Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко

ДВА НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ КЛЕТОЧНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Введение

В теории линейных представлений конечных групп перестановочные представления занимают особое положение. Отчасти это объясняется тем, что группы перестановок были исторически первой формой общей теории групп. Более важный момент, однако, заключается в том, что линейное пространство, в котором действует перестановочное представление, имеет выделенный базис. Природа этого базиса дает возможность использовать комбинаторно-алгебраический язык для описания неприводимых представлений, входящих в перестановочное. Такой подход не ограничивает общности рассмотрения, поскольку регулярное представление группы является перестановочным, а каждое неприводимое представление содержится в регулярном.

Рассмотрим группу перестановок G на n-элементном множестве V. Перестановочное представление $\rho : G \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^V)$ сопоставляет каждой перестановке $g \in G$ перестановочную матрицу $\rho(g) \in \mathrm{Mat}_V$. Централизаторная алгебра $\mathcal{Z}(G,V)$ группы G, состоящая из всех матриц из Mat_V, коммутирующих со всеми $\rho(g)$, $g \in G$, имеет естественное представление $\pi : \mathcal{Z}(G,V) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^V)$. При этом неприводимые представления группы G, входящие в ρ, находятся в биективном соответствии с неприводимыми представлениями алгебры $\mathcal{Z}(G,V)$ так, что степени представлений группы G совпадают с кратностями представлений алгебры $\mathcal{Z}(G,V)$ и наоборот. Таким образом, с алгебраической точки зрения изучение неприводимых представлений, входящих в перестановочное, сводится к изучению неприводимых представлений соответствующей централизаторной алгебры.

Одно из первых применений централизаторных алгебр в теории групп перестановок связано с задачей характеризации B-групп, т.е. таких групп H, для которых всякая примитивная группа, содержащая регулярную подгруппу, изоморфную H, является 2-транзитивной (см. [11]). В [9] И.Шур доказал, что любая циклическая группа составного порядка является B-группой. Метод Шура состоял в рассмотрении подалгебр W централизаторной алгебры $\mathcal{Z}(H,V)$ регулярного представления H на V, обладающих следующими тремя свойствами:

(C1) $I_V, J_V \in W$;
(C2) $\forall A \in W: \quad A^* \in W$;
(C3) $\forall A, B \in W: \quad A \circ B \in W$,

где I_V – единичная матрица, J_V – матрица состоящая из всех 1, A^* – матрица, эрмитово сопряженная с A, и $A \circ B$ – адамарово (покомпонентное) произведение A и B.

В 1968 году Б.Вейсфейлер и А.Леман пришли к алгебрам W, удовлетворяющим свойствам (C1),(C2) и (C3), изучая проблему изоморфизма конечных графов [10]. Они назвали такие алгебры клеточными, поскольку из (C3) вытекает существование в ней специального линейного базиса $\mathcal{R}$, состоящего из $\{0,1\}$-матриц, и разбиения $V = V_1 \cup \ldots \cup V_s$ (на клетки $V_1, \ldots, V_s$) таких, что все ненулевые элементы матрицы из $\mathcal{R}$ сосредоточены на пересечении строк с номерами из некоторого V_i и столбцов с номерами из некоторого V_j. При этом каждой клетке V_i отвечает клеточная подалгебра алгебры W, состоящая из матриц с носителем в V_i, называемая её однородной компонентой. Например, в случае $W = \mathcal{Z}(G,V)$ клетки совпадают с орбитами группы G, а однородные компоненты – с централизаторными алгебрами её транзитивных составляющих.

Заметим, что с алгебраической точки зрения клеточная алгебра есть не что иное, как специфическое представление конечномерной полупростой алгебры; с комбинаторной же точки зрения наличие специального базиса позволяет рассматривать её как раскрашенный граф, в котором матрица смежности графа с ребрами одного и того же цвета принадлежит $\mathcal{R}$. Раскрашенные графы такого типа были независимо открыты Д.Хигманом в [7] в связи с вопросами существования комбинаторных объектов с фиксированными параметрами и названы когерентными конфигурациями. Частными случаями когерентных конфигураций оказываются ассоциативные схемы и блок-схемы [1].

