М. И. Белишев, А. Б. Пушницкий

# К ТРЕУГОЛЬНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

## Введение

В работе [1] в рамках подхода к обратным задачам, использующего теорию граничного управления*) была предложена конструкция, дающая представление оператора управления динамической системы через операторный интеграл. Она имеет динамическую природу, связанную с распространением разрывов волновых полей. Элементы конструкции явно и достаточно просто определяются данными обратных задач, что делает ее эффективным инструментом их решения. За конструкцией закрепилось название "амплитудный интеграл" (АИ).

Со временем АИ выдвинулся на первый план: он составляет основу последней версии BC-метода [2, 3]. Выяснилось, что АИ решает некоторую задачу треугольной факторизации, что не является неожиданным в свете традиционных и глубоких связей обратных и факторизационных задач [2–6, 10]. Все сказанное стимулировало интерес к самой конструкции АИ. В настоящей работе предпринята попытка начать ее систематическое исследование.

Для непрерывного оператора и пары цепочек подпространств мы вводим континуальный аналог матричной диагонали. Обсуждается вопрос о ее существовании; приводится пример оператора, не имеющего диагонали вдоль непрерывной цепочки.

Выясняется роль диагонали в задаче треугольной факторизации. Обобщается известный в теории матриц результат: факторизация, имеющая заданную диагональ, единственна. Соответствующий фактор представляется в виде АИ.

Устанавливается соответствие АИ и классической конструкции М. С. Бродского–М. Г. Крейна–М. С. Лившица, факторизующей операторы вида "единичный плюс компактный".

*)т.н. BC-метод (от Boundary Control).

Работа выполнена в рамках проекта INTAS 93 1815 и поддержана грантом РФФИ No. 96–01–00666. Авторы признательны проф. С. Н. Набоко за полезные обсуждения и консультации.

## §1. Диагональ оператора

**1.1. Определение и общие свойства.** В гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ рассматривается семейство подпространств $\{\mathcal{F}^\xi\}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$; пусть $X^\xi$ суть (орто) проекторы в $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^\xi$. Это семейство мы называем *цепочкой*, если

$$\mathcal{F}^{\xi_1} \subseteq \mathcal{F}^{\xi_2}, \quad \xi_1 < \xi_2.$$

Скажем, что цепочка *окаймлена*, если

$$\mathcal{F}^0 = \{0\}; \quad \mathcal{F}^T = \mathcal{F}$$

и *непрерывна*, если семейство $X^\xi$ (сильно) непрерывно по $\xi \in [0,T]$.

Определение, приводимое ниже относится к паре пространств $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ и паре произвольных цепочек $\{\mathcal{F}^\xi\}$, $\{\mathcal{H}^\xi\}$ в них; через $P^\xi$ обозначаются проекторы в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\xi$. Пусть $\Xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_N = T$ есть (конечное) разбиение отрезка $[0,T]$; $r(\Xi) := \max(\xi_k - \xi_{k-1})$ – его ранг; обозначим $\Delta_k X^\xi := X^{\xi_k} - X^{\xi_{k-1}}$; $\Delta_k P^\xi := P^{\xi_k} - P^{\xi_{k-1}}$, $k = 1, \ldots, N$. Для произвольного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ определена сумма

$$S_\Xi := \sum_{k=1}^N \Delta_k P^\xi A \Delta_k X^\xi, \tag{1.1}$$

также являющаяся ограниченным оператором из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}$.

**Определение.** *Предел*

$$\lim_{r(\Xi)\to 0} S_\Xi =: \int_0^T dP^\xi A dX^\xi \tag{1.2}$$

*(слабый, сильный или равномерный) мы называем диагональю оператора $A$ относительно цепочек $\{\mathcal{F}^\xi\}$ и $\{\mathcal{H}^\xi\}$.*

Предельный переход производится по последовательности разбиений и мы, разумеется, предполагаем, что предел не зависит от ее выбора. Ниже мы будем указывать тип сходимости операторного интеграла (1.2) только в случаях, когда характер сходимости существенен.

