О. М. Фоменко

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФОРМ И АВТОМОРФНЫЕ L-ФУНКЦИИ

Посвящается
90-летию со дня рождения
Г. М. Голузина

§0. Введение

В теореме 7 классической работы [1] Гекке сформулировал известные к тому времени факты о поведении в среднем коэффициентов Фурье параболических форм: для каждой параболической формы веса $2k$ относительно $\Gamma(Q)$, $2k > 0$ – целое,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i \frac{nz}{Q}}$$

при $x \to \infty$ имеют место соотношения (в сумматорных формулах здесь и ниже, кроме §6, вес и ступень форм постоянны)

$$\sum_{n \leqslant x} a(n) = O\left(x^k \log x\right), \tag{1}$$

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)|^2 = O\left(x^{2k}\right), \tag{2}$$

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)| = O\left(x^{k+\frac{1}{2}}\right). \tag{3}$$

Несколько раньше Вальфиш [2] получил более сильную оценку, чем (1); если сочетать метод Вальфиша с гипотезой Рамануджана–Петерсона (доказанной Делинем [3]), то имеем оценку

$$\sum_{n \leqslant x} a(n) = O\left(x^{k-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right).$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 96-01-00663).

Ранкин [4] и Сельберг [5] довели оценку (2) до асимптотики

$$\sum_{n\leqslant x}|a(n)|^2=C\,x^{2k}+O\left(x^{2k-\frac{2}{5}}\right).$$

Пусть для простоты $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a(n)\,e^{2\pi inz}$ – параболическая форма веса $2k$ и тривиального характера относительно $\Gamma_0(Q)$, $\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b(n)\,e^{2\pi inz}$ – параболическая форма веса $2l$ и тривиального характера относительно $\Gamma_0(Q')$. Тогда доказано [6], что в предположении $\langle f,\varphi\rangle=0$ ($\langle\,,\,\rangle$ означает скалярное произведение Петерсона)

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)\,\overline{b}(n)=O\left(x^{k+l-\frac{2}{5}}\right).$$

Что касается оценки (3), то ее в ряде случаев можно улучшить; это было доказано несколькими авторами. Приведем результат Ранкина [7]: пусть $f(z)$ – собственная форма Гекке четного веса $2k$ относительно $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, тогда

$$\sum_{n\leqslant x}|a(n)|=O\left(\frac{x^{k+1/2}}{(\log x)^{\delta}}\right),\tag{4}$$

где

$$\delta=(8-3\sqrt{6})/10=0.065153\ldots.$$

Результат (4) тесно связан с современными исследованиями по симметрическим степеням $L_m(s)$ L-функций $L_f(s)$ собственных форм Гекке $f(z)$, а точнее, с получением асимптотики для суммы $(n\to\infty)$

$$\sum_{n\leqslant x}|a(n)|^4.$$

Работы по симметрическим степеням стали появляться с начала 70-х [8–13]. Эти работы позволили Морено и Шахиди в 1983 году доказать (см. [14]) асимптотику $(x\to\infty)$

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_0(n)^4\sim cx\log x\quad(c>0)\tag{5}$$

для модулярной формы Рамануджана

$$\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,e^{2\pi inz};\;\;\tau_0(n)=\tau(n)/n^{11/2}.$$

После работы Мурти [15] асимптотика (5) автоматически переносилась на все собственные формы Гекке относительно Г.

Опишем содержание настоящей работы. В §1 доказаны новые сумматорные формулы для коэффициентов Фурье параболических форм. Они получены на основе современных исследований по L-функциям, связанным с тремя и четырьмя параболическими формами; в частности, мы использовали работу Гарретта [16] о функции $L_{f,\varphi,\psi}(s)$. В связи с необходимыми приложениями (в §§1,5) мы в §4 более глубоко изучили частный случай – функцию $L_{f,f,\varphi}(s)$ и получили ее новые свойства.

В §2 доказаны нетривиальные оценки сверху для суммы

$$\sum_{n\leqslant x} a\left(F(n)\right)^2,$$

где $a(n)$ – n-ый коэффициент Фурье собственной формы Гекке относительно Г, $F(X)$ – целочисленный полином специального вида. Результат можно рассматривать как полный аналог оценки Гекке (2).

В §3 получена оценка снизу

$$L_4(1)+|L_4'(1)| \gg \frac{1}{(\log k)^c},$$

равномерная по весу $2k$ формы $f(z)$, а в §5 доказан аналог теоремы Зигеля для L-функции $L_f(s)$:

$$L_f(1) > \frac{C(\varepsilon)}{k^\varepsilon}.$$

Наконец, в §6 получен равномерный (по весу) аналог известной задачи Харди, связанной с оценкой суммы $\sum_{p\leqslant x} a(p)\log p$.

§1. L-функции, связанные с тремя и четырьмя параболическими формами, и сумматорные формулы для коэффициентов Фурье

1.1. Обозначения. Свертки

Пусть S_{2k} (Г) – пространство голоморфных параболических форм четного веса $2k$ относительно полной модулярной группы $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n z}$, $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\, e^{2\pi i n z}$, $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\, e^{2\pi i n z}$ – нормализованные ($a(1) = b(1) = c(1)$) собственные функции всех операторов Гекке, принадлежащие соответственно пространствам $S_{2k}(\Gamma)$, $S_{2l}(\Gamma)$, $S_{2m}(\Gamma)$ ($\equiv$ собственные формы Гекке). Пусть $a(n)/n^{k-1/2} = a_0(n)$, $b(n)/n^{l-1/2} = b_0(n)$, $c(n)/n^{m-1/2} = c_0(n)$. Введем L-функции параболических форм $f(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ (при этом мы пользуемся результатами теории Гекке и гипотезой Петерсона, доказанной Делинем):

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n)\, n^{-s} = \prod_p \left[(1-\alpha_p\, p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p\, p^{-s})\right]^{-1}, \ |\alpha_p| = 1;$$

$$L_\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_0(n)\, n^{-s} = \prod_p \left[(1-\beta_p\, p^{-s})(1-\overline{\beta}_p\, p^{-s})\right]^{-1}, \ |\beta_p| = 1;$$

$$L_\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_0(n)\, n^{-s} = \prod_p \left[(1-\gamma_p\, p^{-s})(1-\overline{\gamma}_p\, p^{-s})\right]^{-1}, \ |\gamma_p| = 1.$$

L-функции параболических форм, задаваемые в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 1$, являются целыми функциями с функциональным уравнением риманова типа $<< s \to 1-s >>$ (Гекке [1]).

L-функция пары $f(z)$, $\varphi(z)$ параболических форм определяется соотношением ($\mathrm{Re}\, s > 1$)

$$L_{f,\varphi}(s) = \prod_p L_{f,\varphi}(s)_p,$$

где

$$L_{f,\varphi}(s)_p = \left[(1-\alpha_p\,\beta_p\, p^{-s})(1-\alpha_p\,\overline{\beta}_p\, p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p\,\beta_p\, p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p\,\overline{\beta}_p\, p^{-s})\right]^{-1}.$$

Хорошо известно, что

$$L_{f,\varphi}(s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n)\, b_0(n)\, n^{-s}.$$

$L_{f,\varphi}(s)$ – целая функция (кроме случая $f = \varphi$, когда она имеет простой полюс в точке $s = 1$) с функциональным уравнением риманова типа $<< s \to 1-s >>$. L-функции пары форм изучались в работах Ранкина [4], Сельберга [5], Огга [6], Ли [17], Шимуры [9]. Для удобства мы будем часто в обозначениях L-функций использовать индексы: $L_f(s) = L_1^{[1]}(s)$, $L_\varphi(s) = L_1^{[2]}(s)$, $L_\psi(s) = L_1^{[3]}(s)$, $L_{f,f}(s) = L_{1,1}(s)$, $L_{f,\varphi}(s) = L_{1,2}(s), \ldots$.

Имеем

$$L_{1,1}(s) = \zeta(s)\, L_2^{[1,1]}(s),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана,

$$L_2^{[1,1]}(s) = \prod_p \left[(1-\alpha_p^2\, p^{-s})(1-p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p^2\, p^{-s})\right]^{-1}$$

– L-функция, называемая симметрическим квадратом L-функции $L_1^{[1]}(s)$. Симметрический квадрат L-функции $L_1^{[2]}(s)$ обозначается через $L_2^{[2,2]}(s)$ и т.д..