В настоящей работе мы доказываем два неравенства, связывающие основные алгебраические и комбинаторные инварианты клеточных алгебр. Первая теорема обобщает хорошо известный факт о том, что кратность любого неприводимого представления конечной группы в ее регулярном представлении совпадает со степенью этого представления (случай регулярной клеточной алгебры, т.е. централизаторной алгебры регулярной группы перестановок). В случае произвольной клеточной алгебры $W \subset \mathrm{Mat}_V$ роль регулярного представления играет стандартное представление Δ_{stand} алгебры W, определяемое её вложением в Mat_V. В силу (C2) алгебра W полупроста и ее стандартное представление вполне приводимо, т.е.

$$\Delta_{stand} \cong \sum_{\pi} m_\pi \cdot \pi,$$

где π неприводимое представление алгебры W и m_π – его кратность в Δ_{stand}.

Теорема 1. *Для любого неприводимого представления π клеточной алгебры W выполняется неравенство*

$$n_\pi \leq s(\pi) m_\pi, \tag{1}$$

где $n_\pi = \deg(\pi)$ – степень представления π, а $s(\pi)$ – количество однородных компонент алгебры W, на которых π не равно тождественно нулю. Более того, равенство одновременно для всех неприводимых представлений достигается в том и только в том случае, когда клеточная алгебра W квазирегулярна (т.е. регулярна каждая её однородная компонента).

Следствие[1]**.** *Пусть W – однородная клеточная алгебра. Тогда для любого её неприводимого представления π выполняется неравенство*

$$n_\pi \leq m_\pi.$$

Равенство одновременно для всех неприводимых представлений достигается в том и только в том случае, когда W регулярна.

Хорошо известно, что каждая конечная группа может быть построена расширениями с помощью простых групп. В этом смысле роль примитивных групп для групп перестановок аналогична роли простых групп в теории конечных групп. Однако, если все простые группы известны, то классификация примитивных групп

[1]Когда статья была уже написана, авторы заметили, что приводимое ниже неравенство вытекает также из следствия 8 работы [4] и работы [2] настоящего сборника.

далека от завершения. Ещё хуже дело обстоит с примитивными клеточными алгебрами, структура которых практически не изучена (точное определение примитивной клеточной алгебры приводится в §2; здесь же отметим, что таковыми являются централизаторные алгебры примитивных групп перестановок).

Вторая и третья теоремы, доказываемые в работе, обобщают на клеточные алгебры верхнюю оценку для минимальной подстепени d примитивной группы перестановок G. Имеется в виду оценка $d \leq J(m)$, где m – минимальная степень неглавного неприводимого представления G, входящего в перестановочное, и J – функция Жордана. (Краткое доказательство: из примитивности и теоремы Жордана следует, что в G имеется нормальная абелева подгруппа A индекса, не превосходящего $J(m)$; поэтому $d \leq |G|/n \leq [G:A] \leq J(m)$.)

Для формулировки утверждений определим базисное отношение клеточной алгебры $W \subset \mathrm{Mat}_V$ как бинарное отношение на V, матрица смежности которого принадлежит $\mathcal{R}(W)$. В однородном случае каждое базисное отношение R индуцирует ориентированный граф, у которого степени исхода и захода каждой вершины равны одному и тому же числу $d(R)$, называемому степенью R.

Теорема 2. *Пусть W – однородная клеточная алгебра и A – матрица из W, столбцы которой попарно различны. Тогда найдётся антирефлексивное базисное отношение R алгебры W, для которого*

$$d(R) \leq \tau(2\,\mathrm{rk}(A)),$$

где $\tau(r)$ – контактное число пространства $\mathbb{R}^r$, т.е. максимальное число непересекающихся открытых шаров одного и того же радиуса в $\mathbb{R}^r$, касающихся фиксированного шара того же радиуса, и $\mathrm{rk}(A)$ – ранг матрицы A.

Замечание. *Известно, что $\tau(r) \leq 2^{O(r)}$ (см. [3]).*

Теорема 3. *Для любой примитивной клеточной алгебры W имеет место неравенство*

$$d \leq 2^{O(m)},$$

где d – минимальная степень антирефлексивного базисного отношения алгебры W и m – минимальная кратность её неглавного неприводимого представления в стандартном.