Интеграл (1.2) является континуальным аналогом матричной диагонали. В случае $\mathcal{F} = \mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ для цепочки подпространств $\mathcal{F}^\xi = \mathcal{H}^\xi = \{x = \mathrm{col}\{x^k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n\colon x^{\xi+1} = x^{\xi+2} = \ldots = x^n = 0\}$, $\xi = 1, \ldots, n-1$; $\mathcal{F}^0 = \{0\}$, $\mathcal{F}^n = \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_k X^\xi A \Delta_k X^\xi = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & \mathbb{O} & \\ \mathbb{O} & & \ddots & \\ & & & a_{nn}. \end{pmatrix}$$

На области его сходимости интеграл (1.2) определяет ограниченный трансформатор

$$A \to \int_0^T dP^\xi A dX^\xi. \tag{1.3}$$

Ограниченность видна из оценок

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \Delta_k P^\xi A \Delta_k X^\xi f \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta P_k^\xi A \Delta_k X^\xi f \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|^2 \sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta_k X^\xi f \right\|_{\mathcal{F}}^2 = \|A\|^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2;$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \Delta_k P^\xi A \Delta_k X^\xi \right\| \leqslant \|A\|; \left\| \int_0^T dP^\xi A dX^\xi \right\| \leqslant \|A\|.$$

Следующие свойства интеграла (1.2) легко проверяются:

(i) для любого $\tau \in [0, T]$ выполнено равенство

$$\left[ \int_0^T dP^\xi A dX^\xi \right] X^\tau = P^\tau \int_0^T dP^\xi A dX^\xi;$$

(ii) интегралы $\int_0^T dP^\xi A dX^\xi$ и $\int_0^T dX^\xi A^* dP^\xi$ сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости

$$\left( \int_0^T dP^\xi A dX^\xi \right)^* = \int_0^T dX^\xi A^* dP^\xi;$$

(iii) если операторы $V \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ и $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ таковы, что $VX^\xi = X^\xi V$ и $WP^\xi = P^\xi W$ для всех $\xi$, то справедливо соотношение

$$\int\limits_0^T dP^\xi (WAV) dX^\xi = W\Bigl(\int\limits_0^T dP^\xi A dX^\xi\Bigr) V;$$

(iv) трансформатор (1.3) идемпотентен.

Вопроса об области определения трансформатора (1.3) (области сходимости интеграла (1.2)) мы коснемся в п. 1.2; как будет показано, она не совпадает со всем $\mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{H})$.

Предположим, что оператор $A$ *треуголен* относительно пары цепочек $\{\mathcal{F}^\xi\}$, $\{\mathcal{H}^\xi\}$, т.е.

$$A\mathcal{F}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi, \qquad \xi \in [0,T].$$

В этом случае имеем соотношения

$$\left(P^{\xi_k} - P^{\xi_{k-1}}\right) AX^{\xi_{k-1}} = \mathbb{O}; \qquad \left(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P^{\xi_k}\right) A\Delta_k X^\xi = \mathbb{O},$$

с учетом которых римановы суммы (1.1) преобразуются к виду

$$\sum_{k=1}^N \Delta_k P^\xi A \Delta_k X^\xi = \sum_{k=1}^N \Delta_k P^\xi A X^{\xi_k} = \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P^{\xi_{k-1}}\right) A \Delta_k X^\xi. \tag{1.4}$$

Форма (1.4) мотивирует следующие записи интеграла (1.2):

$$\int\limits_0^T dP^\xi A dX^\xi = \int\limits_0^T dP^\xi A X^{\xi +} = \int\limits_0^T \left(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P^{\xi -}\right) A dX^\xi, \tag{1.5}$$

где индексы “$\pm$” указывают на то, что в интегральной сумме значения оператор-функций $X^\xi$ и $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P^\xi$ берутся соответственно на правом и левом концах отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Аналогично, для произвольной оператор-функции $G(\xi)$ интегралы

$$\int\limits_0^T G(\xi_-) dX^\xi, \qquad \int\limits_0^T G(\xi_+) dX^\xi$$

будут пониматься, как пределы сумм

$$\sum_{k=1}^N G\left(\xi_{k-1}\right) \Delta_k X^\xi, \qquad \sum_{k=1}^N G\left(\xi_k\right) \Delta_k X^\xi.$$

**1.2. Существование диагонали.** Здесь мы рассмотрим случаи сходимости и расходимости интеграла (1.2).

**Предложение 1.1.** (i) *Пусть оператор $W$ диагонален относительно пары цепочек $\{\mathcal{F}^\xi\}$, $\{\mathcal{H}^\xi\}$, т.е.*

$$P^\xi W = WX^\xi, \qquad \xi \in [0, T];$$

*тогда верно равенство*

$$\int_0^T dP^\xi W dX^\xi = W.$$

(ii) *Пусть оператор $K$ компактен (из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}$) и цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$, $\{\mathcal{H}^\xi\}$ непрерывны; тогда справедливо равенство*

$$\int_0^T dP^\xi K dX^\xi = \mathbb{O},$$

*причем интеграл сходится равномерно.*

Доказательство свойства (i) тривиально; по поводу доказательства (ii) заметим следующее. Для случая $\mathcal{F} = \mathcal{H}$, $\mathcal{F}^\xi = \mathcal{H}^\xi$ оно приведено в [4; гл. I, Лемма 5.1]; наша ситуация рассматривается по вполне аналогичной схеме.

