Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

Н. А. Рожковская

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАФЕ ЮНГА

§1. Введение

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ – разбиение числа n: $\lambda \vdash n$. Диаграммой разбиения λ называется множество точек $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$. Принято точки (i, j) диаграммы изображать квадратиками и называть клетками.

Графом Юнга называется $\mathbb{Z}_+$-градуированный граф $\mathbb{Y} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n$ такой, что вершины уровня n суть диаграммы, соответствующие разбиениям числа n, а каждое из ребер графа $\mathbb{Y}$ соединяет две диаграммы, отличающиеся друг от друга на одну клетку, см. [4, 5].

Функция $M : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ называется *распределением* на графе Юнга, если

1) $\sum\limits_{\lambda \vdash n} M(\lambda) = 1$,
2) $M(\lambda) \geqslant 0$,
3) $M(\lambda) = \sum\limits_{\Lambda \searrow \lambda} \frac{\dim \lambda}{\dim \Lambda} M(\Lambda)$, где сумма берется по всем диаграммам $\Lambda \in \mathbb{Y}$, отличающимся от λ на одну клетку, а $\dim \lambda$, $\dim \Lambda$ – число путей, ведущих из начала графа Юнга – пустой диаграммы – в диаграммы λ, Λ соответственно.

Рассматриваемые в дальнейшем распределения считаются *невырожденными*, т.е. $M(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{Y}$. Тогда можно определить переходную вероятность:

$$p(\lambda, \Lambda) = \frac{M(\Lambda)}{M(\lambda)} \frac{\dim \lambda}{\dim \Lambda}.$$

Планшерелевским распределением называется распределение

$$M_\infty(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}.$$

В [4, 5] показано, что таким образом заданная функция действительно является распределением.

При поддержке Международной Соровской Программы Образования.

Определение. *Невырожденное распределение $M(\lambda)$ назовем мультипликативным, если существуют такие функции $f : \mathbb{N}\setminus\{0\}\times\mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, что переходная функция $p(\lambda,\Lambda)$ может быть представлена в виде*

$$p(\lambda,\Lambda) = \frac{f(i,j)}{g(n)} p_\infty(\lambda,\Lambda), \tag{1}$$

где (i,j) – номер клетки $\Lambda\setminus\lambda$, $\lambda \vdash n$, $\Lambda \vdash n+1$,

$$p_\infty(\lambda,\Lambda) = \frac{\dim\Lambda}{(n+1)\dim\lambda}$$

– планшерелевская переходная вероятность.

Заметим, что если домножить на одну и ту же константу $f(i,j)$ и $g(n)$ для всех $i,j = 1,2,\ldots$, $n = 0,1,2,\ldots$, то распределение не изменится.

Комментарий. Из (1) следует фундаментальное тождество

$$\sum_{\Lambda\searrow\lambda} p_\infty(\lambda,\Lambda) f(i,j) = g(n), \tag{2}$$

где (i,j) – координаты клетки $\Lambda\searrow\lambda$.

Обратно, пусть выполнено (2). Положим

$$M(\lambda) = M_\infty(\lambda)\frac{\prod\limits_{(i,j)\in\lambda} f(i,j)}{g(0)g(1)\ldots g(n-1)}.$$

Если $M(\lambda) > 0$ для всех λ , то $M(\lambda)$ – распределение на графе Юнга. В самом деле,

$$\frac{\dim\lambda}{\dim\Lambda}\frac{M(\Lambda)}{M(\lambda)} = \frac{f(\Lambda\setminus\lambda)}{g(n)}\frac{\dim\Lambda}{(n+1)\dim\lambda},$$

условие 3) следует из (2).

В работе [1] исследуется семейство мультипликативных распределений с переходной вероятностью

$$p_z(\lambda,\Lambda) = \frac{|z+c_{\lambda\Lambda}|^2}{|z|^2+n} p_\infty(\lambda,\Lambda), \quad z\in\mathbb{C}, \tag{3}$$

где $c_{\lambda\Lambda}$ – содержание клетки $\Lambda\setminus\lambda$: $c_{\lambda\Lambda} = j-i$, $(i,j) = \Lambda\setminus\lambda$.