Замечание. *Для примитивной группы перестановок из теоремы 3 следует, что* $d \le 2^{O(m)}$, *где* d *– её минимальная подстепень и* m *– минимальная степень её неприводимого нееdиничного представления, входящего в перестановочное. Это лучше, чем оценка, полученная с помощью теоремы Жордана (см. выше), поскольку, очевидно,* $J(m) \ge (m-1)!$.

Статья организована следующим образом. В §2 приводятся основные определения и факты, связанные с клеточными алгебрами, и описываются некоторые свойства стандартного представления. В §§3 и 4 содержатся доказательства теорем 1 и 2, 3 соответственно. Краткое обсуждение составляет содержание §5.

§2. Клеточные алгебры

На протяжении всей работы мы фиксируем n-элементное множество V и обозначаем через Mat_V алгебру всех комплексных матриц, строки и столбцы которых индексированы элементами множества V. *Клеточной алгеброй* W на V называется подалгебра алгебры Mat_V, удовлетворяющая свойствам (C1)-(C3) (см. §1).

Замкнутость алгебры W относительно адамарова умножения влечёт существование у неё единственным образом определённого линейного базиса $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$, состоящего из $\{0,1\}$-матриц, для которого

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} R = J_V \quad \text{и} \quad R \in \mathcal{R} \Leftrightarrow R^T \in \mathcal{R},$$

где R^T – матрица, транспонированная к R. Этот базис называется *стандартным базисом* алгебры W. Матрицы из $\mathcal{R}$ и их суммы могут рассматриваться как матрицы смежности бинарных отношений на V. Мы будем отождествлять такие матрицы с соответствующими отношениями и называть элементы стандартного базиса *базисными отношениями*.

Разложение I_V по стандартному базису индуцирует однозначно определённое дизъюнктное разбиение множества V:

$$V = \bigcup_{i=1}^{s} V_i.$$

Каждое множество V_i называется *клеткой* алгебры W. Множество всех клеток обозначается через $\mathrm{Cel}(W)$. Для каждого отношения $R \in \mathcal{R}$ однозначно определены целые числа $i, j \in [1, s]$, для которых $R\subset V_i\times V_j$. При этом число единиц в u-ой строке (соответственно v-ом столбце) матрицы R не зависит от выбора $u\in V_i$ (соответственно $v\in V_j$); это число обозначается через $d_{\mathrm{out}}(R)$ (соответственно $d_{\mathrm{in}}(R)$).

Однородной компонентой клеточной алгебры W, отвечающей клетке $U\in\mathrm{Cel}(W)$, назовём её подалгебру W_U, порождённую базисными отношениями с носителем в U. Заметим, что сама W_U может рассматриваться как клеточная алгебра на U. Будем говорить, что W *однородна*, если $|\mathrm{Cel}(W)|=1$. Однородная клеточная алгебра W называется *примитивной*, если единственными отношениями эквивалентности, принадлежащими W, являются I_V и J_V.

Клеточная алгебра W называется *регулярной*, если она однородна и $|\mathcal{R}|=n$. Каждая регулярная алгебра является централизаторной алгеброй регулярной группы перестановок. Будем говорить, что W *квазирегулярна*, если каждая её однородная компонента регулярна.

Если $R,S\in\mathcal{R}$, то

$$RS=\sum_{T\in\mathcal{R}}\alpha_{RS}^{T}T,$$

где α_{RS}^{T} – неотрицательные целые числа. Ниже мы воспользуемся следующим тождеством, доказанным в [10]:

$$d_{\mathrm{out}}(T)\alpha_{RS}^{T^*}=d_{\mathrm{out}}(R)\alpha_{ST}^{R^*},\qquad R,S,T\in\mathcal{R}. \tag{2}$$

В силу замкнутости алгебры W относительно эрмитова сопряжения она является полупростой алгеброй над $\mathbb{C}$ и поэтому по теореме Веддерберна изоморфна прямому произведению полных матричных алгебр:

$$W\cong\prod_{\pi\in\mathrm{Irr}(W)}\mathrm{Mat}_{n_\pi},$$

где $\mathrm{Irr}(W)$ – множество всех классов эквивалентных между собой неприводимых представлений алгебры W и $n_\pi=\deg(\pi)$ – степень представления π. Отсюда следует, что

$$|\mathcal{R}(W)|=\dim_{\mathbb{C}}(W)=\sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(W)}n_\pi^2. \tag{3}$$