В приложениях имеются содержательные примеры (см. [1–3]), которые показывают, что область определения трансформатора (1.3) не исчерпывается операторами вида “диагональный плюс компактный”. В то же время существуют непрерывные операторы, не имеющие диагонали даже в слабом смысле. Коротко опишем пример.

Положим $\mathcal{F} = \mathcal{H} = L_2(0,1)$; $\mathcal{F}^\xi = \mathcal{H}^\xi = L_2(0,\xi)$, $\xi \in [0,1]$. Введем функцию $f_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f_\omega(p) = e^{i\omega \ln(p+i)} = e^{i\omega \ln|p+i|} e^{-\omega \arg(p+i)},$$

где $0 < \arg(p+i) < \pi$; $\omega \neq 0$ – вещественный параметр. Функция $f_\omega$ аналитична в верхней полуплоскости и ограничена в ней; $f_\omega \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\|f\|_\infty \leqslant \exp|\omega|\pi$. Пусть $F$ – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$;

$$(Fg)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} g(x)dx;$$

$X : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0,1)$ – оператор сужения. Определим оператор $A_\omega : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ равенством

$$A_\omega = XF^{-1}\widehat{f}_\omega FX^*,$$

где $\widehat{f}_\omega$ – оператор умножения на $f_\omega(\cdot)$ в $L_2(\mathbb{R})$. Поскольку $f_\omega \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, то, как легко проверить,

$$A_\omega \mathcal{F}^\xi \subset \mathcal{F}^\xi, \quad \xi \in [0,1],$$

т.е. оператор $A_\omega$ треуголен относительно $\{\mathcal{F}^\xi\}$. Пусть $\Xi^{(N)}$ – последовательность равномерных разбиений отрезка $[0,1]$ на интервалы длины $1/N$. Покажем, что при некоторых значениях параметра $\omega$ соответствующие интегральные суммы (1.1) не имеют предела при $N \to \infty$ даже в слабом смысле.

Положим $u = u(x) \equiv 1$, $x \in [0,1]$; тогда

$$(S_{\Xi^{(N)}}u, u) = \sum_{k=1}^{N} \left(A_\omega \Delta_k X^\xi u, \Delta_k X^\xi u\right) =$$

$$= N \int_{-\infty}^{\infty} dp f_\omega(p) \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1/N} e^{-ipx} dx \right|^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi} N \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(p) \frac{\sin^2(p/2N)}{p^2} dp = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(2Np) \frac{\sin^2 p}{p^2} dp =: I_\omega(N).$$

Как нетрудно видеть

$$\lim_{N\to\infty} f_\omega(2Np) e^{-i\omega \ln 2N} = \begin{cases} e^{i\omega \ln p}, & p > 0 \\ e^{i\omega \ln |p|} e^{-\omega\pi}, & p < 0. \end{cases}$$

Отсюда извлекается асимптотика для $I_\omega(N)$ при $N \to \infty$:

$$I_\omega(N) = e^{i\omega \ln 2N} \left(1 + e^{-\omega\pi}\right) \int_0^\infty e^{i\omega \ln p} \frac{\sin^2 p}{p^2} dp + o(1) =$$

$$= e^{i\omega \ln 2N} \left(1 + e^{-\omega\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} \frac{\sin^2 e^s}{e^s} ds + o(1).$$

при надлежащем выборе параметра $\omega$ интеграл в правой части последнего равенства отличен от нуля. В этом случае $I_\omega(N)$ не имеет предела, а оператор $A_\omega$ не имеет диагонали вдоль $\{\mathcal{F}^\xi\}$.

Как следствие заключаем, что для произвольной пары цепочек трансформатор (1.3), вообще говоря, определен не на всем $\mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{H})$.

## §2. Амплитудный интеграл

**2.1. Треугольная факторизация.** Пусть $\{\mathcal{F}^\xi\}$, $\xi \in [0,T]$ есть окаймленная цепочка в $\mathcal{F}$; $C \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ – положительный оператор: $(Cf,f)_\mathcal{F} \geqslant 0$, $f \in \mathcal{F}$. Говорят, что оператор $C$ допускает (треугольную) факторизацию вдоль цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$, если существует оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, такой, что

$$V\mathcal{F}^\xi \subseteq \mathcal{F}^\xi, \qquad \xi \in [0,T] \tag{2.1}$$

и выполнено равенство

$$C = V^*V. \tag{2.2}$$

Имея ввиду свойство (2.1), говорят, что оператор $V$ треуголен относительно $\{\mathcal{F}^\xi\}$.