Отметим, что если речь идет об L-функциях, ассоциированных только с $f(z)$, то соответствующий верхний индекс в обозначении часто опускается: $L_1^{[1]}(s) = L_1(s)$, $L_2^{[1,1]}(s) = L_2(s)$ и т.д.. L-функция, называемая m-ой симметрической степенью L-функции $L_1(s)$, есть эйлеровское произведение степени $m+1$ вида

$$L_m(s) = \prod_p \prod_{j=0}^{m} \left(1-\alpha_p^{m-j}\,\overline{\alpha}_p^{j}\, p^{-s}\right)^{-1}, \ \operatorname{Re} s > 1.$$

$L_2(s)$ голоморфно продолжается на всю плоскость и имеет функциональное уравнение риманова типа $<< s \to 1-s >>$ [9]. Продолжимость (мероморфную) на всю плоскость и функциональное уравнение для $L_3(s)$, $L_4(s)$, $L_5(s)$ доказали Ленглендс [8] и Шахиди [13]. Гарретт [16] изучил свойства L-функции тройки $f(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ параболических форм

$$L_{f,\varphi,\psi}(s) = L_{1,2,3}(s) = \prod_p L_{f,\varphi,\psi}(s)_p,$$

где

$$L_{f,\varphi,\psi}(s)_p = \big[(1-\alpha_p\,\beta_p\,\gamma_p\cdot p^{-s})(1-\alpha_p\,\beta_p\,\overline{\gamma}_p\cdot p^{-s})\cdot$$
$$\cdot(1-\alpha_p\,\overline{\beta}_p\,\gamma_p\cdot p^{-s})(1-\alpha_p\,\overline{\beta}_p\,\overline{\gamma}_p\cdot p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p\,\beta_p\,\gamma_p\cdot p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p\,\beta_p\,\overline{\gamma}_p\cdot p^{-s})\cdot$$
$$\cdot(1-\overline{\alpha}_p\,\overline{\beta}_p\,\gamma_p\cdot p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p\,\overline{\beta}_p\,\overline{\gamma}_p\cdot p^{-s})\big]^{-1}\ (\operatorname{Re} s > 1).$$

Гарретт получил мероморфное аналитическое продолжение $L_{f,\varphi,\psi}(s)$ на всю s-плоскость и функциональное уравнение риманова типа $<< s \to 1-s >$ для случая равных весов $2k = 2l = 2m$.

Обобщение результатов Гарретта на случай разных весов $2k$, $2l$, $2m$, но опять лишь в голоморфном случае для группы $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ см. в [18, 19]. Весьма широкое обобщение рассмотрено в работе [20].

1.2. L-функции, связанные с тремя параболическими формами

Рассмотрим L-функцию

$$L_{f,f,\varphi}(s) = L_{1,1,2}(s).$$

Легко видеть, что

$$L_{1,1,2}(s) = \prod_p \big[(1-\alpha_p^2\,\beta_p\,p^{-s})(1-\alpha_p^2\,\overline{\beta}_p\,p^{-s})\cdot$$

$$\cdot(1-\overline{\alpha}_p^2\,\beta_p\,p^{-s})(1-\overline{\alpha}_p^2\,\overline{\beta}_p\,p^{-s})\big]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\prod_p \big[(1-\beta_p\,p^{-s})(1-\overline{\beta}_p\,p^{-s})\big]^{-2} = L_3^{[1,1,2]}(s)\cdot L_1^{[2]}(s)^2.$$

Нам потребуется следующая лемма, доказанная в работе Шимуры [21].

Лемма 1. *Положим формально*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,n^{-s} = \prod_p \big[(1-\alpha_p\,p^{-s})(1-\alpha'_p\,p^{-s})\big]^{-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\,n^{-s} = \prod_p \big[(1-\beta_p\,p^{-s})(1-\beta'_p\,p^{-s})\big]^{-1},$$

где p пробегает все простые числа. Для каждого p положим

$$X_p(s) = 1-\alpha_p\,\alpha'_p\,\beta_p\,\beta'_p\,p^{-2s},$$

$$Y_p(s) = (1-\alpha_p\,\beta_p\,p^{-s})(1-\alpha_p\,\beta'_p\,p^{-s})(1-\alpha'_p\,\beta_p\,p^{-s})(1-\alpha'_p\,\beta'_p\,p^{-s}).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\,b(n)\,n^{-s} = \prod_p X_p(s)\,Y_p(s)^{-1}.$$

По лемме 1 при $\mathrm{Re}\, s > 1$ имеем после некоторых вычислений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0(n)^2\, b_0(n)}{n^s} = L_1^{[2]}(s) \cdot L_3^{[1,1,2]}(s) \cdot \prod_p K_p(p^{-s}) =$$
$$= L_1^{[2]}(s)^2 \cdot L_3^{[1,1,2]}(s) \cdot \prod_p M_p(p^{-s}),$$

где

$$K_p(p^{-s}) = 1 + \frac{b_0(p)}{p^s} + \frac{2 - a_0(p)^2}{p^{2s}} + \frac{b_0(p)}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}},$$
$$M_p(p^{-s}) = 1 + \frac{3 - 2a_0(p)^2 - b_0(p)^2}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{6s}}.$$

Функция $L_{1,1,2}(s) = L_1^{[2]}(s)^2 \cdot L_3^{[1,1,2]}(s)$ мероморфно продолжима на всю плоскость и имеет функциональное уравнения риманова типа (см. ниже §4).

Если рассмотреть частный случай $f(z) = \varphi(z)$, то из работы Шахиди [22] следует, что $L_1(s) \cdot L_3(s)$ голоморфна на всей плоскости. Произведение $\prod_p M_p(p^{-s})$ сходится равномерно для любого $\varepsilon > 0$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$. Все необходимые нам свойства функции $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0(n)^3}{n^s}$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ легко следуют из свойств функции $L_{1,1,1}(s)$. Нам потребуется оценка $(0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $s = \sigma + it)$, получаемая из свойства выпуклости,

$$L_{1,1,1}(s) \ll (|t| + 1)^{4(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Теперь из формулы обращения для рядов Дирихле легко следует

Теорема 1. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} a_0(n)^3 \ll x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}. \tag{6}$$

Замечание 1. Пользуясь результатами Шахиди [22], можно перенести оценку (6) на параболические формы ступени $N \geqslant 1$.

Работы [16, 18–20] не позволяют перенести оценку (6) на случай суммы $\sum_{n \leqslant x} a_0(n)^2\, b_0(n)$, если $f(z) \neq \varphi(z)$. Причина – неполнота информации о функции $L_{1,1,2}(s)$; в частности, не было известно, имеется ли у нее в точке $s = 1$ полюс.

В §4 нами будет показано, что $L_{1,1,2}(s)$ всюду голоморфна, кроме точки $s = \frac{1}{2}$, где, возможно, имеется полюс порядка 1. Опираясь на этот результат, мы можем обобщить теорему 1.

Теорема 2. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} a_0(n)^2\, b_0(n) \ll x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}.$$

Отметим, что эта теорема пока не может быть обобщена на формы ступеней > 1.

1.3. L-функции, связанные с четырьмя параболическими формами

Предварительно введем еще одно обозначение. Пусть ниже $f(z) \neq \varphi(z)$; тогда пусть

$$L_4^{[1,1,2,2]}(s) = \prod_p \big[\big(1 - \alpha_p^2\, \beta_p^2\, p^{-s}\big)\big(1 - \alpha_p^2\, \overline{\beta}_p^2\, p^{-s}\big)\cdot$$

$$\cdot\big(1 - \overline{\alpha}_p^2\, \beta_p^2\, p^{-s}\big)\big(1 - \overline{\alpha}_p^2\, \overline{\beta}_p^2\, p^{-s}\big)\big]^{-1}.$$