Алгебра Mat_V действует естественным образом на линейном пространстве $\mathbb{C}^V$ с множеством V в качестве $\mathbb{C}$-базы. Ограничение этого действия на W определяет точное линейное представление

$$\Delta_{\mathrm{stand}} : W \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^V),$$

называемое *стандартным* представлением алгебры W. В силу полной приводимости линейных представлений алгебры W над $\mathbb{C}$ имеем

$$\Delta_{\mathrm{stand}} \cong \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(W)} m_\pi \pi,$$

где m_π – кратность представления π в стандартном представлении алгебры W, откуда

$$n = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(W)} m_\pi n_\pi, \tag{4}$$

поскольку $\deg(\Delta_{\mathrm{stand}}) = n$.

У каждой клеточной алгебры имеется выделенное неприводимое представление. А именно, для клетки U положим $x_U = \sum_{v \in U} v$. Тогда линейное подпространство пространства $\mathbb{C}^V$, натянутое на векторы x_U, $U \in \mathrm{Cel}(W)$, является W-инвариантным. Соответствующее представление неприводимо, имеет степень $|\mathrm{Cel}(W)|$ и кратность 1 и называется *главным* представлением клеточной алгебры W (см. [10]).

Для неприводимого представления $\pi : W \to \mathrm{End}(L)$ алгебры W и клетки U подпространство $L_U = \pi(I_U)L$ инвариантно относительно однородной компоненты W_U. Возникающее таким образом представление алгебры W_U в пространстве L_U обозначим через π_U. Положим

$$\mathrm{Irr}_U(W) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(W) : \ \pi_U \neq 0\},$$

$$\mathrm{Supp}(\pi) = \{U \in \mathrm{Cel}(W) : \ \pi_U \neq 0\}.$$

Следующее предложение в других обозначениях для случая двухклеточной алгебры было доказано в [10].

Предожение 2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $U \in \mathrm{Supp}(\pi)$, *то* π_U *– неприводимое представление алгебры* W_U;

2) *отображение* $\pi \mapsto \pi_U$ *индуцирует биекцию*

$$\mathrm{Irr}_U(W) \to \mathrm{Irr}(W_U); \tag{5}$$

3) *справедливы равенства:*

$$n_\pi = \sum_{U \in \mathrm{Supp}(\pi)} n_{\pi_U}, \tag{6}$$

$$m_\pi = m_{\pi_U}, \quad U \in \mathrm{Supp}(\pi). \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что если $U \in \mathrm{Supp}(\pi)$, то $T_U = \pi(I_U)$ является ненулевым идемпотентом в $\mathrm{End}(L)$. С другой стороны, $\pi(W) = \mathrm{End}(L)$ в силу неприводимости π. Таким образом,

$$\pi_U(W_U) = \pi(I_U W I_U)|_{L_U} = (T_U \,\mathrm{End}(L) T_U)|_{L_U} = \mathrm{End}(L_U),$$

что доказывает неприводимость π_U.

В силу утверждения 1 отображение (5) корректно определено. Если $I_V = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(W)} P_\pi$ – разложение единицы в W, где P_π – примитивный центральный идемпотент алгебры W, отвечающий π, то $I_U = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}_U(W)} I_U P_\pi = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}_U(W)} P_{\pi_U}$ – разложение единицы в W_U. Это доказывает биективность отображения (5).

Докажем утверждение 3. Поскольку $I_V = \sum_{U \in \mathrm{Cel}(W)} I_U$, то

$$L = \sum_{U \in \mathrm{Supp}(\pi)} \pi(I_U) L = \sum_{U \in \mathrm{Supp}(\pi)} L_U$$

и сумма является прямой, что доказывает формулу (6). Для доказательства (7) разложим пространство $P_\pi \mathbb{C}^V$ в прямую сумму неприводимых относительно W подпространств: $P_\pi \mathbb{C}^V = \sum_{i=1}^{m_\pi} L_i$. Тогда $P_{\pi_U} \mathbb{C}^U = I_U P_\pi \mathbb{C}^U = \sum_{i=1}^{m_\pi} I_U L_i$. Если $U \in \mathrm{Supp}(\pi)$, то в силу утверждения 1 подпространство $I_U L_i$ неприводимо относительно W_U. Таким образом, $m_\pi = m_{\pi_U}$.