Здесь мы покажем, что семейство

$$p_{u,v}(\lambda,\Lambda)=\frac{(c_{\lambda\Lambda}+u)(c_{\lambda\Lambda}+v)}{n+uv}p_\infty(\lambda,\Lambda),\ \ u,v\in\mathbb{C} \tag{4}$$

включает в себя все возможные мультипликативные непланшерелевские распределения на графе Юнга. Заметим, что $p_{z,\overline{z}}(\lambda,\Lambda)\equiv p_z(\lambda,\Lambda)$.

Автор выражает глубокую признательность Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и всестороннюю поддержку.

§2. Распределения на графе Юнга

Теорема 1. *Пусть $\{p(\lambda,\Lambda)\}$ – набор переходных вероятностей некоторого невырожденного мультипликативного непланшерелевского распределения на графе Юнга:*

$$p(\lambda,\Lambda)=\frac{f(i,j)}{g(n)}p_\infty(\lambda,\Lambda). \tag{5}$$

Тогда существуют такие числа u и v, что

$$f(i,j)=\mathrm{const}(c_{ij}+u)(c_{ij}+v), \tag{6}$$

$$g(n)=\mathrm{const}(n+uv), \tag{7}$$

где $c_{ij}=c_{\lambda\Lambda}=j-i$ и $\mathrm{const}\neq 0$.

Доказательство. В дальнейшем мы будем пользоваться фундаментальным тождеством (2). Введем обозначения $a=f(1,2)$, $b=f(2,1)$, $c=g(2)$.

Лемма 1. *Значения функции f на парах (3,1), (1,3), (2,2), (4,1), (1,4), (1,5), (5,1) и значения функции g на $n=1,2,3,4$ однозначно определяются значениями a, b и c.*

Доказательство. Распишем равенство (2) для следующих разбиений λ:

$$\begin{aligned}\lambda&=(1)\\ g(1)&=\frac{1}{2}f(2,1)+\frac{1}{2}f(1,2),\\ g(1)&=\frac{1}{2}(a+b);\end{aligned}$$

$$\lambda = (1,1)$$
$$g(2) = \frac{1}{3}f(3,1) + \frac{2}{3}f(1,2),$$
$$f(3,1) = 3c - 2a;$$

$$\lambda = (2)$$
$$g(2) = \frac{1}{3}f(1,3) + \frac{2}{3}f(2,1),$$
$$f(1,3) = 3c - 2b; \qquad (1,3)$$

$$\lambda = (1,1,1)$$
$$g(3) = \frac{1}{4}f(4,1) + \frac{3}{4}f(1,2),$$
$$f(4,1) = 4g(3) - 3a; \qquad (4,1)$$

$$\lambda = (3)$$
$$g(3) = \frac{1}{4}f(1,4) + \frac{3}{4}f(2,1),$$
$$f(1,4) = 4g(3) - 3b; \qquad (1,4)$$

$$\lambda = (2,1)$$
$$g(3) = \frac{3}{8}f(3,1) + \frac{1}{4}f(2,2) + \frac{3}{8}f(1,3),$$
$$f(2,2) = 4g(3) - 9c + 3(a+b); \qquad (2,2)$$

$$\lambda = (2,2)$$
$$g(4) = \frac{1}{2}f(3,1) + \frac{1}{2}f(1,3),$$
$$g(4) = 3c - (a+b);$$

$$\lambda = (1,1,1,1)$$
$$g(4) = \frac{1}{5}f(5,1) + \frac{4}{5}f(1,2),$$
$$f(5,1) = 5g(4) - 4f(1,2),$$
$$f(5,1) = 15c - 9a - 5b;$$

$$\begin{aligned}\lambda &= (4)\\ g(4) &= \frac{4}{5}f(2,1)+\frac{1}{5}f(1,5),\\ f(1,5) &= 5g(4)-4f(2,1),\\ f(1,5) &= 15c-9b-5a.\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство леммы, необходимо выразить значение $g(3)$ через a, b, c и подставить в $(4,1)$, $(1,4)$, $(2,2)$. Имеем: для $\lambda=(2,1,1)$ $\quad g(4)=\frac{4}{15}f(4,1)+\frac{1}{3}f(2,2)+\frac{2}{5}f(1,3)$, но из $(4,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ следует, что это равносильно равенству

$$3-(a+b)=\frac{4}{15}(g(3)-3a)+\frac{1}{3}(4g(3)-9c+3(a+b))+\frac{2}{5}(3c-2b),$$