По лемме 1 при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем после некоторых вычислений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0(n)^2\, b_0(n)^2}{n^s} = L_2^{[1,1]}(s)\cdot L_2^{[2,2]}(s)\cdot \zeta(s)^{-1}\cdot L_4^{[1,1,2,2]}(s)\cdot \prod_p R_p(p^{-s}) =$$

$$= \zeta(s)\cdot L_2^{[1,1]}(s)\cdot L_2^{[2,2]}(s)\cdot \big(L_2^{[1,1]}(s)\cdot L_2^{[2,2]}(s)\cdot \zeta(s)^{-1}\cdot L_4^{[1,1,2,2]}(s)\big)\cdot$$

$$\cdot \prod_p Q_p(p^{-s}) = \Phi(s)\cdot \prod_p Q_p(p^{-s}),$$

где

$$R_p(p^{-s}) = 1 + \frac{a_0(p)^2 + b_0(p)^2 - 1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{7s}},$$

$$Q_p(p^{-s}) = 1 - \gamma_2(p)\, p^{-2s} + \cdots + p^{-14s}.$$

Можно показать (ср. [23]), что

$$\Phi(s) = \zeta(s)\cdot L(s,F_1)\cdot L(s,F_2)\cdot L(s, F_1\times F_2),$$

где F_1 – ассоциированная с f форма на $\mathrm{GL}(3)$ (лифт Гелбарта–Жаке; adjoint square lift [11]), F_2 – ассоциированная с φ форма на $\mathrm{GL}(3)$, $F_1\times F_2$ – свертка Ранкина–Сельберга формы F_1 с F_2; $L(s,F_1)$, $L(s,F_2)$ и $L(s,F_1\times F_2)$ – соответствующие L-ряды. Известно, что $L(s,F_i)$ – целые функции, причем $L(1,F_i) \neq 0$ $(i=1,2)$. Предположим далее, что формы F_1 и F_2 различны. В силу наших условий, $L(s, F_1{\times}F_2)$ – целая функция, причем $L(1, F_1{\times}F_2) \neq 0$. Все указанные L-функции обладают функциональными уравнениями риманова типа. По поводу сформулированных свойств см. [11, 24–26]. Следовательно, $\Phi(s)$ имеет в точке $s = 1$ простой полюс, аналитична в других точках и обладает функциональным уравнением риманова типа. Из свойств выпуклости следует, что в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ вне маленького кружочка $|s-1| < \delta$ имеет место оценка

$$\Phi(s) \ll (|t|+1)^{8(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Произведение $\prod\limits_p Q_p(p^{-s})$ сходится равномерно для любого $\varepsilon > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$. Из формулы обращения для рядов Дирихле следует асимптотическая формула

$$\sum_{n \leqslant x} a_0(n)^2\, b_0(n)^2 = Cx + O\left(x^{\frac{9}{10}+\varepsilon}\right).$$

Покажем, что $C > 0$. Пусть p_0 – такое число, что произведение $\prod\limits_{p>p_0} Q_p(p^{-s})$ заведомо $\neq 0$ в точке $s = 1$. Рассмотрим функцию $\Phi_0(s) \cdot \prod\limits_{p>p_0} Q_p(p^{-s})$, полученную из $\Phi(s) \cdot \prod\limits_p Q_p(p^{-s})$ исключением эйлеровских множителей с $p \leqslant p_0$. Применяя к ряду Дирихле

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,P_0)=1}}^{\infty} \frac{a_0(n)^2\, b_0(n)^2}{n^s} = \Phi_0(s) \cdot \prod_{p>p_0} Q_p(p^{-s}),$$

где $P_0 = \prod\limits_{p \leqslant p_0} p$, теорему Винера–Икехары, получаем

$$\sum_{\substack{n \leqslant x\\(n,P_0)=1}} a_0(n)^2\, b_0(n)^2 \sim C'x, \ C' > 0,$$

откуда следует, что и $C > 0$.

Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть F_1, F_2 различны, тогда при $x \to \infty$*

$$\sum_{n \leqslant x} a_0(n)^2\, b_0(n)^2 = Cx + O\left(x^{\frac{9}{10}+\varepsilon}\right), \tag{7}$$

где $C > 0$.

Замечание 2. По теореме "о кратности один" следующие условия эквивалентны:

$$F_1, F_2 \text{ различны } \longleftrightarrow a_0(p)^2 \neq b_0(p)^2$$
$$\text{для бесконечного множества } p. \tag{8}$$

Следствие 1. *Пусть выполняется условие* (8). *Тогда*

1) $\sum\limits_{n \leqslant x} |a_0(n)^2\, b_0(n)| \ll x$;

2) $\sum\limits_{n \leqslant x} |a_0(n)\, b_0(n)| \ll \frac{x}{(\log x)^{\delta/2}}$,

где $\delta = (8 - 3\sqrt{6})/10 = 0.065153\ldots$ – *константа из оценки Ранкина* (4).

Замечание 3. Результат (7) переносится на формы f и φ ступеней $N_1 \geqslant 1$, $N_2 \geqslant 1$ при условии, что хотя бы одна из этих форм не есть лифт из $GL(1)$ (см. [11, 24–26]). При этом, естественно, в общем случае надо рассматривать сумму

$$\sum_{n \leqslant x} |a_0(n)^2\, b_0(n)^2|.$$

Рассмотрим теперь случай $f(z) = \varphi(z)$. По лемме 1 при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем после некоторых вычислений (ср. [14])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0(n)^4}{n^s} = L_4(s) \cdot \prod_p N_p(p^{-s}) =$$
$$= \zeta(s)^2 \cdot L_2(s)^3 \cdot L_4(s) \cdot \prod_p T_p(p^{-s}) = \Psi(s) \cdot \prod_p T_p(p^{-s}),$$

где

$$N_p\,(p^{-s}) = 1 + \frac{3a_0(p)^2 - 1}{p^s} + \frac{3a_0(p)^2 - 1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \frac{3a_0(p)^2 - 2}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right),$$
$$T_p\,(p^{-s}) = 1 - \delta_2(p)p^{-2s} + \cdots + p^{-14s}.$$

Пусть F – ассоциированная с f форма на GL(3) (лифт Гелбарта–Жаке), тогда можно показать, что

$$\Psi(s) = \zeta(s) \cdot L(s,F)^2 \cdot L(s,F\times F) = \zeta(s) \cdot L(s,F)^3 \cdot L(s,F,\vee^2),$$

где $L(s,F,\vee^2)$ – симметрический квадрат L-функции формы F. Но, как доказано в работе [27], функция $L(s,F,\vee^2) = \zeta(s)L_4(s)$ имеет простой полюс в точке $s=1$ и аналитична в остальных точках. Поэтому функция $\Psi(s)$ имеет в точке $s=1$ двойной полюс и аналитична в остальных точках.

Отметим, что теперь легко непосредственно видеть, что эйлеровское произведение $\prod\limits_p T_p\left(p^{-s}\right)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, мы получаем следующий результат.

Теорема 4. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{l e x} a_0(n)^4 = C_1 x \log x + C_2 x + O\left(x^{\frac{9}{10}+\varepsilon}\right), \tag{9}$$

где $C_1 > 0$.

Замечание 4. Результат (9) переносится на формы f ступени $N \geqslant 1$ при условии, что f не является лифтом из GL(1); при этом пользуемся работой [27].

В заключение отметим, что функции типа ($k \geqslant 3$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0(n)^k}{n^s},$$

по-видимому, являются мероморфными функциями в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ с естественной границей $\operatorname{Re} s = 0$. Как доказал Курокава [28], это действительно так в предположении гипотезы Сато–Тейта.

§2. Поведение коэффициентов Фурье параболических форм на полиномиальных последовательностях

Пусть $F(x)$ – неприводимый полином степени m с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n z}$ имеет тот же смысл, что и в §1, т.е. является нормализованной собственной формой Гекке из пространства $S_{2k}(\Gamma)$,

$a(n)/n^{k-1/2} = a_0(n)$. В настоящем параграфе мы докажем нетривиальную оценку сверху для суммы

$$\sum_{n \leqslant x} a_0 \left(F(n)\right)^2 \tag{10}$$

в случае неприводимых полиномов $F(x)$ специального вида степени $m \geqslant 2$ (для линейного полинома $F(x)$ известна асимптотика (см. [29, 30]); она легко доказывается применением свертки Ранкина–Сельберга). Все рассматриваемые ниже полиномы обладают свойством: $F(n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме, может быть, конечного числа; в суммах типа (10) берутся только те n, для которых $F(n) > 0$. "Нетривиальность" оценки означает, что она лучше оценки ($d(n)$ – число делителей n)

$$\sum_{n \leqslant x} a_0 \left(F(n)\right)^2 \ll x(\log x)^3,$$

которая следует из оценки Делиня

$$|a_0(n)| \leqslant d(n)$$

и соотношения [31]

$$\sum_{n \leqslant x} d \left(F(n)\right)^2 \asymp x(\log x)^3 (x \to \infty).$$

Нам потребуется следующая лемма (см. [32]).

Лемма 2. *Пусть $t(n)$ – мультипликативная функция, $t(n) \geqslant 0$, $t(p^k) \ll k^c$, $k = \overline{1, \infty}$ (p простое), $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ – неприводимый (над кольцом целых) полином, $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1$, тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} t\left(F(n)\right) \ll x \exp\Big(\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)(t(p)-1)}{p}\Big).$$

Здесь $L(a)$ – число решений сравнения $F(n) \equiv 0 \pmod a$, $0 \leqslant n < a$, $\ll$-константа зависит от $t(n)$ и $F(x)$.