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть W - клеточная алгебра на V. Определим на множестве линейных функционалов на W скалярное произведение, полагая

$$(f, g) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \frac{1}{|R|} \overline{f(R)} g(R),$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}(W)$ – стандартный базис алгебры W.

Предложение 3.1. *Для однородной клеточной алгебры W имеют место следующие формулы:*

1) $(\chi_\pi, \chi_\rho) = 0$, *если* $\pi \neq \rho$;
2) $(\chi_\pi, \chi_\pi) \le 1$,

где χ_π, χ_ρ *– характеры неприводимых представлений* π, ρ *алгебры* W.

Прежде чем доказывать предложение 3.1, покажем, как из него выводится теорема 1. Предположим сначала, что W однородна.

Обозначим через χ_{stand} характер стандартного представления алгебры W. Тогда легко видеть, что для $R \in \mathcal{R}$

$$\chi_{\mathrm{stand}}(R) = \begin{cases} n, & \text{если } R = I_V; \\ 0, & \text{если } R \neq I_V, \end{cases}$$

и, следовательно, $(\chi_\pi, \chi_{\mathrm{stand}}) = n_\pi$ для всех $\pi \in \mathrm{Irr}(W)$. С другой стороны, записывая χ_{stand} в виде суммы неприводимых характеров $\chi_{\mathrm{stand}} = \sum_{\rho \in \mathrm{Irr}(W)} m_\rho \chi_\rho$, по предложению 3.1 имеем

$$(\chi_\pi, \chi_{\mathrm{stand}}) = \sum_{\rho \in \mathrm{Irr}(W)} m_\rho (\chi_\pi, \chi_\rho) = m_\rho (\chi_\pi, \chi_\pi) \le m_\pi.$$

Сравнивая, получаем, что $n_\pi \le m_\pi$.

Для произвольной клеточной алгебры из утверждения 1 предложения 2.1 и сказанного выше следует, что $n_{\pi_U} \le m_{\pi_U}$ для всех $U \in \mathrm{Supp}(\pi)$. Таким образом, в силу формул (6) и (7) имеем $n_\pi \le |\mathrm{Supp}(\pi)| m_\pi$, что доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части рассмотрим сначала однородный случай. В силу (3), (4)

$$\sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(W)} n_\pi^2 = |\mathcal{R}| \le n = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(W)} m_\pi n_\pi.$$

Поэтому по первой части теоремы $m_\pi = n_\pi$ для всех π тогда и только тогда, когда $|\mathcal{R}| = n$, т.е. алгебра W регулярна. В общем случае в силу (6), (7) и первой части теоремы

$$\sum_{U \in \mathrm{Supp}(\pi)} n_{\pi_U} = n_\pi \le |\mathrm{Supp}(\pi)| m_\pi = \sum_{U \in \mathrm{Supp}(\pi)} m_{\pi_U}.$$

Поэтому равенство в формуле (1) одновременно для всех π выполняется тогда и только тогда, когда

$$n_{\pi_U} = m_{\pi_U} \qquad \text{для всех } \pi \text{ и } U \in \mathrm{Supp}(\pi).$$

Согласно сюръективности отображения (5) это раносильно тому, что для каждой клетки $U \in \mathrm{Cel}(W)$ равенство $n_\rho = m_\rho$ имеет место для всех $\rho \in \mathrm{Irr}(W_U)$. По доказанному выше последнее означает, что алгебра W квазирегулярна.

