Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

Ю. В. Якубович

СИММЕТРИЧНЫЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СТАТИСТИКИ

1. Введение. Под *статистикой* мы понимаем в данной заметке последовательность вероятностных мер μ^n, каждая из которых задана на множестве $\mathcal{P}(n)$ разбиений натурального числа n в неупорядоченную сумму натуральных слагаемых. *Большой канонический ансамбль* разбиений — это дизъюнктное объединение $\mathcal{P}$ множеств $\mathcal{P}(n)$ по всем $n \geqslant 0$. (Терминология связана со статистической механикой, см. [1].) Тем самым, элементы $\mathcal{P}$ — это разбиения уже произвольного неотрицательного целого, включая единственное разбиение нуля на пустое множество слагаемых. Каждому разбиению $\lambda \in \mathcal{P}$ взаимно однозначно соответствует его *вектор кратностей* — последовательность неотрицательных целых чисел $(X_1(\lambda), X_2(\lambda), X_3(\lambda), \dots)$, лишь конечное число которых отлично от нуля, где $X_k(\lambda)$ есть число слагаемых k в разбиении λ. Отметим, что разбиваемое число $N(\lambda)$, т.е. такое N, что $\lambda \in \mathcal{P}(N)$, равно $\sum_{k=1}^{\infty} kX_k(\lambda)$.

Диаграмма Юнга разбиения λ — это подмножество плоскости

$$D_\lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0 \text{ и } y \leqslant \sum\nolimits_{k=\lceil x \rceil}^{\infty} X_k \right\},$$

где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее x. Нетрудно заметить, что диаграмма Юнга есть замкнутый (вообще говоря, невыпуклый) многоугольник с вершинами в целых точках, каждая грань которого параллельна одной из осей координат. (Однако, разумеется, не любой такой многоугольник является диаграммой некоторого разбиения.) Диаграмма Юнга однозначно определяет разбиение. Площадь диаграммы есть разбиваемое число $N(\lambda)$. *Сопряженное разбиение* λ' есть разбиение с диаграммой $D_{\lambda'}$, симметричной диаграмме D_λ относительно прямой $y = x$.

Определение 1. Статистику мы будем называть *симметричной,* если мера любого разбиения равна мере сопряженного с ним.

Рассмотрим последовательность функций φ_k, $k = 1, 2, \dots$, причем пусть все $\varphi_k(t^k)$ имеют одинаковый радиус сходимости $R \in$

$(0,+\infty]$. Предположим также, что $\varphi_k(0)=1$ и что произведение

$$F(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t^k)$$

также сходится при $|t|<R$. При этих предположениях $\varphi_k(t)$ разлагается в ряд Тейлора в круге $|t|<R^{1/k}$: $\varphi_k(t)=1+\sum_{j=1}^{\infty}a_{k,j}t^j$. Зададим на $\mathcal{P}$ семейство вероятностных мер μ_t определяя вероятности

$$\mu_t\{X_k=j\}=\frac{a_{k,j}t^{kj}}{\varphi_k(t^k)}.$$

Различные координаты вектора кратностей независимы относительно мер μ_t.

Определение 2 (см. [1]). Статистика μ^n называется *мультипликативной,* если меры μ^n совпадают с условными мерами $\mu_t(\cdot\mid N(\cdot)=n)$ при некоторых φ_k и $t\in(0,R)$.

Нетрудно проверить, что условная мера в предыдущем определении на самом деле не зависит от t. Кроме того, если заменить функции $\varphi_k(t)$ на функции $\varphi_k(s^k t)$, где $s>0$, то условная мера также не меняется. Поэтому, если радиусы сходимости φ_k конечны, то можно считать их равными единице, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Пример. Рассмотрим равномерную статистику на разбиениях (каждая мера μ^n есть равномерная мера на $\mathcal{P}(n)$). Нетрудно проверить, что эта статистика мультипликативна, и в этом случае $\varphi_k(t)=1/(1-t)$ и $F(t)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k)^{-1}$. Эта статистика также очевидным образом симметрична. Работа [2] посвящена изучению асимптотических свойств этой меры, см. ниже.