Пусть $\mathrm{Spl}\{F(x)\}$ – множество всех простых p таких, что $F(x) \bmod p$ разлагается в произведение различных линейных полиномов над полем из p элементов $\mathbb{F}_p$. Для оценки суммы (10) нам потребуется полная информация о величине

$$L(p) = \#\left\{\alpha \in \mathbb{F}_p \middle| F(\alpha) = 0\right\}.$$

Сначала рассмотрим абелевы полиномы (т.е. полиномы с абелевой группой Галуа). В этом случае из теории полей классов известно, что $\mathrm{Spl}(F(x))$ с точностью до конечного числа исключений состоит из простых в прогрессиях

$$\{p = ak + l_1,\, p = ak + l_2, \dots, p = ak + l_f\},$$

причем одна из прогрессий имеет вид $\{p = ak + l_i, l_i = 1\}$; будем считать, что $l_1 = 1$. Ясно, что если $p \in \mathrm{Spl}(F(x))$, то $L(p) = m$; если $p \notin \mathrm{Spl}(F(x))$, то $L(p) = 0$.

Нам потребуется следующая асимптотическая формула Эрдеша (см. [33]): при $x \to \infty$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} = \log\log x + O(1).$$

Кроме того, нам необходим такой факт, следующий из свойств L-функции пары параболических форм:

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{a_0(p)^2 \chi(p)}{p} = \\ = \begin{cases} O(1), & \text{если } \chi \text{ — неглавный характер } \pmod a; \\ \log\log x + O(1), & \text{если } \chi \text{ — главный характер } \pmod a. \end{cases}$$

Имеем

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \pmod a}} \frac{a_0(p)^2}{p} = \frac{1}{\varphi(a)} \sum_{\chi \pmod a} \overline{\chi}(l) \sum_{p \leqslant x} \frac{a_0(p)^2 \chi(p)}{p} = \\ = \frac{1}{\varphi(a)} \log\log x + O(1),$$

откуда получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{f} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l_i \pmod a}} L(p) \frac{a_0(p)^2}{p} = \log\log x + O(1). \tag{11}$$

Используя лемму 2, асимптотическую формулу Эрдеша и соотношение (11), доказываем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $F(x)$ – неприводимый полином степени $m \geqslant 2$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Предположим, что этот полином абелев. Тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} a_0\,(F(n))^2 \ll x. \tag{12}$$

Переходим к полиномам с неабелевой группой Галуа. Для них получение аналога теоремы 5 является исключительно трудной задачей, поскольку уже первый шаг – вычисление $L(p)$ – сделан только в нескольких случаях. Мы в состоянии получить полный аналог оценки (12) только для кубического полинома весьма общего вида.

Пусть $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ – неприводимый полином, поле разложения K которого есть расширение Галуа над $\mathbb{Q}$ с $G = \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$ (симметрическая группа порядка 3) и содержит мнимое квадратичное поле $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, где $-D$ – дискриминант k. Пусть

$$L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n)\, n^{-s}$$

– L-функция Артина, ассоциированная с двумерным комплексным неприводимым представлением

$$\rho : \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

с кондуктором N, где $D \mid N$. Определим функцию $S(z)$ посредством

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Из теории Гекке–Вейля следует, что $S(z)$ является нормализованной новой формой веса 1 и характера $(-D/*)$ на группе $\Gamma_0(N)$.

Койке [34] доказал следующий результат: пусть M – произведение всех простых чисел, появляющихся в a, b, c, и пусть p – любое простое такое, что

$$p \nmid MN;$$

тогда имеем

$$L(p) = A(p)^2 - \left(\frac{-D}{p}\right).$$

Для исследования суммы (10) применим лемму 2. Нам необходимо должным образом оценить сумму

$$I_1 = \sum_{p \leqslant x} \frac{a_0(p)^2\, A(p)^2}{p};$$

по поводу оценки остальных возникающих сумм см. доказательство теоремы 5. Воспользуемся результатами §1. Рассмотрим аналог функции $\Phi(s)$. Все ее свойства, сформулированные в §1, сохраняются в нашем случае, поскольку параболическая форма $f(z)$ не есть лифт из $\mathrm{GL}(1)$ (ср. замечание 3). Методы аналитической теории чисел, примененные к функции $\Phi(s)$, дают асимптотику

$$I_1 = \log\log x + O(1), \ \ x \to \infty.$$

Тем самым доказана

Теорема 6. *Пусть* $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ – *неприводимый полином, поле разложения которого* K *есть расширение Галуа над* $\mathbb{Q}$ *с* $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$ *и содержит мнимое квадратичное поле. Тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} a_0(F(n))^2 \ll x.$$

Рассмотрим теперь сумму (10), в которой $F(x) = x^4 - m$. В этом случае мы не в состоянии получить полный аналог теоремы 6, однако можем доказать нетривиальный результат. Предполагаем, что $m > 0$ – неквадратное целое число, $m = \prod_p p^{e(p)}$, $0 \leqslant e(p) \leqslant 3$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$ – поле, порожденное $\sqrt{-1}$ и $\sqrt[4]{m}$ над $\mathbb{Q}$. Тогда K является расширением Галуа над $\mathbb{Q}$ степени 8 и его группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})$ изоморфна диэдральной группе D_4 порядка 8. Пусть

$$L(s, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n)\, n^{-s}$$

– L-функция Артина, ассоциированная с двумерным комплексным неприводимым представлением

$$\gamma : \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

с кондуктором N. Определим функцию $S(z)$ посредством

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Из теории Гекке–Вейля следует, что $S(z)$ является нормализованной новой формой веса 1 и характера $\chi_4(n)$ на группе $\Gamma_0(N)$.

Ишии [35] доказал следующий результат: пусть m_0 – бесквадратная часть m, тогда для простого p с условием $p \nmid N$ имеем

$$L(p) = 1 + B(p) + (m_0/p).$$

Применим лемму 2. Мы не можем теперь должным образом оценить возникающую сумму

$$I_2 = \sum_{p \leqslant x} \frac{a_0(p)^2\, B(p)}{p},$$

поскольку результаты §4 о $L_{1,1,2}(s)$ применимы лишь к формам ступени 1. Поэтому вместо предполагаемой, но не доказанной оценки

$$I_2 = O(1)$$

приведем более грубую оценку.

Ишии [35] доказал, что

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow B(p) = 2 \text{ или } -2 \text{ или } 0, \\ p \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow B(p) = 0. \end{cases}$$

Поэтому, как легко видеть,

$$I_2 \leqslant \log\log x + O(1), \ \ x \to \infty;$$

по поводу оценки остальных возникающих сумм см. доказательство теоремы 5. Тем самым получена

Теорема 7. *Пусть $m > 0$ – неквадратное число, $m = \prod_p p^{e(p)}$, где $0 \leqslant e(p) \leqslant 3$. Тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} a_0(n^4 - m)^2 \ll x \log x.$$

Замечание 5. Мы предполагаем, что величину $x \log x$ можно заменить на x.

§3. Поведение $L_4(s)$ в точке $s = 1$

В [13] Шахиди получил мероморфную продолжимость и функциональное уравнение для $L_4(s)$. Вскоре Мурти [15] доказал голоморфность $L_4(s)$ в точке $s = 1$ и отсутствие в ней нуля: $L_4(1) > 0$. В настоящем параграфе мы изучим поведение $L_4(1)$ в зависимости от параметра – веса $2k$. Можно предположить, что имеет место аналог теоремы Зигеля в теории L-функций Дирихле, т.е. оценка снизу

$$L_4(1) \gg \frac{1}{k^{\varepsilon}},$$

но мы получим лишь более слабый результат. Пусть здесь и ниже c означает положительную константу не всегда одну и ту же; c_0, c_1, $c_2, \ldots$ – константы (не всегда одни и те же).

Теорема 8. *Имеет место соотношение*

$$L_4(1) + \left|L_4'(1)\right| \gg \frac{1}{(\log k)^c}.$$

Для доказательства используем две леммы.

Лемма 3. *Справедливы соотношения*

$$L_4(1) \ll (\log k)^c, \tag{13}$$

$$L_4'(1) \ll (\log k)^c. \tag{14}$$

Для доказательства (13) рассмотрим функцию $Z_1(s) = \zeta(s)L_4(s)$. Как было сказано в §1, эта функция всюду аналитична, кроме точки $s = 1$, в которой она имеет полюс первого порядка, и обладает функциональным уравнением риманова типа $<< s \to 1 - s >>$. С использованием функционального уравнения и теоремы Фрагмена–Линделефа легко доказать, что в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 2$ вне маленького кружочка $|s-1| < \delta$ имеет место оценка

$$Z_1(s) \ll k^c \left(|t| + 1\right)^c. \tag{15}$$

Пусть $(\operatorname{Re} s > 1)$

$$Z_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^s}.$$

Взвешенная формула суммирования Перрона дает ($r \geqslant 0$ – целое)

$$\frac{1}{r!}\sum_{n\leqslant x} A_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^r = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^s\,Z_1(s)}{s(s+1)\dots(s+r)}ds.$$

Перенеся прямую интегрирования влево на $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$ и беря $r>0$ достаточно большим, получим с применением оценки (15)

$$\sum_{n\leqslant x} A_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^r = \frac{1}{r+1}L_4(1)\cdot x + O\left(k^c\,x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Пусть $d_k(n)$ – известная арифметическая функция: число решений уравнения $x_1x_2\dots x_k=n$ в натуральных числах. Легко видеть, что

$$|A_n|\leqslant d_6(n).$$

Известно, что

$$\sum_{n\leqslant x} d_6(n)\asymp x(\log x)^5.$$

Беря $x=k^\gamma$, где $\gamma>0$ достаточно велико, доказываем (13).