откуда $g(3)=2c-\frac{1}{2}(a+b)$. Лемма доказана.

Записав соотношение (2) для всех $\lambda\in\mathbb{Y}$, получим линейную систему $\mathfrak{A}$ уравнений с неизвестными $f(i,j)$, $g(n)$ $(i,j=1,2,\ldots,$ $n=1,2,\ldots)$.

Лемма 2. *Из уравнений системы $\mathfrak{A}$ можно однозначно выразить значения функции $f(i,j)$ на всех парах (i,j) и значения $g(n)$ для всех $n=1,2,\ldots$ через $a=f(1,2)$, $b=f(2,1)$, $c=g(2)$.*[*)]

Доказательство. Система непротиворечива, поскольку она имеет решение (3). Введем понятие *уровней* неизвестных $f(i,j)$, $g(n)$ системы $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что уровень неизвестной равен k, если эта неизвестная встречается в уравнении, являющемся записью соотношения (2) для некоторого $\lambda\vdash k$, и не встречается ни в одном из уравнений для $\lambda\vdash l$, $l<k$.

Если проследить, двигаясь от вершины $\varnothing$ графа, возникновение диаграмм, то нетрудно заметить, что клетка (i,j) впервые появляется в диаграмме λ_0 разбиения

$$\lambda_0=(j,\ldots,j),\lambda_0\vdash ij.$$

Отсюда следует, что в системе $\mathfrak{A}$ неизвестная $f(i,j)$ имеет уровень $ij-1$. Неизвестная $g(n)$ имеет уровень n. Таким образом,

[*)]Мы можем не учитывать переменные $g(0)$ и $f(1,1)$, связанные соотношением $g(0)=f(1,1)$, отвечающим $\lambda=\varnothing$.

доказательство леммы можно провести индукцией по n – номеру уровня.

1. База индукции: $n = 4$. Все неизвестные первых четырех уровней – суть $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$, $f(1,2)$, $f(2,1)$, $f(1,3)$, $f(3,1)$, $f(1,4)$,$f(4,1)$, $f(2,2)$, $f(1,5)$, $f(5,1)$.

По лемме 1 эти неизвестные выражаются через a, b и c.

2. Пусть $n > 4$ и все неизвестные $f(i,j)$ и $g(k)$ первых $(n-1)$ уровней выражены чере a, b и c. Докажем, что тогда и все неизвестные $f(i,j)$ и $g(n)$ n-го уровня можно определить через a, b и c.

Из вышесказанного следует, что $ij = n+1$. Рассмотрим тождество (2) для

$$\lambda = (n-m+1, 1, 1, \dots, 1), \lambda \vdash n, n > m > 2.$$

Имеем: $g(n) = p_\infty(\lambda, \Lambda_1) f(m+1, 1) + p_\infty(\lambda, \Lambda_2)\ f(2,2) + p_\infty(\lambda, \Lambda_3)$ $f(1, n+1-m)$, где

$$\Lambda_1 = (n-m+1, 1, 1, \dots, 1, 1),$$
$$\Lambda_2 = (n-m+1, 2, 1, \dots, 1),$$
$$\Lambda_3 = (n-m+2, 1, 1 \dots, 1).$$

Поскольку $n > m > 2$ и $n > 4$, выполнено $2 \cdot 2 < n$, $(m+1) \cdot 1 \leqslant n$, $(n+1-m) \cdot 1 \leqslant n$, и по предположению индукции значения $f(m+1,1)$, $f(2,2)$ и $f(1, n+1-m)$ однозначно выражены через a, b и c.

