Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

В. Н. Иванов

РАЗМЕРНОСТЬ КОСЫХ СДВИНУТЫХ ДИАГРАММ ЮНГА И ПРОЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРЫ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

§0. Введение

Размерностью данной косой сдвинутой диаграммы Юнга называется число стандартных заполнений этой диаграммы. В §1 этой работы мы получаем формулу для размерности произвольной косой сдвинутой диаграммы Юнга. Для этого мы вводим полиномы P^*_μ – факториальные аналоги частного случая полиномов Холла–Литтлвуда $P(\cdot,t)$ при $t=-1$ ([3, гл.III, §1]). Определение полиномов P^*_μ принадлежит А. Ю. Окунькову.

В качестве приложения формулы для размерности косой сдвинутой диаграммы Юнга мы получаем классификацию проективных характеров группы $S(\infty)$. В классической работе Тома [12] были описаны характеры (в смысле фон Неймана) бесконечной симметрической группы $S(\infty)$ – индуктивного предела цепочки $S(1)\subset S(2)\subset\dots$ конечных симметрических групп (характеры в смысле фон Неймана отвечают конечным фактор-представлениям). В работе Назарова [5] теорема Тома была перенесена на проективные характеры бесконечной симметрической группы $S(\infty)$. В §2 настоящей работы мы даем новые доказательства основных результатов Назарова [5].

Автор глубоко признателен Г. И. Ольшанскому за постановку задачи, постоянное внимание к работе и замечания по проектам рукописи и М. Л. Назарову за замечание 1.8 к формуле размерности косой сдвинутой диаграммы.

§1. Формула для размерности косой сдвинутой диаграммы Юнга

Полином $f(x_1,\dots,x_n)$ называется *суперсимметрическим*, если

При поддержке Международной Соросовской Программы Образования - грант 2093с.

выполнены следующие условия:

1) f симметричен по $x_1, \dots, x_n$;

2) для любых натуральных i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$, полином

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

не зависит от t.

Суперсимметрические полиномы от n переменных образуют алгебру. Обозначим эту алгебру через $\Omega(n)$. $\Omega(n)$ градуирована степенью полиномов, то есть

$$\Omega(n) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Omega^k(n),$$

где $\Omega^k(n)$ состоит из однородных суперсимметрических полиномов степени k (включая нулевой полином).

При $m \geqslant n$ рассмотрим гомоморфизм

$$p_{m,n} : \Omega(m) \to \Omega(n),$$

такой, что

$$(p_{m,n} f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0).$$

При ограничении на $\Omega^k(m)$ получаются линейные отображения

$$p^k_{m,n} : \Omega^k(m) \to \Omega^k(n).$$

Проективный предел градуированных алгебр $\Omega(n)$ в категории градуированных алгебр, взятый в соответствии с морфизмами $p_{m,n}$, является алгеброй и называется *алгеброй суперсимметрических функций*. Обозначим эту алгебру через Ω. Элемент f, принадлежащий Ω, – это по определению последовательность $(f_n)_{n \geqslant 1}$ такая, что выполнены следующие условия:

1) $f_n \in \Omega(n)$, $n = 1, 2, \dots$,

2) $f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n)$ (условие стабильности),

3) $\sup\limits_n \deg f_n < \infty$.

Далее мы рассмотрим важные для дальнейшего примеры суперсимметрических функций.

Положим

$$p_{k|n}(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n^k \ (k = 1, 2, \dots).$$

Если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ – разбиение, то $p_{\lambda|n}$ определено следующим образом:

$$p_{\lambda|n} = p_{\lambda_1|n} \cdot p_{\lambda_2|n} \cdot \ldots \cdot p_{\lambda_l|n}.$$

Если λ – такое разбиение, что все его ненулевые части нечетны, то

$$p_{\lambda|n} \in \Omega(n)$$

и последовательность $(p_{\lambda|n})_{n \geqslant 1}$ определяет суперсимметрическую функцию p_λ. Такие функции p_λ образуют линейный базис алгебры Ω. Иначе говоря, $p_1, p_3, p_5, \ldots$, называемые нечетными суммами Ньютона, алгебраически порождают алгебру Ω, смотри [9].

Разбиение называется *строгим*, если все его ненулевые части попарно различны. Множество строгих разбиений числа n обозначим через DP_n.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ – произвольное разбиение. Обозначим через $l(\lambda)$ *длину разбиения* λ, то есть число его ненулевых частей. *Вес разбиения* обозначим через $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{l(\lambda)}.$$

Также будем применять обозначение $\lambda \vdash n$, если $n = |\lambda|$.

Далее в тексте μ и λ обозначают строгие разбиения, если не оговорено противное.

Предварительно докажем предложение, результаты которого будут использоваться в дальнейшем.

Предложение 1.1. *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – переменные, $r(x_1, \ldots, x_l)$ – многочлен от l переменных. Для $n \geqslant l$ положим*

$$R_n(x_1, \ldots, x_n) = r(x_1, \ldots, x_l) \prod_{i \leqslant l, i < j \leqslant n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}$$

и

$$\widetilde{R}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\omega \in S(n)} R_n(x_{\omega(1)}, \ldots, x_{\omega(n)}).$$

Тогда

а) $\widetilde{R}_n$ *является многочленом, причем*

$$\deg \widetilde{R}_n \leqslant \deg r;$$

б) $\widetilde{R}_n$ *суперсимметричен;*

в) $\widetilde{R}_n = 0$, *если r симметричен хотя бы по двум переменным x_i, x_j, $i < j \leqslant l$;*

г) *если $r(x_1, \dots, x_l)$ делится на $x_1 \dots x_l$, то*

$$\widetilde{R}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = (n+1-l)\widetilde{R}_n(x_1, \dots, x_n).$$

