Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

А. Окуньков

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Ручные представления и факторные представления.

Обозначим через $S(n)$ группу перестановок множества $\{1, ..., n\}$, и обозначим через

$$S(\infty)$$

объединие групп $S(n)$ по всем n. Группа $S(\infty)$ является одним из самых простых примеров *дикой* группы (определения дикой и ручной группы, а также других фундаментальных понятий бесконечномерной теории представлений можно найти, например, в книге [23]). Это означает, что изучение всех неприводимых унитарных представлений группы $S(\infty)$ не является, по видимому, осмысленной задачей.

Ха группе $S(\infty)$ имеется, по-видимому, единственная простая естественная топология, которая индуцируется слабой (а также сильной) операторной топологией при представлении перестановками базисных векторов

$$S(\infty) \to U(l_2), \tag{0.1}$$

где $U(l_2)$ означает множество унитарных операторов в координатном гильбертовом пространстве l_2. Фундаментальную систему окрестностей единицы в этой топологии образуют подгруппы

$$S_n(\infty), \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

фиксирующие числа $1, 2, ..., n$. Все унитарные представления группы $S(\infty)$

$$\pi : S(\infty) \to U(H), \tag{0.2}$$

где $U(H)$ есть группа унитарных операторов некоторого гильбертова пространства H, непрерывные относительно этой топологии на $S(\infty)$ и слабой топологии на $U(H)$ были описаны Либерманом

[27]. (Смотри также [39].) Эти представления называются *ручными*. Оказывается, что

(1) все ручные представления разлагаются в прямую сумму неприводимых,
(2) неприводимые ручные представления нумеруются всеми диаграмами Юнга μ,
(3) k-ая тензорная степень представления (0.1) разлагается по неприводимым представлениям нумеруем диаграмми Юнга из k-клеток.

Эти обстоятельства роднят топологическую группу $S(\infty)$ с компактной группой. Во всяком случае, ясно, что ручных представлений гораздо меньше, чем должно быть у настоящей бесконечномерной группы.

Обозначим через $\overline{S(\infty)}$ группу всех биекций множества натуральных чисел. В этой группе можно ввести аналогичную топологию; в этой топологии $S(\infty)$ будет плотной подгруппой. Ручные представления группы $S(\infty)$ и только они продолжаются по непрерывности на всю группу $\overline{S(\infty)}$.

Мы завершим обсуждение ручных представлений еще одним технически полезным определением ручного представления. Обозначим через

$$H_n = H^{S_n(\infty)}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

подпространство инвариантов для действия подгруппы $S_n(\infty)$ в представлении (0.2). Как показано в [39] представление (0.2) ручное тогда и только тогда, когда

$$H = \overline{\bigcup_n H_n}\,.$$

Другой подход к теории представлений группы $S(\infty)$ состоит в изучении ее конечных (или, более общих, полуконечных) факторных представлений. Замечательная теория этих представлений была построена Тома [49] и Вершиком и Керовым [6, 7].

Каждое конечное факторное представление π произвольной группы G однозначно, с точностью до квазиэквивалентности, определяется своим следом, то есть ограничением следа фактора на образ группы. В качестве следов конечных факторных представлений группы G могут выступать в точности все *характеры* группы G, то есть функции ϕ на группе G, которые а) центральны, т.е. $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_2 g_1)$ для всех $g_1, g_2 \in G$;

б) положительно определены, т.е. для любых $g_1, \dots, g_n \in G$ матрица $(\phi(g_i g_j^{-1}))$ эрмитова и неотрицательно определена;

в) неразложимы, т.е. не представляются в виде суммы двух линейно независимых функций, удовлетворяющих а) и б);

г) нормированы, т.е. $\phi(e) = 1$.

Если группа G компактна, то ее характеры суть в точности все функции вида

$$\frac{\operatorname{tr} \pi(g)}{\dim \pi},$$

где π пробегает множество классов эквивалентности неприводимых представлений группы G. Теория характеров компактных групп относится к классике теории представлений. Характеры диких групп интенсивно изучались в недавнее время, смотри, например, [3, 6–11, 13–15, 25, 44, 49–52].

В работе Тома [49] получено следующее описание всех характеров группы $S(\infty)$. Характеры группы $S(\infty)$ нумеруются двумя последовательностями вещественных чисел $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$ и $\beta_i, i = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \dots > 0 \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3 \geqslant \dots > 0$$
$$\sum \alpha_i + \sum \beta_i \leqslant 1 .$$

Значение соответствующего характера на перестановке, состоящей из единственного цикла длины k, есть

$$\sum_i \alpha_i^k + (-1)^{k-1} \sum_i \beta_i^k ,$$

а его значение на перестановке, состоящей из нескольких независимых циклов, равно произведению его значений на отдельных циклах. При этом, как обычно, считается, что произведение пустого множества сомножителей равно единице. Например, последовательностям $\alpha_i \equiv 0$, $\beta_i \equiv 0$ соответствует характер регулярного представления группы $S(\infty)$.

Центральную часть работы Тома составляет классификация так называемых *вполне положительных* последовательностей. Напомним, что последовательность вещественных чисел $\{a_i\}, i = 0, 1, 2, \dots$ называется вполне положительной, если все миноры бесконечной теплицевой матрицы

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots \\ & 0 & a_0 & a_1 & \ddots \\ & & 0 & a_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

неотрицательны. Тома получил описание всех вполне положительных последовательностей, опираясь на глубокие факты из теории целых функций. Он установил, что если последовательность

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

вполне положительна, то ее производящая функция

$$\sum_i a_i t^i$$

имеет вид

$$e^{\gamma t} \frac{\prod(1+\beta_i t)}{\prod(1-\alpha_i t)}$$

для некоторых неотрицательных $\alpha_i, \beta_j, \gamma$, таких, что

$$\sum \alpha_i + \sum \beta_i < \infty .$$

Хиже мы обсудим связь теории вполне положительных последовательностей с теорией представлений и покажем, каким образом простые соображения, основанные на теории представлений, позволяют решительно упростить рассуждения Тома.

В действительности данное Тома описание вполне положительных последовательностей было ранее установлено в работах [1, 17]. Вполне положительные последовательности возникают во многих вопросах анализа (таких, как теория приближений или теория малых колебаний), геометрии (выпуклые кривые) и теории вероятностей. Важную роль, например, играет следующее характеристическое свойство вполне положительных последовательностей: свертка любой последовательности со вполне положительной последовательностью содержит не больше перемен знака, чем исходная последовательность. Это есть классическая теорема И. Шенберга [43], которую он получил, исследуя различные обобщения правила Декарта. Вполне положительные последовательности (и их непрерывные аналоги) изучались Ф. Р. Гантмахером, М. Г. Крейном, Д. Пойа, И. Шенбергом с соавторами, А. Эдреи, С. Карлином и другими. См., например, [1, 16–18, 21], и особенно [42], где содержатся ссылки на самые последние приложения теории вполне положительных последовательностей. Из работ, где обсуждается связь полной положительности с теорией представлений, отметим [6–11, 12].

Явное построение всех соответствующих факторных представлениий группы $S(\infty)$ было указано впоследствии А. М. Вершиком и С. В. Керовым [6]. А. М. Вершик и С. В. Керов нашли также другое доказательство теоремы Тома с помощью 'эргодического метода' [7].

Мы сформулируем эргодический метод уже в применении к задаче описания характеров бесконечной симметрической группы. Пусть есть последовательность λ_n диаграмм Юнга, таких что $|\lambda_n| = n$. Пусть

$$\chi_n(g) = \frac{\operatorname{tr} \pi_{\lambda_n}(g)}{\dim \pi_{\lambda_n}}$$

есть характер симметрической группы $S(n)$, отвечающий неприводимому представлению π_{λ_n}.

Мы скажем, что последовательность характеров χ_n сходится при $n \to \infty$ к функции χ на группе $S(\infty)$, если для любого элемента $g \in S(\infty)$

$$\chi_n(g) \to \chi(g), \quad n \to \infty .$$

(Заметим, что выражение $\chi_n(g)$ имеет смысл для всех достаточно больших n.)

Из общих теорем апроксимации [5, 12, 33] следует, что любой характер χ бесконечной симметрической группы $S(\infty)$ есть предел некоторой последовательности характеров χ_n конечных симметрических групп. А. М. Вершик и С. В. Керов доказали, что для того, чтобы последовательность характеров χ_n имела предел, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие пределы:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i\text{-ая строка } \lambda_n}{n} = \alpha_i,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{i\text{-ый столбец } \lambda_n}{n} = \beta_i\,.$$

Если эти пределы существуют, то характеры χ_n сходятся к характеру Тома с параметрами α_i, β_i. Таким образом, параметры α_i, β_i имеют смысл асимптотических длин строк и столбцов диаграммы Юнга.

Пары Ольшанского и допустимые представления.

Изучение еще более общего класса представлений бесконечной симметрической группы $S(\infty)$ было начато Ольшанским. Сначала рассмотрим мотивировочный пример. Пусть

$$\pi : S(\infty) \to U(M)$$

есть конечное фактор-представление группы $S(\infty)$. Здесь $U(M)$ есть группа унитарных операторов некоторого конечного фактора M. Рассмотрим гильбертово пространство H, которое представляет из себя пространство M пополненное по скалярному произведению

$$(A, B) = \operatorname{tr} AB^*\,.$$

В этом пространстве умножениями слева и справа действует группа

$$S(\infty) \times S(\infty)\,, \tag{0.3}$$

причем действует неприводимо. Единица

$$1 \in M$$

есть единственный вектор в пространстве H, инвариантный относительно диагональной подгруппы

$$\operatorname{diag} S(\infty) \subset S(\infty) \times S(\infty)\,. \tag{0.4}$$

Хесложно проверить (смотри [32] и ниже), что из неприводимости действия группы (0.3) и наличия инвариантного вектора для подгруппы (0.4) следует, что представление подгруппы (0.4) в пространстве H является ручным. Этот пример наводит на мысль, что имеет смысл изучать унитарные представления группы (0.3), ограничение которых на подгруппу (0.4) является ручным представлением. Такие представления были названы Ольшанским *допустимыми представлениями пары*, или просто *представлениями пары* (0.4).

Общая концепция, предложенная Ольшанским, состоит в том, что в бесконечномерной ситуации следует исследовать не неприводимые унитарные представления групп G, а унитарные представления *пар*

$$K \subset G\,, \tag{0.5}$$

где K есть некоторая подгруппа G, призванная играть роль максимальная компактная подгруппы группы G, а унитарное представление группы G

$$G \to U(H)$$

называется по определению *представлением пары* (0.5), если его ограничение на подгруппу K является представлением из некоторого заданного простого класса представлений группы K. (например, ручным представлением). Хапомним, что ручные представления действительно очень напоминают представления компактной группы.

Как показал Ольшанский, любое представление пары (0.4) относится к типу И. Этот факт в известной степени сводит изучение произвольных представлений пары (0.4) к изучению ее неприводимых представлений.

Кроме пары (0.4) в работе [32] были введены и исследованы еще две родственные пары Ольшанского, также тесно связанные с бесконечной симметрической группой.

Г. И. Ольшанским был предложен красивый метод исследования допустимых представлений – так называемый полугрупповой метод [34]. В работе [32] содержится изложение этого метода применительно к парам, связанным с симметрической группой. Полугрупповой метод можно рассматривать как далеко идущее обобщение свойства мультипликативности характеров группы $S(\infty)$, обнаруженного Тома (смотри также [15, 19–20, 31]). С помощью полугруппового метода в работе [32] доказывается, что любое допустимое представление порождает алгебру фон Неймана типа I. Из полугруппового метода вытекает также способ параметризации неприводимых допустимых представлениий. При этом неприводимое допустимое представление нумеруется непрерывными параметрами (а именно параметрами, участвующими в теореме Тома) и некоторыми дискретными параметрами. А именно, каждому числу α_i, β_i и нулю ставятся в соответствие диаграммы Юнга (одна или две, в зависимости от пары), при этом всем параметрам Тома, кроме конечного числа, соответствуют пустые диаграммы Юнга. Мы кратко опишем полугрупповой метод и способ параметризации представлений в первой главе. Эта параметризация позволяет переформулировать задачу описания всех неприводимых допустимых представлениий как задачу описания всех наборов параметров, для которых соответствующее неприводимое допустимое представление существует.

В той же работе Г. И. Ольшанский построил большой запас неприводимых допустимых представлений. Конструция неприводимых допустимых представлениий из [32] развивает, с одной стороны, конструкцию факторных представлений бесконечной симметрической группы А. М. Вершика и С. В. Керова, а с другой стороны, она является бесконечномерным обощением классической двойственности Германа Вейля для представлений в бесследовых тензорах. Опираясь, с одной стороны, на эту конструкцию, а с другой стороны, на асимптотический метод А. М. Вершика и С. В. Керова, Г. И. Ольшанский получил двусторонние оценки на множество параметров, при которых соответствующие неприводимые допустимые представлениия существуют.

Формулировка задачи и полученных результатов.

Мы изучаем неприводимые представления трех родственных пар Ольшанского, связанных с бесконечной симметрической группой.

Назовем биекцию $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *финитной* , если множество

$$\{i \in \mathbb{Z} \mid g(i) \neq i\}$$

конечно.Определим группу G^O как группу всех финитных биекций $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Положим

$$G^E = \{g \in G^O \mid g(0) = 0\}$$

$$G^D = \{g \in G^O \mid g(0) = 0, g(i) > 0, i > 0\}$$

Буквы O, E, D происходят от слов нечетный ('одд'), четный ('евен') и двойной ('доубле'). Мы будем писать просто G в случае совпадения формул для всех трех групп. Положим

$$G(n) = \{g \in G \mid g(i) = i, |i| > n\}$$

$$G_n = \{g \in G \mid g(i) = i, |i| \le n\}$$

Вся группа G есть объединение возрастающей цепочки своих подгрупп $G(n)$:

$$\{e\} = G(0) \subset G(1) \subset G(2) \subset \dots$$

$$\bigcup_n G(n) = G.$$

Подгруппы G_n образуют убывающую цепочку подгрупп

$$G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots,$$

$$\bigcap_n G_n = \{e\}.$$

Подгруппа $G(n)$ и подгруппа G_n коммутируют.

В множестве $\mathbb{Z}$ есть естественная инволюция $i \mapsto -i$. С помощью этой инволюции в группе G выделяется подгруппа, призванная играть роль максимальной компактной подгруппы. Положим

$$K = \{g \in G \mid g(-i) = -g(i)\}.$$

Пары (G, K) суть пары Гельфанда в смысле [32]. Определим в подгруппе K возрастающую и убывающую цепочки подгрупп:

$$K(n) = K \cap G(n),$$

$$K_n = K \cap G_n.$$

Группа G^D изоморфна прямому произведению двух экземпляров группы $S(\infty)$ (один переставляет положительные числа, а другой – отрицательные). Группа K^D изоморфна группе $S(\infty)$.

Группы G^O и G^E изоморфны группе $S(\infty)$, а группы K^O и K^E изоморфны полупрямому произведению группы $S(\infty)$ и группы $\mathbb{Z}_2^\infty$. В этом случае пары Ольшанского различаются способом вложения подгруппы в группу (и запас представлений получается различный).

Пусть π – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $H(\pi)$. Обозначим через $H(\pi)_n$ подпространство, состоящее из K_n–инвариантных векторов. Это подпространство инвариантно относительно действия группы $G(n)$. Далее, подпространства $H(\pi)_n$ образуют возрастающую цепочку подпространств

$$H(\pi)_0 \subset H(\pi)_1 \subset H(\pi)_2 \ldots$$

Поэтому их объединение $\cup_n H(\pi)_n$ есть алгебраически инвариантное подпространство в $H(\pi)$. Представление π называется *допустимым представлением пары* (G, K) [32], если

$$H(\pi) = \overline{\bigcup_n H(\pi)_n}.$$

В данной работе мы получим описание *всех* неприводимых допустимых представлений трех пар (G, K).

Важный подкласс допустимых представлений составляют *сферические* представления. Унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $H(\pi)$ называется сферическим представлением пары (G, K), если оно неприводимо и $H(\pi)_0 \neq 0$. Сферическое представление допустимо, т.к. замыкание подпространства $\cup_n H(\pi)_n$ непусто, замкнуто и инвариантно и, значит, совпадает с $H(\pi)$ в силу неприводимости. Известно (смотри [32] и ниже), что для сферического представления $\dim H(\pi)_0 = 1$. Выберем вектор $\xi \in H(\pi)_0, ||\xi|| = 1$. Матричный элемент

$$\phi_\pi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$$

называется *сферической функцией*. Сферическая функция ϕ_π однозначно определяет представление π. Сферические представления пары (Gd, Kd) находятся в биекции с конечными факторпредставлениями группы $S(\infty)$; эта биекция была кратко рассмотрена в начале предыдущего параграфа.