В этой заметке показывается, что имеется однопараметрическое семейство симметричных мультипликативных статистик, и что любая симметричная мультипликативная статистика лежит в этом семействе. А именно, верна следующая

Теорема 1. *Пусть μ^n — симметричная мультипликативная статистика, и φ_k — соответствующие функции, определяющие меру на большом каноническом ансамбле разбиений. Тогда*

$$\varphi_k(t)=1+\frac{st}{1-t} \qquad (*)$$

при некотором $s > 0$.

Нетрудно описать меры μ^n не используя большого канонического ансамбля. Пусть $s > 0$, рассмотрим вероятностную меру $\bar{\mu}^n$ на $\mathcal{P}(n)$ такую, что вероятность каждого разбиения пропорциональна s в степени числа *различных* слагаемых в разбиении. Тогда $\bar{\mu}^n$ и есть условная мера для меры на большом ансамбле, определяемой φ_k из (*). При $s = 1$, разумеется, $\bar{\mu}^n$ совпадает с равномерной мерой на $\mathcal{P}(n)$.

Интересно также асимптотическое поведение мер $\bar{\mu}^n$ при больших n. Для равномерной меры эти вопросы изучались в ряде работ, в частности, в [2]. В этой работе описана предельная форма диаграмм Юнга для равномерной статистики, и следующая теорема обобщает приведенный там результат. При $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, обозначим p_λ верхнюю границу диаграммы D_λ, нормированной в $\sqrt{n}$ раз вдоль обеих осей, т.е. $p_\lambda(x) = \sup\{y : (\sqrt{n}x, \sqrt{n}y) \in D_\lambda$.

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* N, *что при всех* $n > N$

$$\bar{\mu}^n\left\{\lambda \in \mathcal{P}(n) : p_\lambda \in V_\varepsilon(\Gamma)\right\} > 1 - \varepsilon,$$

где Γ — *кривая, задаваемая уравнением*

$$e^{-cx} + e^{-cy} = 1 + (1-s)e^{-c(x+y)}, \qquad (+)$$

константа $c = c(s) = \sqrt{\pi^2/6 - \mathrm{Li}_2(1-s)}$ *определяется условием, что площадь подграфика* Γ *равна 1, и* $V_\varepsilon(\Gamma)$ — ε*-окрестность кривой* Γ, *и* $\mathrm{Li}_2(x)$ – *дилогарифм* x, *определенный при* $\Re x \leqslant 1$ *как интеграл*

$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt.$$

Заметим, что определение мер $\bar{\mu}^n$ показывает, что при $s \gg 1$ наиболее типичны разбиения с большим количеством различных слагаемых; если же $s \ll 1$, то, наоборот, разбиения на одинаковые слагаемые наиболее вероятны. Это позволяет предположить, что при $s \gg 1$ типичны диаграммы, близкие к треугольнику. Однако теорема 2 показывает, что это не так. Это объясняется тем, что некорректно переставлять пределы по n и по s, а при фиксированном (сколь угодно большом) s и достаточно больших n разбиения с диаграммой, близкой к Γ, хотя каждое из них имеет малую вероятность, имеют подавляющий вес.

На рис. 1 изображены 3 предельные кривые Γ для случаев $s = 1/1000$, $s = 1$ и $s = 1000$ в координатах (u, v), $u = (x - y)/2$ и $v = (x + y)/2$. При $s \to \infty$ предельная кривая действительно стремится к ломаной

$$v = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & |u| < 1/\sqrt{2}; \\ |u| & |u| \geqslant 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Однако это стремление происходит гораздо медленнее, чем можно было бы ожидать.