Доказательство. а) Представим $\widetilde{R}_n$ в виде отношения двух многочленов. Обозначим через $V(x_1, \dots, x_n)$ определитель Вандермонда:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

Также положим

$$u_n(x_1, \dots, x_n) = r(x_1, \dots, x_l) \prod_{i \leqslant l, i<j \leqslant n}(x_i + x_j) \prod_{l<i<j \leqslant n}(x_i - x_j)$$

и

$$\widetilde{u}_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\omega \in S(n)} \operatorname{sgn}(\omega) u_n(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)}). \tag{1.1}$$

Отметим неравенство

$$\deg \widetilde{u}_n \leqslant \deg V + \deg r. \tag{1.2}$$

Имеем соотношение между многочленами

$$\widetilde{R}_n = \frac{\widetilde{u}_n}{V}.$$

Из формулы (1.1) следует, что $\widetilde{u}_n$ является кососимметрическим многочленом от $x_1, \dots, x_n$, поэтому $\widetilde{R}_n$ является многочленом от $x_1, \dots, x_n$. Из (1.2) следует неравенство

$$\deg \widetilde{R}_n \leqslant \deg r.$$

б) Симметричность многочлена $\widetilde{R}_n$ следует из его определения.

Положим $x_i = t$, $x_j = -t$, для произвольных натуральных чисел i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$, тогда $R_n(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)})$ не зависит от переменной t при любой перестановке ω из группы $S(n)$. Поэтому многочлен $\widetilde{R}_n$ также не зависит от t.

Итак, многочлен $\widetilde{R}_n$ суперсимметричен.

в) Пусть многочлен r симметричен по переменным x_i и x_j, $i < j \leqslant l$. Тогда определенный выше многочлен u_n также симметричен по переменным x_i и x_j. Из формулы (1.1) следует, что $\widetilde{u}_n = 0$ в этом случае, так как сумма в (1.1) разбивается на пары равных по модулю слагаемых, которые входят в эту сумму с разными знаками. Поэтому $\widetilde{R}_n = 0$.

г) Пусть $r(x_1, \dots, x_l)$ делится на $x_1 \dots x_l$ и $x_{n+1} = 0$. Рассмотрим произвольную перестановку ω из группы $S(n+1)$. Если $\omega^{-1}(n+1) \leqslant l$, то

$$R_{n+1}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)}, x_{\omega(n+1)}) = 0.$$

Если $\omega^{-1}(n+1) > l$, то

$$R_{n+1}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)}, x_{\omega(n+1)}) = R_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

где перестановка σ из подгруппы $S(n) \subset S(n+1)$ получена из перестановки ω умножением ω на транспозицию $(n+1, \omega(n+1))$ слева.

Из этого следует требуемое равенство

$$\widetilde{R}_{n+1} = (n+1-l)\widetilde{R}_n.$$

Предложение доказано. □

Рассмотрим теперь два частных случая Предложения 1.1.

Пусть λ – разбиение, $l(\lambda) = l < n$,

$$r(x_1, \dots, x_l) = \prod_{i=1}^{l} x_i^{\lambda_i}.$$

В этом случае многочлен $\widetilde{R}_n$, участвующий в формулировке Предложения 1.1, разделенный на $(n-l)!$ обозначается через $P_{\lambda|n}$. Это частный случай многочлена Холла–Литтлвуда при параметре t равном -1 ([3, гл.III, §1]). Положим $P_{\lambda|n} = 0$, если $l(\lambda) > n$. Из Предложения 1.1 следует, что последовательность $(P_{\lambda|n})_{n \geqslant 1}$ определяет суперсимметрическую функцию P_λ. Функции P_λ (согласно нашей договоренности λ обозначает строгое разбиение), называемые *P-функциями Шура*, образуют линейный базис алгебры Ω, смотри [9]. Отметим, что если ν – нестрогое разбиение, то из Предложения 1.1 в) следует, что $P_\nu = 0$.

Определим k-ую *убывающую факториальную степень* переменной x формулой

$$(x\downharpoonright k)=\prod_{i=1}^{k}(x-i+1),\quad k=1,2,\dots.$$

Положим также

$$(x\downharpoonright 0)=1.$$

Введем теперь многочлены, играющие основную роль в §1.

Определение 1.2 (А. Ю. Окуньков). *Пусть $l=l(\lambda)\leqslant n$, $x_1,\dots,x_n$ – переменные. Положим*

$$F_{\lambda|n}(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{l}(x_i\downharpoonright\lambda_i)\prod_{i\leqslant l,i<j\leqslant n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}.$$

Введем многочлен $P^*_{\lambda|n}$ формулой

$$P^*_{\lambda|n}=\frac{1}{(n-l)!}\sum_{\omega\in S(n)}F_{\lambda|n}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n)}).$$

Предложение 1.3. *Если $l(\lambda)\leqslant n$, то*

$$P^*_{\lambda|n}(x_1,\dots,x_n)=P_{\lambda|n}(x_1,\dots,x_n)+g(x_1,\dots,x_n),$$

где $g(x_1,\dots,x_n)$ – суперсимметрический многочлен степени меньшей, чем $|\lambda|$.

Доказательство. Если в формулировке Предложения 1.1 положим

$$r(x_1,\dots,x_{l(\lambda)})=\prod_{i=1}^{l(\lambda)}(x_i\downharpoonright\lambda_i)-\prod_{i=1}^{l(\lambda)}x_i^{\lambda_i},$$

то получаемый в этом предложении многочлен $\widetilde{R}_n$ совпадает (с точностью до множителя) с разностью

$$P^*_{\lambda|n}-P_{\lambda|n}=g.$$

Согласно Предложению 1.1 а)

$$\deg g\leqslant\deg r<|\lambda|.\qquad\square$$

Если $l(\lambda)>n$, то положим $P^*_{\lambda|n}=0$. Из Предложения 1.1 г) следует, что последовательность $(P^*_{\lambda|n})_{n\geqslant 1}$ определяет суперсимметрическую функцию P^*_λ.