В отличие от класса сферических представлений, класс допустимых представлений замкнут относительно таких естественных операций над представлениями, как ограничение на подгруппу G_n (мы имеем $G_n^D \cong G^D$, $G_n^O \cong G_n^E \cong G^E$), индуцирование с нее, взятия прямых сумм и тензорных произведений.

Понятие допустимого представления может быть также сформулировано в топологических терминах. А именно, как указано в [32], для каждой из трех (G, K) пар существует некоторая своя топологическая не локально компактная группа $\overline{G}$, содержащая группу G в качестве плотной подгруппы. При этом допустимые представлениия пары (G, K) суть в точности те унитарные представлениия группы G, которые допускают непрерывное продолжение на группу $\overline{G}$. Таким образом, теория допустимых представленийй наших трех пар Ольшанского оказывается эквивалентна теории унитарных представлений некоторых не локально компактных групп $\overline{G}$.

Группа $\overline{G}$ строится следующим образом. Вложим группу G в группу всех (не обязательно финитных) биекций

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

Рассмотрим подгруппы

$$\overline{K}_n = \{g | g(i) = -g(-i), g(i) = i, i > n\} \cap G, n = 0, 1, \dots .$$

Положим

$$\overline{G} = G \cdot \overline{K} .$$

Наконец, введем в группе $\overline{G}$ топологию, в которой фундаментальную систему окрестностей единицы образуют подгруппы $\overline{K}_n, n = 0, 1, \dots$.

Поскольку любое допустимое представление порождает алгебру фон Неймана типа I, топологические не локально компактные группы $\overline{G}$ являются ручными группами.

Точка зрения унитарных представленийй групп $\overline{G}$ удобна при построении представлений. Она пригодится нам в третьей главе. Однако для доказательства теорем классификации неприводимых допустимых представленийй удобнее точка зрения допустимых представленийй (G, K) пар.

Основной результат данной работы – полная классификация и явная реализация всех неприводимых допустимых представлений для трех рассматриваемых пар Ольшанского. Основные результаты по классификации представлений пары

$$G^D = S(\infty) \times S(\infty) \supset \operatorname{diag} S(\infty) = K^D$$

были изложены в [55].

Глава 1. Полугрупповой метод

§1. Полугруппы оснащенных чипов

В этом параграфе мы опишем полугруппу, которая будет играть в дальнейшем основную роль. Эта полугруппа была введена Г. И. Ольшанским в [32]. Более подробное изложение полугруппового метода можно найти в [32, 34].

Рассмотрим группу G^O. Сопоставим каждой перестановке $g \in G^O$ следующий граф ('чип'). Множество вершин этого графа разбито на два непересекающихся подмножества – 'входы' и 'выходы'. Как входы, так и выходы занумерованы всеми целыми числами. Ребра ('проводки') чипа соответствующего перестановке g соединяют i–ый вход с $g(i)$–ым выходом. Удобно рисовать входы чипа на одной строке, а выходы – на другой, под входами. Чип, соответствующий перестановке $g = (12)(34)(-1,-2,-3)$ изображен на рисунке 1.

Произведение двух перестановок $g_1 g_2$ в терминах чипов нужно понимать как соединение выходов чипа g_2 с входами чипа g_1. Для этого удобно нарисовать чип g_1 прямо под чипом g_2.

Будем рассматривать теперь более общие чипы, у которых каждый проводок снабжен 'сопротивлением' – неотрицательным числом. При соединении проводков сопротивления будем складывать. Элементы группы G^O будем рассматривать как чипы, у которых все сопротивления нулевые. Для всех целых чисел k обозначим через A_k чип, у которого для всех $i \in \mathbb{Z}$ i–ый вход соединен с i–ым выходом проводком с сопротивлением δ_{ik}. Чип A_2 изображен на рисунке 2. (Ненулевые сопротивления мы пишем на проводках.)

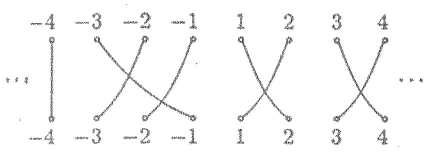

Рис. 1

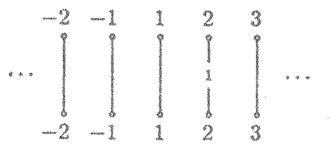

Рис. 2.

Наконец, рассмотрим еще более общие чипы, у которых проводки не обязательно идут от входа к выходу, а задают некоторое разбиение множества контактов на пары. При естественном умножении таких чипов будут возникать петли из проводков. Введем формальные центральные элементы C_m, $m = 2, 3, \dots$ (будем считать, что $C_1 = 1$)и будем заменять петли с суммарным сопротивлением m формальным умножением на C_m (например,

$P_0 A_1^2 A_2 P_0 = P_0 C_3 C_2$, см. ниже). В определяемой ниже полугруппе это произведение будет корректно определено, в частности, число петель с суммарным сопротивлением больше 1 будет конечным.

Рассмотрим чип P_n, у которого для $|i| \leqslant n$ i-й вход соединен с i-м выходом проводком без сопротивления, а для $|i| > n$ i-й вход соединен с $-i$-м входом проводком с сопротивлением $1/2$ и аналогично соединены выходы. Чип P_2 изображен на рисунке 3.

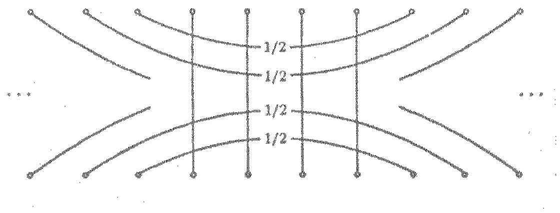

Рис. 3.

Обозначим через Γ^O полугруппу, порожденную группой G^O, чипами A_i, $i \in \mathbb{Z}$, P_n, $n = 0, 1, \dots$, и элементами C_m, $m = 2, 3, \dots$. Эта полугруппа несколько меньше, чем определенная в [32, пп. 2.8 и 3.10]; наша содержится в той как плотная подполугруппа.

Обозначим через Γ^E подполугруппу в Γ^O, порожденную группой G^E, чипами A_i, $i \in \mathbb{Z}$, P_n, $n = 0, 1, \dots$, и элементами C_m, $m = 2, 3, \dots$. Аналогично определим полугруппу Γ^D. Полугруппы $\Gamma^O, \Gamma^E, \Gamma^D$ будем называть *полугруппами оснащенных чипов.*

В этих полугруппах есть естественная инволюция: у чипов входы меняются с выходами, C_m переходят в себя.

Важность полугрупп оснащенных чипов для теории допустимых представлений показывает следующая фундаментальная

Теорема (Ольшанский [32]. *Любое допустимое представление π пары (G, K) канонически продолжается до $*$-представления соответствующей полугруппы Γ сжатиями (т.е. операторами, по норме не большими 1) в $H(\pi)$. При этом идемпотенты P_n переходят в проекторы на $H(\pi)_n$.*

Это каноническое продолжение мы будем обозначать той же буквой π.

Уместно будет сказать несколько слов о том, как строится это каноническое продолжение. По определению полугруппа Γ порождена группой G, чипами A_i, P_j и элементами C_i. Идемпотенты P_n переходят в проекторы на подпространства $H(\pi)_n$. Нам нужно еще указать во что переходят чипы A_i и элементы C_i. Для простоты предположим, что мы имеем дело с парой $\left(G^O, K^O\right)$; остальные пары совершенно аналогичны. Рассмотрим транспозицию $(i, n) \in G^O$ и рассмотрим предел операторов

$$\lim_{n\to\infty} \pi((i,n)) .$$

Этот предел существует в слабой операторной топологии. Чтобы убедиться в этом достаточно проверить, что существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} (\pi((i,n))\zeta, \eta) ,$$

где векторы ζ и η принадлежат плотному подпространству

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} H(\pi)_m .$$

Пусть ζ и η лежат в подпространстве $H(\pi)_m$ и два числа n_1 и n_2 таковы, что $n_1, n_2 > m$. Тогда перестановка

$$(n_1, n_2)(-n_1, -n_2)$$

лежит в подгруппе K_m, и по определению подпространства $H(\pi)_m$ имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\pi((i,n_1))\zeta, \eta\big) = \\
&\qquad = \big(\pi((n_1,n_2)(-n_1,-n_2)(i,n_2)(n_1,n_2)(-n_1,-n_2))\zeta, \eta\big) = \\
&\big(\pi((i,n_2))\pi((n_1,n_2)(-n_1,-n_2))\zeta, \pi((n_1,n_2)(-n_1,-n_2))\eta\big) = \\
&\qquad\qquad = \big(\pi((i,n_2))\zeta, \eta\big) .
\end{aligned}$$

Таким образом, число

$$\big(\pi((i,n))\zeta, \eta\big)$$

не зависит от n, при условии что $n > m$ и тем самым совпадает с пределом

$$\lim_{n\to\infty} \big(\pi((i,n))\zeta, \eta\big) .$$

Положим
$$\pi(A_i) = \lim_{n\to\infty} \pi((i,n))\,.$$
и аналогично
$$\pi(S_k) = \lim_{n_1,\dots,n_k\to\infty} \pi((n_1,n_2,\dots,n_k))\,,$$
где предполагается, что числа $n_1,\dots,n_k$ попарно различны. Иногда бывает удобнее заменить предел в определении операторов $\pi(A_i)$ и $\pi(C_i)$ пределом по Чезаро
$$\pi(A_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \pi((i,j))\,.$$
В похожем виде может быть записан оператор $\pi(P_m)$
$$\pi(P_m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\sum_{g\in K_m(n)} \pi(g)\,.$$
Здесь $K_m(n)$ обозначает стабилизатор чисел $1,\dots,m$ в группе K_{m+n}. В самом деле, оператор
$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in K_m(n)} \pi(g)$$
есть проектор на подпространство векторов, инвариантных при действии группы $K_m(n)$. Обозначим это подпространство через $H(\pi)_{m;n}$. Очевидно
$$H(\pi)_{m;0} \supset H(\pi)_{m;1} \supset H(\pi)_{m;2} \supset \dots$$
и
$$H(\pi)_m = \bigcap_n H(\pi)_{m;n}\,.$$
Поэтому проектор на подпространство $H(\pi)_m$ есть предел проекторов на подпространства $H(\pi)_{m;n}$ (даже в сильной операторной топологии).

§2. Некоторые тождества

Для удобства дальнейших ссылок, сформулируем некоторые полезные тождества, справедливые в полугруппах оснащенных чипов. Пусть $\sigma \in S(\infty)$ – некоторая перестановка. Обозначим через $[\sigma]$ набор чисел, состоящий из длин неединичных циклов σ.

Предложение 1.

$$A_iA_j = A_jA_i, \tag{1.1}$$

$$gA_ig^{-1} = A_{g(i)}, \qquad g \in S(2\infty), \tag{1.2}$$

$$A_iP_n = P_nA_i, \qquad |i| \leqslant n, \tag{1.3}$$

$$A_iP_n = A_{-i}P_n, \qquad |i| > n, \tag{1.4}$$

$$P_nA_iP_n = P_n(i,k)P_n, \qquad |i| \leqslant n,\ |k| > n, \tag{1.5}$$

$$P_nA_{i_1}^{k_1}A_{i_2}^{k_2}\dots A_{i_r}^{k_r}P_n = P_n\prod_{j=1}^{r}C_{k_j+1}, \qquad n < i_j,\ i_m \neq i_l, \tag{1.6}$$

$$P_0\sigma P_0 = P_0\prod_{k\in[\sigma]}C_k, \qquad \sigma \in S(\infty). \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем два последних, наиболее интересных, равенства.

Нарисуем чипы P_n, $A_{i_1}^{k_1}A_{i_2}^{k_2}\dots A_{i_r}^{k_r}$ и P_n (см. рисунок 4а, где нарисованы P_0, $A_1A_2A_3^2$, и P_0).

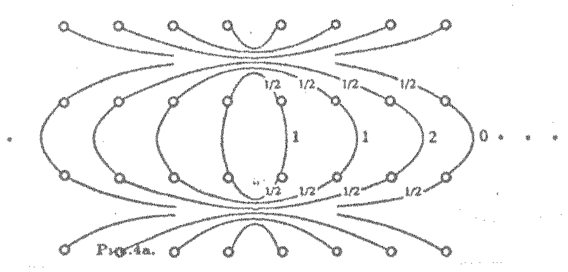

Рис.4а.

Заметим, что у чипа P_0 входы соединяются только с входами, а выходы – с выходами. Поэтому произведение $P_0A_{i_1}^{k_1}A_{i_2}^{k_2}\dots A_{i_r}^{k_r}P_0$ будет иметь вид произведения P_0 и некоторых элементов C_i. Условие $i_m \neq i_l$ означает, что в сопротивление каждой возникающей петли вклад будет давать только показатель при каком-то одном чипе A_{i_s}. Очевидно, суммарное сопротивление возникающей таким образом петли будет равно k_s+1. Тем самым равенство (1.6) доказано.

Нарисуем теперь чипы P_0, σ и P_0 (см. рисунок 4б, где $\sigma = (123)$; нулевые сопротивления на рисунке 4б опущены).

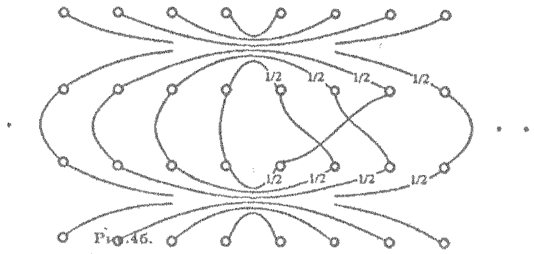

Рис.4б.

Опять произведение $P_0 \sigma P_0$ будет иметь вид произведения P_0 и некоторых элементов C_i. Петли, возникающие при умножении P_0, σ и P_0, в точности соответствуют циклам перестановки σ. При этом цикл длины k соответствует петле с суммарным сопротивлением k. Таким образом равенство (1.7) доказано. $\bullet$

§3. Параметризация представлений

Пусть π – допустимое представление пары (G, K) в гильбертовом пространстве $H(\pi)$. Пусть $d = d(\pi)$ есть наименьшее целое число k, для которого $H(\pi)_k \neq 0$. Обозначим через $R(\pi)$ подпространство $H(\pi)_d$. Будем называть число $d(\pi)$ *глубиной* представления π, а подпространство $R(\pi)$ – *корнем* представления π.

Пусть ζ – произвольный вектор из подпространства $R(\pi)$. Мы можем восстановить представление π по его матричному элементу

$$\psi(g) = (\pi(g)\zeta, \zeta).$$

Оператор $\pi(P_d)$ – это ортогональный проектор на подпространство $R(\pi)$, поэтому

$$(\pi(g)\zeta, \zeta) = (\pi(P_d g P_d)\zeta, \zeta). \tag{1.8}$$

Оснащеные чипы вида $P_d x P_d$, $x \in \Gamma$ образуют подполугруппу в полугруппе Γ. Обозначим эту подполугруппу через $\Gamma(d)$. Эта полугруппа действует в подпространстве $R(\pi)$. Следующее предложение принадлежит Г. И. Ольшанскому.

Предложение 2. *Пусть π – допустимое представление группы G. Пусть число n таково, что $H(\pi)_n \neq 0$. Обозначим через π_n представление полугруппы $\Gamma(n)$ в подпространстве $H(\pi)_n$. Тогда*

(1) *Если представление π неприводимо, то представление π_n неприводимо.*

(2) *Если представление π_n неприводимо и подпространство $H(\pi)_n$ циклично, то π неприводимо*

Доказательство. Пусть π неприводимо. Пусть B произвольный ограниченный оператор в пространстве $H(\pi)_n$. Обозначим через $\tilde{B}$ оператор в пространстве $H(\pi)$, равный B на подпространстве $H(\pi)_n$ и нулю ортогональном дополнении $H(\pi)_n^{\perp}$. Очевидно, этот оператор ограничен. В силу неприводимости π существует последовательность элементов $b^{(i)}$ из групповой алгебры $\mathbf{C}[G]$ такая, что

$$\pi(b^{(i)}) \to \tilde{B}, \quad i \to \infty$$

в слабой операторной топологии. Но тогда

$$\pi(P_n b^{(i)} P_n) \to \pi(P_n)\tilde{B}\pi(P_n), \quad i \to \infty\,.$$

И значит

$$\pi_n(P_n b^{(i)} P_n) \to B, \quad i \to \infty\,.$$

Таким образом представление π_n неприводимо.