Обратимся теперь к доказательству предложения 3.1. Докажем сначала, одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть $\pi_i : W \to \mathrm{End}(L_i)$ – неприводимое представление клеточной алгебры W в пространстве L_i $(i = 1, 2)$ и*

$$h^0 = \sum_{R\in\mathcal{R}} \frac{1}{|R|}\pi_2(R^*)h\pi_1(R),$$

где $h \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$. Тогда

1) *если π_1 и π_2 неэквивалентны, то $h^0 = 0$;*
2) *если $\pi_1 = \pi_2$, то h^0 – скалярный оператор умножения на $\frac{1}{d}\,\mathrm{Tr}(h^0)$, где $d = \dim(L_1) = \dim(L_2)$.*

Доказательство. По лемме Шура достаточно показать, что равенство $h^0\pi_1(S) = \pi_2(S)h^0$ выполнено для всех $S \in \mathcal{R}$. Согласно (2) имеем $|T|\alpha^T_{R,S} = |R|\alpha^{R^*}_{S,T^*}$, где $R, S, T \in \mathcal{R}$, откуда находим

$$h^0\pi_1(S) = \sum_R \frac{1}{|R|}\pi_2(R^*)h\pi_1(R)\pi_1(S) = \sum_R \frac{1}{|R|}\pi_2(R^*)h\sum_T \alpha^T_{R,S}\pi_1(T) =$$

$$= \sum_T(\sum_R \frac{1}{|R|}\alpha^T_{R,S}\pi_2(R^*))h\pi_1(T) = \sum_T(\sum_R \frac{1}{|T|}\alpha^{R^*}_{S,T^*}\pi_2(R^*))h\pi_1(T) =$$

$$= \sum_T \frac{1}{|T|}\pi_2(ST^*)h\pi_1(T) = \pi_2(S)\sum_T \frac{1}{|T|}\pi_2(T^*)h\pi_1(T) = \pi_2(S)h^0.$$

Лемма доказана.

Поскольку первое утверждение предложения 3.1 хорошо известно (см., например, [8]), мы докажем лишь второе. Обозначим через a_{ij} матричные коэффициенты представления π в некотором ортонормированном базисе. Поскольку можно считать, что π является $*$-представлением алгебры W, то $a_{ij}(A^*) = \overline{a_{ji}(A)}$ для всех $A \in W$. В обозначениях леммы 3.2 с $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ пусть h и h^0 задаются матрицами (h_{ij}) и (h^0_{ij}) соответственно. Тогда по определению h^0

$$h^0_{i_1j_1} = \sum_{R\in\mathcal{R}} \frac{1}{|R|}\sum_{i,j=1}^{n_\pi} a_{i_1i}(R)h_{ij}a_{jj_1}(R) = \sum_{R\in\mathcal{R}} \frac{1}{|R|}\sum_{i,j=1}^{n_\pi} \overline{a_{ii_1}(R)}h_{ij}a_{jj_1}(R).$$

С другой стороны, в силу утверждения 2 леммы 3.2

$$h^0_{i_1j_1} = \frac{\delta_{i_1j_1}}{n_\pi}\sum_{l=1}^{n_\pi}\sum_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{|R|}\sum_{i,j=1}^{n_\pi} a_{li}(R^*)h_{ij}a_{jl}(R) =$$

$$= \frac{\delta_{i_1j_1}}{n_\pi}\sum_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{|R|}\sum_{l=1}^{n_\pi}\sum_{i,j=1}^{n_\pi}\overline{a_{il}(R)}h_{ij}a_{jl}(R).$$

Поскольку два полученных выражения для $h^0_{i_1j_1}$ совпадают как линейные формы относительно h_{ij}, равны и соответствующие коэффициенты:

$$\sum_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{|R|}\overline{a_{ii_1}(R)}a_{jj_1}(R) = \frac{\delta_{i_1j_1}}{n_\pi}\sum_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{|R|}\sum_{l=1}^{n_\pi}\overline{a_{il}(R)}a_{jl}(R) \tag{8}$$

для всех $i, j, i_1, j_1 \in [1, n_\pi]$. Покажем, что

$$|\sum_{l=1}^{n_\pi}\overline{a_{il}(R)}a_{jl}(R)| \le d(R)^2 \tag{9}$$

для всех $i, j \in [1, n_\pi]$ и $R \in \mathcal{R}$, где $d(R) = d_{in}(R) = d_{\rm out}(R)$ – степень отношения R. Для этого достаточно показать, что

$$\|Rx\| \le d(R)\|x\|, \qquad x \in \mathbb{C}^V, \tag{10}$$

т.е. операторная норма $\|R\|$ матрицы R не превосходит $d(R)$.