Из Предложения 1.3 следует вид старшего члена функции P^*_λ.

Следствие 1.4.
$$P^*_\lambda = P_\lambda + g,$$

где g – суперсимметрическая функция степени меньшей, чем $|\lambda|$.

Пусть μ – строгое разбиение; обозначим через $H(\mu)$ следующую величину:
$$H(\mu) = \prod_{t=1}^{l(\mu)} \mu_t! \prod_{i<j} \frac{\mu_i + \mu_j}{\mu_i - \mu_j}.$$

Пусть λ – другое разбиение. Будем писать $\mu \subset \lambda$, если $\mu_i \leqslant \lambda_i$ для $i = 1, 2, \ldots$.

Докажем теперь важное свойство функции P^*_λ. Будем далее писать $P^*_\mu(\lambda)$ вместо $P^*_\mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})$.

Теорема 1.5 (свойство обнуления)**.**
а) *Если $\mu \not\subset \lambda$, то $P^*_\mu(\lambda) = 0$;*
б) *$P^*_\mu(\mu) = H(\mu)$.*

(Утверждение этой теоремы аналогично свойству обнуления для s^*-функций, приведенному в [8] и в [6].)

Доказательство. Отметим, что $(a \downharpoonright b) = 0$, если $a, b \in \mathbb{Z}_+$ и $b > a$. Докажем вначале пункт а).

Пусть $\mu \not\subset \lambda$, тогда $\lambda_k < \mu_k$ для некоторого натурального числа k. Выберем произвольное $n \geqslant \max(l(\mu), l(\lambda))$.

По Определению 1.2 имеем равенство
$$P^*_\mu(\lambda) = \frac{1}{(n - l(\mu))!} \sum_{\omega \in S(n)} F_{\mu|n}(\lambda_{\omega(1)}, \ldots, \lambda_{\omega(n)}).$$

Рассмотрим для произвольной перестановки ω из группы $S(n)$ соответствующий ей член суммы
$$F_{\mu|n}(\lambda_{\omega(1)}, \ldots, \lambda_{\omega(n)}) = \prod_{i=1}^{l(\mu)} (\lambda_{\omega(i)} \downharpoonright \mu_i) \prod_{\substack{i \leqslant l(\mu) \\ i<j \leqslant n}} \frac{\lambda_{\omega(i)} + \lambda_{\omega(j)}}{\lambda_{\omega(i)} - \lambda_{\omega(j)}}.$$

Существует такое натуральное число r, что $r \leqslant k$ и $\omega(r) \geqslant k$. Тогда выполнена цепочка неравенств
$$\lambda_{\omega(r)} \leqslant \lambda_k < \mu_k \leqslant \mu_r,$$

следовательно,

$$(\lambda_{\omega(r)} \downharpoonleft \mu_r) = 0$$

и

$$F_{\mu|n}(\lambda_{\omega(1)}, \dots, \lambda_{\omega(n)}) = 0.$$

Из произвольности выбора перестановки ω следует, что $P^*_\mu(\lambda) = 0$.

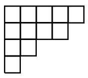
б) Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, показывают, что

$$P^*_\mu(\mu) = (\mu_1 \downharpoonleft \mu_1) \dots (\mu_{l(\mu)} \downharpoonleft \mu_{l(\mu)}) \cdot \prod_{\mu_i > \mu_j} \frac{\mu_i + \mu_j}{\mu_i - \mu_j} = H(\mu).$$

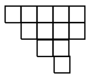
Теорема доказана. □

Пусть ν – произвольное разбиение. Напомним (подробнее в [3]), что диаграмма Юнга разбиение ν – это множество точек $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, таких, что $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$. Каждую точку заменим единичным квадратом, для которого эта точка будет правой нижней вершиной. Примем соглашение, что первая координата i (индекс строки) возрастает при движении сверху вниз, а вторая координата j (индекс столбца) возрастает при движении слева направо.

Например, если $\nu = (5, 4, 2, 1)$, то получается такая диаграмма D_ν:



Если ν – строгое разбиение, то *сдвинутая* диаграмма D'_ν получается из обычной диаграммы D_ν сдвигом i-строки на $i - 1$ квадратов вправо при всех $i > 1$. Для $\nu = (5, 4, 2, 1)$ получаем такую сдвинутую диаграмму D'_ν:



Если μ и λ – строгие разбиения, $\mu \subset \lambda$, то *сдвинутая косая диаграмма* $D'_{\lambda/\mu}$, соответствующая паре (λ, μ), есть разность сдвинутых диаграмм D'_λ и D'_μ.

Сдвинутой стандартной таблицей формы λ/μ называется заполнение косой сдвинутой диаграммы $D'_{\lambda/\mu}$ числами $1, 2, \dots, |\lambda|-$

$|\mu|$ так, чтобы числа строго возрастали при чтении слева направо по строкам и сверху вниз по столбцам. *Размерностью* $g_{\lambda/\mu}$ сдвинутой косой диаграммы $D'_{\lambda/\mu}$ называется число сдвинутых стандартных таблиц формы λ/μ. Условимся, что $g_{\lambda/\mu}=0$, если λ не содержит μ. Положим g_λ равным $g_{\lambda/\{\varnothing\}}$, то есть числу сдвинутых стандартных таблиц формы λ. Для g_λ есть явная формула, приведенная в [3, гл.III, §7, примеры]:

$$g_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\lambda_1!\dots\lambda_{l(\lambda)}!}\prod_{i<j}\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}.$$

Сформулируем теперь основной результат, позволяющий получить явную формулу для $g_{\lambda/\mu}$.