Наоборот, предположим что представление π_n неприводимо, подпространство $H(\pi)_n$ циклично, но представление π не является неприводимым. Пусть W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство. Пусть ζ – произвольный вектор из подпространства K_n – инвариантов $H(\pi)_n$. Ортогональные проекции вектора ζ на подпространства W и $W^{\perp}$ суть также K_n–инвариантные вектора. Поэтому хотя бы одно из $\Gamma(n)$–инвариантных подпространств

$$H(\pi)_n \cap W \text{ и } H(\pi)_n \cap W^{\perp}$$

непусто. В силу неприводимости представления π_n имеем, что

$$\text{либо } H(\pi)_n \subset W, \qquad \text{либо } H(\pi)_n \subset W^{\perp}\,.$$

В силу цикличности $H(\pi)_n$

$$\text{либо } H(\pi) = W, \qquad \text{либо } H(\pi) = W^{\perp}\,,$$

что противоречит нетривиальности W. $\bullet$

В силу (1.8) нам достаточно знать представление π_d полугруппы $\Gamma(d)$ в пространстве $R(\pi)$, чтобы восстановить представление π.

По определению числа d имеем $H(\pi)_{d-1} = 0$. Поэтому

$$\pi(P_{d-1}) = 0.$$

Можно проверить [32], что в этом случае ненулевыми операторами в $R(\pi)$ может действовать лишь подполугруппа в $\Gamma(d)$, порожденная элементами $P_0 C_k, k = 2, 3, \dots$ и такими чипами, у которых для всех $i, |i| \le d$ i–ый вход соединен с выходом и i–ый выход соединен с входом. (Заметим, что у любого чипа из $\Gamma(d)$ для любого числа $j > d$ j–ый вход соединен с $-j$–ым входом, и аналогично для выходов.) Обозначим эту подполугруппу через $\Gamma(d)_{vert}$. Полугруппа $\Gamma(d)_{vert}$ устроена просто, и ее представления легко описать.

В случае Γ^O она изоморфна

$$\Gamma^O(d)_{vert} \cong (S(2d+1) \ltimes \mathbb{Z}_+^{2d+1}) \times \mathbb{Z}_+^\infty.$$

Здесь первый сомножитель отвечает полугруппе $P_d G^O(d)$, второй – полугруппе, порожденной чипами $R_d A_i, |i| \le d$, третий – полугруппе, порожденной элементами $P_d C_i, i = 2, 3, \dots$.

Все неприводимые $*$-представления полугрупп вида $S(m) \ltimes \mathbb{Z}_+^m$ описываются следующим образом. Пусть

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_s)$$

есть разбиение числа m. Пусть

$$x_1, \dots, x_s$$

есть набор различных точек из $[-1, 1]$. Пусть T – представление полугруппы $\mathbb{Z}_+^m$, которое первые ρ_1 образующих переводит в умножение на x_1, вторые ρ_2 образующих – в умножение на x_2 и т.д. Тогда централизатором представления T в группе $S(m)$ является подгруппа

$$S(\rho) = \prod_i S(\rho_i).$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – набор диаграмм Юнга, таких, что $|\lambda_i| = \rho_i$. Тогда представление полугруппы $S(m) \ltimes \mathbb{Z}_+^m$, индуцированное представлением

$$(\bigotimes_{i=1}^{s} \pi_{\lambda_i}) \otimes T$$

подполугруппы $S(\rho) \ltimes \mathbb{Z}_+^m$, неприводимо, и такими представлениями исчерпываются все неприводимые $*$-представления полугруппы $S(m) \ltimes \mathbb{Z}_+^m$ сжатиями. Набор данных $x_1, \ldots, x_s$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ удобно задавать в виде *распределения Юнга*, т.е. функции Λ из $[-1, 1]$ в множество диаграмм Юнга

$$\Lambda(y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x_i \\ \varnothing, & y \notin \{x_1 \ldots x_s\} \end{cases}$$

Геометрически распределение Юнга можно представлять как набор диаграмм Юнга, которые 'растут' из различных точек отрезка $[-1, 1]$ (см. рисунок 5). Положим

$$|\Lambda| = \sum_x |\Lambda(x)|,$$
$$\operatorname{supp} \Lambda = \{x_1, \ldots, x_s\}.$$

Неприводимые $*$-представления сжатиями полугруппы

$$S(2d+1) \ltimes \mathbb{Z}_+^{2d+1}$$

нумеруются тогда распределениями Юнга Λ, такими что $|\Lambda| = 2d + 1$.

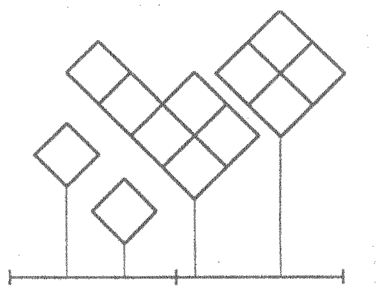

Рис. 5.

Элементы $C_i \in \Gamma^O, i = 2, 3, \ldots$ центральны и эрмитовы, поэтому

$$\pi(C_i) = c_i \cdot 1_H,$$

для некоторых чисел $c_i \in [-1, 1], i = 2, 3, \ldots$.

Аналогично

$$\Gamma^E(d)_{vert} \cong (S(2d) \ltimes \mathbb{Z}_+^{2d}) \times \mathbb{Z}_+^\infty,$$
$$\Gamma^D(d)_{vert} \cong (S(d) \ltimes \mathbb{Z}_+^d) \times (S(d) \ltimes \mathbb{Z}_+^d) \times \mathbb{Z}_+^\infty.$$

Представления $\Gamma^E(d)_{vert}$ задаются распределением Юнга Λ, таким что $|\Lambda| = 2d$ и набором чисел $c_i, i = 2, 3, \ldots$. Представления $\Gamma^D(d)_{vert}$ задаются парой распределений Юнга Λ, M, таких что $|\Lambda| = |M| = d$ и набором чисел $c_i, i = 2, 3, \ldots$.

Задача классификации неприводимых допустимых представлений группы G теперь может быть переформулирована как задача описания всех наборов параметров Λ, $\{c_i\}$ (или соответственно Λ, M, $\{c_i\}$), для которых неприводимое допустимое представление с описанными выше матричными элементами существует.

§4. Случай сферического представления пары (G^D, K^D)

Пусть π – сферическое представление пары (G^D, K^D). В подпространстве $H(\pi)_0$ реализуется неприводимое $*$-представление полугруппы $\Gamma^D(0)$. Эта полугруппа состоит только из элементов вида

$$\prod_i C_i^{k_i} P_0.$$

Она коммутативна. Поэтому ее неприводимое представление должно быть одномерно

$$\dim H(\pi)_0 = 1$$

Иными словами в пространстве представления π существует единственный с точностью до множителя вектор ξ, инвариантный относительно подгруппы K^D. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что вектор ξ нормирован условием $\|\xi\| = 1$. Вектор ξ называется *сферическим* вектором. Сферический вектор определяется с точностью до умножения на комплексное число, по модулю равное единице. Сферическая функция

$$\phi_\pi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$$

не зависит от выбора сферического вектора.

Пусть $k_1, k_2 \in K^D$ – две произвольных перестановки. В силу K^D–инвариантности сферического вектора ξ имеем

$$\phi_\pi(k_1 g k_2) = (\pi(k_1 g k_2)\xi, \xi) = \big(\pi(g)\pi(k_2)\xi, \pi(k_1^{-1})\xi\big) = (\pi(g)\xi, \xi) = \phi_\pi(g)$$

Таким образом, сферическая функция постоянна на двойных смежных классах $K^D \backslash G^D / K^D$. Группа G^D изоморфна прямому произведению двух экземпляров бесконечной симметрической группы $S(\infty)$, один из которых действует на положительные числа, а второй – на отрицательные. Подгруппа K^D есть диагональная подгруппа в этом прямом произведении. Любой двойной смежный класс из $K^D \backslash G^D / K^D$ пересекается с подгруппой $S(\infty)$. Поэтому сферическая функция однозначно определяется своим ограничением на подгруппу $S(\infty)$. Пусть $\sigma \in S(\infty)$ – произвольная перестановка. Множество

$$K^D \sigma K^D \cap S(\infty)$$

состоит из всех перестановок, сопряженных перестановке σ, т.е. имеющих такие же длины циклов. Предположим сначала что перестановка σ имеет один неединичный цикл длины k. Тогда

$$\phi_\pi(\sigma) = (\pi(\sigma)\xi, \xi) = (\pi(P_0 \sigma P_0)\xi, \xi) \overset{(1.7)}{=} (\pi(C_k)\xi, \xi) = (c_k \xi, \xi) = c_k\,.$$

В силу теоремы Ольшанского числа $s_i, i = 2, 3, \dots$ должны однозначно определять сферическую функцию. В самом деле, пусть σ произвольна, тогда

$$(\sigma\xi, \xi) = (P_0 \sigma P_0 \xi, \xi) \overset{(1.7)}{=} \left(\prod_{k \in [\sigma]} C_k \xi, \xi \right) = \prod_{k \in [\sigma]} c_k\,. \tag{1.9}$$

Это своиство мультипликативности было впервые установлено Тома.

Глава 2. Классификация неприводимых допустимых представлений

§5. Спектральные свойства операторов A_i в сферическом представлени и пары Гельфанда $\left(G^D, K^D\right)$

Пусть π – некоторое сферическое представление пары $\left(G^D, K^D\right)$, которое мы на протяжение этого параграфа будем считать фиксированным. Мы будем писать просто g вместо $\pi(g)$.

Пусть μ – мера на $[-1,1]$, спектральная для оператора A_1 и сферического вектора ξ. Тогда числа c_k суть просто ее моменты:

$$\int t^k \mu(dt) = (A_1^k \xi, \xi) = (P_0 A_1^k P_0 \xi, \xi) \overset{(1.6)}{=} c_{k+1}\,. \tag{5.1}$$

Поэтому сферическая функция пары $\left(G^D, K^D\right)$ однозначно определяется мерой μ. Обозначим, через ϕ^μ сферическую функцию, отвечающую мере μ:

$$\phi^\mu(\sigma) = \prod_{k\in[\sigma]} \int_{[-1,1]} t^{k-1}\,\mu(dt)$$

Пусть λ – мера на $[-1,1]^\infty$, спектральная для операторов $A_1, A_2, \ldots$ и вектора ξ. Утверждение следующей леммы аналогично свойству мультипликативности сферических функций.

Лемма 1. $\lambda = \mu^{\otimes\infty}$.

Доказательство. Достаточно проверить равенство интегралов от всех мономов:

$$\begin{aligned}\int t_1^{k_1}\ldots t_l^{k_l}\,d\lambda &= (A_1^{k_1}\ldots A_l^{k_l}\xi,\xi)\\ &= (P_0 A_1^{k_1}\ldots A_l^{k_l} P_0\xi,\xi) \overset{(1.6)}{=} \prod_i c_{k_i+1} = \prod_i \int t^{k_i}\,d\mu\,. \quad \bullet\end{aligned}$$

Теперь мы можем установить следующую теорему.

Теорема 1. *Мера μ дискретна, причем ее атомы могут скапливаться только к нулю.*

Доказательство. Обозначим через s траспозицию $(12) \in S(\infty)$.

Пусть E – борелевское подмножество в $[\varepsilon,1]$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим через χ_E его характеристическую функцию. Мы покажем, что

$$\varepsilon\mu(E) \leqslant \mu(E)^2\,.$$

Для этого мы докажем двойное неравенство

$$\varepsilon\mu(E) \leqslant (s\chi_E(A_1)\xi, \chi_E(A_1)\xi) \leqslant \mu(E)^2$$

Среднее выражение вещественно, поскольку

$$s^{-1} = s\,.$$

С одной стороны, в силу (1.3) и (1.5),

$$\begin{aligned}(s\chi_E(A_1)\xi, \chi_E(A_1)\xi) &= (s\chi_E(A_1)P_1\xi, \chi_E(A_1)P_1\xi)\\ &\overset{(1.3)}{=} (\chi_E(A_1)P_1sP_1\chi_E(A_1)\xi, \xi)\\ &\overset{(1.5)}{=} (\chi_E(A_1)P_1A_1P_1\chi_E(A_1)\xi, \xi)\\ &\overset{(1.3)}{=} (A_1\chi_E(A_1)\xi, \xi) = \int\limits_E t\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E)\,.\end{aligned}$$

С другой стороны, так как A_1 и A_2 суть коммутирующие проекторы,

$$\begin{aligned}\chi_E(A_1)s\chi_E(A_1) = \chi_E(A_1)^2 s\chi_E(A_1)^2 &\overset{(1.2)}{=} \chi_E(A_1)^2\chi_E(A_2)s\chi_E(A_1)\\ &\overset{(1.1,2)}{=} \chi_E(A_1)\chi_E(A_2)s\chi_E(A_1)\chi_E(A_2)\,.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(s\chi_E(A_1)\xi, \chi_E(A_1)\xi) &= (s\chi_E(A_1)\chi_E(A_2)\xi, \chi_E(A_1)\chi_E(A_2)\xi)\\ &\leqslant (\chi_E(A_1)\chi_E(A_2)\xi, \chi_E(A_1)\chi_E(A_2)\xi) = \mu(E)^2,\end{aligned}$$

где последний шаг опирается на Лемму 1.

Из неравенства $\varepsilon\mu(E) \leqslant \mu(E)^2$ следует, что либо $\mu(E) = 0$, либо $\mu(E) \geqslant \varepsilon$. Аналогичная оценка может быть сделана для $E \subset [-1, -\varepsilon]$. Отсюда вытекает дискретность меры μ. Поскольку μ – вероятностная мера, в $[\varepsilon, 1]$ может быть не больше, чем $1/\varepsilon$, ее атомов. Отсюда следует вторая часть утверждения теоремы. •

Множество атомов меры μ мы будем обозначать через $\operatorname{supp}\mu$.

§6. Спектральные свойства операторов A_i в неприводимом допустимом представлении пары $\left(G^D, K^D\right)$

Пусть теперь π – неприводимое допустимое представление глубины $d > 0$. Пусть оно задается распределениями Юнга Λ, M и набором $\{c_i\}$.

Мы можем считать, что вместо чисел $\{c_i\}$ представление задается мерой μ, спектральной для оператора A_{d+1} и любого единичного вектора ζ из подпространства $R(\pi)$. Числа $\{c_i\}$ – это моменты меры μ. Мера отвечает сферическому представлению пары $\left(G^D, K^D\right)$, и поэтому она дискретна. Пусть $\operatorname{supp}\mu$ – множество ее атомов.

По определению распределения Λ спектр любого из операторов A_i, $i = 1, \dots, d$, в подпространстве $R(\pi)$ есть $\operatorname{supp} \Lambda$.

Предложение 3. $\operatorname{supp} \Lambda \subset \operatorname{supp} \mu \cup \{0\}$, $\operatorname{supp} M \subset \operatorname{supp} \mu \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{supp} \Lambda \setminus \{0\}$. Пусть ζ – вектор из подпространства $R(\pi)$, такой, что $\|\zeta\| = 1$, $A_1 \zeta = x\zeta$. Пусть δ_x – функция, равная 1 в точке x и 0 в остальных точках. Тогда

$$\zeta = \delta_x(A_1)\zeta\,.$$

Обозначим через s перестановку $(1, d+1) \in S(\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 < |x| = |(A_1\zeta, \zeta)| \overset{(1.5)}{=} |(P_d s P_d \zeta, \zeta)| = |(s\zeta, \zeta)| = |(s\delta_x(A_1)\zeta, \delta_x(A_1)\zeta)| \\ \overset{(1.2)}{=} |(s\delta_x(A_{d+1})\zeta, \delta_x(A_{d+1})\zeta)| \leqslant (\delta_x(A_{d+1})\zeta, \delta_x(A_{d+1})\zeta) = \mu(x), \end{aligned}$$

т.е. $x \in \operatorname{supp} \mu$. Для M рассуждение аналогично. •

Это утверждение ранее было доказано в [32, Теорема 4.6] более сложным способом.

§7. Теорема Тома

Пусть π – сферическое представление и μ – введенная выше спектральная мера. Пусть $\operatorname{supp} \mu$ – множество атомов меры μ и α_i, $-\beta_i$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, – все ненулевые элементы из $\operatorname{supp} \mu$. Для $x \neq 0$ положим $\nu(x) = \mu(x)/|x|$. Тогда при $k > 1$, в силу (5.1),

$$\begin{aligned} c_k = \sum_i \alpha_i^{k-1} \mu(\alpha_i) + \sum_i (-\beta_i)^{k-1} \mu(-\beta_i) \\ = \sum_i \alpha_i^k \nu(\alpha_i) + (-1)^{k-1} \sum_i \beta_i^k \nu(-\beta_i)\,. \quad (7.1) \end{aligned}$$

Теорема 2. *Все числа $\nu(\alpha_i)$, $\nu(-\beta_i)$ суть целые числа.*

Для доказательства нам потребуется одна лемма. Пусть $\sigma \in S(\infty)$ – произвольная перестановка. Обозначим через $\mathbb{N}/\sigma$ множество орбит перестановки σ на множестве $\mathbb{N}$. Пусть $p \in \mathbb{N}/\sigma$ есть некоторая орбита. Обозначим через $|p|$ ее мощность.