Для доказательства (14) рассмотрим функцию $Z_2(s) = \zeta(s)^2L_4(s)$. Пусть ($\operatorname{Re}s>1$)

$$Z_2(s)=\sum_{n=}^{\infty}\frac{B_n}{n^s}.$$

Пусть целое $r>0$ достаточно велико. Аналогично вышеприведенному имеем

$$\sum_{n\leqslant x} B_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^r = c_1\,L_4(1)x\log x + \left[c_2\,L_4(1)+c_3\,L_4'(1)\right]x + O\left(k^c\,x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Отметим, что $c_3\neq 0$. Легко видеть, что $|B_n|\leqslant d_7(n)$. Известно, что

$$\sum_{n\leqslant x} d_7(n)\asymp x(\log x)^6.$$

Беря $x=k^\gamma$, где $\gamma>0$ достаточно велико, с учетом (13) доказываем (14).

Замечание 6. Вполне аналогично получаем оценки

$$L_2(1)\ll(\log k)^c,$$
$$L_2'(1)\ll(\log k)^c.$$

Лемма 4. *Имеет место соотношение*

$$L_2(1) \gg \frac{1}{\log k}.$$

Этот результат есть частный случай более общего утверждения, доказанного в [23], и вытекает из отсутствия зигелевского нуля у функции $L_2(s)$.

Переходим к доказательству теоремы. Напомним (см. §1), что ($\operatorname{Re} s > 1$)

$$\zeta(s)\, L_2(s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n)^2\, n^{-s};$$

$$\zeta(s)^2\, L_2(s)^3\, L_4(s)\, T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_0(n)^4\, n^{-s},$$

где

$$T(s) = \prod_p T_p\,(p^{-s}).$$

Рассмотрим неравенство

$$\sum_{n \leqslant x} a_0^2(n)\Big(1 - \frac{n}{x}\Big)^r \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n \leqslant x} a_0^4(n)\Big(1 - \frac{n}{x}\Big)^r} \cdot \sqrt{\sum_{n \leqslant x}\Big(1 - \frac{n}{x}\Big)^r}. \qquad (16)$$

Пусть целое $r > 0$ достаточно велико. Мы заменяем первые две суммы в (16) их асимптотиками (ср. доказательство леммы 3), а третью – величиной x и возводим обе части в квадрат. Имеем

$$\Big[Rx + O\left(k^c\, x^{\frac{1}{2}}\right)\Big]^2 \leqslant$$

$$\Big[c_1\, R_0(1) x \log x + (c_2\, R_0(1) + c_3\, R_0'(1))x + O\left(k^c\, x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\Big] \cdot x,$$

где

$$R \asymp L_2(1), \;\; R_0(s) = L_2(s)^3\, L_4(s) \cdot T(s),$$

$$R_0'(1) = A(1) \cdot L_4(1) + B(1) \cdot L_4'(1).$$

Отметим, что c_i $(i = 1, 2, 3)$ – отличные от нуля константы. Пусть $x \asymp k^\gamma$, где константа $\gamma > 0$ достаточно велика. Тогда имеем

$$R^2 \ll \max\left(R_0(1)\, \log x, |R_0'(1)|\right).$$

В силу леммы 3 и замечания 6 имеем

$$A(1) \ll (\log k)^c, \;\; B(1) \ll (\log k)^c.$$

Следовательно,

$$R_0(1) \ll L_4(1)(\log k)^c,$$

$$R_0'(1) \ll (L_4(1) + |L_4'(1)|)\,(\log k)^c,$$

и мы на основании леммы 4 доказываем теорему.

§4. Аналитические свойства $L_{f,f,\varphi}(s)$

В этом параграфе будут изучены свойства L-функции $L_{1,1,2}(s) = L_{f,f,\varphi}(s)$; $2k \geqslant 2l$, где $2k$ – вес f, $2l$ – вес φ. Приведем функциональное уравнение для $L_{1,1,2}(s)$ (см. [18]): пусть

$$M(s) = (2\pi)^{-(2k+l-3/2+s)}\Gamma\Big(2k + l - \frac{3}{2} + s\Big)\cdot$$

$$\cdot\Gamma\Big(2k - l - \frac{1}{2} + s\Big)\Gamma\Big(l - \frac{1}{2} + s\Big)^2 L_{1,1,2}(s),$$

тогда

$$M(s) = -M(1-s). \tag{17}$$

Дадим другую форму функционального уравнения (в случае L-функции $L_{f,\varphi,\psi}$, связанной с тремя формами f, φ, ψ одинакового веса, подобный факт получил Гарретт [16]). Пусть

$$Z(s) = s(1-s)\,\pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta(2s),$$

$$Z_1(s) = s(1-s)\,\pi^{-s},$$

$$Z_2(s) = s(1-s)\,\pi^{-s}\,\Gamma(s),$$

$$Z_3(s) = s(1-s)\,\pi^{-s}\,\zeta(2s).$$

Функция

$$E(s) = 2^{-4(s-k+\frac{1}{2})}\pi^{-(s-k+\frac{1}{2})}.$$

$$\cdot\Gamma\Big(s + l - \frac{1}{2}\Big)^2 \cdot \Gamma\Big(s + 2k - l - \frac{1}{2}\Big) \cdot \Gamma\Big(s + 2k + l - \frac{3}{2}\Big)\cdot$$

$$\cdot Z\Big(2s - \frac{1}{2}\Big) \cdot Z\Big(s - \frac{1}{2}\Big) \cdot Z(s) \cdot Z_1\Big(s + \frac{1}{2}\Big) \cdot Z_2(2s) \cdot Z_3(2s-1) \cdot L_{1,1,2}(s)$$

является целой функцией, инвариантной относительно преобразования $s \to 1 - s$:

$$E(s) = E(1-s). \tag{18}$$

Доказательство аналогично доказательству Гарретта с использованием соображений работы [18].

Для $\operatorname{Re} s > 1$ пусть

$$L_2^{[1,1]}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s},$$

$$L_1^{[2]}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n^{-s},$$

$$G(s) = L_2^{[1,1]}(s) * L_1^{[2]} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n\, n^{-s};$$

пусть $P_0 = \prod\limits_{p \leqslant p_0} p$, введем обозначение

$$G_0(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,P_0)=1}}^{\infty} a_n\, b_n\, n^{-s}.$$

Лемма 5. *Функция $G_0(s)$ голоморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Для доказательства воспользуемся методом Дьюка–Иванца [36]. Рассмотрим сумму вида

$$\mathcal{D}_0(X) = \sum_{\substack{n \\ (n,P_0)=1}} a_n\, b_n\, \eta^2\Big(\frac{n}{X}\Big),$$

где η – любая гладкая функция с носителем $[\frac{1}{2}, 1]$. Будет показано, что

$$\mathcal{D}_0(X) \ll X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{19}$$

откуда (через преобразование Меллина) следует справедливость леммы.

Имеем

$$\mathcal{D}_0(X) = \sum_{\substack{m \quad n \\ (mn,P_0)=1}} \sum a_m\, b_n\, \eta\Big(\frac{m}{X}\Big)\eta\Big(\frac{n}{X}\Big)\delta_{mn},$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. Как и в [36], используется формула

$$Y\,\delta_{mn} = \sum_{q|(m-n)} \Big(\omega(q) - \omega\Big(\frac{|m-n|}{q}\Big)\Big),$$

где $\omega(z)=\eta\ (z/\sqrt{X})$, $Y=\Sigma\ \omega(q)\asymp\sqrt{X}$; имеем

$$Y\,\mathcal{D}_0(X)=\sum_q\ \sum_{\substack{m\equiv n \pmod q\\(P_0,mn)=1}}\sum a_m\,b_n\,f\Big(\frac{m}{X},\frac{n}{X},\frac{q}{\sqrt{X}}\Big),$$

где

$$f(x,y,z)=\eta(x)\,\eta(y)\Big(\eta(z)-\eta\Big(\frac{|x-y|}{z}\Big)\Big).$$

Заметим, что $f(x,y,z)$ – гладкая функция с носителем – ящиком $[1/2,1]\times[1/2,1]\times[0,1]$.