Теорема 1.6. *Пусть μ и λ – строгие разбиения. Положим $m=|\mu|$, $k=|\lambda|$; тогда*

$$g_{\lambda/\mu} = g_\lambda\cdot\frac{P^*_\mu(\lambda)}{(k\downharpoonright m)}.$$

Доказательство. Зафиксируем μ. Будем рассматривать $g_{\lambda/\mu}$ как функцию от строгого разбиения λ, где $|\lambda|\geqslant|\mu|$.

Для двух разбиений μ и ν символ $\mu\nearrow\nu$ обозначает, что $|\nu|=|\mu|+1$ и $\mu\subset\nu$, или, говоря иначе, D_ν получается из D_μ добавлением одной клетки.

$g_{\lambda/\mu}$, как функция от λ, определяется своими тремя свойствами:

(i) $g_{\mu/\mu}=1$;

(ii) если $\lambda\not\supset\mu$, $|\lambda|\geqslant|\mu|$, то

$$g_{\lambda/\mu}=0;$$

(iii) $g_{\lambda/\mu}=\sum\limits_{\substack{\nu\text{-строгое},\\ \nu\nearrow\lambda}} g_{\nu/\mu}$, $|\lambda|\geqslant|\mu|+1$.

Докажем, что эти три свойства выполнены для

$$G(\lambda)=P^*_\mu(\lambda)\cdot\frac{g_\lambda}{(k\downharpoonright m)}.$$

(В силу того, что $k\geqslant m$, знаменатель в нуль не обращается.)

Свойство (i) выполнено:

$$G(\mu)=P^*_\mu(\mu)\cdot\frac{g_\mu}{m!}=H(\mu)\cdot\prod_{i<j}\frac{\mu_i-\mu_j}{\mu_i+\mu_j}\frac{1}{\mu_1!\dots\mu_{l(\mu)}!}=1.$$

Свойство (ii) следует из свойства обнуления функций P^*_μ. Докажем, что выполнено свойство (iii). В нашей ситуации $k \geqslant m+1$.

Если $\mu \not\subset \lambda$, то в обеих частях доказываемого равенства стоят нули.

Пусть теперь $\mu \subset \lambda$. Положим

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}) = \frac{(k-m)!}{\lambda_1! \dots \lambda_{l(\lambda)}!} \prod_{t=1}^{l(\mu)} (\lambda_t \downarrow \mu_t) \prod_{l(\mu)<i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}.$$

Из Определения 1.2 и формулы для g_λ следует равенство

$$G(\lambda) = \frac{1}{(l(\lambda) - l(\mu))!} \sum_{\omega \in S(n)} \operatorname{sgn}(\omega) F(\lambda_{\omega(1)}, \dots, \lambda_{\omega(l(\lambda))}) \tag{1.3}$$

Пусть $\lambda^{(i)}$ обозначает разбиение, полученное из разбиения λ уменьшением i-ой части на единицу:

$$\lambda^{(i)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n).$$

Пусть ω – произвольная перестановка из группы $S(n)$. Равенство

$$F(\lambda_{\omega(1)}, \dots, \lambda_{\omega(n)}) = \sum_{i=1}^{n} F(\lambda^{(i)}_{\omega(1)}, \dots, \lambda^{(i)}_{\omega(n)})$$

равносильно тождеству

$$\sum_{i=l(\mu)+1}^{l(\lambda)} \lambda_{\omega(i)} = \sum_{i=l(\mu)+1}^{l(\lambda)} \lambda_{\omega(i)} \prod_{\substack{j \neq i, \\ l(\mu)<j\leqslant l(\lambda)}} \frac{\lambda_{\omega(i)} + \lambda_{\omega(j)}}{\lambda_{\omega(i)} + \lambda_{\omega(j)} - 1} \cdot \frac{\lambda_{\omega(i)} - \lambda_{\omega(j)} - 1}{\lambda_{\omega(i)} - \lambda_{\omega(j)}},$$

которое с другими обозначениями переменных приведено в [3, гл.III, §7, пример 8] и [4].

Поэтому для $G(\lambda)$ имеем равенство

$$G(\lambda) = \sum_{\nu \nearrow \lambda} G(\nu).$$

Отметим, что если ν – нестрогое разбиение, то

$$G(\nu) = 0,$$

потому что сумма, участвующая в формуле (1.3), разбивается на пары равных по модулю слагаемых, входящих с разными знаками. Следовательно, мы получаем соотношение

$$G(\lambda) = \sum_{\substack{\nu \nearrow \lambda, \\ \nu\text{-строгое}}} G(\nu).$$

Итак, все три свойства для функции $G(\lambda)$ выполнены, что доказывает теорему. □

Если ν и η – обычные разбиения, не обязательно строгие, $\nu \subset \eta$, то косой диаграммой $D_{\eta/\nu}$, соответствующей паре (ν, η), называется разность диаграмм D_η и D_ν.

Стандартной таблицей формы η/ν называется заполнение квадратов косой диаграммы $D_{\eta/\nu}$ числами $1, 2, \ldots, |\eta| - |\nu|$ так, чтобы числа строго возрастали при чтении слева направо по строкам и сверху вниз по столбцам. Размерностью $f_{\eta/\nu}$ косой диаграммы $D_{\eta/\nu}$ называется число стандартных таблиц формы η/ν.