Лемма 2. *Пусть $f_i(t)$, $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, – непрерывные функции на $[-1, 1]$, все, за исключением конечного числа, тождественно равные 1. Тогда для $\sigma \in S(\infty)$*

$$\text{a)}\quad \left(\sigma \prod_{i=1}^{\infty} f_i(A_i)\xi, \xi\right) = \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} \int t^{|p|-1} \prod_{j\in p} f_j(t)\, d\mu,$$

$$\text{b)}\quad \left(\sigma \prod_{i=1}^{\infty} f_i(A_i)\xi, \prod_{i=1}^{\infty} g_i(A_i)\xi\right) = \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} \int t^{|p|-1} \prod_{j\in p} f_j(t)\overline{g_j(t)}\, d\mu\,.$$

Доказательство. а) Можно считать, что $f_i(t) = t^{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, причем $k_i = 0$, $i \gg 1$. Для $p \in \mathbb{N}/\sigma$ положим $\Sigma(p) = \sum_{j\in p} k_j$. Тогда $\prod_{j\in p} f_j(t) = t^{\Sigma(p)}$. В полугруппе Γ справедливо тождество

$$P_0\sigma \prod A_i^{k_i} P_0 = P_0 \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} C_{|p|+\Sigma(p)}\,,$$

которое обобщает тождества (1.6) и (1.7) и доказывается аналогично. Из этого тождества вытекает, что

$$\left(\sigma \prod_{i=1}^{\infty} f_i(A_i)\xi, \xi\right) = \left(\sigma \prod A_i^{k_i}\xi, \xi\right) = \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} c_{|p|+\Sigma(p)}$$

$$= \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} \int t^{|p|+\Sigma(p)-1} d\mu = \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} \int t^{|p|-1} \prod_{j\in p} t^{k_j} d\mu\,.$$

б) следует из а), (1.2) и того, что $\prod_{j\in p} f_j(t) = \prod_{j\in p} f_{\sigma(j)}(t)$. •

Замечание. Утверждение Леммы 3 сохраняет силу для более широкого класса функций, например, для функций, являющихся поточечными пределами равномерно ограниченных последовательностей непрерывных функций. Это следует из функционального исчисления операторов, см. [41, т. 1, Теорема ВИИ.2(д)]. К этому классу относится функция $\delta_x(t)$, $x \in \operatorname{supp}\mu$, равная 1 в точке x и нулю в остальных точках из $[-1, 1]$. Впрочем, в силу Теоремы 1, мы можем вместо функции δ_x рассматривать непрерывную функцию, равную 1 в точке x и нулю в остальных точках из $\operatorname{supp}\mu$.

Доказательство Теоремы 2. Зафиксируем некоторое $\alpha = \alpha_i$ и положим $\nu = \nu(\alpha_i)$. Рассмотрим вектор

$$\zeta^{(m)} = \prod_{i=1}^{m} \delta_\alpha(A_i)\xi \,.$$

В силу Леммы 2, для $\sigma \in S(m)$

$$(\sigma\zeta^{(m)}, \zeta^{(m)}) = \prod_{p\in\mathbb{N}/\sigma} \alpha^{|p|-1}\mu(\alpha) = \alpha^{m-l(\sigma)}\mu(\alpha)^{l(\sigma)} = \alpha^m \nu^{l(\sigma)},$$

где $l(\sigma)$ означает число циклов перестановки $\sigma \in S(m)$.

Пусть $\mathrm{Alt}(m)$ – оператор антисимметризации по группе $S(m)$; тогда

$$(\mathrm{Alt}(m)\zeta^{(m)}, \zeta^{(m)}) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S(m)} \mathrm{sgn}(\sigma)(\sigma\zeta^{(m)}, \zeta^{(m)}) =$$

$$= \frac{\alpha^m}{m!}\sum_{\sigma\in S(m)} \mathrm{sgn}(\sigma)\nu^{l(\sigma)} = \frac{\alpha^m}{m!}\sum_{\sigma\in S(m)} (-1)^{m+l(\sigma)}\nu^{l(\sigma)} =$$

$$= \frac{\alpha^m}{m!}\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1), \tag{7.2}$$

где мы применили равенство $\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{m+l(\sigma)}$ и известное тождество

$$\sum_{\sigma\in S(m)} x^{l(\sigma)} = x(x+1)\ldots(x+m-1) \tag{7.3}$$

(см. [45, Предложение 1.3.4]). Поскольку $\mathrm{Alt}(m)$ – проектор, последнее произведение в (7.2) должно быть неотрицательным для всех m, что возможно, только если оно обрывается, т.е. если $\nu = \nu(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Если умножить представление T на представление $\mathrm{sgn}\otimes\mathrm{sgn}$, то мера $\mu(x)$ перейдет в меру $\mu(-x)$. Отсюда следует, что $\nu(-\beta_i) \in \mathbb{N}$. $\bullet$

Дискретную вероятностную меру μ на множестве $[-1,1]$, такую, что для всех $x \in [-1,1]\setminus 0$

$$\frac{\mu(x)}{|x|} \in \mathbb{Z}_+$$

будем называть *мерой Тома.*

Доказанная теорема дает необходимое условие существования представлений. Из явной конструкции представлений [32] (смотри также Главу 3) или из прямой проверки положительной определенности сферической функции [49] следует, что это условие является также и достаточным. Тем самым установлено описание сферических функций пары $\left(G^D, K^D\right)$. Для того, чтобы сформулировать его в классической форме, удобно считать множество $\operatorname{supp}\mu$ множеством с кратностями, каждый ненулевой элемент x которого повторяется $\mu(x)/|x|$ раз

Теорема Тома [49]. *Характеры группы $S(\infty)$ суть в точности функции вида*

$$\phi(\sigma) = \prod_{k\in[\sigma]} \left(\sum_i \alpha_i^k + (-1)^{k-1} \sum_i \beta_i^k \right),$$

где

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \cdots > 0 \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3 \geqslant \cdots > 0$$
$$\sum \alpha_i + \sum \beta_i \leqslant 1\,.$$

§8. Другое доказательство теоремы Тома. Связь с полной положительностью

В этом параграфе мы покажем, как представление

$$c_k = \int t^{k-1} d\mu$$

позволяет упростить оригинальное доказательство Тома.

Пусть ϕ есть некоторый характер группы $S(\infty)$. Рассмотрим ограничение характера ϕ на конечную симметрическую группу $S(n)$. Характеры конечной симметрической группы $S(n)$ нумеруются диаграммами Юнга из n клеток. Пусть χ^λ есть (ненормированный !) характер, отвечающий неприводимому представлению λ. В силу положительной определенности функции ϕ ее ограничение $\phi|_{S(n)}$ на группу $S(n)$ разложится в неотрицательную линейную комбинацию функций χ_λ:

$$\phi|_{S(n)} = \sum_{\lambda, |\lambda|=n} m(\lambda)\chi^\lambda, \quad m(\lambda) \geqslant 0\,.$$

Числа $m(\lambda)$ будем называть *коэффициентами Фурье* функции ϕ. Они могут быть найдены исходя из ортонормированности характеров относительно скалярного произведения

$$\lambda f_1, f_2\rangle_{S(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S(n)} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

Очевидно, числа $m(\lambda)$ должны удовлетворять условиям согласованности. А именно, пусть диаграмма Юнга Λ, $|\Lambda| = n+1$ задает представление группы $S(n+1)$. Правило Юнга ветвления представлений симметрических групп утверждает, что

$$\chi^{\Lambda}|_{S(n)} = \sum_{\lambda, \Lambda \searrow \lambda} \chi^{\lambda} . \tag{8.1}$$

Где $\Lambda \searrow \lambda$ означает, что диаграмма λ получается из диаграммы Λ удалением одной клетки. В силу (8.1) числа $m(\lambda)$ должны удовлетворять условиям

$$m(\lambda) = \sum_{\Lambda, \Lambda \searrow \lambda} m(\Lambda)$$

Наоборот, любой набор неотрицательных чисел m_{λ}, удовлетворяющий условию согласованности задает некоторую положительно определенную функцию на группе $S(\infty)$. Эта функция нормирована тогда и только тогда, когда

$$m(\emptyset) = 1$$

В силу Предложения 2 эта функция будет неразложима тогда и только тогда, когда она мультипликативна по циклам перестановок. Эта мультипликативность накладывает сильные ограничения на возможные наборы чисел m_{λ}. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы выразить мультипликативность функции ϕ в терминах ее коэффициентов Фурье.

Напомним операцию умножения кружочком для представлений симметрических групп. Пусть $\tau, |\tau| = n$ и $\upsilon, |\upsilon| = m$ суть две диаграммы Юнга. Тогда их произведение кружочком есть представление группы $S(n+m)$

$$\tau \circ \upsilon = \operatorname{Ind}_{S(n) \times S(m)}^{S(n+m)} \tau \otimes \upsilon$$

Формула Фробениуса [23] утверждает, что в кольце представлений группы симметрической группы неприводимое представление соответствующее диаграмме Юнга λ выражается в виде определителя, произведения в котором нужно понимать как произведение кружочком:

$$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2-1 & \lambda_2 & \lambda_2+1 & \lambda_2+2 & \dots & \dots \\ \vdots & \lambda_3-1 & \lambda_3 & \lambda_3+1 & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \lambda_i-i+j & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}^{\circ}$$

Здесь и ниже число λ_i-i+j обозначает тривиальное представление симметрической группы порядка λ_i-i+j, если $\lambda_i-i+j\geqslant 0$, и формальный нулевой элемент иначе.

Обозначим через η^k тривиальный характер группы $S(k)$. Пусть λ есть некоторое разбиение

$$\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_s)\,.$$

Обозначим через η^λ характер группы $S(|\lambda|)$

$$\eta^\lambda = \eta^{\lambda_1}\circ\dots\circ\eta^{\lambda_s}\,.$$

Формула Фробениуса выражает характер χ^λ неприводимого представления симметрической группы в виде линейной комбинации характеров вида η^ν.

Пусть L – некоторая группа. Обозначим через $\mathfrak{Z}(L)$ линейное пространство центральных функций на группе L.

Пусть $f_1\in\mathfrak{Z}(S(n_1))$, $f_2\in\mathfrak{Z}(S(n_2))$ суть некоторые центральные функции. Обозначим через $f_1\otimes f_2$ функцию из $\mathfrak{Z}(S(n_1)\times S(n_2))$ такую, что

$$(f_1\otimes f_2)(g_1,g_2) = f_1(g_1)f_2(g_2)\,.$$

Лемма 3. *Функция $\phi\in\mathfrak{Z}(S(n))$ мультипликативна тогда и только тогда, когда для любых натуральных n_1,n_2, таких что $n_1+n_2=n$ и любых функций $f_1\in S(n_1), f_2\in S(n_2)$ выполняется равенство*

$$\lambda\phi|_{S(n_1)\times S(n_2)}, f_1\otimes f_2\rangle_{S(n_1)\times S(n_2)} = \lambda\phi|_{S(n_1)}, f_1\rangle_{S(n_1)}\lambda\phi|_{S(n_2)}, f_2\rangle_{S(n_2)}\,. \tag{8.2}$$

Доказательство. Утверждение 'тогда' очевидно. Утверждение 'только тогда' становится очевидным, если в качестве функций f_1, f_2 рассмотреть характеристические функции классов сопряженных элементов.

Замечание. Равенство (8.2) антилинейно по f_1 и f_2. Поэтому для доказательства мультипликативности достаточно установить его в предположении, что f_1 и f_2 пробегают независимо некоторые базисы пространств $\mathfrak{Z}(S(n_1))$ и $\mathfrak{Z}(S(n_1))$.

Предложение 4. $m(\lambda)$ *отвечает мультипликативной центральной функции на группе* $S(\infty)$ *тогда и только тогда, когда для всех диаграмм Юнга* λ *выполняется равенство*

$$m(\lambda) = \det\left[m(\lambda_i - i + j)\right]_{i,j} . \tag{8.3}$$

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathfrak{Z}(S(\infty))$ – мультипликативная функция. По двойственности Фробениуса

$$\lambda\phi|_{S(|\lambda|)}, \eta^\lambda\rangle_{S(|\lambda|)} = \lambda\phi|_{S(\lambda_1)\times\cdots\times S(\lambda_s)}, 1\rangle_{S(\lambda_1)\times\cdots\times S(\lambda_s)}$$

Что в силу мультипликативности ϕ есть

$$= \prod_i \lambda\phi|_{S(\lambda_i)}, 1\rangle_{S(\lambda_i)} = \prod_i m(\lambda_i) .$$

Поэтому в силу формулы Фробениуса

$$m(\lambda) = \lambda\phi|_{S(|\lambda|)}, \chi^\lambda\rangle_{S(|\lambda|)} = \det\left[m(\lambda_i - i + j)\right] .$$

Хаоборот, пусть справедливо (8.3). Известно (и видно из формулы Фробениуса), что характеры вида η^λ образуют базис в пространстве центральных функций на симметрической группе. Более того, если ввести на множестве разбиений частичный порядок

$$\mu \leqslant \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 + \cdots + \mu_i \leqslant \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \text{ для всех } i \geqslant 1 ,$$

то, (как это снова видно из формулы Фробениуса) матрица перехода от базиса $\{\chi^\lambda\}$ к базису $\{\eta^\lambda\}$ будет треугольной.

Равенство

$$\lambda\phi, \eta^\lambda\rangle = \prod_i m(\lambda_i) \tag{8.4}$$

очевидно, если λ есть разбиение на одну часть. Пусть это равенство доказано для всех разбиений μ, таких что $\mu > \lambda$. Тогда из (8.3) и формулы Фробениуса (в которой участвуют η^λ и такие η^μ, что $\mu > \lambda$) следует, что оно справедливо также и для λ. Таким образом, равенство (8.4) доказано для всех разбиений λ.

Пусть теперь λ, μ – два произвольных разбиения. Пусть $|\lambda| = n_1, |\mu| = n_2$. Обозначим через $\lambda \cup \mu$ объединение частей разбиений λ и μ. Тогда

$$\lambda\phi|_{S(n_1)\times S(n_2)}, \eta^\lambda \otimes \eta^\mu\rangle_{S(n_1)\times S(n_2)} = \\ \lambda\phi|_{S(n_1+n_2)}, \eta^{\lambda\cup\mu}\rangle_{S(n_1+n_2)} = \prod_i m(\lambda_i) \prod_j m(\mu_j)\,.$$

Откуда

$$\lambda\phi|_{S(n_1)\times S(n_2)}, \eta^\lambda \otimes \eta^\mu\rangle_{S(n_1)\times S(n_2)} = \lambda\phi|_{S(n_1)}, \eta^\lambda\rangle_{S(n_1)} \lambda\phi|_{S(n_2)}, \eta^\mu\rangle_{S(n_2)}\,.$$

Так как характеры вида η^λ образуют базис в пространстве центральных функций, то это равенство доказывает мультипликативность функции ϕ. •

Напомним, что последовательность вещественных чисел $\{a_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ называется *вполне положительной*, если все миноры бесконечной теплицевой матрицы

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ddots \\ & 0 & a_0 & a_1 & \ddots \\ & & 0 & a_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

неотрицательны. В частности, все числа a_i неотрицательны.

Полная положительность сохраняется при сдвиге и умножении на положительное число, поэтому, если наша последовательность ненулевая, то можем считать, что $a_0 = 1$. Пусть для некотрого $i > 0$ имеем a_i ı 0. Тогда из неравенства

$$\det \begin{bmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

следует, что $a_j = 0$ для всех $j \geqslant i$. Поэтому у вполне положительной последовательности либо вовсе нет нулевых членов, либо нулевые в точности все члены, начиная с некоторого номера. Легко видеть, что умножение на геометрическую прогрессию сохраняет полную положительность, поэтому если последовательность $\{a_i\}$ содержит по крайней мере два положительных члена, то мы можем считать, что

$$a_0 = a_1 = 1\,.$$

Нормированную таким образом последовательность будем называть *нормированной вполне положительной*.

Предложение 5. *Отображение*

$$\phi \to \{m(i)\}, i = 0, 1, \ldots$$

есть биекция множества характеров группы $S(\infty)$ на множество нормированных вполне положительных последовательностей.

Доказательство. Пусть ϕ есть характер группы $S(\infty)$. Тогда, очевидно, $m(0) = m(1) = 1$. Скалярное произведение ограничения ϕ на любую конечную симметрическую группу $S(n)$ со следом любого представления $S(n)$ неотрицательно. В частности, это верно для следа $\chi^{\lambda/\mu}$ представления, отвечающего косой диаграмме Юнга λ/μ. В силу формулы Фробениуса для $\chi^{\lambda/\mu}$ [28, §1.5,(5.4)] имеем

$$\lambda\phi|_{S(|\lambda/\mu|)}, \chi^{\lambda/\mu}\rangle_{S(|\lambda/\mu|)} = \det\left[m(\lambda_i - \mu_j - i + j)\right]_{ij} \geqslant 0\,.$$

Легко видеть, что при этом получаются все миноры, входящие в определение полной положительности.