Приведем простое достаточное условие факторизуемости. Скажем, что цепочка $\{\mathcal{H}^\xi\}$ в $\mathcal{H}$ *изометрична* цепочке $\{\mathcal{F}^\xi\}$, если существует изометрический оператор $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$, такой, что

$$\Phi\mathcal{F}^\xi = \mathcal{H}^\xi$$

для всех $\xi$. При этом изометрия $\Phi$ сплетает соответствующие проекторы

$$\Phi X^\xi = P^\xi \Phi, \qquad \xi \in [0,T]. \tag{2.3}$$

**Предложение 2.1.** *Пусть $C$ – положительный оператор, $C^{1/2}$ – (положительный) корень из $C$. Если цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$ и $\{\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi\}$ изометричны, то оператор $C$ допускает факторизацию вдоль $\{\mathcal{F}^\xi\}$.*

**Доказательство.** Положим $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, $\mathcal{H}^\xi = \operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi$; пусть $\Phi$ есть, определенная на $\mathcal{F}$, изометрия со свойством (2.3). Отметим равенства

$$\mathcal{F}^\xi = \Phi^*\mathcal{H}^\xi; \quad \Phi\Phi^* = P^T; \quad P^T C^{1/2} = C^{1/2}.$$

Оператор $V = \Phi^* C^{1/2}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} V^*V = C^{1/2}\Phi\Phi^*C^{1/2} = C; \\ \operatorname{clos} V\mathcal{F}^\xi = \Phi^* \operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi = \Phi^*\mathcal{H}^\xi = \mathcal{F}^\xi. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Следовательно, он факторизует $C$ в смысле (2.1), (2.2). Предложение доказано.

Неизометричность цепочек $\{\mathcal{F}^\xi\}$ и $\{\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi\}$ может сделать факторизацию невыполнимой. В известном нам примере [7], связанном с динамической системой, отвечающей уравнению теплопроводности цепочка $\{\mathcal{F}^\xi\}$ непрерывна, но оператор $C$ таков, что $\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi = \mathcal{F}$ для любого $\xi \in (0, T]$. Легко показать, что в этом случае он не допускает факторизации (2.1), (2.2). В самом деле, предположим, что факторизация $C = V^*V$ существует; пусть $V = E|V|$ есть полярное разложение фактора $V$; $E$ – изометрия; $|V| := (V^*V)^{1/2} = C^{1/2}$. Тогда имеем равенства

$$E\mathcal{F} = E \operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi = \operatorname{clos} EC^{1/2}\mathcal{F}^\xi = \operatorname{clos} V\mathcal{F}^\xi \subseteq \mathcal{F}^\xi$$

для всех $\xi \in (0, T]$, в силу которых

$$E\mathcal{F} \subseteq \bigcap_{\xi>0} \mathcal{F}^\xi = \{0\},$$

что противоречит изометричности $E$. Добавим, что в упомянутом примере оператор $C$ обладает весьма обширным нулевым подпространством.

**Замечание** При анализе встретившейся в [7] ситуации возник вопрос, представляющий, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Пусть $S$ есть изоморфизм $\mathcal{F}$ на себя; обязательно ли цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$ и $\{S\mathcal{F}^\xi\}$ изометричны? Вопрос открыт.

Скажем, что факторизация (2.1), (2.2) является *сильной*, если выполнено условие

$$\operatorname{clos} V\mathcal{F}^\xi = \mathcal{F}^\xi, \quad \xi \in [0, T]. \tag{2.5}$$

**Предожение 2.2.** *Оператор $C \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, $C \geqslant \mathbb{O}$ допускает сильную факторизацию вдоль цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$, если и только если цепочка $\{\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi\}$ изометрична $\{\mathcal{F}^\xi\}$.*

**Доказательство.** Пусть цепочки изометричны и $\Phi$ – изометрия со свойством (2.3), где $P^\xi$ есть проектор в $\mathcal{F}$ на $\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi$. Тогда оператор $V = \Phi^* C^{1/2}$ дает факторизацию (2.1), (2.2), которая является сильной согласно (2.4).