Следовательно, $g(n)$ однозначно выражено через a, b и c.

Для разбиения $\lambda = (j, j, \dots, j, j-1)$ $\lambda \vdash n$, $ij = n+1$, $i > 1$, $j > 1$, соотношение (2) принимает вид

$$g(n) = p_\infty(\lambda, \Lambda_1) f(i+1, 1) + p_\infty(\lambda, \Lambda_2) f(i,j) + p_\infty(\lambda, \Lambda_3) f(1, j+1),$$

где

$$\Lambda_1 = (j, j \dots, j, j-1, 1), \Lambda_2 = (j, j \dots, j, j), \Lambda_3 = (j+1, j \dots, j, j-1).$$

Отсюда, применив предположение индукции, находим значение $f(i,j)$ через a, b и c при $i > 1$, $j > 1$. В случае $i = 1$ или $j = 1$ надо рассмотреть соотношение (2) для разбиений

$$\lambda_1 = (n), \lambda_2 = (1, 1 \dots, 1), \lambda_1 \vdash n$$

соответственно, и аналогичным образом выразить $f(1, n+1)$, $(n+1, 1)$ через $g(n)$, $f(2,1)$ и $f(1,2)$, а, следовательно, и через a, b и c. Лемма доказана.

Лемма 3 (С. В. Керов). *Для любых A, B и C формулы*

$$f(i,j) = A(j-i)^2 + B(j-i) + C, \tag{8}$$

$$g(n) = An + C \tag{9}$$

дают решение системы $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Следуя [2] будем рассматривать диаграмму как непрерывную кусочно-линейную функцию $\omega_\lambda(u)$ с производной, равной ± 1 при (почти) всех значениях аргумента $u \in \mathbb{R}$.

На рис. 1 показано, как диаграмме $\lambda \vdash 8$ ставится в соответствие функция $\omega_\lambda(u)$.

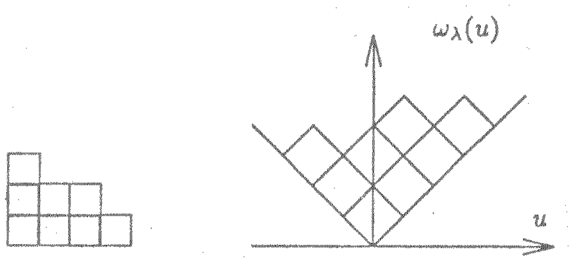

Рис. 1.

Функция $\omega_\lambda(u)$ полностью определяется координатами своих минимумов $x_1, \ldots, x_{k+1}$ и максимумов $y_1, \ldots, y_k$, причем выполнено

$$x_1 < y_1 < \ldots < y_k < x_{k+1}.$$

Положим $\mu_l = p_\infty(\lambda, \Lambda_l)$, где Λ_l образована из λ прибавлением клетки в уголок минимума в точке x_l. Тогда согласно [2] для переходной меры $\mu = p_\infty(\lambda, \Lambda)$ имеет место следующее разложение:

$$\sum_{l=1}^{k+1} \frac{\mu_l}{u - x_l} = \frac{\Pi(u - y_l)}{\Pi(u - x_l)}. \tag{10}$$

Используя это равенство, можно показать, что

$$\sum \mu_l = 1, \quad \sum \mu_l x_l = 0, \quad \sum \mu_l x_l^2 = n. \tag{11}$$

Для этого достаточно домножить обе части равенства (10) на $\Pi(u-x_l)$ и приравнять коэффициенты при степенях u^k, u^{k-1}, u^{k-2}. При этом используется, что $\sum y_l - \sum x_l = 0$, $\frac{1}{2}(\sum x_l^2 - \sum y_l^2) = n$ (см. [2]).

Имеем

$$\sum_{\Lambda\searrow\lambda} \frac{p_\infty(\lambda,\Lambda) f(i,j)}{g(n)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i f(i,j)}{g(n)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{A(j-i)^2 + B(j-i) + C}{An + C}. \tag{12}$$

Заметив, что $x_i = j-i$, и используя (11), получим, что (12) равно единице и выполнено основное тождество. Лемма доказана.