В [8] получена явная формула для $f_{\eta/\nu}$ – в терминах так называемых сдвинутых полиномов Шура s^*_μ. Если $l(\mu) \leqslant n$, то

$$s^*_\mu(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\det[((x_i + n - i) \downharpoonright (\mu_j + n - j))]^n_{i,j=1}}{\prod\limits_{i<j}((x_i - x_j) + j - i)}.$$

(Отметим, что полином s^*_μ, как и обычные полиномы Шура, обладают свойством стабильности при $n \to \infty$). Формула для $f_{\eta/\nu}$ имеет вид:

$$f_{\eta/\nu} = f_\eta \cdot \frac{s^*_\nu(\eta)}{(|\eta| \downharpoonright |\nu|)}.$$

Для f_η есть явная формула

$$f_\eta = \frac{|\eta|!}{\prod\limits_{i=1}^{l(\eta)}(\eta_i + l(\eta) - i)!} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant l(\eta)} (\eta_i - \eta_j + j - i).$$

Замечание 1.7. Если μ и λ – строгие разбиения, $\mu \subset \lambda$, то косая сдвинутая диаграмма $D'_{\lambda/\mu}$ совпадает с обычной косой диаграммой $D_{\eta/\nu}$ для некоторых разбиений η и ν тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

$$l(\lambda) = l(\mu) \quad \text{или} \quad l(\lambda) = l(\mu) + 1.$$

Это означает, что D'_μ полностью содержит часть диаграммы D'_λ, лежащую левее вертикальной прямой $j = l(\lambda) - 1$.

Если $l(\lambda) = l(\mu)$ или $l(\lambda) = l(\mu) + 1$, то определим η и ν следующим образом:

$$\begin{aligned} &\eta_i = \lambda_i + i - 1, \\ &\nu_i = \mu_i + i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, l(\lambda). \end{aligned}$$

Тогда $D'_{\lambda/\mu} = D_{\eta/\nu}$. В этом случае число стандартных таблиц $f_{\eta/\nu}$ равно числу стандартных сдвинутых таблиц $g_{\lambda/\mu}$.

Это дает следующее тождество для $P^*_\mu(\lambda)$ и $s^*_\nu(\eta)$:

$$P^*_\mu(\lambda) \cdot \frac{g_\lambda}{(|\lambda| \downharpoonleft |\mu|)} = g_{\lambda/\mu} = f_{\eta/\mu} = f_{\eta/\nu} = s^*_\nu(\eta) \cdot \frac{f_\eta}{(|\eta| \downharpoonleft |\nu))}.$$

Это тождество можно проверить, непосредственно исходя из определений P^*_μ и s^*_ν.

Этот факт можно сравнить с известным фактом из теории суперфункций Шура, приведенным в [3, гл.I, §5, пример 27].

§2. Доказательство формулы для характеров бесконечной спин-симметрической группы

Симметрическая группа $S(n)$ (группа всех перестановок чисел $1, \ldots, n$) порождена перестановками S_k чисел k и $k+1$ ($k = 1, \ldots, n-1$) с соотношениями:

$$S_k^2 = e; \quad (S_k \cdot S_{k+1})^3 = e; \quad (S_k S_{k'})^2 = e, \quad k - k' > 1.$$

Группа $S(\infty)$ (группа всех конечных перестановок натуральных чисел) – это индуктивный предел последовательности $S(1) \subset S(2) \subset \ldots$.

Спин – симметрическая группа $\widetilde{S}(n)$ является нетривиальным центральным $\mathbb{Z}_2$-расширением группы $S(n)$. Она определяется, как группа с образующими $c, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ и соотношениями:

$$\begin{gathered} c^2 = e; \quad ct_k = t_k c; \quad t_k^2 = e; \quad (t_k t_{k+1})^3 = c; \\ (t_k t_{k'})^2 = c, \quad k' - k > 1. \end{gathered}$$

Проективные представления группы $S(n)$ линеаризуются группой $\widetilde{S}(n)$.

Определим группу $\widetilde{S}(\infty)$, как индуктивный предел цепочки $\widetilde{S}(1) \subset \widetilde{S}(2) \subset \ldots$. Группа $\widetilde{S}(\infty)$ является нетривиальным центральным $\mathbb{Z}_2$-расширением группы $S(\infty)$.

Далее мы будем рассматривать неприводимые представления группы $\widetilde{S}(n)$, переводящие элемент c в -1. Они могут быть параметризованы с помощью строгих разбиений числа n [10]. Если строгое разбиение $\lambda \vdash n$ таково, что $n - l(\lambda)$ четно, то такому разбиению соответствует одно неприводимое представление; обозначим характер этого представления через χ^λ. Если строгое разбиение $\lambda \vdash n$ таково, что $n - l(\lambda)$ нечетно, то такому разбиению соответствуют два неприводимых представления; обозначим их характеры через χ_+^λ и χ_-^λ.

Если ρ – разбиение числа n, положим $t_\rho = (t_1 t_2 \ldots t_{\rho_1 - 1})$ $(t_{\rho_1+1} \ldots t_{\rho_1+\rho_2-1}) \ \ldots \ (t_{\rho_1+\ldots+\rho_{l(\rho)-1}+1} \ldots t_{n-1})$.
Очевидно, достаточно задать характеры неприводимых представлений на элементах t_ρ для полного определения их на всей группе $\widetilde{S}(n)$.

Далее символы λ, μ, ν всегда будут обозначать строгие разбиения.

Если $n - l(\lambda)$ четно, $\lambda \vdash n$, то из $\chi^\lambda(t_\rho) \neq 0$, следует что ρ – разбиение n на нечетные части. Если $n - l(\lambda)$ нечетно, $\lambda \vdash n$, то неприводимые характеры χ_+^λ и χ^λ таковы, что $\chi_+^\lambda(t_\rho)$ или $\chi_-^\lambda(t_\rho)$ могут быть отличны от нуля лишь в следующих случаях: если все части разбиения ρ нечетны или если $\rho = \lambda$. В первом случае $\chi_+^\lambda(t_\rho) = \chi_-^\lambda(t_\rho)$, а во втором $\chi_+^\lambda(t_\lambda) = -\chi_-^\lambda(t_\lambda)$.