Посредством мультипликативных характеров запишем:

$$Y\,\mathcal{D}_0(X)=\sum_{qrt}\varphi(qt)^{-1}\sum_{\chi \pmod q}^{*}\ \sum_{(mn,P_0t)=1}\sum\chi(m)\overline{\chi}(n)\cdot$$

$$\cdot a_{rm}\,b_{rn}\,f\Big(\frac{rm}{X},\frac{rn}{X},\frac{qrt}{X}\Big),$$

где $*$ означает, что суммирование идет по примитивным характерам. Далее требуется факторизовать a_{rm}, b_{rn} и ослабить условие $(mn,P_0t)=1$. Для этого используем эйлеровские произведения для $L_2^{[1,1]}(s)$, $L_1^{[2]}(s)$. Существуют числа $a_r(a)\ll r^{\varepsilon}$ для $a|r^2$ такие, что для всех m

$$a_{rm}=\sum_{am'=m}a_r(a)\,a_{m'};$$

аналогично существуют числа $b_r(b)\ll r^{\varepsilon}$ для $b|r$ такие, что для всех n

$$b_{rn}=\sum_{bn'=n}b_r(b)\,b_{n'}.$$

Указанная факторизация позволяет записать

$$Y\,\mathcal{D}_0(X)=\sum_{\substack{qrt\\(P_0,r)=1}}\varphi(qt)^{-1}\sum_{(ab,qt)=1}a_r(a)\,b_r(b)\sum_{\chi \pmod q}^{*}\cdot$$

$$\cdot\sum_{(mn,P_0t)=1}\sum\chi(am)\overline{\chi}(bn)a_m\,b_n f\Big(\frac{arm}{X},\frac{brn}{X},\frac{qrt}{\sqrt{X}}\Big).$$

Чтобы ослабить условие взаимной простоты, снова используем эйлеровские произведения. Определим числа $c_t(c)\ll t^{\varepsilon}$ для $c\big|P_0^3\,t^3$ такие, что

$$a_m=\sum_{cm'=m}c_t(c)\,a_{m'},$$

если $(m, P_0 t) = 1$; в противном случае сумма равна нулю.

Определим числа $d_t(d) \ll t^\varepsilon$ для $d \big| P_0^2 t^2$ такие, что

$$b_n = \sum_{dn'=n} d_t(d)\, b_{n'},$$

если $(n, P_0 t) = 1$; в противном случае сумма равна нулю.

Указанные соотношения позволяют написать

$$Y\,\mathcal{D}_0(X) = \sum_{\substack{qrt\\(P_0,r)=1}} \varphi(qt)^{-1} \sum_{(ab,qt)=1} a_r(a)\, b_r(b) \sum_{(cd,q)=1} c_t(c)\, d_t(d)\cdot$$

$$\cdot \sideset{}{^*}\sum_{\chi \pmod q} \sum_m \sum_n \chi(acm)\, \overline{\chi}(bdn) a_m\, b_n\, f\Big(\frac{acrm}{X}, \frac{bdrn}{X}, \frac{qrt}{\sqrt{X}}\Big).$$

Дальнейшие преобразования, аналогичные содержащимся в работе [36], дают:

$$2Y\,\mathcal{D}_0(X) = X^2 \sum_{\substack{rt<\sqrt{X},\\(P_0,r)=1}} \sum_{\substack{a|r^2\\(ab,t)=1}} \sum_{b|r}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{s|(P_0 t)^3,\\d|(P_0 t)^2}} a_r(a)\, b_r(b)\, c_t(c)\, d_t(d)\, (abcd)^{-1}\mathcal{E}, \tag{20}$$

где $\mathcal{E}$ – сумма довольно сложного вида; точное выражение для нее содержится в работе ([36], с. 152). Дьюк и Иванец доказали, что

$$\mathcal{E} \ll abcdrt^{-1}X^{\varepsilon-1}. \tag{21}$$

(20) и (21) дают оценку (19). Лемма доказана.

Лемма 6. *Функция* $L_1^{[2]}(s)\cdot L_3^{[1,1,2]}(s)$ *голоморфна при* $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Для доказательства заметим, что $(\operatorname{Re} s > 1)$

$$G(s) = L_1^{[2]}(s)\cdot L_3^{[1,1,2]}(s)\cdot B(s), \tag{22}$$

где

$$B(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{A_2}{p^{2s}} + \frac{A_3}{p^{3s}} + \dots\Big).$$

Если в (22) в каждом эйлеровском произведении ограничиться p-множителями с условием $(p, P_0) = 1$, то получим аналог (22):

$$G_0(s) = L_{1,0}^{[2]}(s) \cdot L_{3,0}^{[1,1,2]}(s) \cdot B_0(s).$$

Легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $p_0 = p_0(\varepsilon)$ такое, что при $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon \quad B_0(s) > 0$. Это доказывается на основании неравенства

$$|A_n| \leqslant 2^n \cdot p(n) \cdot e^{10n},$$

где $p(n)$ – число разбиений n. По классической теореме Харди–Рамануджана

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}.$$

Справедливость леммы следует теперь из леммы 5.

Лемма 6 в сочетании с функциональными уравнениями (17) и (18) позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Функция $L_{1,1,2}(s)$ всюду голоморфна, кроме точки $s = \frac{1}{2}$, где, возможно, имеется полюс порядка 1.*

§5. Теорема Зигеля для $L_f(s)$

В работе [37] был доказан условный вариант теоремы Зигеля для L-функций параболических форм. "Условность" доказательства в [37] состояла в постулировании некоторых свойств функции $L_{1,1,2}(s)$, в частности, голоморфности этой функции в окрестности точки $s = 1$.

В настоящем параграфе мы, используя теорему 9, эту "условность" снимаем и представляем вариант доказательства из [37], свободный от каких-либо недоказанных предположений.

Теорема 10. *Пусть, как и выше, $f(z)$ – нормализованная собственная форма Гекке из пространства $S_{2k}(\Gamma)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такое, что*

$$L_f(1) > \frac{C(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}. \tag{23}$$

Постоянная $C(\varepsilon)$ (как и в случае классической теоремы Зигеля) является неэффективной.

Замечание 7. Как доказано в [37], среди всех $\nu_{2k} \asymp k$ собственных форм Гекке $f(z)$ пространства $S_{2k}(\Gamma)$ может существовать самое большее одна такая, что $L_f(s)$ имеет "зигелевский нуль," т.е. простой вещественный нуль β в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log k(|t|+2)}$$

($c > 0$ – некоторая эффективная постоянная), в которой $L_f(s) \neq 0$, исключая $s = \beta$. Если $L_f(s)$ не имеет зигелевского нуля, то можно показать, что

$$L_f(1) > \frac{C}{\log k},$$

где $C > 0$ – некоторая эффективная постоянная. Если $L_f(s)$ имеет зигелевский нуль, то, как доказано в теореме, справедливо неравенство (23).

Для доказательства теоремы нам необходима следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $f(z)$, $\varphi(z)$ – нормализованные собственные формы Гекке из пространств $S_{2k}(\Gamma)$, $S_{2l}(\Gamma)$ соответственно; предполагаем, что $f(z) \neq \varphi(z)$.*

1. *В круге*

$$|1-s| \leqslant \delta \tag{24}$$

при некотором $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &L_1(s) = O\left(k^\gamma\right);\\ &L_{1,2}(s) = O\left((kl)^\gamma\right);\\ &L_{1,1}(s) = O\left(k^\gamma\right), \end{aligned}$$

если s отделено от 1; $\gamma > 0$ – некоторая постоянная.

2. *Имеют место оценки производных порядка r $(r = 0, 1, 2, 3)$:*

$$\begin{aligned} &L_1^{(r)}(1) = O\left((\log k)^\gamma\right);\\ &L_{1,2}^{(r)}(1) = O\left((\log kl)^\gamma\right);\\ &\left(L_{1,1}(s)(s-1)\right)^{(r)}\Big|_{s=1} = O\left((\log k)^\gamma\right); \end{aligned}$$

$\gamma > 0$ – некоторая постоянная.