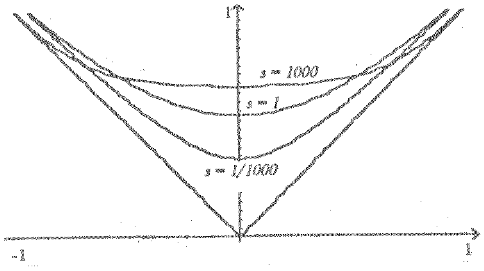

Рис. 1

Параграфы 2 и 3 содержат доказательства теорем 1 и 2, соответственно.

Автор благодарит своего научного руководителя А. М. Вершика за плодотворные беседы.

2. Единственность мер $\bar{\mu}^n$.

Этот параграф содержит доказательство теоремы 1 и некоторые замечания.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что мера, определяемая функциями (*), действительно симметрична. Это следует из того, что число различных слагаемых в разбиении есть число "выступающих" углов в диаграмме этого разбиения (эти углы помечены жирными точками на рис. 2), и это число, очевидно, инвариантно относительно отражения диаграмм. Так что нетривиальную часть доказательства составляет тот факт, что всякая симметричная мультипликативная статистика принадлежит этому семейству.

Итак, пусть μ^n — симметричная мультипликативная статистика, и $\varphi_k(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} t^j$ — соответствующие ей функции,

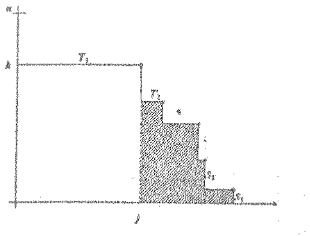

Рис. 2

определяющие меру на большом каноническом ансамбле, каждая с радиусом сходимости 1. Введем четыре функции разбиения: $S_1(\lambda)$ есть число максимальных слагаемых в разбиении λ, $S_2(\lambda)$ — число вторых после максимального слагаемых, $T_1(\lambda)$ — минимальное слагаемое и $T_2(\lambda)$ — второе после минимального слагаемое в λ (см. рис. 2). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\mu_t(S_1=j)&=\mu_t\bigl(X_{k_m}=j,\ \text{и } X_k=0 \text{ при } k>k_m\bigr)\\&=\sum_{k_m=1}^{\infty}\frac{a_{k_j}t^{kj}}{\varphi_{k_m}(t^{k_m})}\prod_{k>k_m}\frac{1}{\varphi_k(t^k)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mu_t(T_1=j)\\&\qquad=\mu_t\bigl(X_j>0,\ \text{и } X_k=0 \text{ при } k<j\bigr)\\&\qquad=\frac{\varphi_j(t^j)-1}{\varphi_j(t^j)}\prod_{k<j}\frac{1}{\varphi_k(t^k)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mu_t(S_2=j)\\&\quad=\mu_t\bigl(X_{k_{m-1}}=j,\ X_{k_m}>0,\ \text{и } X_k=0 \text{ при } k>k_{m-1},\ k\neq k_m\bigr)\\&\quad=\sum_{k_{m-1}=1}^{\infty}\frac{a_{k_{m-1}j}t^{k_{m-1}j}}{\varphi_{k_{m-1}}(t^{k_{m-1}})}\sum_{k_m=k_{m-1}+1}^{\infty}\frac{\varphi_{k_m}(t^{k_m})-1}{\varphi_{k_m}(t^{k_m})}\prod_{\substack{k>k_{m-1}\\k\neq k_m}}\frac{1}{\varphi_k(t^k)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mu_t(T_2=j)\\&\quad=\mu_t\bigl(X_k=0,\ k<k_1;\ X_{k_1}>0;\ X_k=0,\ k_1<k<j;\ X_{k_1+j}>0\bigr)\\&\quad=\sum_{k_1=1}^{\infty}\bigl(\varphi_{k_1}(t^{k_1})-1\bigr)\bigl(\varphi_{k_1+j}(t^{k_1+j})-1\bigr)\prod_{k=1}^{k_1+j}\frac{1}{\varphi_k(t^k)},\end{aligned}$$