Наша цель – описание неразложимых характеров группы $\widetilde{S}(\infty)$ в смысле следующего определения.

Определение 2.1. *Пусть G – абстрактная группа. Функция $\chi : G \to \mathbb{C}$ называется неразложимым характером, если выполнены следующие условия:*

1) $\chi(e) = 1$*;*

2) $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_2 g_1)$*,* $\forall g_1,\ g_2 \in G$*;*

3) $\sum\limits_{k,l} \chi(g_k^{-1} g_l) \bar{a}_k a_l \geqslant 0$*,* $\forall g_1, \ldots, g_n \in G$*,* $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$*;*

4) *Если χ, χ_1 и χ_2 удовлетворяют условиям 1)–3), и найдется такое a, что выполнено $0 < a < 1$ и $\chi = a\chi_1 + (1-a)\chi_2$, то $\chi = \chi_1 = \chi_2$.*

Если G – конечная группа, то ее неразложимые характеры (в смысле приведенного Определения 2.1) совпадают с нормированными неприводимыми характерами.

Из теоремы Вершика–Керова [1, 2, гл.I, §1], следует, что каждый неразложимый характер группы $\widetilde{S}(\infty)$ является поточечным пределом нормированных неприводимых характеров групп $\widetilde{S}(n)$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим последовательность $(\lambda(n) \vdash n)$ строгих разбиений, $n = 1, 2, \ldots$. Для каждого n обозначим через ξ_n любой из следующих нормированных неприводимых характеров:

$$\frac{\chi^{\lambda(n)}}{\chi^{\lambda(n)}(l)}, \quad \frac{\chi_+^{\lambda(n)}}{\chi_+^{\lambda(n)}(l)}, \quad \frac{\chi_-^{\lambda(n)}}{\chi_-^{\lambda(n)}(l)}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.2 (Назаров). *Поточечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ *существует тогда и только тогда, когда пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(n)}{n} = \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots$ *существуют.*

Доказательство. Проекция $\pi : \widetilde{S}(n) \to S(n)$ задается следующим образом:

$$\pi(c) = e, \quad \pi(t_k) = S_k \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Если в $\pi(t)$ хотя бы один цикл имеет четную длину, то $\xi_n(t) = 0$ для всех достаточно больших n. Отсюда следует, что существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ и его значение зависят только от последовательности $(\lambda(n)$, но не от выбора знаков "+" или "−" в (2.1).

Поэтому введем следующее обозначение

$$\chi_*^\lambda = \begin{cases} \chi^\lambda, & \text{если} \quad |\lambda| - l(\lambda) \quad \text{четно,} \\ \frac{\chi_+^\lambda + \chi_-^\lambda}{\sqrt{2}}, & \text{если} \quad |\lambda| - l(\lambda) \quad \text{нечетно.} \end{cases}$$

В пространстве функций $f(t)$ на группе $\widetilde{S}(k)$, таких, что $f(ct) = -f(t)$, вводится скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_k = \frac{1}{k!} \sum_{s \in S(k)} (f\bar{g})(s).$$

Обозначим через Res_k оператор ограничения на подгруппу $\widetilde{S}(k) \subset \widetilde{S}(n)$, $n > k$.

Поточечная сходимость характеров ξ_n равносильна тому, что для любого k и любого строгого разбиения $\mu \vdash k$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \frac{\mathrm{Res}_k\chi_*^{\lambda(n)}}{\chi_*^{\lambda(n)}(e)}, \chi_*^{\mu}\right\rangle_k.$$

Обозначим через $\varepsilon(n)$ следующую величину

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \quad \text{нечетно},\\ \sqrt{2}, & \text{если} \quad n \quad \text{четно}. \end{cases}$$

Правило ветвления для χ_*^{ν} имеет следующий вид [4, Теорема 10.2]:

$$\mathrm{Res}_{|\nu|-1}\chi_*^{\nu} = \sum_{\mu\nearrow\nu}\chi_*^{\mu}\cdot\varepsilon(l(\nu)-l(\mu)),$$

где предполагается, что μ – строгое разбиение; символ $\mu\nearrow\nu$ был введен в доказательстве формулы для размерности косой сдвинутой диаграммы.

Положим

$$\chi_0^{\lambda} = 2^{\frac{l(\lambda)-|\lambda|}{2}}\chi_*^{\lambda} = \begin{cases} 2^{\frac{l(\lambda)-|\lambda|}{2}}\chi, & \text{если } |\lambda|-l(\lambda) \text{ четно},\\ 2^{\frac{l(\lambda)-|\lambda|-1}{2}}(\chi_+^{\lambda}+\chi_-^{\lambda}), & \text{если}\\ & |\lambda|-l(\lambda) \text{ нечетно}. \end{cases}$$

В этой нормировке правило ветвления имеет самый простой вид:

$$\mathrm{Res}_{|\nu|-1}\chi_0^{\nu} = \sum_{\mu\nearrow\nu}\chi_0^{\mu}.$$

Отсюда следует следующий факт. Пусть $k\leqslant n$ и $\lambda\vdash n$ – строгое разбиение. Тогда

$$\mathrm{Res}_k\chi_0^{\lambda} = \sum_{\mu\vdash k} g_{\lambda/\mu}\chi_0^{\mu},$$

где символ $g_{\lambda/\mu}$ обозначает размерность косой сдвинутой диаграммы $D'_{\lambda/\mu}$.