Рассмотрим

$$f(i,j) = \left(c - \frac{(a+b)}{2}\right)(j-i)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)(j-i) + (a+b-c), \tag{8a}$$

$$g(n) = \left(c - \frac{(a+b)}{2}\right)n + (a+b-c). \tag{9a}$$

Эти функции имеют вид (8), (9) и, таким образом, $f(i,j)$ и $g(n)$ дают решение системы $\mathfrak{A}$. Но $f(1,2) = a$, $f(2,1) = b$, $g(2) = c$, и из лемм 1, 2 следует, что все функции f и g, задающие переходные вероятности мультипликативных распределений, содержатся в семействе (8a), (9a).

Покажем теперь, как перейти от трех параметров a, b и c и формул (8a), (9a) к параметрам u, v и формулам (6), (7).

Замена $(a,b,c) \to (t,u,v)$ по правилу

$$t = \frac{a+b}{2} - c,$$
$$u = \frac{a-b}{4t} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ab}{t^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t} - 2\right)^2\right)^{1/2},$$
$$v = \frac{a-b}{4t} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ab}{t^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t} - 2\right)^2\right)^{1/2}$$

при $t \neq 0$ задает переход к новым координатам (t,u,v). При этом

$$a = (1+u)(1+v)t,$$
$$b = (-1+u)(-1+v)t,$$
$$a = (2+uv)t.$$

В новых параметрах (t,u,v) формулы (8a), (9a) переходят в

$$\begin{aligned} f(i,j) &= (c_{ij}+u)(c_{ij}+v)t, \\ g(n) &= (n+uv)t. \end{aligned}$$

Но так как функции $f(i,j)$ и $g(n)$ задают то же распределение, что и $f(i,j)\cdot t$, $g(n)\cdot t$ при $t\neq 0$, описанное семейство имеет вид

$$\begin{aligned} f(i,j) &= (c_{ij}+u)(c_{ij}+v), \\ g(n) &= (n+uv). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $t=0$. Тогда $c=\frac{a+b}{2}$. При $a=b$ распределение (8a), (9a) совпадает с планшерелевским распределением $p_\infty(\lambda,\Lambda)$. Пусть $a\neq b$. Покажем, что тогда существуют диаграммы Юнга, для которых функция $p(\lambda,\Lambda)$, определенная по формуле (1), принимает отрицательные значения: $p(\lambda,\Lambda)<0$.

Так как $c=\frac{a+b}{2}$, имеем: $g(n)=\frac{a+b}{2}$,

$$\begin{aligned} f(1,n) &= -\frac{n-2}{2}b+\frac{n}{2}a=\frac{n}{2}(a-b)+b, \\ f(n,1) &= \frac{n}{2}(b-a)+a. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при n в $f(1,n)$ и $f(n,1)$ имеют различные знаки, поэтому существует такое n_0, что при $n>n_0$ найдутся диаграммы $\lambda\vdash n$, $\Lambda\vdash n+1$, для которых $p(\lambda,\Lambda)<0$. Теорема доказана.

Комментарий. В случае $t=0$, т.е. $g\equiv\mathrm{const}$, мы получили только планшерелевское распределение. Этот факт был отмечен в [6].

Теорема 2. *При* $\operatorname{Im}u\neq 0$ *функция* $p(\lambda,\Lambda)$ *принимает положительные значения для всех* $\lambda,\Lambda\in\mathbb{Y}$ *только в случае* $u=\overline{v}$, *а при* $\operatorname{Im}u=0$ *– только в случае* $m<u,\ v<m+1,\ m\in\mathbb{Z}$.