Наоборот, пусть нам задана нормированная вполне положительная последовательность $\{m(i)\}, i = 0, 1, \ldots$. Определим свою центральную функцию ϕ_n на каждой симметрической группе $S(n)$ по формуле (8.3). Мы хотим сейчас показать, что этот набор функций согласован, т.е. определяет единую функцию на группе $S(\infty)$. Заметим, что в доказательстве равенства (8.4) мы не пользовались согласованностью чисел $m(\lambda)$. Поэтому можем считать, что

$$\lambda\phi_{|\lambda|}, \eta^\lambda\rangle = \prod_i m(\lambda_i)\,.$$

Откуда

$$\lambda\phi_{|\lambda|+1}|_{S(|\lambda|)}, \eta^\lambda\rangle = \lambda\phi_{|\lambda|+1}, \eta^{\lambda\cup 1}\rangle = m(1)\prod_i m(\lambda_i)\,.$$

В силу равенства $m(1)=1$ это есть

$$\prod_i m(\lambda_i) = \lambda\phi_{|\lambda|}, \eta^\lambda\rangle\,.$$

Поскольку функции вида η^λ есть базис пространства $\mathfrak{Z}(S(n))$, равенство

$$\phi_{n+1}|_{S(n)} = \phi_n$$

доказано. Неотрицательная определенность функции ϕ очевидна, ее мультипликативность следует из предложения, а нормированность – из равенства $m(0)=1$. $\bullet$

Удобно составить из чисел $m(i), i=0,1,\dots$ производящий ряд

$$H(t) = 1 + m(1)t + m(2)t^2 + \dots\,.$$

Как мы знаем, либо $H(t)$ есть полином, либо все члены ряда $H(t)$ ненулевые. Сейчас мы хотим выразить ряд $H(t)$ через числа $c_i, i=1,2,\dots,$ которые, напомним, есть значения функции ϕ на циклах длины i. Пусть λ есть разбиение на ρ_i частей, равных 1, ρ_2 частей равных 2 и так далее. Тогда

$$\begin{aligned} m(k) &= \lambda\phi|_{S(k)}, 1\rangle_{S(k)} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{\lambda,|\lambda|=k} \frac{k!}{\prod_i \rho_i! i^{\rho_i}} \prod_i c_i^{\rho_i} \\ &= \sum_{\lambda,|\lambda|=k} \prod_i \frac{1}{\rho_i!}\left(\frac{c_i}{i}\right)^{\rho_i} \quad . \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k=0}^\infty t^k \sum_{\rho_1+2\rho_2+3\rho_3\cdots=k} \prod_i \frac{1}{\rho_i!}\left(\frac{c_i}{i}\right)^{\rho_i} \\ &= \prod_{i=1}^\infty \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\left(\frac{c_i t^i}{i}\right)^j \\ &= \prod_{i=1}^\infty \exp\left(\frac{c_i t^i}{i}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^\infty \frac{c_i}{i} t^i\right) \quad . \end{aligned}$$

И наоборот, числа c_i легко получить из ряда $H(t)$.

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots = \frac{H'(t)}{H(t)}\,.$$

Мы сформулируем теорему Тома в следующей форме

Теорема. *Производящие функции коэффициентов Фурье* $\{m(i)\}, i = 0, 1, \dots$ *характеров группы* $S(\infty)$ *имеют вид*

$$H(t) = e^{\gamma t} \frac{\prod(1+\beta_i t)}{\prod(1-\alpha_i t)}$$

где

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0, \quad \sum \alpha_i + \sum \beta_i + \gamma = 1$$

Следствие (Теорема Эдреи [17]). *Производящие функции нормированных вполне положительных последовательностей имеют вид*

$$H(t) = e^{\gamma t} \frac{\prod(1+\beta_i t)}{\prod(1-\alpha_i t)}$$

где

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0, \quad \sum \alpha_i + \sum \beta_i + \gamma = 1$$

Доказательство. Мы должны доказать, что для всех характеров H–ряд должен иметь вид, указанный в теореме.

Предположим, что $H(t)$ не есть полином. Тогда из неравенств

$$\det \begin{bmatrix} m(i) & m(i+1) \\ m(i-1) & m(i) \end{bmatrix} \geqslant 0$$

следует, что

$$1 = \frac{m(1)}{m(0)} \geqslant \frac{m(2)}{m(1)} \geqslant \frac{m(3)}{m(2)} \geqslant \dots \geqslant 0\,. \tag{8.5}$$

Значит, существует предел,

$$\alpha = \lim \frac{m(n+1)}{m(n)}, \quad n \to \infty\,.$$

Очевидно, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и число $1/\alpha$ есть радиус сходимости ряда $H(t)$.

Предположим, что этот радиус конечен. Если $\alpha = 1$, то в силу (8.5) имеем $m(i) \equiv 1$ и

$$H(t) = \frac{1}{1-t}\,.$$

Этот H–ряд соответствует тривиальному представлению. Мы обозначим его через $H_{id}(t)$.

Предположим поэтому, что $0 < \alpha < 1$. Построим по нашему характеру ϕ новый характер $\tilde\phi$ ц коэффициентами Фурье

$$\tilde m(\lambda) = (1-\alpha)^{-|\lambda|} \lim \frac{m(n\cup\lambda)}{m(n)}, \quad n\to\infty\,.$$

Несложно вычислить явный вид этим пределов. Имеем

$$\lim \frac{m(n\cup\lambda)}{m(n)} = \lim \frac{1}{m(n)} \det \begin{bmatrix} m(n) & m(n+1) & m(n+2) & \dots \\ m(\lambda_1-1) & m(\lambda_1) & m(\lambda_1+1) & \dots \\ m(\lambda_2-2) & m(\lambda_2-1) & m(\lambda_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \lim\det \begin{bmatrix} 1 & m(n+1)m(n)^{-1} & m(n+2)m(n)^{-1} & \dots \\ m(\lambda_1-1) & m(\lambda_1) & m(\lambda_1+1) & \dots \\ m(\lambda_2-2) & m(\lambda_2-1) & m(\lambda_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots \\ m(\lambda_1-1) & m(\lambda_1) & m(\lambda_1+1) & \dots \\ m(\lambda_2-2) & m(\lambda_2-1) & m(\lambda_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ m(\lambda_1-1) & m(\lambda_1)-\alpha m(\lambda_1-1) & m(\lambda_1+1)-\alpha m(\lambda_1) & \dots \\ m(\lambda_2-2) & m(\lambda_2-1)-\alpha m(\lambda_2-2) & m(\lambda_2)-\alpha m(\lambda_2-1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} m(\lambda_1)-\alpha m(\lambda_1-1) & m(\lambda_1+1)-\alpha m(\lambda_1) & \dots \\ m(\lambda_2-1)-\alpha m(\lambda_2-2) & m(\lambda_2)-\alpha m(\lambda_2-1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

В частности,

$$\tilde m(k) = (1-\alpha)^{-k}(m(k)-\alpha m(k-1))\,. \tag{8.6}$$

Таким образом,

$$\tilde m(\lambda) = \det\left[\tilde m(\lambda_i - i + j)\right]_{i,j}\,.$$

Мы видим, что коэффициенты Фурье $\{\tilde m(\lambda)\}$ задают мультипликативную положительно определенную функцию на группе $S(\infty)$. Положим

$$\tilde H(t) = \sum \tilde m(k) t^k\,.$$

Тогда равенство (8.6) означает, что

$$H(t) = H_{id}(\alpha t)\tilde{H}((1-\alpha)t)\,.$$

Представленческий смысл этой факторизации станет ясен в третьей главе. Заметим, что радиус сходимости ряда $\tilde{H}((1-\alpha)t)$ не меньше радиуса сходимости ряда $H(t)$. Итерируя эту факторизацию получаем представление

$$H(t) = \prod H_{id}(\alpha_i t) H_{ent}((1-\sum \alpha_i)t)\,,$$

где

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \sum \alpha_i \leqslant 1\,,$$

а H_{ent} есть целая функция, являющаяся H–рядом для некоторого характера группы $S(\infty)$.

Рассмотрим теперь вместо характера ϕ характер ϕ^-

$$\phi^-(g) = \operatorname{sgn}(g)\phi(g), \quad g \in S(\infty)\,.$$

В частности,

$$c_k^- = (-1)^{k-1} c_k\,.$$

Поэтому характеру ϕ^- отвечает H–ряд

$$H^-(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{c_i}{i}t^i\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{i}(-t)^i\right) = H(-t)^{-1}$$

Факторизуя теперь функцию $H_{ent}(-t)^{-1}$, получаем представление

$$H(t) = \prod H_{id}(\alpha_i t) \prod H_{sgn}(\beta_i t) H^*(\gamma t), \quad \sum \alpha_i + \sum \beta_i + \gamma = 1\,,$$

где

$$H_{sgn}(t) = 1 + t\,,$$

а $H^*(t)$ есть H–ряд некоторого характера группы $S(\infty)$, представляющий целую функцию без нулей и полюсов. Поэтому ряд

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots = \frac{H'(t)}{H(t)}\,.$$

представляет целую функцию. Покажем, что это возможно только если

$$c_1 = 1, \quad c_2 = c_3 = \cdots = 0$$

Действительно, мы имеем

$$c_k = \int t^{k-1} d\mu$$

Допустим, что мера μ не сосредоточена в нуле. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\mu([-1,1] \setminus [-\varepsilon,\varepsilon]) = const > 0$, откуда $c_{2k+1} = \int t^{2k} d\mu \geqslant const\, \varepsilon^{2k}$ для всех k, и, значит, радиус сходимости ряда $\sum c_k z^{k-1}$ не превосходит $1/\varepsilon$. Таким образом мера μ обязана быть сосредоточенной в нуле, т.е. $c_2 = c_3 = \cdots = 0$. Иными словами

$$H^*(t) = e^t \,. \quad \bullet$$

Замечание Именно иследование случая целой функции без нулей и полюсов было самой сложной частью оригинального доказательства Тома.

§9. Классификация неприводимых допустимых представлений пары (G^D, K^D)

Пусть π – неприводимое допустимое представление глубины d, которое задается мерой Тома μ и распределениями Юнга Λ, M.

Пусть вектор $\zeta \in R(\pi)$ таков, что $A_1\zeta = A_{-1}\zeta = x\zeta$. Обозначим через s и t перестановки $(1, d+1), (-1, -d-1) \in G^D$. Рассмотрим вектор $\zeta^{(x)} = \delta_x(A_{d+1})\zeta$.

Лемма 4.

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad (\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = \mu(x),\\
&\text{b)} \quad (s\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = x,\\
&\text{v)} \quad (t\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = x,\\
&\text{g)} \quad (st\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Доказательство. Пункт а) следует из определения спектральной меры. В силу Предложения 3, $\mu(x) \neq 0$. Пункт б) был нами фактически установлен в доказательстве Предложения 3, п. в) тогда следует из того, что в силу (1.4)

$$A_{-d-1}\zeta = A_{d+1}\zeta \,.$$

Проверим г). Оператор $P_d st P_d$ сопряжен P_{d-1} и поэтому равен нулю, так как по условию $H(\pi)_{d-1} = 0$. Поэтому

$$0 = (st\zeta, \zeta) = (st\delta_x(A_1)\zeta, \delta_x(A_1)\zeta) \overset{(1.1),(1.2)}{=} (st\delta_x(A_{d+1})\zeta, \delta_x(A_{d+1})\zeta)$$
$$= (st\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) . \quad \bullet$$

Теорема 3. *Для существования неприводимого допустимого представления глубины d с мерой Тома μ и распределениями Юнга Λ, M, $|\Lambda| = |M| = d$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in [-1, 1]$*

$$l(\Lambda(x)) + l(M(x)) \leqslant \mu(x)/|x|, \qquad x > 0, \tag{14}$$
$$l(\Lambda'(x)) + l(M'(x)) \leqslant \mu(x)/|x|, \qquad x < 0, \tag{15}$$

где штрих означает транспонирование диаграммы Юнга.

Доказательство. Достаточность доказана в [32] с помощью явной конструкции представлений. Мы укажем явную конструкцию всех соответствующих представлений в третьей главе.

Докажем необходимость. Пусть

$$x \in \operatorname{supp}\Lambda \cup \operatorname{supp} M \quad \text{ и } \quad x > 0 .$$

Положим

$$l_1 = l(\Lambda(x)), \quad l_2 = l(M(x)) .$$

Будем считать, что $l_1, l_2 > 0$. (Случай, когда $l_1 = 0$ или $l_2 = 0$, проще и разбирается аналогично.) Обозначим через $S(l_1) \times S(l_2)$ подгруппу в группе $G^D(d)$, переставляющую числа $\{1, \ldots, l_1\}$ и $\{-1, \ldots, -l_2\}$.

В силу правила ветвления для представлений конечных симметрических групп и определения Λ и M найдется вектор $\zeta \in R(\pi)$, антиинвариантный относительно группы $S(l_1) \times S(l_2)$ и такой, что

$$A_i\zeta = x\zeta, \quad i = 1, \ldots, l_1, -1, \ldots, -l_2 .$$

Тогда $\zeta^{(x)}$ тоже $S(l_1) \times S(l_2)$-антиинвариантен.

Пусть Alt – оператор антисимметризации по группе $S(l_1+1) \times S(l_2+1)$, переставляющей $\{1, 2, \ldots, l, d+1\}$ и $\{-1, -2, .., -l, -d-1\}$. Матричный элемент

$$(\operatorname{sgn}(g)\, g\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)})$$

инвариантен при правых и левых сдвигах на элементы группы $S(l_1)\times S(l_2)$. Группа $S(l_1+1)\times S(l_2+1)$ состоит из четырех двойных классов по подгруппе $S(l_1)\times S(l_2)$; их представители суть 1, s, t, st, а мощности – $l_1!l_2!$, $l_1l_1!l_2!$, $l_2l_1!l_2!$, $l_1l_2l_1!l_2!$. Поэтому, в силу Леммы 3,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Alt}\zeta^{(x)},\zeta^{(x)}) &= \frac{l_1!l_2!\mu(x)-l_1l_1!l_2!x-l_2l_1!l_2!x+l_1l_2l_1!l_2!0}{(l_1+1)!(l_2+1)!}\\ &= \frac{|x|(\mu(x)/|x|-l_1-l_2)}{(l_1+1)(l_2+1)}\end{aligned}$$

Поскольку оператор Alt является проектором, результат неотрицателен и, следовательно,

$$l_1+l_2\leqslant \mu(x)/|x|\,.$$

Случай $x<0$ сводится к случаю $x>0$ заменой T на $T\otimes(\operatorname{sgn}\otimes\operatorname{sgn})$. $\bullet$

Замечание Если иметь в виду рисунок 5, то использование спектральных проекторов $\delta_x(A_i)$ позволяет стереть все диаграммы Юнга, кроме растущих из точки x. В главе 3 мы будем решать противоположную задачу: как посадить диаграмму Юнга в какую-нибудь точку отрезка $[-1,1]$.

§10. Описание множества $K^E(n)\backslash G^E(n)/K^E(n)$

В этом параграфе буква G будет обозначать группу $G^E(n)$, а буква K будет обозначать подгруппу $K^E(n)$. Мы опишем двойные смежные классы $K\backslash G/K$ и укажем их мощности. Эти результаты потребуются нам в §11. Обозначим через $S(n)\subset G^E(n)$ подгруппу, фиксирующую точки $\{-1,\dots,-n\}$.

Множество $K\backslash G/K$ совпадает, очевидно, с множеством орбит группы K на множестве G/K. Множество G/K естественно отождествляется с множеством Π разбиений множества $\{\pm1,\pm2,\dots,\pm n\}$ на пары. Группа K выступает при этом как стабилизатор разбиения σ

$$\sigma=\{\{\pm1\},\dots,\{\pm n\}\}$$

Для любых двух разбиений τ и υ, пусть $\tau\vee\upsilon$ обозначает их объединение. Если τ и υ были разбиениями на пары (или вообще на блоки четной мощности), то разбиение $\tau \vee \upsilon$ также будет разбиением на четные блоки. Поэтому мощности блоков $\tau \vee \upsilon$ поделенные пополам образуют некоторое разбиение числа n, которое мы обозначим через $\tau \nabla \upsilon$. Функция $f(\tau) = \tau \nabla \sigma$, принимающая значения в разбиениях числа n, есть инвариант действия группы K на пространстве Π. Известно [46, 32] следущее

Предложение 6. *Функция $f(\tau) = \tau \nabla \sigma$ разделяет орбиты группы K на Π.*

Следствие.

