such systems. The technique of implicit enumeration for the search of solutions both in considering systems and in a wide range of discrete optimization problems is described.

Институт Проблем
Транспорта РАН

Поступило 19 февраля 1996 г.

С.-Петербургский
государственный университет