Поскольку $\frac{f(i,j)}{g(n)}\in\mathbb{R}$, выполнено

$$\frac{(j-i+u)(j-i+v)(n+\overline{uv})}{|n+uv|^2}\in\mathbb{R}.$$

При $j-i=0$ это условие равносильно тому, что $uv(n+\overline{uv})\in\mathbb{R}$, т.е. $uv\in\mathbb{R}$. С другой стороны, при $j-i=n-1$ получаем, что $(n-1+u)(n-1+v)(n+\overline{uv})\in\mathbb{R}$, откуда $(u+v)\in\mathbb{R}$.

Таким образом, $uv \in \mathbb{R}$, $(u+v) \in \mathbb{R}$, поэтому либо $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, либо $u = \overline{v}$.

Случай $u = \overline{v}$ был рассмотрен в [1] – распределение с такими параметрами совпадает с распределением (3). Условие $uv \neq -n$, $n = 1, 2, \ldots$ выполнено автоматически.

Второй случай, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, был замечен А. Бородиным. Существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что $g(n) = n + uv > 0$ для всех $n > n_0$. Поэтому для положительности $p(\lambda, \Lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{Y}$, $\Lambda \in \mathbb{Y}$ необходимо $f(i,j) = f(k) = (k+u)(k+v) > 0$ для всех $k = j - i$, т.е. для всех $k \in \mathbb{Z}$. Последнее неравенство выполнено при $m < u$, $v < m+1$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что поскольку $f(i,j) = f(k) > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, из того, что $p(\lambda, \Lambda) > 0$ для всех λ, $\Lambda \in \mathbb{Y}$ следует, что должно быть выполнено $g(n) = n + uv > 0$, для всех $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $n_0 = 0$. При $m < u$, $v < m+1$, $m \in \mathbb{Z}$, это условие выполнено.

Итак, $p(\lambda, \Lambda) > 0$ для всех λ, $\Lambda \in \mathbb{Y}$ при $u = \overline{v}$, если $\operatorname{Im} u \neq 0$, и при $m < u$, $v < m+1$, $m \in \mathbb{Z}$, если $\operatorname{Im} u = 0$.

Теорема доказана.

§3. Распределения на графе усеченных диаграмм

Результаты предыдущего параграфа могут быть использованы для описания семейства мультипликативных распределений на графе $\mathbb{Y}(k)$ усеченных диаграмм Юнга.

По определению, $\mathbb{Y}(k)$ – граф, вершины которого суть диаграммы ширины, не большей k, а ребра – те же, что и в графе Юнга $\mathbb{Y}$.

Аналогично распределениям на $\mathbb{Y}$ вводятся распределения на $\mathbb{Y}(k)$. Планшерелевским распределением на $\mathbb{Y}(k)$ будем называть функцию

$$\widetilde{M}(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!} \Pi \frac{k + c_{ij}}{k},$$

где $\dim \lambda$ определено в §1, а произведение берется по всем клеткам $(i,j) \in \lambda$. Соответствующая планшерелевская переходная вероятность:

$$\widetilde{p}_\infty(\lambda, \Lambda) = \frac{k + c_{\lambda\Lambda}}{k} p_\infty(\lambda, \Lambda).$$

Заметим, что описанное выше распределение (4) при $u = k$, $v \to \infty$ переходит в $\widetilde{p}_\infty(\lambda, \Lambda)$.

Оказывается, что верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\{\widetilde{p}(\lambda,\Lambda)\}$ *– набор переходных вероятностей некоторого невырожденного мультипликативного непланшерелевского распределения на* $\mathbb{Y}(k)$*:*

$$\widetilde{p}(\lambda,\Lambda)=\frac{\widetilde{f}(i,j)}{\widetilde{g}(n)}\widetilde{p}_\infty(\lambda,\Lambda),\quad \lambda\in\mathbb{Y}(k),\quad \Lambda\in\mathbb{Y}(k),$$

$\widetilde{f}:\{1,2,\dots k\}\times\mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\widetilde{g}:\mathbb{N}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Тогда существует такое число* u, *что*

$$\widetilde{f}(i,j)=(c_{ij}+u)(c_{ij}+k), \tag{13}$$

$$\widetilde{g}(n)=n+uk. \tag{14}$$

Идея доказательства. Положим $f'(i,j)=\frac{k+j-i}{k}\widetilde{f}(i,j)$,

$$g'(n)=\widetilde{g}(n),\quad i=1,\dots,k,\quad j=1,2\dots,\quad n=0,1,2\dots\,.$$