где k_m обозначает максимальное, k_{m-1} — второе по величине, а k_1 — минимальное слагаемое. Заметим, что это не есть вероятностные распределения, поскольку S_1 и T_1 не определены, когда разбиваемое число есть 0, а S_2 и T_2 не определены, когда в разбиении нет двух различных слагаемых. Поскольку статистика μ^n симметрична, то симметрична и мера μ_t как выпуклая комбинация симметричных мер, и, следовательно, $\mu_t(S_1 = j) = \mu_t(T_1 = j)$ и $\mu_t(S_2 = j) = \mu_t(T_2 = j)$ при всех $j = 1, 2, \ldots$. Первое равенство перепишем в виде

$$a_{1j}t^{1\cdot j} + a_{2j}t^{2j}\varphi_1(t) + \cdots + a_{nj}t^{nj}\varphi_1(t)\ldots\varphi_{n-1}(t^{n-1}) + \ldots \\ = \bigl(\varphi_j(t^j) - 1\bigr)\prod_{k>j}\varphi_k(t^k). \quad (1)$$

Положим $r = a_{2,1}/a_{1,1}$ и $s = a_{1,1}/r$. Нам нужно показать, что $a_{kj} = sr^{kj}$. Тогда радиус сходимости функций φ_k будет $r^{1/k}$, т.е. $r = 1$. Прежде всего заметим, что $a_{1,1} = sr$, а $a_{1,2} = sr^2$. Положив $j > 1$ и приравнивая коэффициенты при t^j, видим, что $a_{1j} = a_{j1}$. Чтобы показать, что $a_{1j} = sr^j$, домножим обе части равенства $\mu_t(S_2 = j) = \mu_t(T_2 = j)$ на $F(t)$ и приравняем коэффициенты при минимальной степени t. Имеем: $a_{2,1}a_{1,j} = a_{1,1}a_{1+j,1}$, откуда по индукции следует, что $a_{1j} = sr^j$.

Для окончания доказательства теоремы вновь обратимся к (1). Предположим, что при $k < n$ выполнено $a_{kl} = a_{lk} = sr^{kl}$. (Мы уже доказали это для $k = 1$, и теперь полагаем $n \geqslant 2$.) Покажем, что это верно и для $k = n$. Введем следующее обозначение: если $\lambda = (X_1, X_2, \ldots)$, то $A(\lambda)$ будет обозначать $\prod_{k=1}^{\infty} a_{k,X_k}$ (здесь $a_{k,0} = 1$, и поскольку почти все X_k равны нулю, то в произведении лишь конечное число сомножителей, отличных от 1). Используя это обозначение и приравнивая коэффициенты при t^{nj}, получаем

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{kj} \sum_{\substack{\lambda\vdash(n-k)j \\ \text{блоки } \lambda<k}} A(\lambda) + a_{nj} = \sum_{\substack{\lambda\vdash nj \\ X_j(\lambda)\geqslant 1 \\ \text{блоки } \lambda\geqslant j}} A(\lambda).$$

Диаграммы всех разбиений из правой части, кроме разбиения на n слагаемых j, которому соответствует слагаемое a_{jn}, имеют заштрихованную на рис. 2 часть ($x \geqslant j$). Обозначим число (всех) слагаемых разбиения из правой части равенства k. Тогда, переходя к сопряженному разбиению, мы получаем разбиение на j

слагаемых k и любые меньшие k блоки. Но A от этих разбиений как раз суммируются слева. Тем самым, $a_{jn} = a_{nj}$. Аналогично, сравнивая коэффициенты при t^{jn+1}, видим, что $a_{nj} = sr^{nj}$.

Замечание. Интересен тот факт, что, хотя S_1, S_2, T_1 и T_2 не определяют разбиения, того, что "распределения" S_1 и T_1, а также S_2 и T_2, совпадают, достаточно для доказательства единственности семейства (*). Одного соотношения (1) для этого недостаточно, т.е. существуют мультипликативные статистики, которые не симметричны, но S_1 и T_1 распределены одинаково.