Пусть оператор $V$ факторизует $C$ в сильном смысле и пусть $V = E|V| = EC^{1/2}$ есть его полярное разложение. Согласно (2.5) при $\xi = T$ имеем

$$\operatorname{clos}\operatorname{Ran} V = \mathcal{F},$$

откуда следует, что $E$ есть изометрия $\operatorname{clos}\operatorname{Ran}|V| = \mathcal{H}^T$ на все $\mathcal{F}$. Положим $\Phi = E^*$; легко убедиться, что изометрия $\Phi$ связывает цепочки соотношением (2.3). Предложение доказано.

Множество сильных факторизаций допускает простое описание.

**Предложение 2.3.** *Пусть $V_1$ и $V_2$ факторизуют оператор $C$ вдоль цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$ в сильном смысле* (2.2), (2.5). *Тогда существует унитарный оператор $U$, такой, что $V_2 = UV_1$ и $UX^\xi = X^\xi U$, $\xi \in [0,T]$.*

**Доказательство.** Используем полярные разложения $V_i = E_i C^{1/2}$. В силу плотности $\operatorname{Ran} V_i$ в $\mathcal{F}$ оператор $U = E_2 E_1^*$ оказывается унитарным, причем $UV_1 = V_2$.

Покажем, что $U\mathcal{F}^\xi = \mathcal{F}^\xi$. В силу (2.5) для любого $f \in \mathcal{F}^\xi$ найдется последовательность $\{g_j\} \subset \mathcal{F}^\xi; f = \lim V_1 g_j$. Отсюда $Uf = \lim UV_1 g_j = \lim V_2 g_j \in \mathcal{F}^\xi$, т.е. $U\mathcal{F}^\xi \subset \mathcal{F}$. Из аналогичных рассмотрений для $U^{-1}$ следует $U^{-1}\mathcal{F}^\xi \subset \mathcal{F}^\xi$, что ведет к совпадению $U\mathcal{F}^\xi$ с $\mathcal{F}^\xi$ и коммутации $U$ с $X^\xi$. Предложение доказано.

В матричном случае факторизация

$$C = V^* V; \qquad V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & & \\ & v_{22} & \dots & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & v_{nn} \end{pmatrix}$$

с *заданной* диагональю единственна, если $v_{ii} \neq 0$. Приведем континуальный аналог этого факта. Интеграл

$$\int_0^T dX^\xi A dX^\xi =: D_A$$

назовем диагональю оператора $A$ в цепочке $\{\mathcal{F}^\xi\}$.

**Предложение 2.4.** *Пусть операторы $V_1$ и $V_2$ факторизуют оператор $C$ вдоль $\{\mathcal{F}^\xi\}$ в сильном смысле и имеют в этой цепочке диагонали $D_{V_1}$ и $D_{V_2}$. Тогда, если диагонали равны и ограниченно обратимы в $\mathcal{F}$, то равны и операторы: $V_1 = V_2$.*

**Доказательство.** Пусть $U$ – унитарный оператор, такой, что $V_2 = UV_1$ (см. Предложение 2.3). Тогда имеем

$$D_{V_2} = \int_0^T dX^\xi U V_1 dX^\xi = U \int_0^T dX^\xi V_1 dX^\xi = U D_{V_1},$$

откуда $U = \mathbb{I}$. Предложение доказано.

Очевидно, все сильные факторизации обладают или не обладают диагональю одновременно.

**2.2. Специальная факторизация.** Сильную факторизацию $C = V^*V$ назовем *специальной*, если фактор $V$ имеет единичную диагональ:

$$\int_0^T dX^\xi V dX^\xi = \mathbb{I}.$$

Это определение инициировано приложениями [2, 3]; оно обобщает одноименный тип факторизации, описанный в [4; гл. IV, §1] для операторов $C = \mathbb{I} + K$, $K \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{F})$.

По Предложению 2.4 специальная факторизация (вдоль данной цепочки) единственна. Ее осуществимость устанавливается следующим результатам, центральным для нашей работы. В его формулировке, как и выше, $\{\mathcal{F}^\xi\}$ – полная цепочка в $\mathcal{F}$; $\mathcal{H}^\xi = \operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi$; $P^\xi$ – проектор на $\mathcal{H}^\xi$.