Рассмотрим две системы уравнений:

1) систему $\mathfrak{A}$ с неизвестными $f(i,j)$, $g(n)$ $i,j=1,2\dots$, $n=1,2,\dots$, порожденную соотношением (2) для графа $\mathbb{Y}$;

2) систему $\mathfrak{A}'$ с неизвестными $f'(i,j)$, $g'(n)$ $i=1,\dots k$, $j=1,2,\dots$, $n=1,2,\dots$, порожденную соотношением

$$\sum_{\Lambda\searrow\lambda}f'(i,j)p_\infty(\lambda,\Lambda)=g'(n),\quad \Lambda\in\mathbb{Y}(k),\quad \lambda\in\mathbb{Y}(k).$$

Из лемм 1, 2 следует, что $f(i,j)$, $g(n)$ однозначно определяются значениями параметров $a=f(1,2)$, $b=f(2,1)$, $c=g(2)$ по формулам (8a), (9a). С помощью небольших изменений в этих леммах можно показать, что $f'(i,j)$, $g'(n)$ однозначно определяются параметрами $f'(1,2)$, $f'(2,1)$, $g'(2)$.

Положим $a=f'(1,2)$, $b=f'(2,1)$, $c=g'(2)$. Заметим, что уравнения обеих систем совпадают для диаграмм ширины, меньшей k. Поэтому для всех n, i, j таких, что $n\leqslant k-1$, $ij\leqslant k-1$ выполнено $f(i,j)=f'(i,j)$, $g(n)=g'(n)$.

Из уравнений систем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, соответствующих разбиению

$$\lambda=(3,1,1,\dots,1),\lambda\vdash k$$

следует, что $g'(k)=g(k)$, а из уравнения для разбиения

$$\lambda=(1,1\dots,1),\lambda\vdash k$$

системы $\mathfrak{A}'$ следует, что $g'(k) = f'(1,2)$. Но $f'(1,2) = f(1,2)$, поэтому $g(k) = f(1,2)$, откуда

$$c = \frac{k-2}{k-1}\frac{b}{2} + \frac{k+2}{k+1}\frac{a}{2}. \tag{15}$$

При замене $(a,b,c) \to (t,u,v)$, $t \neq 0$, формула (15) переходит в $(u-k)(v-k) = 0$. Нетрудно показать, что (13), (14) задают переходную вероятность на $\mathbb{Y}(k)$, а случай $t = 0$ соответствует распределению $\widetilde{M}_\infty(\lambda)$.

Метод, использованный в настоящей работе, был первоначально применен А. М. Бородиным [3] к описанию мультипликативных центральных мер на графе Шура сдвинутых диаграмм.

Литература

1. S. Kerov, G. Olshanskii, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation.* — C. R. Acad. Sci. Paris **316, Série I** (год), 773–778.
2. С. В. Керов, *Переходные вероятности континуальных диаграмм Юнга и проблема моментов Маркова.* — Функц. анализ и его прил. **27**, вып. **2** (1993), 32–49.
3. А. М. Бородин, *Мультипликативные центральные меры на графе Шура.* — настоящий том.
4. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **15**, вып. **4** (1981), 15–27.
5. S. V. Kerov, *The boundary of Young lattice and rendom Young tableaux.* — DIHACS Series in Discrete Math. and Theoretical Computer Science **24** (1996), 133–158.
6. S. Fomin, *Duality of Graded Graphs.* — J. Alg. Comb. **3** (1994), 357–404.

Rozhkovskaya N. A. Multiplicative distributions on Young graph.

We describe all non-degenerate multiplicative distributions on the Young graph and on the graph of truncated Young diagrams. All such distributions are parametrized for the Young graph by two real numbers and by one real number for the graph of truncated Young diagrams.

Московский
Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 4 ноября 1996 г.