3. Предельные формы диаграмм Юнга. Мы приведем лишь подробный план доказательства теоремы 2, опуская технические подробности, которые не столь сложны, сколь громоздки. Доказательство основывается на лемме 5.2 из [1]. В нашем случае она утверждает, что если меры μ_t, перенесенные на множество нормированных диаграмм, имеют слабый предел, являющийся δ-мерой, то тот же предел на множестве нормированных диаграмм имеют и меры μ^n. Чтобы сформулировать это утверждение более точно, введем пространство $\mathcal{D} = \{(a_0, a_\infty, p(\cdot))\}$, состоящее из троек, первые два элемента a_0, a_∞ в которых суть неотрицательные числа, а третий элемент $p \in L^1_+(\mathbb{R}_+)$ — неотрицательная невозрастающая функция на $[0, \infty)$, причем $a_0 + a_\infty + \int_0^\infty p(t)\,dt = 1$. Числа a_0 и a_∞ можно представлять себе как заряды меры в 0 и $+\infty$, соответственно, а элементы из $\mathcal{D}$ рассматривать как меры $a_0\,dt_0 + a_\infty\,dt_\infty + p\,dt$ на $[0, \infty]$ с двумя возможными атомами на концах и монотонной плотностью по лебеговой мере на $(0, \infty)$. Введем на $\mathcal{D}$ топологию равномерной сходимости на компактах, лежащих в $(0, \infty)$, и обычной сходимости величин зарядов в 0 и ∞. Пространство $\mathcal{D}$ компактно в этой топологии, см. [1].

Рассмотрим отображение $\tau_n : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{D}$, заданное по правилу

$$\tau_n : \lambda \mapsto (0, 0, p_\lambda(x)),$$

где $\sqrt{n}p_\lambda(\sqrt{n}x) = \sup\{\, y : (x, y) \in D_\lambda \,\}$ – верхняя граница диаграммы Юнга D_λ разбиения $\lambda \in \mathcal{P}(n)$. Другими словами, мы отображаем разбиение λ в меру из $\mathcal{D}$ без нагрузок в нуле и на бесконечности, и с плотностью такой, что ее график есть верхняя граница диаграммы D_λ, сжатой в $\sqrt{n}$ раз вдоль обеих осей. Поскольку множества $\mathcal{P}(n)$ не пересекаются при различных n, и их объединение есть $\mathcal{P}$, то мы можем определить отображение $\tau\colon \mathcal{P} \to \mathcal{D}$, выбирая для каждого λ соответствующее τ_n. Любая мера на $\mathcal{P}$ переносится на $\mathcal{D}$ при помощи отображения τ. Лемма 5.2 [1], примененная к нашей ситуации, утверждает, что если меры $\mu_t \circ \tau^{-1}$ слабо сходятся к δ-мере $\bar{\mu}$ в $\mathcal{D}$ при $t \to 1$, то и меры $\mu^n \circ \tau^{-1}$ также слабо сходятся к $\bar{\mu}$.

Таким образом, достаточно найти δ-меру $\bar{\mu}$, такую что $\mu_t \circ \tau^{-1}$ слабо сходятся к ней при $t \to 1$, если, конечно, она существует. Для этого рассмотрим координаты X_k вектора кратностей разбиения. Это независимые (относительно μ_t) случайные величины, имеющие математические ожидания

$$\mathbf{E}_t X_k = \frac{st^k}{(1-t^k)(1-(1-s)t^k)}.$$

Поскольку $\sqrt{n} p_\lambda(\sqrt{n} x) = \sum_{k=\lceil x \rceil}^{\infty} X_k$, то

$$y(x) = \lim_{t\to 1} \mathbf{E}_t p_\lambda(x) = \lim_{t \to 1} \mathbf{E}_t \frac{1}{\sqrt{N(\lambda)}} \sum_{k \geqslant x\sqrt{N(\lambda)}} X_k, \qquad (2)$$