3. *В круге (24) при некотором $\delta > 0$ функция $L_{1,1,2}(s)$ голоморфна и*

$$L_{1,1,2}(s) = O\left((kl)^\gamma\right);$$

$\gamma > 0$ – *некоторая постоянная.*

4. *Имеют место оценки производных порядка r $(r = 0, 1, 2, 3)$:*

$$L^{(r)}_{1,1,2}(1) = O\left((\log kl)^{\gamma}\right);$$

$\gamma > 0$ – *некоторая постоянная.*

Дадим доказательство пунктов 3, 4 леммы, пункты 1, 2 доказываются аналогично. Сначала докажем пункт 3. Запишем функциональное уравнение (17) в виде $(s = \sigma + it)$

$$\Bigl(1 - s - \frac{1}{2}\Bigr) G(1-s)\, L_{1,1,2}(1-s) = \Bigl(s - \frac{1}{2}\Bigr) G(s)\, L_{1,1,2}(s).$$

На прямой $\operatorname{Re} s = 2$ целая функция $(s - \frac{1}{2})\ L_{1,1,2}(s)$ имеет оценку $(s - \frac{1}{2})\ L_{1,1,2}(s) \ll |t| + 1$, $\ll$-константа абсолютная. На прямой $\operatorname{Re} s = -1$ имеет место оценка

$$\Bigl(1 - s - \frac{1}{2}\Bigr) \frac{G(1-s)}{G(s)} L_{1,1,2}(1-s) \ll (kl)^A (|t| + 1)^B,$$

где $A > 0$, $B \geqslant 1$.

По теореме Фрагмена–Линделефа на всей полосе $-1 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 2$ верна оценка

$$\Bigl(s - \frac{1}{2}\Bigr)\, L_{1,1,2}(s) \ll (kl)^A\, (|t| + 1)^B.$$

Поэтому в круге $|s-1| < \Delta$, где Δ – постоянная, $0 < \Delta < \frac{1}{2}$, имеем

$$L_{1,1,2}(s) \ll (kl)^A.$$

Докажем теперь пункт 4. Сходные рассуждения уже использовались при доказательстве леммы 3. Пусть $(\operatorname{Re} s > 1)$

$$L_{1,1,2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Положим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{L_{1,1,2}(s+1) x^s\, ds}{s(s+1)\dots(s+r)}. \tag{25}$$

По взвешенной формуле суммирования Перрона

$$I = \frac{1}{r!} \sum_{n \leqslant x} \frac{c_n}{n} \Bigl(1 - \frac{n}{x}\Bigr)^r.$$

Легко видеть, что

$$I \ll (\log x)^{C_0}, \ C_0 > 0.$$

Пусть $\Delta > \frac{1}{2}$ – близкое к $\frac{1}{2}$ число. Как только что было доказано,

$$L_{1,1,2}(\sigma + it) \ll (kl)^C (|t| + 1)^C, \ \Delta \leqslant \sigma \leqslant 3.$$

Можно считать, что $C_0 \leqslant C$, C – целое положительное. Двигаем прямую интегрирования в (25) до $\operatorname{Re} s = -\frac{1}{10}$. Полагаем $r = C+1$. Имеем

$$I = \frac{1}{r!} L_{1,1,2}(1) + O\left((kl)^C x^{-1/10}\right).$$

Полагаем $x = (kl)^{10C+1}$. Теперь легко видеть, что

$$L_{1,1,2}(1) \ll (\log kl)^C.$$

Вполне аналогично $(r = 1, 2, 3)$ имеем

$$L_{1,1,2}^{(r)}(1) \ll (\log kl)^C.$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Мы используем метод Эстермана [38] доказательства теоремы Зигеля для L-рядов Дирихле. Положим

$$F(s) = \zeta(s)^2 \cdot L_1^{[1]}(s)^4 \cdot L_1^{[2]}(s) \cdot L_{1,1}(s)^2 \cdot L_{1,2}(s)^2 \cdot L_{1,1,2}(s),$$

где $2l < 2k$ и обе функции $L_1^{[1]}(s)$ и $L_1^{[2]}(s)$ имеют зигелевские нули β_1 и β_2 соответственно. При $\sigma > 1$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, n^{-s}, \tag{26}$$

где $c_1 = 1$ и $c_n \geqslant 0$ при всех n, поскольку

$$\log F(s) = \sum_{\substack{p, m \geqslant 1 \\ p \text{ простое}}} \frac{1}{p^{ms} \cdot m} \left(1 + \beta_p^m\right) \left(1 + \overline{\beta}_p^m\right) \left(1 + \alpha_p^m + \overline{\alpha}_p^m\right)^2.$$

Функция $F(s)$ голоморфна в круге (24) при некотором $\delta > 0$ всюду, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс порядка $\leqslant 4$ (случай голоморфности $F(s)$ в точке $s = 1$ можно отбросить, поскольку тогда $F(s)$ не имеет нулей в интервале $\frac{1}{2} < s \leqslant 1$). Главная часть $F(s)$ в окрестности точки $s = 1$ имеет вид

$$F_1(s) = \frac{\lambda_1}{(s-1)^4} + \frac{\lambda_2}{(s-1)^3} + \frac{\lambda_3}{(s-1)^2} + \frac{\lambda_4}{s-1},$$

где

$$\lambda_i = \frac{(F(s)(s-1)^4)^{(i-1)}}{(i-1)!}\Bigg|_{s=1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4).$$

Разность $F(s) - F_1(s)$ голоморфна в круге (24) и поэтому при

$$|s-2| \leqslant 1 + \delta_1$$

для некоторого δ_1, зависящего от δ,

$$F(s) - F_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - \Lambda_m)(2-s)^m, \tag{27}$$

где b_m и Λ_m – коэффициенты разложения $F(s)$ и $F_1(s)$ соответственно в окрестности точки $s = 2$. В силу (26), $b_0 = 1$, $b_m \geqslant 0$; кроме того, $|\Lambda_m| \leqslant m^3\ (|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| + |\lambda_4|)$. По лемме 7 на окружности $|s-2| = 1 + \delta_1$

$$F(s) = O\left((kl)^\gamma\right),$$

$$F_1(s) = O\left((kl)^\gamma\right)$$

при некотором $\gamma > 0$. Применяя к $F(s) - F_1(s)$ неравенство Коши для коэффициентов степенных рядов, получим

$$|b_m - \Lambda_m| = O\left((kl)^\gamma\, r^m\right),$$

где $r = r(\delta) < 1$. Следовательно, остаток ряда (27) оценивается как

$$\sum_{m=M}^{\infty} |b_m - \Lambda_m|(2-s)^m = O\left((kl)^\gamma\, r_1^M\right)$$

при $1 - \delta_2 < s < 1$, где δ_2 – достаточно малая постоянная, зависящая от δ, и $r_1 = r_1(\delta_2) < 1$. Следовательно, в этом интервале

$$F(s) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{4} \frac{|\lambda_i|(2-s)^M}{(s-1)^4} - c_1(kl)^\gamma\, r_1^M,$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная. Выберем M так, что

$$\frac{1}{2}r_1 \leqslant c_1(kl)^\gamma\, r_1^M < \frac{1}{2},$$

тогда

$$F(s) > \frac{1}{2} - \frac{(2-s)^M}{(1-s)^4}\sum_{i=1}^{4}|\lambda_i|.$$

Поскольку $M = O(\log kl)$, то

$$F(s) > \frac{1}{2} - c_2\sum_{i=1}^{4}\frac{|\lambda_i|(kl)^{\xi(1-s)}}{(s-1)^4} \quad (1-\delta_2 < s < 1),$$

$c_2 > 0$, $\xi > 0$ – абсолютные постоянные (это аналог неравенства Эстермана ([38], §21)).

Положим теперь $s = \beta_2$, где β_2 – зигелевский нуль $L_1^{[2]}(s)$; можно считать, что он удовлетворяет неравенствам $1-\varepsilon < \beta_2 < 1$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, и $1-\delta_2 < \beta_2 < 1$; тогда

$$0 > \frac{1}{2} - c_3\sum_{i=1}^{4}|\lambda_i|\, k^{\eta\varepsilon},$$

где $\eta > 0$ – некоторая постоянная, $c_3 > 0$. Из последнего неравенства следует, что

$$|\lambda_i| > \frac{c_4}{k^{\eta\varepsilon}}$$

хотя бы для одного i.

Поскольку $L_1^{[1]}(s)$ входит в $F(s)$ в четвертой степени, в силу оценок леммы 7 имеем утверждение теоремы.

Замечание 8. Пусть $S_0(\Gamma)$ – пространство параболических форм веса 0 относительно $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Пусть $f(z)$ – собственная форма Гекке из этого пространства, являющаяся собственной функцией оператора Лапласа $\Delta = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ с собственным значением λ. Пусть $L_f(s)$ – L-функция параболической формы $f(z)$. Указанным выше методом можно доказать аналог теоремы 10, т.е. неравенство

$$L_f(1) > \frac{C(\varepsilon)}{\lambda^\varepsilon}. \tag{28}$$

Для форм веса 0 пока не доказана гипотеза Рамануджана–Петерсона, однако при получении (28) ее можно обойти; в этом случае полезны приемы работ [39, 40, 23].