Положим $R_0 = \frac{1}{d(R)}R$. Тогда матрица R_0 является дважды стохастической. По теореме Бирхгофа R_0 может быть представлена в виде выпуклой комбинации перестановочных матриц P_k:

$$R_0 = \sum_{k=1}^{d} c_kP_k, \quad \sum_{k=1}^{d} c_k = 1, \quad c_k \ge 0.$$

Таким образом, поскольку, очевидно, $\|P_k\| = 1$ для всех k, имеем

$$\|R_0\| \le \sum_{k=1}^{d} c_k\|P_k\| = \sum_{k=1}^{d} c_k = 1,$$

что доказывает (10) и, следовательно, (9).

Используя (8), находим

$$(\chi_\pi, \chi_\pi) = \sum_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{|R|}\overline{\chi_\pi(R)}\chi_\pi(R) =$$

$$\sum_{R\in\mathcal{R}} \frac{1}{|R|} \sum_{i,j=1}^{n_\pi} \overline{a_{ii}(R)} a_{jj}(R) = \frac{1}{n_\pi} \sum_{R\in\mathcal{R}} \frac{1}{|R|} \sum_{i=1}^{n_\pi} \sum_{l=1}^{n_\pi} \overline{a_{il}(R)} a_{il}(R).$$

Следовательно, в силу (9) и того факта, что $|R| = nd(R)$, получаем

$$|(\chi_\pi, \chi_\pi)| \le \frac{1}{n_\pi} \sum_{R\in\mathcal{R}} \frac{1}{|R|} \cdot n_\pi \cdot d(R)^2 = \frac{1}{n} \sum_{R\in\mathcal{R}} d(R) = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Предложение 3.1 и теорема 1 доказаны.

§4. Доказательство теорем 2 и 3

Докажем сначала теорему 2. Пусть L – линейное подпространство пространства $\mathbb{C}^V$, натянутое на столбцы матрицы A. Положим

$$\rho = \min_{\substack{u,v\in V,\\ u\ne v}} \|Au - Av\|,$$

где $\|\,\|$ – евклидова норма в $\mathbb{C}^V$. По условию $\rho > 0$. Определим неориентированный граф $\Gamma = \Gamma(A)$ с множеством вершин V и множеством ребер $E = \{(u,v) :\ \|Au - Av\| = \rho\}$.

Для $v \in V$ обозначим через $B(v, \rho/2)$ шар в L радиуса $\rho/2$ с центром в Av. Пусть u – фиксированная вершина графа Γ и S – множество вершин этого графа, смежных с u. Тогда в $L \cong \mathbb{R}^{2r}$ имеется конфигурация, состоящая из $|S|$ непересекающихся по внутренности шаров радиуса $\rho/2$, касающихся шара $B(u, \rho/2)$. По определению контактного числа имеем $|S| \le \tau(2r)$.

В силу однородности алгебры W число $\|Av\|$ не зависит от выбора $v \in V$. Поэтому $\|Au - Av\|$ определяется скалярным произведением $< Au, Av >$ векторов Au и Av. Поскольку матрица $AA^* = (< Au, Av >)_{u,v\in V}$ принадлежит алгебре W, замкнутой относительно адамарова умножения, мы заключаем, что $E \in W$. Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно выбрать в качестве R любое базисное отношение, содержащееся в E.

Для доказательства теоремы 3 обозначим через π неприводимое неглавное представление алгебры W, входящее в стандартное с кратностью m. Пусть W_π – простая подалгебра алгебры W, отвечающая π, и A – её примитивный идемпотент. Тогда $\mathrm{rk}(A) = m$, причём не все столбцы матрицы A совпадают. Поэтому теорема 3 вытекает из теоремы 2 и замечания к ней, примитивности W и следующей леммы.