(1) *Множество $K \backslash G / K$ параметризуется разбиениями λ числа n.*

(2) *Пересечение двойного смежного класса соответствующего разбиению λ с подгруппой $S(n)$ состоит из перестановок с цикловой структурой λ. В частности, это пересечение непусто.*

Пусть $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$ – разбиение, имеющее m_i частей, равных i. Обозначим через $l(\lambda)$ число частей разбиения λ. Положим $z_\lambda = \prod i^{m_i} m_i!$. Обозначим через $K\lambda K$ двойной смежный класс, соответствующий разбиению λ. Элементарными комбинаторными средствами устанавливается [46] следующее

Предложение 7.

$$|K\lambda K| = 2^{2n - l(\lambda)} \frac{(n!)^2}{z_\lambda}$$

Следствие. *Пусть $g \in G^E(n)$. Обозначим через $l(g)$ число частей разбиения, соответствующего двойному классу KgK. Пусть t – формальная переменная, тогда*

$$\sum_{g \in G^E(n)} t^{l(g)} = n!\, 2^n t(t+2)(t+4) \cdots (t+2n-2)$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{g\in G^E(n)} t^{l(g)} = \sum_{\lambda\vdash n} 2^{2n-l(\lambda)}(n!)^2 z_\lambda^{-1} t^{l(\lambda)}$$

$$= n!\, 2^{2n} \sum_{\lambda\vdash n} n!\, z_\lambda^{-1} \left(\frac{t}{2}\right)^{l(\lambda)}$$

В силу уже применявшегося нами в доказательстве Теоремы 2 тождества (7.3) для чисел Стирлинга [45] это есть

$$= n!\, 2^{2n}\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}+1\right)\left(\frac{t}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{t}{2}+n-1\right)$$
$$= n!\, 2^n t(t+2)(t+4)\cdots(t+2n-2)$$

•

§11. Сферические представления пары $\left(G^E, K^E\right)$

Пусть π – сферическое представление пары $\left(G^E, K^E\right)$, а ϕ – соответствующая сферическая функция. Из следствия Предложения 4 предыдущего параграфа вытекает, что группа G^E есть произведение своих подгрупп $K^E S(\infty) K^E$. Поэтому ϕ, как K^E – биинвариантная функция, определяется своим ограничением на подгруппу $S(\infty)$. Это ограничение есть нормированная положительно определенная функция. Точно так же, как в случае сферических представлений пары $\left(G^D, K^D\right)$ имеем для $\sigma \in S(\infty)$

$$\phi(\sigma) = \prod_{k\in[\sigma]} c_k\ .$$

Таким образом функция ϕ мультипликативна по циклам перестановок и, следовательно, в силу Предложения 2 неразложима. Поэтому, в силу теоремы Тома, она должна иметь вид ϕ^μ для некоторой меры Тома μ. Опять в силу следствия Предложения 4 для любого элемента $g \in S(\infty)$ множество

$$S(\infty) \cap K^E g K^E$$

есть класс сопряженных элементов группы $S(\infty)$, содержащий элемент g. Любая функция ϕ^μ, очевидно, постоянна вдоль классов сопряженных элементов. Поэтому для любой функции ϕ^μ

на группе $S(\infty)$ существует (и, конечно, единственно) K^E–биинвариантное продолжение на группу G^E. Обозначим это продолжение через $\tilde{\phi}^\mu$.

Множество сферических функций пары $\left(G^E, K^E\right)$ совпадает с подмножеством функций вида $\tilde{\phi}^\mu$, состоящим из положительно определенных функций.

Теорема 4. *Функция $\tilde{\phi}^\mu$ является сферической функцией пары $\left(G^E, K^E\right)$ тогда и только тогда, когда для всех $h \in [-1,0)$*

$$\frac{\mu(x)}{|x|} \in 2\mathbb{Z}_+$$

Доказательство. Достаточность этого условия следует из явных конструкций представлений (см. главу 3). Покажем необходимость.

Пусть π – сферическое представление пары $\left(G^E, K^E\right)$, соответствующее сферической функции $\tilde{\phi}^\mu$. Пусть ξ – сферический вектор представления π. Пусть $x \in [-1,0)$. Рассматривая, аналогично тому, как мы это делали в доказательстве Теоремы 2 для пары $\left(G^D, K^D\right)$, вместо вектора ξ векторы $\xi^{(m)}, m = 1, 2, \ldots$

$$\xi^{(m)} = \prod_{i=1}^{m} \delta_x(A_i)\xi$$

мы сводим случай общей меры Тома к случаю меры Тома, сосредоточенной в точке x. Итак, мы можем считать, что

$$\operatorname{supp}\mu = \{x\}, \quad \mu(x) = 1$$

В этом случае значение функции $\tilde{\phi}^\mu$ на элементе $g \in G^E(n)$ есть

$$\tilde{\phi}^\mu(g) = x^{n-l(g)}$$

Рассмотрим неотрицательное выражение

$$\sum_{g \in G^E(n)} \tilde{\phi}^\mu(g) = \sum_{g \in G^E(n)} x^{n-l(g)}$$

в силу следствия Предложения 7 это есть

$$\begin{aligned} &= n!\,2^n x^n \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{1}{x}+4\right)\cdots\left(\frac{1}{x}+2n-2\right) \\ &= n!\,2^n 1(1+2x)(1+4x)\cdots(1+(2n-2)x) \end{aligned}$$

Так как $x < 0$ это произведение может быть неотрицательным для всех n только в том случае, если оно обрывается, т.е. для некоторого $k \in \mathbb{N}$

$$x = -\frac{1}{2k}$$

и тем самым

$$\nu(x) = 2k$$

•

Интересно сравнить этот результат с известным результатом из теории представлений конечных симметрических групп. А именно, неприводимое допустимое представление группы $G^E(n)$, соответствующее диаграмме Юнга $\lambda, |\lambda| = 2n$ содержит $K^E(n)$–инвариантный вектор тогда и только тогда, когда все числа λ есть разбиение на четные части [28, §1.8, пример 6].

§12. Классификация неприводимых допустимых представлений пар $\left(G^O, K^O\right)$, $\left(G^E, K^E\right)$

Пусть π есть неприводимое допустимое представление пары $\left(G^E, K^E\right)$ глубины d. Случай пары $\left(G^O, K^O\right)$ полностью аналогичен. Представление π задается распределением Юнга Λ, таким что $|\Lambda| = 2d$, и мерой Тома μ. В силу результатов предыдущего параграфа $\mu(x)/|x| \in 2\mathbb{Z}_+$ для всех $x < 0$.

Доказательство следующего предложения есть дословное повторение доказательства Предложения 3.

Предложение 8. $\operatorname{supp} \Lambda \subset \operatorname{supp} \mu \cup \{0\}$, $\operatorname{supp} M \subset \operatorname{supp} \mu \cup \{0\}$.

Описание неприводимых допустимых представлений пары $\left(G^E, K^E\right)$ дается следующей теоремой

Теорема 5. *Для существования неприводимого допустимого представления пары $\left(G^E, K^E\right)$ (или пары $\left(G^O, K^O\right)$) ц глубиной d, мерой Тома μ и распределением Юнга Λ, $|\Lambda| = 2d$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in [-1, 1]$*

$$\Lambda'(x)_1 + \Lambda'(x)_2 \leqslant \quad \mu(x)/|x|, \qquad x > 0, \tag{16}$$

$$\Lambda(x)_1 \leqslant 1/2\, \mu(x)/|x|, \qquad x < 0 \tag{17}$$

Доказательство. Достаточность следует из явной конструкции представлений, которую мы укажем в третьей главе.

Докажем необходимость. Пусть $x > 0$. Положим

$$l_1 = \Lambda'(x)_1, \quad l_2 = \Lambda'(x)_2 .$$

Разберем основной случай, когда $l_1, l_2 > 0$. Обозначим через $S(l_1) \times S(l_2)$ подгруппу в группе $G^E(d)$, переставляющую числа $\{d - l_1 + 1, \dots, d\}$ и $\{-d, \dots, -d + l_2 - 1\}$.

В силу правила ветвления для представлений конечных симметрических групп и определения Λ найдется вектор $\zeta \in R(\pi)$, антиинвариантный относительно группы $S(l_1) \times S(l_2)$ и такой, что

$$A_i \zeta = x\zeta, \quad i = d - l_1 + 1, \dots, d, -d, \dots, -d + l_2 - 1 .$$

Тогда вектор

$$\zeta^{(x)} = \delta_x(A_{d+1})\zeta$$

тоже $S(l_1) \times S(l_2)$-антиинвариантен.

Пусть Alt – оператор антисимметризации по группе $S(l_1+1) \times S(l_2+1)$, переставляющей числа $\{d - l_1 + 1, \dots, d, d+1\}$ и $\{-d - 1, -d, \dots, -d + l_2 - 1\}$. Матричный элемент

$$(\operatorname{sgn}(g)\, g\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)})$$

инвариантен при правых и левых сдвигах на элементы группы $S(l_1) \times S(l_2)$. Обозначим через s и t перестановки $(d, d+1), (-d, -d-1) \in G^E$. Повторяя рассуждения Леммы 4, имеем

$$\begin{aligned}
&(\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = \mu(x) \\
&(s\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = x \\
&(t\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = x \\
&(st\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) = 0 .
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Группа $S(l_1 + 1) \times S(l_2 + 1)$ состоит из четырех двойных классов по подгруппе $S(l_1) \times S(l_2)$; их представители суть 1, s, t, st, а мощности – $l_1!l_2!$, $l_1 l_1!l_2!$, $l_2 l_1!l_2!$, $l_1 l_2 l_1! l_2!$. Поэтому в силу (12.1)

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Alt}\zeta^{(x)}, \zeta^{(x)}) &= \frac{l_1!l_2!\mu(x) - l_1 l_1! l_2! x - l_2 l_1! l_2! x + l_1 l_2 l_1! l_2! 0}{(l_1+1)!(l_2+1)!} \\
&= \frac{|x|(\mu(x)/|x| - l_1 - l_2)}{(l_1+1)(l_2+1)}
\end{aligned}$$

Поскольку оператор Alt является проектором, результат неотрицателен и, следовательно,

$$l_1 + l_2 \leqslant \mu(x)/|x|\,.$$

Пусть $x < 0$. Положим

$$l = \Lambda(x)_1\,.$$

Обозначим через $S(l)$ подгруппу в группе $G^E(d)$, переставляющую числа $\{d-l+1,\dots,d\}$.

Опять найдется вектор $\zeta \in R(\pi)$, инвариантный относительно группы $S(l)$ и такой, что

$$A_i\zeta = x\zeta, \quad i = d-l+1,\dots,d\,.$$

Тогда вектор

$$\zeta^{(x)} = \delta_x(A_{d+1})\zeta$$

тоже $S(l)$-инвариантен. Перестановка $r = (d+1, -d-1)$ принадлежит группе K_d^E. По определению подпространства $R(\pi)$ вектор $\zeta \in R(\pi)$ будет инвариантен относительно перестановки r, и, таким образом, относительно группы $S(l) \times S(2)$ переставляющей числа $\{d-l+1,\dots,d\}$ и $\{d+1,-d-1\}$. Пусть Sym – оператор симметризации по группе $S(l+2)$, переставляющей числа $\{d-l+1,\dots,d,d+1,-d-1\}$. Обозначим через s и t перестановки $(d,d+1), (d-l+1,-d-1) \in G^E$. Опять

$$(\zeta^{(x)},\zeta^{(x)}) = \mu(x)$$
$$(s\zeta^{(x)},\zeta^{(x)}) = x$$
$$(st\zeta^{(x)},\zeta^{(x)}) = 0\,.$$

Группа $S(l+2)$ состоит из трех двойных классов по подгруппе $S(l) \times S(l_2)$; их представители суть 1, s, st, а мощности – $2l!$, $4l\,l!$, $l(l-1)l!$. Поэтому

$$(\mathrm{Sym}\,\zeta^{(x)},\zeta^{(x)}) = \frac{2l!\,\mu(x) + 4l\,l!\,x + l(l-1)l!\,0}{(l+2)!} = \frac{2|x|(\mu(x)/|x| - 2l)}{(l+1)(l+2)}.$$

Оператор Sym – это проектор, значит, результат неотрицателен и, следовательно,

$$l \leqslant 1/2\,\mu(x)/|x|\,. \quad \bullet$$

Замечание Случаи $x>0$ и $x<0$ для пар $\left(G^E, K^E\right)$ и $\left(G^O, K^O\right)$ не симметричны. Это связано с тем, что функция sgn на группе $S(\infty)$ не продолжается до K^E–инвариантной положительно определенной функции на группе G^E.

Глава 3. Смешивание представлений

§13. Смешивание представлений для случая G^O и G^E

Пусть π_1 и π_2 два допустимых представления пары $\left(G^E, K^E\right)$. Пусть p_1 и p_2 – два числа, таких что $p_1>0, p_2>0, p_1+p_2=1$. Мы определим *смесь* представлений π_1 и π_2 в пропорциях p_1 и p_2. Аналогично может быть определена смесь допустимого представления пары $\left(G^E, K^E\right)$ и допустимого представления пары $\left(G^O, K^O\right)$ или смесь двух допустимых представлений пары $\left(G^O, K^O\right)$. Положим $d_i=d(\pi_i), i=1,2$.

Рассмотрим в множестве всех функций $f:\mathbb{Z}\setminus\{0\}\to\{1,2\}$ подмножество X

$$X=\{f|f(i)=f(-i) \text{ для почти всех } i\} ,$$

где для почти всех означает для всех, кроме конечного числа. Множество X есть объединение возрастающей цепочки подмножеств

$$X_0\subset X_1\subset X_2\subset\dots$$

где

$$X_n=\{f\in X|f(i)=f(-i), |i|>n\} .$$

Снабдим каждое множество X_n топологией, в которой базу открытых множеств составляют множества

$$\{f|f(i)=f_i\} , \quad i\in\mathbb{Z}, f_i\in\{1,2\} .$$

Все множество X снабдим топологией индуктивного предела. Рассмотрим на X меру ω_{p_1,p_2}

$$\omega_{p_1,p_2}\left(\{f|f(i)=f_i, |i|\le n, f(i)=f(-i), i>n\}\right)=\prod_{|i|<n} p_{f_i}^{1/2} .$$

На каждом множестве X_n мера ω_{p_1,p_2} конечна. Группа G^E действует на X. Это действие сохраняет меру ω_{p_1,p_2}.

Из определения пространства X вытекает, что для любой функции $f \in X$ число $|f^{-1}(1) \cap \{-N, \dots, N\}|$ либо четно для всех N, кроме конечного числа, либо нечетно для всех N, кроме конечного числа. Рассмотрим подмножество $Y \subset X$

$$Y = \{f, |f^{-1}(1) \cap \{-N, \dots, N\}| \text{ четно для почти всех } N\ , \\ |f^{-1}(i)| = \infty, i = 1, 2\}\ .$$

Это подмножество измеримо и $\omega_{p_1,p_2}(Y) > 0$, т.к. условие $|f^{-1}(i)| = \infty, i = 1, 2$ означает удаление счетного множества меры нуль. Очевидно также, что это подмножество G^E–инвариантно. Положим $Y_n = Y \cap X_n$.

Для любой $f \in Y$ существуют единственные биекции $\eta_i : f^{-1}(i) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ такие что $\eta_i(-a) = -\eta_i(a)$ для почти всех a и $a < b$ тогда и только тогда, когда $\eta_i(a) < \eta_i(b)$. Определим коцикл

$$c : G^E \times Y \to G^E \times G^E$$

на образующих $(i, i+1)$ группы G^E по следующей формуле

$$s((i, i+1), f) = \begin{cases} (e, e), & f(i) \neq f(i+1) \\ ((\eta_1(i), \eta_1(i+1)), e), & f(i) = f(i+1) = 1 \\ (e, (\eta_2(i), \eta_2(i+1))), & f(i) = f(i+1) = 2\,. \end{cases}$$

Обозначим через H гильбертово пространство отображений

$$F : Y \to H(\pi_1) \otimes H(\pi_2)$$

с скалярным произведением

$$(F_1, F_2)_H = \int\limits_Y (F_1(f), F_2(f))_{H(\pi_1)\otimes H(\pi_2)}\ \omega_{p_1,p_2}(df)\,.$$

Зададим представление группы G^E в пространстве H по формуле

$$[g \cdot F](f) = \pi_1 \otimes \pi_2 \left(c(g, g^{-1} \cdot f)\right) F(g^{-1} \cdot f)\,.$$

Это представление унитарно.

Наша ближайшая цель сейчас – вычислить подпространства инвариантов H_n. Пусть даны два числа $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Положим $K = 2a + 2b$. Определим

$$Y_{a,b} = \{f \in Y\ , |f^{-1}(1) \cap \{-K, \dots, K\}| = 2a \\ |f^{-1}(2) \cap \{-K, \dots, K\}| = 2b \\ f(i) = f(-i), |i| > K\}\ .$$

Пусть D пробегает все подмножества мощности $2a$ множества $\{-K, \dots, K\} \setminus 0$. Положим

$$Y_{a,b,D} = \left\{ f \in Y_{a,b} | f^{-1}(1) \cap \{-K, \dots, K\} = D\,. \right\}$$

Обозначим через $\operatorname{supp} F$ дополнение к наибольшему открытому множеству, на котором F равно нулю почти всюду. Обозначим через $H(Y_{a,b})$ пространство отображений F таких, что $\operatorname{supp} F \subset Y_{a,b}$. Обозначим через $H_{a,b} \subset H(Y_{a,b})$ подпространство отображений с носителем в $Y_{a,b}$, постоянных на всех $Y_{a,b,D}$ и принимающих значения в $H\left(\pi_1\right)_a \otimes H\left(\pi_2\right)_b$.