**Теорема 1.** *Положительный оператор $C$ допускает специальную факторизацию, вдоль цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$ в том и только в том случае, когда интеграл $\int_0^T dP^\xi C^{1/2} dX^\xi$ сходится к изометрическому оператору с областью значений $\operatorname{clos}\operatorname{Ran} C^{1/2}$. При этом оператор $V$, дающий факторизацию представим в виде*

$$V = \int_0^T dX^\xi C^{1/2} dP^\xi C^{1/2}. \tag{2.6}$$

**Доказательство.** Пусть $V$ осуществляет специальную факторизацию и имеет полярное разложение $V = EC^{1/2}$ с изометрией $E$ из $\operatorname{clos}\operatorname{Ran} C^{1/2}$ на $\mathcal{F}$. При этом

$$\mathcal{F}^\xi = \operatorname{clos} V\mathcal{F}^\xi = E\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi = E\mathcal{H}^\xi; \quad EP^\xi = X^\xi E,$$

вследствие чего для диагонали $V$ имеем:

$$\mathbb{1} = \int_0^T dX^\xi V dX^\xi = \int_0^T dX^\xi EC^{1/2}dX^\xi = E\int_0^T dP^\xi C^{1/2}dX^\xi.$$

Отсюда

$$\int_0^T dP^\xi C^{1/2}dX^\xi = E^*,$$

чем устанавливается достаточность условий теоремы.

Проверим необходимость. Пусть

$$\int_0^T dP^\xi C^{1/2}dX^\xi = \Phi$$

есть изометрия $\mathcal{F}$ на $\operatorname{clos}\operatorname{Ran} C^{1/2}$. При этом $\Phi X^\xi = P^\xi\Phi$ по свойству (i), п.1.1. Положим $V = \Phi^* C^{1/2}$; тогда

$$V^*V = C; \quad \operatorname{clos} V\mathcal{F}^\xi = \Phi^*\operatorname{clos} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi = \Phi^*\mathcal{H}^\xi = \mathcal{F}^\xi$$

и, наконец,

$$\mathbb{1} = \Phi^*\Phi = \Phi^*\int_0^T dP^\xi C^{1/2}dX^\xi = \int_0^T dX^\xi\Phi^* C^{1/2}dX^\xi = D_V.$$

Теорема доказана.

Итак, интеграл (2.6) решает задачу специальной факторизации. Мы называем его *амплитудным интегралом*, выделяя эту конструкцию и подчеркивая ее эвристическое происхождение (см. [1–3]).

Используя представления (1.5), интеграл (2.6) можно записать в эквивалентных формах

$$V = \int_0^T X^{\xi+} C^{1/2}dP^\xi C^{1/2} \tag{2.7}$$

и

$$V = \int_0^T dX^\xi C^{1/2}(\mathbb{I} - P^{\xi -})C^{1/2} = C - \int_0^T dX^\xi C^{1/2} P^{\xi -} C^{1/2}. \qquad (2.8)$$

**2.3. Регуляризация в амплитудном интеграле.** Амплитудный интеграл определяется двумя объектами: цепочкой $\{\mathcal{F}^\xi\}$ и оператором $C$. Этот факт становится вполне прозрачным, если выразить фигурирующие в (2.6)–(2.8) проекторы $P^\xi$ через проекторы цепочки и оператор.

Условимся об обозначениях. Пусть $Y^\xi := \mathbb{I} - X^\xi$; $\mathcal{X}^\xi$ и $\mathcal{Y}^\xi$ суть проекторы $X^\xi$ и $Y^\xi$, *рассматриваемые как операторы из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}^\xi$ и в $\mathcal{F} \ominus \mathcal{F}^\xi$*. Действующий в $\mathcal{F}^\xi$ оператор $\mathcal{X}^\xi C(\mathcal{X}^\xi)^*$ назовем *блоком* оператора $C$ в $\mathcal{F}^\xi$. Если $C$ положительно определен: $C \geqslant \gamma \mathbb{I}$, $\gamma > 0$, то в $\mathcal{F} \ominus \mathcal{F}^\xi$ определен блок $\mathcal{Y}^\xi C^{-1}(\mathcal{Y}^\xi)^*$ обратного оператора. Оба блока суть положительно определенные операторы.

**Предложение 2.5.** *Пусть оператор $C$ положительно определен в $\mathcal{F}$; тогда справедливы представления:*

$$P^\xi = C^{1/2}(\mathcal{X}^\xi)^* \left[\mathcal{X}^\xi C(\mathcal{X}^\xi)^*\right]^{-1} \mathcal{X}^\xi C^{1/2}; \qquad (2.9)$$

$$\mathbb{I} - P^\xi = C^{-1/2}(\mathcal{Y}^\xi)^* \left[\mathcal{Y}^\xi C^{-1}(\mathcal{Y}^\xi)^*\right]^{-1} \mathcal{Y}^\xi C^{-1/2}; \qquad (2.10)$$

**Доказательство.** Правая часть первого представления обладает всеми характеристическими свойствами проектора на $\mathcal{H}^\xi = \operatorname{clos} \operatorname{Ran} C^{1/2}\mathcal{F}^\xi$, т.е. $P^\xi = (P^\xi)^* = (P^\xi)^2$; $\operatorname{Ran} P^\xi = \mathcal{H}^\xi$; правая часть второго – свойствами проектора на $\mathcal{F} \ominus \mathcal{H}^\xi$. Предложение доказано.