где $N(\lambda)$ – разбиваемое число. Математическое ожидание

$$\mathbf{E}_t X_k = \frac{s\,t^k}{(1-t^k)\,(1-t^k+s\,t^k)},$$

однако мы должны избавиться от $N(\lambda)$ в (2) для того, чтобы можно было воспользоваться преимуществами независимости X_k. Выбирая последовательность

$$t_n = 1 - c/\sqrt{n},$$

где $c = c(s)$ – константа, отвечающая за нормировку предельной кривой y, которую мы найдем позднее, мы обеспечиваем соотношение

$$\mathbf{E}_{t_n} N = n, \qquad (3)$$

и при этом

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{t_n} \left(\frac{N(\lambda)}{n} - 1\right)^2 = 0. \qquad (4)$$

Соотношения (3) и (4) позволяют вместо предела правой части в (2) рассмотреть предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{t_n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\geqslant x\sqrt{n}} X_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\geqslant x\sqrt{n}} \mathbf{E}_{t_n} X_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k\geqslant x\sqrt{n}} \frac{s\,(1-c/\sqrt{n})^k}{\left(1-(1-c/\sqrt{n})^k\right)\left(1-(1-s)\,(1-c/\sqrt{n})^k\right)}.$$

Последняя сумма есть модифицированная интегральная сумма Римана, и путем несложных оценок можно показать, что она также стремится к

$$\int\limits_x^\infty \frac{se^{-cv}\,dv}{(1-e^{-cv})(1-(1-s)e^{-cv})}.$$

Вычисляя этот интеграл, видим, что предельная кривая задается уравнением

$$y(x) = \frac{1}{c}\ln\frac{1-(1-s)e^{-cx}}{1-e^{-cx}},$$

или, в симметричной форме,

$$e^{-cx} + e^{-cy} = 1 + (1-s)e^{-c(x+y)},$$

что совпадает с предельной кривой Г, определяемой соотношением (+).

Определим теперь константу c. Для этого рассмотрим соотношение (3). Представляя $N(\lambda)/n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^\infty kX_k(\lambda)$, переходя к пределу по n и, как и выше, заменяя предел суммы интегралом, видим, что

$$1 = \int\limits_0^\infty \frac{se^{-cx}\,dx}{(1-e^{-cx})(1-(1-s)e^{-cx})}.$$

Вычисляя этот интеграл, получаем

$$c = \sqrt{\mathrm{Li}_2(1) - \mathrm{Li}_2(1-s)} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Li}_2(1-s)}.$$

Нетрудно проверить, что это же c определяется условием, что площадь под графиком $y = y(x)$ равна 1.

Остается проверить, что предельная мера сосредоточена на этой кривой. Дисперсия X_k

$$\mathbb{D}_t X_k = \frac{s\,t^k\,\left(1 - t^{2\,k} + s\,t^{2\,k}\right)}{\left(-1 + t^k\right)^2 \left(1 - t^k + s\,t^k\right)^2}.$$

Применяя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, видим, что

$$\mathbb{D}_{t_n} p_\lambda(x) = \frac{1}{n} \sum_{k > x\sqrt{n}} \mathbb{D}_{t_n} X_k = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

что и требовалось. Таким образом, меры $\mu_t \circ \tau^{-1}$ слабо сходятся к δ-мере, сосредоточенной на кривой Γ, и, согласно лемме 5.2 [1], меры $\mu^n \circ \tau^{-1}$ имеют тот же слабый предел, откуда следует утверждение теоремы.

Литература

1. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации.* — Функциональный анализ **30** (2) (1996).
2. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп.* — Теория вероятностей и ее применения. Ч. 1 (1977) вып. 1; Ч. 2 (1978) вып. 2.

Jakubovich Yu. V. Symmetric multiplicative statistics.

The author constructs the family of multiplicative statistics on integer partitions that are symmetric in the sense that the statistics is invariant under conjunction of Young diagram. It is shown that all symmetric multiplicative statistics lie in this family. A limit shape of Young diagrams under these statistics is found.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 сентября 1996г.