Предложение 9.

$$H_n = \bigoplus_{a+b=n} H_{a,b}\,.$$

Доказательство. Включение $\bigoplus_{a+b=n} H_{a,b} \subset H_n$ очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $F \in H_n$. Пусть числа r и s таковы, что $s \geq r > n$. Положим

$$W_{r,s} = \{ f \in Y | f(r) \neq f(-r), f(i) = f(-i), |i| > s \}\ .$$

Множества $W_{r,s}$ открыты. Пусть l_1, l_2 – два целых числа, таких что $l_1, l_2 > s$. Рассмотрим действие перестановок $(r, l_i)(-r, -l_i) \in K_n^E$ на множества $W_{r,s}$. Имеем

$$(r, l_1)(-r, -l_1) \cdot W_{r,s} \cap (r, l_2)(-r, -l_2) \cdot W_{r,s} = \emptyset$$

$$\omega_{p_1,p_2}\left((r, l_1)(-r, -l_1) \cdot W_{r,s}\right) = \omega_{p_1,p_2}\left((r, l_2)(-r, -l_2) \cdot W_{r,s}\right)\ .$$

Поэтому F, как квадратично суммируемое отображение, должно обращаться в нуль почти всюду на любом множестве $W_{r,s}$. Это означает, что

$$\operatorname{supp} F \subset Y \setminus \bigcup_{n<r\leq s} W_{r,s} = \bigcup_{a+b=n} Y_{a,b}\,.$$

Иными словами $F \in \bigoplus_{a+b=n} H(Y_{a,b})$

Все пространства $H(Y_{a,b})$ инвариантны относительно K_n^E. Подпространства инвариантов всегда согласованы с разложением в прямую сумму, поэтому

$$F \in \bigoplus_{a+b=n} \left(H(Y_{a,b})\right)_n\,.$$

Пусть $F \in (H(Y_{a,b}))_n$ для некоторых a, b . Для любого $g \in K_n^E$ равенство $[g \cdot F](f) = F(f)$ выполняется для почти всех f по мере ω_{p_1,p_2}. Так как группа K_n^E счетна то для почти всех f равенство $[g \cdot F](f) = F(f)$ выполняется для всех $g \in K_n^E$.

Рассмотрим стабилизатор $Stab(f) \subset K_n^E$ точки $f \in Y_{a,b}$. Образ группы $Stab(f)$ при отображении $g \mapsto c(g, f)$ есть подгруппа $K_a^E \times K_b^E \subset K^E \times K^E$. Поэтому для почти всех $f \in Y_{a,b}$ имеем $F(f) \in H(\pi_1)_a \otimes H(\pi_2)_b$.

Для любого $\zeta \in H(\pi_1)_a \otimes H(\pi_2)_b$ множество $F^{-1}(\zeta)$ есть измеримое, K_n^E–инвариантное mod 0 подмножество. Рассмотрим любое множество $Y_{a,b,D}$. Действие группы K_n^E на множестве $Y_{a,b,D}$, очевидно, изоморфно действию симметрической группы перестановками сомножителей на $\{1, 2\}^\infty$ ц бернуллиевской мерой. Эргодичность этого последнего действия хорошо известна. Поэтому множество $F^{-1}(\zeta)$ с точностью до множества меры нуль есть объединение множеств $Y_{a,b,D}$.

Таким образом $(H(Y_{a,b}))_n = H_{a,b}$ •

Следствие. *Представление группы G^E в пространстве H допустимо. Его глубина есть $d_1 + d_2$, причем*

$$H_{d_1+d_2} = H_{d_1,d_2} ,$$

$$\dim H_{d_1+d_2} = \binom{d_1+d_2}{d_1} \dim H(\pi_1)_{d_1} \dim H(\pi_2)_{d_2} .$$

Пусть π – представление группы G^E в циклической оболочке H_{d_1,d_2}. Мы будем называть представление π *смесью* представлений π_1 и π_2 в пропорциях p_1 и p_2. В силу доказанного предложения корень этого представления есть $R(\pi) = H_{d_1,d_2}$. Положим $d = d_1 + d_2$.

Предположим, что представления π_1 и π_2 неприводимы и $\mu_i, i = 1, 2$ суть их меры Тома.

Предложение 10. *Представление пары $\left(G_d^E, K_d^E\right)$ в циклической оболочке $R(\pi)$ кратно сферическому представлению с мерой Тома*

$$\mu(x) = p_1\mu_1(x/p_1) + p_2\mu_2(x/p_2) .$$

Доказательство. Мы дожны показать, что

$$\pi(\prod_i C_i) = \prod_i \pi(C_i)$$

и

$$\pi(C_k) = p_1^k \pi_1(C_k) + p_2^k \pi_2(C_k)\,.$$

Докажем второе равенство. Доказательство первого проводится аналогично. Обозначим через $z_k \in G_d^E$ перестановку

$$z_k = (d+1, \ldots, d+k)\,.$$

Выберем вектор $\xi \in H(\pi_1)_{d_1} \otimes H(\pi_2)_{d_2}, \|\xi\| = 1$. Рассмотрим отображение $F \in R(\pi)$

$$F(f) = \begin{cases} \left(\omega_{p_1,p_2}\left(Y_{d_1,d_2}\right)\right)^{-1} \xi, & f \in Y_{d_1,d_2} \\ 0, & \text{иначе} \;. \end{cases}$$

Очевидно, что $\|F\| = 1$. Рассмотрим в Y_{d_1,d_2} два подмножества

$$^{(1)}Y_{d_1,d_2} = \{f \in Y_{d_1,d_2} | f(i) = 1, |i| = d+1, \ldots, d+k,\}\;,$$

$$^{(2)}Y_{d_1,d_2} = \{f \in Y_{d_1,d_2} | f(i) = 2, |i| = d+1, \ldots, d+k,\}\;.$$

Очевидно, что включения $f \in Y_{d_1,d_2}, z_k \cdot f \in Y_{d_1,d_2}$ возможны только если $f \in {}^{(1)}Y_{d_1,d_2}$ или $f \in {}^{(2)}Y_{d_1,d_2}$. Поэтому

$$\pi(C_k) = (\pi(z_k)F, F)_H$$
$$= \frac{1}{\omega_{p_1,p_2}\left(Y_{d_1,d_2}\right)} \left[\pi_1(C_k)\,\omega_{p_1,p_2}\left({}^{(1)}Y_{d_1,d_2}\right) + \pi_2(C_k)\,\omega_{p_1,p_2}\left({}^{(2)}Y_{d_1,d_2}\right)\right]$$
$$= \pi_1(C_k)p_1^k + \pi_2(C_k)p_2^k\,.$$

•

Рассмотрим теперь действие операторов $A_i, |i| = 1, \ldots, d$ в пространстве $R(\pi)$. Пусть $m_i = \dim R(\pi_i), i = 1, 2$. Пусть $\{\zeta_1^{(i)}, \ldots, \zeta_{m_i}^{(i)}\} \in R(\pi_i)$ суть собственные базисы операторов $A_k, |k| = 1, \ldots, d$. Пусть D пробегает подмножества мощности $2d_1$ множества $\{-d, \ldots, d\} \setminus 0$. Тогда отображения $F_{i,j,D}$, $i = 1, \ldots, m_1$, $j = 1, \ldots, m_2$

$$F_{i,j,D}(f) = \begin{cases} \zeta_i^{(1)} \otimes \zeta_j^{(2)}, & f \in Y_{d_1,d_2,D} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

образуют базис пространства $R(\pi)$. Этот базис собственный для операторов A_k. В самом деле, пусть P – ортогональный проектор в пространстве H на подпространство $R(\pi)$. Тогда для любого

$F \in R(\pi)$ и для любого $k, |k| = 1, \ldots, n$ в силу (1.5) выполняется равенство

$$\pi(A_k) \cdot F = P\pi\left((k, d+1)\right) \cdot F .$$

Поэтому

$$\pi(A_k) \cdot F_{i,j,D}(f) = \begin{cases} p_1\pi_1(A_{\eta_1(k)})\zeta_i^{(1)} \otimes \zeta^{(2)}, & f \in Y_{d_1,d_2,D}, k \in D \\ p_2\zeta_i^{(1)} \otimes \pi_2(A_{\eta_2(k)})\zeta^{(2)}, & f \in Y_{d_1,d_2,D}, k \notin D \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Пусть Λ_1 и Λ_2 обозначают распределения Юнга представлений π_1 и π_2. Пусть $T_{\Lambda_i}, i = 1, 2$ обозначают соответствующие представления полугрупп

$$S(d_i) \ltimes \mathbb{Z}_+^{d_i}$$

в пространствах $R(\pi_i)$. Обозначим через $\Lambda(\cdot/p_1)$ распределение Юнга, которое в точке x равно $\Lambda(x/p_1)$. Тогда полученные формулы для действия операторов A_i означают, что представление полугруппы $S(d) \ltimes \mathbb{Z}_+^d$ в пространстве $R(\pi)$ есть

$$\mathrm{Ind}_{\left(S(d_1)\ltimes\mathbb{Z}_+^{d_1}\right)\times\left(S(d_2)\ltimes\mathbb{Z}_+^{d_2}\right)}^{S(d)\ltimes\mathbb{Z}_+^d} T_{\Lambda_1(\cdot/p_1)} \otimes T_{\Lambda_2(\cdot/p_2)} .$$

Это представление (а вместе с ним и представление π) неприводимо тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp}\Lambda_1(\cdot/p_1) \cap \operatorname{supp}\Lambda_2(\cdot/p_2) = \emptyset$. В этом случае представление π имеет распределение Юнга Λ равное $\Lambda(x) = \Lambda_1(x/p_1) \cup \Lambda_2(x/p_2)$.

Оформим результат нашего исследования представления π в виде теоремы

Теорема 6. *Пусть π_1 и π_2 – два неприводимых допустимых представления с мерами Тома $\mu_i, i = 1, 2$ и распределениями Юнга $\Lambda_i, i = 1, 2$. Пусть представление π есть смесь представлений π_1 и π_2 в пропорциях p_1 и p_2, где $p_1 > 0, p_2 > 0, p_1 + p_2 = 1$.*

Представление π допустимо. Оно есть сумма неприводимых допустимых представлений с мерой Тома

$$\mu(x) = p_1\mu_1(x/p_1) + p_2\mu_2(x/p_2) .$$

Оно неприводимо тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{supp}\Lambda_1(\cdot/p_1) \cap \operatorname{supp}\Lambda_2(\cdot/p_2) = \emptyset .$$

В этом случае оно задается распределением Юнга Λ

$$\Lambda(x)=\Lambda_1(x/p_1)\cup\Lambda_2(x/p_2)\ .$$

Аналогично смеси двух представлений может быть определена смесь любого конечного числа представлений. Более того, можно определить смесь конечного числа произвольных допустимых представлений и счетного числа сферических представлений $\pi_i, i=1,\ldots$ пары $\left(G^E,K^E\right)$. В этом случае под $\bigotimes_1^\infty H(\pi_i)$ следует понимать прямой предел гильбертовых пространств

$$\lim\operatorname{ind}\ \bigotimes_1^N H(\pi_i)$$

по отношению к вложениям

$$\bigotimes_1^N H(\pi_i)\to\bigotimes_1^N H(\pi_i)\otimes\xi_{N+1}\ ,$$

где $\xi_i\in H(\pi_i)$ суть сферические вектора представлений π_i. Теорема 6 в этом случае обобщается следующим образом

Теорема 7. *Пусть* $\pi_i, i=1,2,\ldots$ *– неприводимые допустимые представления с мерами Тома* $\mu_i, i=1,2,\ldots$ *и распределениями Юнга* $\Lambda_i, i=1,2,\ldots$ *такими, что сумма*

$$\sum_i|\Lambda_i|<\infty$$

конечна. Пусть представление π *есть смесь представлений* $\pi_i, i=1,2,\ldots$ *в пропорциях* $p_i, i=1,2,\ldots,$ *где* $p_i>0, \sum_i p_i=1$.

Представление π *допустимо. Оно есть сумма неприводимых допустимых представлений с мерой Тома*

$$\mu(x)=\sum_i p_i\mu_1(x/p_i)\,.$$

Оно неприводимо тогда и только тогда, когда для любых i *и* j

$$\operatorname{supp}\Lambda_i(\cdot/p_i)\cap\operatorname{supp}\Lambda_j(\cdot/p_j)=\emptyset\,.$$

В этом случае оно задается распределением Юнга Λ

$$\Lambda(x)=\bigcup_i\Lambda_i(x/p_i)\,.$$

§14. Смешивание и индуцирование

В этом параграфе мы покажем, что операция смешивания представлений тесно связана с операцией индуцирования представлений.

В группе всех (необязательно финитных) биекций $g : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ рассмотрим подгруппы

$$\overline{K}_n^E = \{g | g(i) = -g(-i), g(i) = i, i > n\}, n = 0, 1, \dots .$$

Как обычно будем считать $\overline{K}^E = \overline{K}_0^E$. Положим

$$\overline{G}^E = G^E \cdot \overline{K}^E .$$

Введем в группе $\overline{G}^E$ топологию, в которой фундаментальную систему окрестностей единицы образуют подгруппы $\overline{K}_n^E, n = 0, 1, \dots$. В этой топологии группа G^E является плотной подгруппой группы $\overline{G}^E$. Представления группы G^E, допускающие непрерывное продолжение на группу $\overline{G}^E$, суть в точности допустимые представления пары $\left(G^E, K^E\right)$ [32].

Смесь представлений есть индуцированное представление в следующем смысле. Пространство Y является однородным пространством группы $\overline{G}^E$. Стабилизатор точки при этом изоморфен группе $\overline{G}^E \times \overline{G}^E$. Коцикл $c(\cdot, \cdot)$ есть в точности стандартный коцикл на однородном пространстве. При этом справедливо следующее

Предложение 11. *Меры ω_{p_1,p_2} суть с точностью до множителя все меры на Y которые*

(1) *инвариантны при действии группы G^E*
(2) *конечны на всех множествах $Y_n, n = 0, 1, \dots$*
(3) *неразложимы в классе мер удовлетворяющих условиям (1)–(2)*

Доказательство. Рассмотрим множество Y_k. Для любой функции $f \in Y_k$ существует элемент $g \in G^E(k)$ такой, что $g \cdot f \in Y_0$. Иными словами $Y_k \subset \bigcup_{g \in G^E(k)} g \cdot Y_0$. Это означает, что G^E–инвариантная мера на Y определяется своими значениями на Y_0.

Пусть ν – некоторая мера, удовлетворяющая условиям (1)–(3). Если $\nu(Y_0) = 0$, то и $\nu(Y) = 0$. Поэтому можем считать, что $\nu(Y_0) = 1$. Множество Y_0 вложено в $X_0 \cong \{1,2\}^\infty$. Группа K^E действует на X_0 как группа перестановок сомножителей. Из теоремы де Финетти [53, стр. 256] следует, что мера ν на X_0 имеет вид ω_{p_1,p_2} для некоторых $p_1, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$. При этом $\nu(Y_0) \neq 0$ в случае $p_1 > 0, p_2 > 0$. $\bullet$

Обозначим через $\overline{Y}$ замыкание подмножества Y в пространстве X

$$\overline{Y} = \left\{f, |f^{-1}(1) \cap \{-N, \ldots, N\}| \text{ четно для почти всех } N\right\} .$$

Множество $\overline{Y}$ совпадает с орбитой множества X_0 под действием группы G^E. Множество $\overline{Y} \setminus Y$ состоит из счетного числа G^E–орбит $Z_{2k}^{(i)}, i = 1, 2,\ k = 0, 1, \ldots$

$$Z_r^{(i)} = \left\{f \in X, |f^{-1}(i)| = r\right\} .$$

Мы можем ограничиться рассмотрением только множеств $Z_{2k}^{(1)}$. Множество $Z_{2k}^{(1)}$ есть одна орбита счетной группы G^E. На нем есть единственная с точностью до множителя G^E-инвариантная мера ν_{2k}. Эта мера есть просто мощность множества. Стабилизатор точки множества изоморфен группе $G^E(k) \times G_k^E$. Очевидно, $G_k^E \cong G^E$.