Представления (2.9), (2.10) теряют силу, если $C$ лишь положителен, но не положительно определен. Именно такая ситуация встречается в *многомерных* обратных задачах и задачах теории граничного управления, что осложняет их исследование [2, 8, 9]. Для потребностей приложений полезно иметь обобщение представлений на этот случай.

Приведем регуляризацию представления (2.9). В ее основе лежит следующая лемма общего характера.

**Предложение 2.6.** *Пусть $\mathcal{M}$ – подпространство в $\mathcal{F}$; $L \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ – оператор; $P$ – проектор в $\mathcal{F}$ на $\mathcal{N} = \operatorname{clos} L\mathcal{M}$. Пусть $L_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ есть* *последовательность операторов,* $\text{s–lim}\, L_\alpha = L$*;* $P_\alpha$ *– проекторы в* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{N}_\alpha = \operatorname{clos} L_\alpha \mathcal{M}$*. Тогда* $\text{s–lim}\, P_\alpha = P$.

**Доказательство.** Пусть $\{e_k\}$ – ортонормированный базис (ОНБ) в $\mathcal{M}$; положим $\widetilde{e}_k^\alpha = L_\alpha e_k$. При каждом $\alpha$ проведем ортогонализацию по Шмидту системы $\{\widetilde{e}_k^\alpha\}$; пусть $\{g_k^\alpha\}$, $g_k^\alpha = \sum\limits_{j=1}^{k} c_{kj}^\alpha \widetilde{e}_j^\alpha$ есть полученный ОНБ в $\mathcal{N}_\alpha$. Аналогичным образом по системе $\widetilde{e}_k = Le_k$ построим ОНБ $e_j^\alpha$ в $\mathcal{N}$. Сходимость операторов влечет сходимость $\widetilde{e}_k^\alpha \to \widetilde{e}_k$; вслед за ней $g_k^\alpha \to g_k$.

Для проекторов имеем представления:

$$P_\alpha = \sum_k (\cdot, g_k^\alpha) g_k^\alpha; \quad P = \sum_k (\cdot, g_k) g_k.$$

Из них легко видеть, что $P_\alpha g_j \to P g_j = g_j$ на любом $g_j$. Из сходимости на базисе следует сходимость $P_\alpha \xrightarrow{s} P$. Предложение доказано.

Пусть $C$ – положительный оператор; обозначим $C_\alpha = C + \alpha \mathbb{1}$, $\alpha > 0$. Комбинируя представление (2.9) и результат последней леммы (для $\mathcal{M} = \mathcal{F}^\xi$, $L = C^{1/2}$, $L_\alpha = C_\alpha^{1/2}$), получаем искомую регуляризацию

$$P^\xi = \underset{\alpha \to +0}{\text{s–lim}}\, C_\alpha^{1/2} (\mathcal{X}^\xi)^* \left[\mathcal{X}^\xi C_\alpha (\mathcal{X}^\xi)^*\right]^{-1} \mathcal{X}^\xi C_\alpha^{1/2}, \quad 0 < \xi \leqslant T. \tag{2.11}$$

Стоящий под знаком предела оператор совпадает с пректором $P_\alpha^\xi$ на $\operatorname{clos} C_\alpha^{1/2} \mathcal{F}^\xi$. Представление (2.11) используется при разработке численных алгоритмов решения многомерных обратных задач [9].

**Замечание.** Остается открытым важный вопрос об *устойчивости* процедуры факторизации. Пусть $C_j \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ есть последовательность положительных операторов, сходящаяся к $C \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ в том или ином смысле и пусть известно, что операторы $C_j$ и $C$ допускают специальную факторизацию вдоль заданной цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$. В этом случае они факторизуются интегралами (2.6):

$$V_j = \int_0^T dX^\xi C_j^{1/2} dP_j^\xi C_j^{1/2}; \quad V = \int_0^T dX^\xi C^{1/2} dP^\xi C^{1/2}.$$

Верно ли, что $V_j \to V$? Вопрос сводится к предельному переходу в амплитудном интеграле.

**2.4. Связь амплитудного интеграла с классической конструкцией.** Преобразуем интеграл (2.6) к форме, совпадающей с известным представлением [4; гл. IV, §2] решения задачи специальной факторизации в виде операторного интеграла для суммы $C = \mathbb{I} + K$, $K \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{F})$.