Переходя от χ_0^{λ} к χ_*^{λ}, получаем

$$\mathrm{Res}_k\chi_*^{\lambda} = 2^{\frac{|\lambda|-l(\lambda)}{2}}\sum_{\mu\vdash k} g_{\lambda/\mu}\chi_0^{\mu} = \sum_{\mu\vdash k} 2^{\frac{|\lambda|-l(\lambda)-|\mu|+l(\mu)}{2}} g_{\lambda/\mu}\chi_*^{\mu}.$$

С другой стороны,

$$\chi_*^\lambda(e) = 2^{\frac{|\lambda|-l(\lambda)}{2}} \chi_0^\lambda(e) = 2^{\frac{|\lambda|-l(\lambda)}{2}} g_\lambda.$$

Из того, что $\langle \chi_*^\mu, \chi_*^\mu \rangle_k = 1$ следует, что

$$\left\langle \frac{\operatorname{Res}_k \chi_*^\lambda}{\chi_*^\lambda(e)}, \chi_*^\mu \right\rangle_k = \frac{g_{\lambda/\mu}}{g_\lambda} \cdot 2^{\frac{l(\mu)-|\mu|}{2}} = 2^{\frac{l(\mu)-|\mu|}{2}} \cdot \frac{P_\mu^*(\lambda)}{(|\lambda| \downharpoonleft |\mu|)},$$

где последний переход дается Теоремой 1.6.

Заметим, что из Следствия 1.4 получаем, что

$$P_\mu^*(\lambda(n)) = P_\mu(\lambda(n)) + O(|\lambda(n)|^{|\mu|-1})$$

при $n \to \infty$.

Кроме того,

$$(n \downharpoonleft |\mu|) = n^{|\mu|} + O(n^{|\mu|-1})$$

при $n \to \infty$.

Поэтому существование поточечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ равносильно существованию пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_\mu(\lambda(n))}{n^{|\mu|}} \tag{2.2}$$

при всех μ.

Функции P_μ образуют линейный базис алгебры суперсимметрических функций Ω. Поскольку нечетные суммы Ньютона $p_1, p_3, p_5, \ldots$ алгебраически порождают алгебру Ω, существование пределов (2.2) эквивалентно существованию пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_m(\lambda(n))}{n^m}, \quad m = 1, 3, 5, \ldots.$$

Докажем, что если существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(n)}{n} = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

то существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_m(\lambda(n)}{n^m} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^m = p_m(\gamma_1, \gamma_2, \ldots),$$

для $m = 3, 5, 7, \ldots$. $\left(\text{Отметим, что } \frac{p_1(\lambda(n))}{n} = 1\right)$.

Если $l(\lambda(n))$ ограничено при $n \to \infty$, то это утверждение тривиально.

Поэтому можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} l(\lambda(n)) = \infty$. Тогда доказываемый факт следует из следующей оценки. Пусть $\mathcal{N} \leqslant l(\lambda)$, $m \geqslant 3$. Тогда

$$\frac{p_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})}{n^m} = \frac{p_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathcal{N}})}{n^m} + \sum_{i=\mathcal{N}+1}^{l(\lambda)} \frac{\lambda_i^m}{n^m} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{p_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathcal{N}})}{n^m} + \frac{\lambda_{\mathcal{N}+1}}{n}.$$

В последнем неравенстве мы использовали то, что

$$\sum_{i=\mathcal{N}+1}^{l(\lambda)} \lambda_i^{m-1} \leqslant \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i^{m-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i\right)^{m-1} = n^{m-1}.$$

С другой стороны,

$$\frac{p_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})}{n^m} \geqslant \frac{p_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathcal{N}})}{n^m}.$$

Используя то, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=r+1}^{\infty} \gamma_k^m = 0, \qquad m = 3, 5, 7, \dots,$$

и

$$\lim_{\mathcal{N}\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{\mathcal{N}+1}(n)}{n}\right) = \lim_{\mathcal{N}\to\infty} \gamma_{\mathcal{N}+1} = 0,$$

получаем доказываемое утверждение.

Итак, наличие пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(n)}{n} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

влечет существование поточечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Перейдем теперь к доказательству обратного утверждения. По-прежнему мы рассматриваем последовательность строгих разбиений $(\lambda(n))_{n\geqslant 1}$ такую, что $|\lambda(n)| = n$.

По доказанному выше получаем, что из существования поточечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ следует существование пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_m(\lambda(n))}{n^m}, \quad m = 1, 3, 5, \ldots .$$

Последовательности $\left(\frac{\lambda_i(n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ для всех i ограничены. Можно выбрать подпоследовательность $(\lambda(n_k))_{k\geqslant 1}$ так, что пределы

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_i(n_k)}{n_k}$$

будут существовать при всех i. Положим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_i(n_k)}{n_k} = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда аналогично доказанному выше получаем равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_m(\lambda(n))}{n^m} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_m(\lambda(n_k))}{n_k^m} = p_m(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$$

при $m = 3, 5, 7, \ldots$. Заметим, что всякая последовательность $\gamma = (\gamma_i)_{i\geqslant 1}$, такая, что $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $\sum\limits_i \gamma_i \leqslant 1$, однозначно определяется значениями

$$p_3(\gamma), p_5(\gamma), \ldots .$$

В самом деле, γ_1 однозначно определено тем условием, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}(\gamma)}{\gamma_1^{2n+1}}$$

существует и не равен нулю. Для определения γ_{i+1} при известных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i$ достаточно рассмотреть значения

$$p_3(\gamma) - \sum_{k=1}^{i} \gamma_k^3, p_5(\gamma) - \sum_{k=1}^{i} \gamma_k^5, \ldots .$$

Отсюда следует, что для каждого i последовательность $\left(\frac{\lambda_i(n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ имеет лишь одну предельную точку и, тем самым, сходится.