Пусть ρ – неприводимое представление группы $G^E(d_1)$ и π_2 – неприводимое допустимое представление группы $G_{d_2}^E \cong G^E$. Пусть μ_2, Λ_2 суть мера Тома и распределение Юнга отвечающие представлению π_2. Представление π

$$\pi = \operatorname{Ind}_{G^E(d_1) \times G_{d_2}^E}^{G^E} \rho \otimes \pi_2$$

реализуется в пространстве отображений $F : X \to H(\rho) \otimes H(\pi_2)$, квадратично суммируемых по мере ν_{2d_1}.

Предположим, что $\Lambda_2(0) = \emptyset$. Тогда аналогично тому, как это проверялось для смеси представлений, устанавливается, что представление π допустимо и неприводимо. Его мера Тома есть

$$\mu = \mu_2 ,$$

а распределение Юнга

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \Lambda_2(x), & x \neq 0 \\ \rho, & x = 0 . \end{cases}$$

Это обычное индуцирование представлений может рассматриваться как предельный случай смешивания. Напомним, как вводится топология в пространстве унитарных представлений дискретной группы G [23]. Пусть T_0 – некоторое унитарное представление. Пусть задано конечное подмножество $M \in G$ и набор векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k \in H(T_0)$. Обозначим через $U(T_0, M, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ множество тех унитарных представлений T группы G, в пространстве которых существуют такие векторы $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, что

$$|(T(g)\zeta_i, \zeta_j) - (T_0(g)\xi_i, \xi_j)| < 1, g \in M, i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Множества $U(T_0, M, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ образуют базу окрестностей представления T_0. Если представление T_0 неприводимо, то для проверки сходимости $T_n \to T_0$ достаточно проверить апроксимацию любого матричного элемента $(T_0(\cdot)\xi, \xi), \xi \in H(T_0)$ матричными элементами представлений T_n.

Пусть π_1 есть произвольное неприводимое допустимое представление группы G^E с распределением Юнга Λ_1 таким, что $\operatorname{supp} L_1$ есть одноточечное множество $\{y\}, y \in [-1, 1]$ и $\Lambda_1(y) = \rho$. Обозначим через $\pi(p_1, p_2)$ смесь представлений π_1 и π_2 в пропорциях p_1 и p_2.

Предложение 12.

$$\pi(p_1, p_2) \to \pi \text{ } \textit{при} \text{ } p_1 \to 0\,.$$

Доказательство. Из Теоремы 6 вытекает, что при $p_1 \to 0$ представления полугруппы $\Gamma(d)$ в пространствах $R(\pi(p_1, p_2))$ сходятся к представлению этой полугруппы в $R(\pi)$. Тем самым матричные коэффициенты представлений $\pi(p_1, p_2)$ отвечающие векторам из подпространств $R(\pi(p_1, p_2))$ сходятся к матричным коэффициентам представления π. Так как представление π неприводимо, отсюда следует наше предложение. •

Инвариантные неразложимые меры на X, сосредоточенные на множестве $X \setminus \overline{Y}$, имеют следующий смысл. Ограничение меры ω_{p_1,p_2} на $X \setminus \overline{Y}$ отвечает представлениям группы G^E, которые есть смесь двух представлений группы G^O в пропорциях p_1, p_2. Меры ν_{2k+1} отвечают представлениям группы G^E, которые индуцированы с подгруппы, изоморфной $G^O(k) \times G^O$.

§15. Элементарные представления. Реализация представлений

Пусть π – неприводимое допустимое представление группы G с мерой Тома μ и распределением Юнга Λ. Назовем представление *элементарным*, если $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\Lambda = \{y\}$ для некоторой точки $y \in [-1,1]$. Мы кратко опишем реализацию элементарных представлений групп G^E и G^O, полученную в [32]. Следует различать три случая: $y=0$, $y>0$ и $y<0$.

Пусть $y=0$. Пусть $|\Lambda(0)| = 2d$ в случае G^E или $|\Lambda(0)| = 2d+1$ в случае G^O. Тогда соответствующее элементарное представление есть

$$\operatorname{Ind}_{G(d)\times G_d}^{G} \Lambda(0) \otimes 1\,.$$

Пусть $y>0$. В силу Теоремы 4 в этом случае обязательно $y = 1/n, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n$ базис $\{e_1,\dots,e_n\}$ ортонормированный относительно некоторого скалярного произведения. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^n$ вектор

$$\xi = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$$

и рассмотрим прямой предел гильбертовых пространств

$$H = \lim\operatorname{ind} \bigotimes_{1}^{2N} \mathbf{C}^n$$

относительно вложений

$$\bigotimes_{1}^{2N} \mathbf{C}^n \to \bigotimes_{1}^{2N} \mathbf{C}^n \otimes \xi\,.$$

С помощью биекции $\mathbb{Z}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$

$$i \mapsto \begin{cases} 2i-1, & i>0 \\ -2i, & i<0 \end{cases}$$

мы можем определить дейтвие группы G^E в пространстве H. (В случае G^O следует рассматривать $\lim\operatorname{ind} \bigotimes_0^{2N} \mathbf{C}^n$.)

Группа ортогональных матриц $O(n)$ сохпаняет вектор ξ, поэтому ее действие на пространстве H корректно определено. Как объясняется в [54] представления группы $O(n)$ нумеруются диаграммами Юнга λ такими, что

$$(\lambda)'_1 + (\lambda)'_2 \leq n\,.$$

Имеет место следующая

Теорема (Ольшанский,[32]).

(1) *Представление группы G в пространстве H допустимо.*
(2) *Представления групп G и $O(n)$ порождают коммутант друг друга*
(3) *Пространство H как $G \times O(n)$–модуль разлагается в прямую сумму*

$$H = \bigoplus_{\lambda,(\lambda)'_1+(\lambda)'_2 \leq n} \pi_{1/n,\lambda} \otimes T_\lambda\,,$$

где T_λ – представление группы $O(n)$, соответствующее диаграмме λ, а $\pi_{1/n,\lambda}$ – неприводимое допустимое представление группы G такое, что $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\Lambda = \{1/n\}, \Lambda(1/n) = \lambda$.

В случае $y < 0$ в работе [32] имеется небольшая неточность, указанная Г. И. Ольшанским. Правильный способ построения представлений следующий. В силу Теоремы 4 в случае $y < 0$ обязательно $y = -1/2n, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^{2n}$ ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^{2n} \otimes \mathbf{C}^{2n}$ вектор

$$\xi = (2n)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_{i+n} - e_{n+i} \otimes e_i)$$

и рассмотрим прямой предел гильбертовых пространств

$$H = \lim \operatorname{ind} \bigotimes_1^{2N} \mathbf{C}^{2n}$$

относительно вложений

$$\bigotimes_1^{2N} \mathbf{C}^{2n} \to \bigotimes_1^{2N} \mathbf{C}^{2n} \otimes \xi\,.$$

Определим представление группы G в пространстве H как тензорное произведение представления перестановками тензорных сомножителей и одномерного представления sgn.

Группа симплектических матриц $Sp(n)$ сохпаняет вектор ξ, поэтому ее действие на пространстве H корректно определено. Как опять объясняется в [54] представления группы $Sp(n)$ нумеруются диаграммами Юнга λ такими, что

$$\lambda_1 \leq n \, .$$

Имеет место следующая

Теорема (Ольшанский).

(1) *Представление группы G в пространстве H допустимо.*
(2) *Представления групп G и $Sp(n)$ порождают коммутант друг друга*
(3) *Пространство H как $G \times Sp(n)$–модуль разлагается в прямую сумму*

$$H = \bigoplus_{\lambda, \lambda_1 \leq n} \pi_{-1/2n,\lambda} \otimes T_\lambda \, ,$$

где T_λ – представление группы $Sp(n)$, соответствующее диаграмме λ, а $\pi_{-1/2n,\lambda}$ – неприводимое допустимое представление группы G такое, что $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\Lambda = \{-1/2n\}$, $\Lambda(1/2n) = \lambda$.

Как следует из Теоремы 7 любое неприводимое допустимое представление есть смесь элементарных представлений. Поэтому вместе с конструкцией элементарных представлений мы получаем возможность построить любое неприводимое допустимое представление. Чтобы узнать, из каких элементарных смешано некоторое неприводимое допустимое представление, мы должны действовать спектральными проекторами от операторов A_i, как мы это делали в главе 2 (смотри замечание после доказательства Теоремы 3).

§16. Смешивание в случае G^D

Определение смешивания представлений легко переносится на случай пары $\left(G^D, K^D\right)$. При этом естественно включить в рассмотрение также представления ‘несбалансированных’ групп вида

$$G^D_{m_1,m_2} = \left\{ g \in G^D | g(i) = i, -m_2 \leq i \leq m_1 \right\} \, ,$$

где m_1, m_2 – некоторые целые числа. Так как включение $K_n^D \subset G_{m_1,m_2}^D$ выполнено при фиксированных m_1, m_2 для всех n, кроме конечного числа, то определение допустимого представления годится также для групп G_{m_1,m_2}^D. Вся теория допустимых представлений дословно переносится на этот 'несбалансированный' случай. В частности, такие представления параметризуются мерой Тома и парой распределений Юнга Λ, M, для которых уже возможно $|\Lambda| \neq |M|$.

Конструкция элементарных представлений может быть взята из [32].

Заметим, что на языке H–рядов из §8 смешивание сферических представлений означает произведение H–рядов. Таким образомс мы получаем представленческую интерпретацию факторизации, полученной в §8.

Литература

1. M. Aissen, I. J. Schoenberg, A. M. Whitney, *On the generating function of totally positive sequences I..* — J. Analyse Math. **2** (1952), 93–103.
2. M. Aissen, A. Edrei, I. J. Schoenberg, A. M. Whitney, *On the generating function of totally positive sequences.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 303.
3. R. Boyer, *Infinite traces of AF-algebras and characters of* $U(\infty)$. — J. Operator Theory **9** (1983), 205–236.
4. R. Brauer, *On algebras which are connected with semisimple continuous groups.* — Annals of Math. **38** (1937), 857–872.
5. А. М. Вершик, *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп.* — ДАН СССР **218, No. 5** (1974), 749–752.
6. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы.* — ДАН СССР **257, No. 5** (1981), 1037–1040.
7. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **15**, вып. 4 (1981), 15–27.
8. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы.* — ДАН СССР **267, No. 2** (1982), 272–276.
9. A. M. Vershik, S. V. Kerov, *Characters, factor representations and K-functor of the infinite symmetric group. Operator Algebras and Group Representations.* vol. 2, Pitman, 1984, pp. 272–276.
10. A. M. Vershik, S. V. Kerov, *The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with elements of the theory of* K_0*-functor of AF-algebras), in: Representation of Lie groups and related topics.* — Adv. Stud. Contemp. Math. **7** (1990), 39–118, London, Gordon and Breach.
11. A. M. Vershik, S. V. Kerov, *The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algorithm.* — SIAM J. Alg. Discr. Math. **7**, No. 1 (1986), 116–127.

12. A. M. Vershik, G. I. Olshanski, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices.* — Preprint UTMS 94–61.
13. D. Voiculescu, *Représentations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$.* — J. Math. pures et appl. **55** (1976), 1–20.
14. D. Voiculescu, *On extremal invariant functions of positive type on certain groups.* — INCREST Preprint Series Math. (1978).
15. D. Voiculescu, *Sur les représentations factorielles finies de $U(\infty)$ et autres groupes semblables.* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **279** (1974), A945–A946.
16. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* М.–Л., 1950.
17. A. Edrei, *On the generating function of totally positive sequences II.* — J. Analyse Math. **2** (1952), 104–109.
18. A. Edrei, *On the generating function of a double infinite, totally positive sequence.* — Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1953), 367–383.
19. Р. С. Исмагилов, *О линейных представления группы матриц с элементами из нормированного поля.* — Известия АН СССР Сер. Мат. **33, No. 6** (1969), 1296–1323.
20. Р. С. Исмагилов, *Сферические функции над нормированным полем, поле вычетов которого бесконечно.* — Функцион. анализ и его приложения **4, No. 1** (1970), 42–51.
21. S. Karlin, *Total positivity and applications.* Stanford University Press, 1968.
22. С. В. Керов, *Реализация представлений полугруппы Брауэра.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **164** (1987), 189–193.
23. А. А. Кириллов, *Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **22** (Итоги науки и техники. ВИНИТИ) (1987), 5–162.
24. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений.* М, Наука.
25. А. А. Кириллов, *Положительно определенные функции на группе матриц с элементами издискретного поля.* — Докл. Акад. Наук СССР **162, No. 3** (1965).
26. А. А. Кириллов, *Представления бесконечномерной унитарной группы.* — Докл. Акад. Наук СССР **212, No. 2** (1973), 288–290.
27. A. Liberman, *The structure of certain unitary representations of infinite symmetric group.* — Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 189–198.
28. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* М, Мир, 1985.
29. M. L. Nazarov, Yu. A. Neretin, G. I. Olshanski, *Semigroupes engendrés par la représentation de Weil du groupe symplectique infinie.* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I **309, No. 7** (1989), 443–446.
30. М. А. Наймарк, *Нормированные кольца.* М, Наука, 1968.
31. Н. И. Нессонов, *Полная классификация представлений $GL(\infty)$, содержащих единичное представление унитарной подгруппы.* — Мат. сборник **130, No. 1** (1986), 131–150.
32. Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления (G,K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$.* — Алгебра и анализ **1, вып. 4** (1989), 178–209.

33. G. I. Olshanskii, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe.* — Adv. Stud. Contemp. Math. 7 (1990), 269–463, In: Representation of Lie groups and related topics. London, Gordon and Breach.
34. G. I. Olshanskii, *On semigroups related to infinite-dimensional groups.* — Advances in Soviet Math. **2** (1991), 67–101.
35. Г.И.Ольшанский, *Унитарные представления бесконечномерных (Г,К)-пар и формализм Р. Хау.* — Докл. Акад. Наук СССР **269, No. 1** (1983), 33–36.
36. Г. И. Ольшанский, *Бесконечномерные классические группы конечного Р-ранга: описание представлений и асимптотическая теория.* — Функцион. анализ и его приложения **18, No. 1** (1984), 28–42.
37. Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления группы $SO_0(\infty, \infty)$ как пределы унитарных представлений групп $SO_0(n, \infty)$ при $n \to \infty$.* — Функцион. анализ и его приложения **20, No. 4** (1986), 46–57.
38. Г. И. Ольшанский, *Метод голоморфных расширений в теории унитарных представлений бесконечномерных классических групп.* — Функцион. анализ и его приложения **22, No. 4** (1988), 23–37.
39. G. I. Olshanskii, *Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach.* in: Representations of Lie groups and Lie algebras, Budapest. Academiai Kiado, 1985, pp. 181–197.
40. Г. И. Ольшанский, *Новые большие группы типа И..* — Современные проблемы математики **16** (1988), 31–52, М, ВИНИТИ.
41. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* М, Мир, 1978.
42. I. Schoenberg, *Selected Papers.* vol. 1–2, Boston, Basel, Birkhäuser, 1988.
43. I. Schoenberg, *Über die variationvermindernde lineare Transformationen.* — Math. Zeitschr. **32** (1930), 321–328.
44. С. В. Смирнов, *Положительно определенные функции на алгебраических нильпотентных группах над дискретным полем.* — Докл. Акад. Наук СССР **170, No. 3** (1966), 524–525.
45. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика.* М, Мир, 1990.
46. J. R. Stembridge, *On Schur's Q-functions and the primitive idempotents of a commutative Hecke algebra.* — J. Alg. Comb. **1** (1992), 71–96.
47. S. Stratila, D. Voiculescu, *Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$.* — Lect. Notes in Math. **186** (1975), Springer.
48. S. Stratila, D. Voiculescu, *A survey on representations of the unitary group $U(\infty)$.* — Spectral Theory Banach Center Publications **8** (1982), 415–434.
49. E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe.* — Math. Zeitschr. **85, No. 1** (1964), 40–61.
50. E. Thoma, *Über unitäre Darstellungen abzählbarer diskreter Gruppen.* — Math. Annalen **153** (1964), 111–138.
51. Е. Тхома, *Еине Цхарацтерисиерунг дискретер Группен вон Тып И..* — Инвент. Матх. **6** (1968), 190–196.
52. E. Thoma, *Characters of infinite groups. Operator Algebras and Group Representations.* vol. 2 Pitman, 1984, pp. 23–32.
53. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* т. 2, М, Мир, 1947.
54. Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления.* М.

55. А. Ю. Окуньков, *Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **28**, вып. 2 (1994), 31–40.

Okounkov A. On representations of the infinite symmetric group.

We prove a classification theorem for admissible representation of the Gelfand pair

$$S(\infty) \times S(\infty) \supset \operatorname{diag} S(\infty)$$

and two other Gelfand pairs of hyperoctohedral type. We prove that the list of admisssible representations given by G. Olshanski is complete. This generalizes Thoma's description of the characters of $S(\infty)$. An explicit construction for representations from a dense subset of the admissible dual was given by G. Olshanski. We construct the remaining representations using an operation we call the mixture of representations.

Поступило 10 ноября 1996 г.