**Предложение 2.7.** *Пусть положительно определенный оператор $C$ допускает специальную факторизацию $C = V^*V$ вдоль цепочки $\{\mathcal{F}^\xi\}$; пусть $A = \mathbb{I} - C^{-1}$. Тогда фактор $V$ можно представить в виде*

$$V = \mathbb{I} - \int_0^T dY^\xi A Y^{\xi-} \left(\mathbb{I} - Y^{\xi-} A Y^{\xi-}\right)^{-1}. \tag{2.12}$$

**Доказательство.** Подставим (2.10) в (2.8):

$$V = \int_0^T dX^\xi (\mathcal{Y}^{\xi-})^* \left[\mathcal{Y}^{\xi-} C^{-1} (\mathcal{Y}^{\xi-})^*\right]^{-1} \mathcal{Y}^{\xi-}. \tag{2.13}$$

Воспользуемся операторным тождеством, проверка которого не составляет труда:

$$(\mathcal{Y}^\xi)^* \left[\mathcal{Y}^\xi C^{-1} (\mathcal{Y}^\xi)^*\right]^{-1} \mathcal{Y}^\xi = Y^\xi + Y^\xi A (\mathcal{Y}^\xi)^* \left[\mathcal{Y}^\xi C^{-1} (\mathcal{Y}^\xi)^*\right]^{-1} \mathcal{Y}^\xi.$$

Используя его в (2.13) и учитывая очевидное равенство

$$\int_0^T dX^\xi Y^{\xi-} = \mathbb{I},$$

имеем:

$$V = \mathbb{I} + \int_0^T dX^\xi Y^{\xi-} A (\mathcal{Y}^{\xi-})^* \left[\mathcal{Y}^{\xi-} C^{-1} (\mathcal{Y}^{\xi-})^*\right]^{-1} \mathcal{Y}^{\xi-}.$$

Переходя к принятой в [4] форме записи

$$(\mathcal{Y}^\xi)^* \left[\mathcal{Y}^\xi C^{-1} (\mathcal{Y}^\xi)^*\right]^{-1} \mathcal{Y}^\xi = Y^\xi \left(\mathbb{I} - Y^\xi A Y^\xi\right)^{-1}$$

и учитывая равенства

$$dX^\xi Y^{\xi-} = -dY^\xi Y^{\xi-} = -dY^\xi,$$

получаем формулу (2.12). Предложение доказано.

Итак, на классе положительных операторов интеграл (2.6) обобщает конструкцию [4]: содержательные приложения [1, 2] показывают, что область его применимости шире.

## Литература

1. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* Препринт ЛОМИ I-P-90, 1990, Ленинград 41 с.
2. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 9–37.
3. М. И. Белишев, С. А.Иванов, *Граничное управление и канонические реализации двускоростной динамической системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **222** (1995), 18–44.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* Наука, Москва, 1967 508 с.
5. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* Наука, Москва, 1969 287 с.
6. Л. А. Сахнович, *Задачи факторизации и операторные тождества.* — Успехи матем. наук **41**, No. 1 (1986), 3–55.
7. М. И. Белишев, *Каноническая модель динамической системы с граничным управлением в обратной задаче теплопроводимости.* — Алгебра и Анализ **7**, No. 6 (1995), 2–32.
8. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Управляемость в заполненной области для многомерного волнового уравнения с сингулярным граничным управлением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 7–21.
9. М. И. Белишев, В. А. Рыжов, В. Б. Филиппов, *Спектральный вариант BC-метода; теория и численный эксперимент.* — Доклады РАН **332**, No. 4 (1994), 414–417.
10. Л. П. Нижник, *Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений.* Наукова Думка, Киев, 1991 232 с.

Belishev M. I., Pushnitskii A. B. On a triangular factorization of positive operators.

The paper deals with an operator construction (so-called Amplitude Integral) working in the BC-method for the inverse problems. A continual analog of a matrix diagonal is introduced for a continuous operator and a pair of extending families of subspaces. The analog is represented via the AI. Its convergence is descussed; we demonstrate an example of the operator which doesn't possess a diagonal. A role of a diagonal in the problem of triangular factorization is clarified. A well-known result of the theory of matrices is that a factorization with fixed diagonal is unique.

In the paper this result is generalized on a class of positive operators, the corresponding factor being given in the form of the AI. Relations between the AI and the classical operator integral (M. Krein and oth.) used to factorize operators $\mathbb{I}+K$ (with compact K) are established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

НИИФ СпбГУ

Поступило 21 мая 1995 г.