§6. Равномерный аналог задачи Харди

Сохраним обозначения §1. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,e^{2\pi inz}\in S_{2k}(\Gamma)$$

– нормализованная собственная форма Гекке, $a_0(n)=a(n)/n^{k-1/2}$. Харди в Принстонской версии своих лекций о Рамануджане [41] первым связал оценку

$$\sum_{p\leqslant x}\tau_0(p)\log p\ll x$$

с отсутствием нулей $L_\Delta(s)$ на прямой $\operatorname{Re}s=1$. Из результатов Ранкина [4] следует оценка (вес $2k$ постоянный)

$$\sum_{p\leqslant x}a_0(p)\log p=o(x).$$

Уточнение было дано Морено [42], который доказал, что при постоянном весе $2k$

$$\sum_{p\leqslant x}a_0(p)\log p\ll x\exp\left\{-\gamma(\log x)^{1/2}\right\},\ \text{где }\gamma>0.$$

Наконец, Морено [43] исследовал равномерный аналог задачи Харди и получил соответствующую асимптотическую формулу, но не проследил зависимости в явном виде ее членов от параметров формы.

Здесь мы продолжим исследование Морено и дадим решение задачи, в котором получена такая явная зависимость от веса $2k$.

Теорема 11. *При $x\to\infty$ справедливо соотношение, равномерное по весу $2k$,*

$$\sum_{p\leqslant x}a_0(p)\log p=-E\frac{x^\beta}{\beta}+O\left((\log k)^3xe^{-c(\log x)^{1/2}/(\log k)^{3/2}}\right),\qquad(29)$$

где $E=1$, если L-функция $L_f(s)$ имеет зигелевский нуль β, $E=0$ в противном случае; $c>0$. При этом

$$1-\frac{c}{\log k}<\beta<1-\frac{C(\varepsilon)}{k^\varepsilon},\qquad(30)$$

где $C > 0$, $C(\varepsilon) > 0$.

Доказательство (29), которое мы не приводим, следует классической схеме в теории L-рядов Дирихле (ср. [38, 43]) с использованием следующей леммы.

Лемма 8. *Имеет место оценка, равномерная по весу* $2k$,

$$\sum_{n \leqslant x} a_0^2(n) \ll (\log k)^3 \ x.$$

Заметим, что правое неравенство в (30) следует из теоремы 10.

Из теоремы 11 получаем

Следствие 2. *Для любого фиксированного* $A > 1$ *и* $k \leqslant (\log x)^A$ *справедлива оценка*

$$\sum_{p \leqslant x} a_0(p) \log p \ll (\log k)^3 \ x e^{-c(\log x)^{1/2}/(\log k)^{3/2}}.$$

Литература

1. E. Hecke, *Über Modulfunktionen und Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I, II,* Math. Ann. **114** (1937), 1–28; 316–351.
E. Hecke, *Mathematische Werke,* Göttingen, 1983, 644–671; 672–707.
2. A. Walficz, *Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen,* Math. Ann. **108** (1933), 75–90.
3. P. Deligne, *La conjecture de Weil, I,* Publs. Math. Inst. Hautes Études Sci. **43** (1974), 273–307; русский перевод: Успехи мат. наук **30**, No. 5 (1975), 159–190.
4. R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function* $\tau(n)$ *and similar arithmetical functions, I, II,* Proc. Cambridge Phil. Soc. **35**, No. 3 (1939), 351–356; 357–372.
5. A. Selberg, *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist,* Arch. Math. Naturvid. **43**, No. 4 (1940), 47–50.
A. Selberg, *Collected papers,* Vol. I. Berlin etc., 1989, 38–41.
6. A. P. Ogg, *On a convolution of L-series,* Invent. Math. **7**, No. 4 (1969), 297–312.
7. R. A. Rankin, *Sums of powers of cusp form coefficients, II,* Math. Ann **272**, No. 4 (1985), 593–600.
8. R. P. Langlands, *Euler products* (preprint); русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей **15**, No. 1 (1971), 14–43.
9. G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series,* Proc. London Math. Soc. **31**, No. 1 (1975), 79–98.
10. S. Gelbart, *Automorphic forms and Artin's conjecture,* Lect. Notes Math. **627** (1977), 241–276.

11. S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. École Normale Sup. 4^e série **11**, No. 4 (1978), 471–552.
12. F. Shahidi, *Functional equation satisied by certain L-functions,* Compos. Math. **37**, No. 2 (1978), 171–207.
13. F. Shahidi, *On certain L-functions,* Amer. J. Math. **103**, No. 2 (1981), 297–355.
14. C. J. Moreno and F. Shahidi, *The fourth moment of Ramanujan τ-function,* Math. Ann **266**, No. 2 (1983), 233–239.
15. M. R. Murty, *Oscillations of Fourier coefficients of modular forms,* Math. Ann. **262**, No. 4 (1983), 431–446.
16. P. B. Garrett, *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple product,* Ann. Math. **125**, No. 2 (1987), 209–235.
17. W. C. W. Li, *Newforms and functional equations,* Math. Ann. **212**, No. 4 (1975), 285–315.
18. T. Orloff, *Special values and mixed weight triple products (With an Appendix by Don Blasius),* Invent. Math. **90**, No. 1 (1987), 169–180.
19. T. Satoh, *Some remarks on triple L-functions,* Math. Ann. **276**, No. 4 (1987), 687–698.
20. I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, *Rankin triple L-functions,* Compos. Math. **64**, No. 1 (1987), 31–115.
21. G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms,* Commun. Pure and Appl. Math. **29**, No. 6 (1976), 783–804.
22. F. Shahidi, *Third symmetric power L-functions for* GL(2), Compos. Math. **70**, No. 3 (1989), 245–273.
23. J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero,* Ann. Math. **140**, No. 1 (1994), 161–181.
24. H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, and J. Shalika, *Rankin–Selberg convolutions,* Amer. J. Math. **105** (1983), 367–464.
25. H. Jacquet and J. Shalika, *Rankin–Selberg convolutions: archimedean theory, in the Festschrift in honor of I. Piatetski-Shapiro,* Weizmann Inst. of Sci. **1** (1990), 125–208.
26. C. Moeglin and J. L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* GL(n), Ann. Sci. École Normale Sup. 4^e série **22**, No. 4 (1989), 605–674.
27. D. Bump and D. Ginzburg, *Symmetric square L-functions on* GL(r), Ann. Math. **136**, No. 1 (1992), 137–205.
28. N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products, I, II,* Proc. London Math. Soc. **53**, No. 1–2 (1986), 1–47; 209–236.
29. Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues of the modular operators,* Proc. Internat. Congr. Math. Aug. 1962, Djursholm, Uppsala, 1963, 270–284.
30. А. Н. Андрианов, О. М. Фоменко, *О средних квадратичных по прогрессиям коэффициентов Фурье параболических форм,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **80** (1965), 5–15.
31. М. Б. Барбан, *Метод “большого решета” и его применения в теории чисел,* Успехи мат. наук **21**, No. 2 (1966), 51–102.
32. М. Б. Барбан, П. П. Вехов, *Суммирование мультипликативных функций от полиномов,* Мат. заметки **5**, No. 6 (1969), 669–680.

33. P. Erdös, *On the sum* $\sum_{k=1}^{x} d(f(k))$, J. London Math. Soc. **27**, No. 1 (1952), 7–15.
34. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves,* Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
35. N. Ishii, *Cusp forms of weight one, quadratic reciprocity and elliptic curves,* Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
36. W. Duke and H. Iwaniec, *Convolution L-series,* Compos. Math. **91**, No. 2 (1994), 145–158.
37. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, *Поведение L-функций параболических форм в точке $s = 1$,* Зап. научн. семин. ПОМИ, **204** (1993), 37–54.
38. Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел,* М., 1971, 200 с.
39. H. Iwaniec, *Small eigenvalues of Laplacian for $\Gamma_0(N)$,* Acta Arithm. **56**, No. 1 (1990), 65–82.
40. H. Iwaniec, *The spectral growth of authomorphic L-functions,* J. Reine und Angew. Math **428** (1992), 139–159.
41. G. H. Hardy, *Ramanujan,* Cambridge, 1940, 236 p.
42. C. J. Moreno, *Prime number theorems for the coefficients of modular forms,* Bull. Amer. Math. Soc. **78**, No. 5 (1972), 796–798.
43. C. J. Moreno, *Explicit formulas in the theory of authomorphic forms,* Lect. Notes Math. **636** (1977), 73–216.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 16 декабря 1996 г.