Теорема доказана. □

Найдем теперь поточечный предел последовательности ξ_n при $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(n)}{n} = \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2.3 (Назаров [5]). *Пусть*

$$\gamma = (\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant 0)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(n)}{n} = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \lambda(n) \vdash n.$$

Обозначим поточечный предел последовательности ξ_n, определенной формулой (2.1)*, через ψ_γ. Тогда*

$$\psi_\gamma(t_\rho) = \begin{cases} \prod\limits_{i\geqslant 2} p_i(\gamma)^{m_i(\rho)} \cdot 2^{\frac{l(\rho)-|\rho|}{2}}, & \text{если} \quad \rho \text{ – разбиение} \\ & \text{на нечетные части}, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где $m_i(\rho)$ – число частей разбиения ρ, равных i, а t_ρ – ранее введенный элемент группы $\widetilde{S}(\infty)$.

Доказательство. Пусть ρ – разбиение числа k на нечетные части. Тогда

$$\psi_\gamma(t_\rho) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_*^{\lambda(n)}(t_\rho)}{\chi_*^{\lambda(n)}(e)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu\vdash k} \left\langle \frac{\operatorname{Res}_k \chi_*^{\lambda(n)}}{\chi_*^\lambda(e)}, \chi_*^\mu \right\rangle_k \chi_*^\mu(t_\rho). \quad (2.3)$$

Воспользуемся ранее полученным равенством

$$\left\langle \frac{\operatorname{Res}_k \chi_*^\lambda}{\chi_*^\lambda(e)}, \chi_*^\mu \right\rangle_k = \frac{2^{\frac{l(\mu)-k}{2}} P_\mu^*(\lambda)}{(|\lambda| \downharpoonright k)},$$

и перепишем (2.3):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\mu\vdash k} \frac{2^{\frac{l(\mu)-k}{2}} P_\mu^*(\lambda(n))}{(|\lambda(n)| \downharpoonright k)} \cdot \chi_*^\mu(t_\rho) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu\vdash k} \frac{2^{\frac{l(\mu)-k}{2}} \cdot P_\mu(\lambda(n))}{|\lambda(n)|^k} \cdot \chi_*^\mu(t_\rho) \quad (2.4)$$

Воспользуемся теперь приведенным в [11, §7], равенством, которое в наших обозначениях имеет вид:

$$\sum_{\mu\vdash k} 2^{\frac{l(\mu)-k}{2}} P_\mu(\lambda) \cdot \chi_*^\mu(t_\rho) = 2^{\frac{l(\rho)-k}{2}} p_\rho(\lambda).$$

Поэтому (2.4) приводится к простому виду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_\rho(\lambda(n))}{|\lambda(n)|^k}\cdot 2^{\frac{l(\rho)-k}{2}} = 2^{\frac{l(\rho)-|\rho|}{2}}\prod_{i\geqslant 2} p_i(\gamma)^{m_i(\rho)}.$$

Если хотя бы одна часть разбиения ρ четна, то

$$\Psi_\gamma(t_\rho)=0$$

поскольку тогда

$$\xi_n(t_\rho)=0$$

для всех достаточно больших n.

Теорема доказана. □

Предложение 2.4. *Функции ψ_γ, полученные в предыдущей теореме, действительно являются неразложимыми характерами группы $\widetilde{S}(\infty)$.*

Доказательство. Проверим для функций ψ_γ Определение 2.1. Свойства 1)–3) выполнены, так как они выполнены для нормированных характеров, пределом которых является ψ_γ. Для ψ_γ выполнено свойство мультипликативности, то есть если ρ и σ произвольные разбиения, а ρ и σ обозначает их дизъюнктное объединение, то

$$\psi_\gamma(t_{\rho\cup\sigma})=\psi_\gamma(t_\rho)\cdot\psi_\gamma(t_\sigma).$$

Из этого следует неразложимость ψ_γ (свойство 4 Определения 2.1) [13, 6].

Литература

1. А. М. Вершик, *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп.* — Докл. АН СССР **218** (1974), 749–752.
2. С. В. Керов, *Асимптотическая теория представлений симметрической группы и ее применения в анализе.* — Докторская диссертация (1994), С.-Петербург.
3. И. Г. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Москва, Мир, 1985.
4. P. N. Hoffman, J. F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric groups.* — Oxford University Press (1992).
5. M. L. Nazarov, *Projective representations of the infinite symmetric group.* — Advances in Soviet Mathematics **9** (1992), 115–130.

6. A. Yu. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities.* — Transformation Groups **1** (1996), 99–126.
7. G. I. Ol'shanskii, *Unitary representations of infinite-dimensional pairs* (G, K) *and the formalism of R. Howe.* Representation of Lie groups and related topics (A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, eds.) Cordon and Breach. 1990, pp. 269–463.
8. A. Yu. Okounkov, G. I. Olshanski, *Shifted Schur functions.* направлено в журнал Алгебра и Анализ, — q-alg/9605042.
9. P. Pragacz, *Algebro-geometric applications of Schur* S*- and* Q*-polynomials.* — Lecture Notes in Mathematics **1478** (1991), 130–191.
10. I. Schur, *Uber die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrocheme lineare Substitionen.* — J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.
11. J. R. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups.* — Advances in Mathematics **74** (1989), 87–134.
12. E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunctionen der abzänltar unendlichen, symmetrichen Gruppe.* — Math. Z. **85** (1964), 40–61.
13. A. M. Vershik and S. V. Kerov, *The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of* K_0*-functor of* AF*-algebras).* Representation of Lie groups and related topics (A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, eds.), Gordon and Breach. 1990, pp. 39–117.

Ivanov V. N. Dimensions of skew shifted Young diagrams and projective characters of the infinite symmetric group.

We study a factorial analogue of Schur P-functions. In terms of them we obtain an explicit formula for dimension of a skew shifted Young diagram. The main application of this formula is a new derivation of the Nazarov's classification of undecomposable projective characters of an infinite symmetric group.

Московский государственный университет

E-mail: vivanov@sch57.mcn.msk.su

Поступило 4 ноября 1996 г.