Лемма. *Пусть W клеточная алгебра на V. Для $A \in \mathrm{Mat}_V$ положим*

$$\mathrm{Eq}(A) = \{(u, v) \in V \times V : \ Au = Av \neq 0\}.$$

Тогда $A \in W$ влечёт $\mathrm{Eq}(A) \in W$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{Eq}\Big(\sum_{R \in \mathcal{R}} \alpha_R R\Big) = \bigcup_{U \in \mathrm{Cel}(W)} \mathrm{Eq}\Big(\sum_{R \subset V \times U} \alpha_R R\Big) =$$

$$\bigcup_{U \in \mathrm{Cel}(W)} \bigcap_{\alpha \neq 0} \mathrm{Eq}\Big(\sum_{R \subset V \times U, \alpha_R = \alpha} R\Big),$$

достаточно доказать лемму для ненулевой матрицы $A = \sum_R R$, где R пробегает некоторое подмножество базисных отношений, содержащихся в $V \times U$ для фиксированной клетки U. Для такой матрицы A имеем

$$A^T A = d_{\mathrm{in}}(A)\, \mathrm{Eq}(A) + B,$$

где $d_{\mathrm{in}}(A) = \sum_R d_{\mathrm{in}}(R)$ и $B = (B_{u,v})$ – матрица с $0 \leqslant B_{u,v} < d_{\mathrm{in}}(A)$ для всех $u, v \in V$ и $B \circ \mathrm{Eq}(A) = 0$. Отсюда следует, что $\mathrm{Eq}(A) \in W$.

§5. Заключительные замечания

Теорема 3 указывает функцию $f(x) = 2^{O(x)}$, обладающую тем свойством, что в любой примитивной клеточной алгебре выполняется неравенство $d \leq f(m)$. Интерес представляет и обратное утверждение: верно ли, что для любой примитивной клеточной алгебры $m \leq g(d)$ для некоторой функции g. Из него и результатов работы [6] следовало бы обобщение на группы автоморфизмов примитивных клеточных алгебр теоремы из [5] о порядке примитивных групп перестановок. Отметим, что сформулированное утверждение выполняется для примитивных S-колец над абелевыми группами (см. [1]). Это следует из теоремы 3 поскольку для каждой такой клеточной алгебры имеется двойственная клеточная алгебра (являющаяся примитивным S-кольцом над той же группой), степени базисных отношений которой совпадают с кратностями неприводимых представлений исходной и наоборот.

Литература

1. Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика 1. Схемы отношений.* Москва, "Мир", 1987.
2. А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *С-алгебры и алгебры в планшерелевой двойственности.* Этот сборник.
3. Г. А. Кабатянский, В. И. Левенштейн, *О границах для упаковок на сфере и в пространстве.* — Пробл. передачи информ., вып.1, **14** (1978), 3–25.
4. С. В. Керов, *Двойственность конечномерных $*$-алгебр.* — Вестник ЛГУ, сер. матем. **7** (1974), 23–29.
5. P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl, G. M. Seitz, *On the Sims conjecture and distance transitive graphs.* — Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 499–506.
6. S. A. Evdokimov, I. N. Ponomarenko, *Isomorphism of Coloured Graphs with Slowly Increasing Multiplicity of Jordan Blocks.* Research Report No. 85136-CS, University of Bonn, April 1995..
7. D. G. Higman, *Coherent configurations 1.* — Rend. del Sem. Math. Univ. Padova. **44** (1970), 1–25.
8. D. G. Higman, *Coherent Algebras.* — Linear Algebra Appl. **93** (1987), 209–240.
9. I. Shur, *Zur Theorie der einfach transitiven Permutationengruppen.* — Preuss. Acad. Wiss., Phis.-math. Kl. **18/20** (1933), 598–623.
10. B. Weisfeiler (editor), *On the construction and identification of graphs.* — Lect. Notes. Math. **558** (1976).
11. H. Wielandt, *Finite permutation groups.* Academic press, New York - London, 1964.

Evdokimov S. A., Ponomarenko I. N. Two inequalities for parameters of a cellular algebra.

Two inequalities are proved. The first one generalizes for cellular algebras a well-known theorem about coincidence of the degree and the multiplicity of an irreducible representation of a finite group in the regular representation of it. The second inequality which is proved for primitive cellular algebras, gives an upper bound for the minimum subdegree of a primitive permutation group in terms of the degrees of its irreducible representations in the permuation representation.

С.-Петербургский институт
Информатики и Автоматизации
РАН

Поступило 2 сентября 1996г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН