А. Ю. Солынин

УПОРЯДОЧИВАНИЕ МНОЖЕСТВ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕТРИКА И ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

**Посвящается
90-летию со дня рождения
Г. М. Голузина**

1. Введение

В настоящее время известно достаточно большое число преобразований, которые данным системам множеств, конденсаторов или функций сопоставляют новые аналогичные объекты. Ценность таких преобразований определяется тем, насколько более простыми (с точки зрения рассматриваемых задач) являются вновь построенные конфигурации, а также тем, удается или нет установить соотношения между характеристиками исходных и преобразованных объектов. Преобразования рассматриваемого в работе типа неоднократно использовались в исследованиях по теории потенциала и теории функций. В идейном плане они восходят к статьям Г. Шоке [1] и Х. Ренгли [2], дальнейшие результаты получены М. Клейном [3] и И. П. Митюком [4, 5].

В теореме 1 данной заметки устанавливаются неравенства, связывающие решения дифференциальных уравнений в частных производных в исходной системе областей с аналогичными решениями в "упорядоченной" системе областей. Термин "упорядочивание" будет пониматься в смысле работы [6], точное определение приводится ниже. Затем, в теореме 2, полученные результаты применяются при изучении гиперболической метрики областей комплексной сферы. Эта теорема может быть полезна при исследовании экстремальных задач в некоторых классах регулярных функций. Отметим, что многие классические задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 94-01-00911 и 97-01-00259) и министерства образования Финляндии (CIMO program).

теории таких функций, изложенные в монографии Г. М. Голузина [7], решаются на основе принципа гиперболической метрики. В теореме 3 мы доказываем точное неравенство, связывающее гиперболическую метрику с метрикой Ж. Ферран [8], что дает ответ на один из вопросов, сформулированных в [9].

В заключительном разделе работы приводится теорема сравнения (теорема 4) для гармонических мер, соответствующих заданной системе компактов, лежащих в замыкании фиксированной области, и гармонических мер, соответствующих компактам упорядоченной системы. Использование теоремы 4 позволяет дать решение задачи С. Сегавы [10] о гармонической мере компактных подмножеств, лежащих на диаметре единичного круга (теорема 5).

Предварительное изложение некоторых результатов данной работы было опубликовано в [10].

Настоящая статья завершена во время моего пребывания в университете г. Хельсинки по программе CIMO. Автор благодарен сотрудникам математического департамента этого университета за идеальные условия для работы и Матти Вуоринена за многие полезные обсуждения.

2. Упорядочивание множеств и функций

Пусть $D_1, \dots, D_m$ – множества в $\mathbb{R}^n$, имеющие непустое пересечение:

$$\bigcap_{i=1}^{m} D_i \neq \emptyset.$$

Обозначим через Ω_i, $i = 1, \dots, m$, пересечение всевозможных объединений по i множеств из системы $\{D_i\}_{i=1}^m$. Очевидно, что $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ – упорядоченная система множеств:

$$\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_m.$$

Систему множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ будем называть *упорядочиванием системы множеств* $\{D_i\}_{i=1}^m$.

Можно дать эквивалентное определение множеств Ω_i:

Ω_i состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых найдутся номера $s_1, \dots, s_{m+1-i}$, $1 \leqslant s_k \leqslant m$, такие, что $x \in D_{s_k}$ при $k = 1, \dots, m+1-i$. Таким образом, если точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит ровно s множествам из системы $\{D_i\}_{i=1}^m$, то она принадлежит также ровно s множествам из системы $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$.

Пусть на каждом из множеств D_i задана функция

$$f_i : D_i \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Определим функцию $g_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ по следующему правилу.

Пусть $x \in \Omega_i$. Обозначим через $D_{s_1}, \dots, D_{s_l}$ все те множества системы $\{D_i\}_{i=1}^m$, которые содержат точку x. Тогда определены значения $f_{s_1}(x), \dots, f_{s_l}(x)$. Очевидно, $l \geqslant m + 1 - i$. Пусть при данном x индексы номеров $s_1, \dots, s_l$ выбраны таким образом, что

$$f_{s_1}(x) \leqslant f_{s_2}(x) \leqslant \dots \leqslant f_{s_l}(x).$$

Тогда полагаем

$$g_i(x) = f_{s_{l-m+i}}(x).$$

Следуя [6], систему функций $\{g_i(x)\}_{i=1}^m$ будем называть *упорядочиванием системы функций* $\{f_i(x)\}_{i=1}^m$.

Из определения вытекает, что функции $g_i(x), \dots, g_m(x)$ определены при всех $x \in \Omega_i$ и при этом

$$g_i(x) \leqslant g_{i+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant g_m(x). \tag{1}$$

Неравенства (1) означают, что система функций $\{g_i\}_{i=1}^m$ мажорирует систему $\{f_i\}_{i=1}^m$, в этом смысле наши исследования примыкают к хорошо известной теории мажоризации, см., например, [11].

В случае $m = 2$ упорядочивания множеств D_1, D_2 и функций f_1, f_2 определяются элементарно:

$$\Omega_1 = D_1 \cap D_2, \qquad \Omega_2 = D_1 \cup D_2; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \min\{f_1(x),\ f_2(x)\} \quad \text{при} \quad x \in \Omega_1, \\ g_2(x) &= \max\{f_1(x),\ f_2(x)\} \quad \text{при} \quad x \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Результат упорядочивания подсистемы $D_1, \dots, D_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, исходной системы множеств $\{D_i\}_{i=1}^m$ будем обозначать через $\Omega_{j,1}, \dots, \Omega_{j,j}$. Пусть также $\Omega_{j,k}^p = \Omega_{j,k} \cap D_p$. Аналогичные обозначения используем и для упорядочивания подсистем функций: $\{g_{j,1}, \dots, g_{j,j}\}$ – упорядочивание подсистемы $\{f_1, \dots, f_j\}$; $g_{j,k}^p(x) = \min\{g_{j,k}(x),\ f_p(x)\}$.

Основные доказательства работы проводятся методом индукции. При этом используется следующее простое наблюдение, восходящее к работам Шоке [1] и Клейна [3].

Лемма 1. *Результатом упорядочивания системы двух областей* $\{\Omega_{j,k-1},\ \Omega_{j,k}^{j+1}\}$ *является пара* $\{\Omega_{j,k-1}^{j+1},\ \Omega_{j+1,k}\}$.

Аналогичное наблюдение для пар функций использовалось в [6].

Лемма 2. *Результатом упорядочивания системы функций* $\{g_{j,k-1},$ $g_{j,k}^{j+1}\}$ *является пара* $\{g_{j,k-1}^{j+1},\ g_{j+1,k}\}$.

Замечание. Применение соотношений (3) и леммы 2 позволяет доказывать утверждения о принадлежности функций $g_1, \dots, g_m$ некоторым известным классам функций при условии, что исходные функции $f_1, \dots, f_m$ принадлежали таким классам (см., например, [6, лемма 1]). Однако в данной работе мы не будем использовать это замечание.

3. Принцип максимума.

Далее всюду $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ и $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая и выпуклая функция. Нас будут интересовать решения дифференциального неравенства

$$\Delta v \geqslant \mu(v) + f, \tag{4}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенные на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие при всех $\zeta \in \partial D$ граничному условию

$$\limsup_{D \ni x \to \zeta} v(x) \leqslant C. \tag{5}$$

Ниже во всех рассматриваемых случаях предполагается, что задача (4), (5) имеет максимальное решение ω, которое, в силу максимальности, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \mu(v) + f. \tag{6}$$

Максимальность решения означает, что для всех решений v задачи (4), (5) всюду в D выполняется неравенство $v \leqslant \omega$.

Мы не рассматриваем вопрос о существовании максимальных решений в общем случае; в приложениях мы работаем с гиперболической метрикой, которая, как известно, является максимальным решением соответствующего уравнения и существует для любой области комплексной сферы, имеющей не менее трех граничных точек.

Для доказательства теорем сравнения решений неравенства (4) в исходной и в упорядоченной системах множеств будут применяться известные варианты принципа максимума для решений PDE's (см. леммы 3, 4 ниже). Такой подход был использован в [12, 13] и в [14] для доказательства неравенств, связанных с преобразованиями поляризации и симметризации.

Лемма 3 (принцип максимума, [14]). *Пусть $c(x)$ – ограниченная функция и пусть $u \in C^2(D)$ – решение неравенства*

$$\Delta\, u + c(x)\, u \geqslant 0$$

в области D. Если $u \leqslant 0$ в D и если $u(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in D$, то $u \equiv 0$ в D.

Лемма 4. *Пусть $g \geqslant f$ в области D, и пусть $u,\ v \in C^2(D)$ удовлетворяют в D условиям*

$$\Delta\, u = \mu(u) + f, \quad \Delta\, v \geqslant \mu(v) + g.$$

Если

$$\liminf_{x\to\zeta} u(x) \geqslant \limsup_{x\to\zeta} v(x) \tag{7}$$

для всех $\zeta \in \partial D$, то $v \leqslant u$ в D.

Если, дополнительно, $v(x_0) = u(x_0)$ при некотором $x_0 \in D$, то $f \equiv g$ и $u \equiv v$ в D.

Доказательство. Предположим, что функция

$$\omega(x) = v(x) - u(x)$$

имеет положительный максимум в D:

$$\max_{x\in D} \omega(x) = \omega(x_0) = a > 0.$$

Так как

$$\Delta\, \omega \geqslant [\mu(v) - \mu(u)] + [g - f], \tag{8}$$

то $\Delta\, \omega \geqslant 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. В силу принципа максимума для субгармонических функций $\omega \equiv a$ в $\mathcal{U}$. Таким образом, множество $\{x \in D : \omega(x) = a\}$ открыто в D. Так как это множество и замкнуто, то $\omega \equiv a$ в D. Последнее противоречит условию (7).

Пусть теперь $v(x_0) = u(x_0)$ при $x_0 \in D$. Тогда $\omega(x_0) = 0$. Используя (8) и теорему о среднем, приходим к неравенству

$$\Delta\,\omega + c(x)\,\omega \geqslant 0,$$

которое выполняется в окрестности $\mathcal{U}_1$ точки x_0. Здесь $c(x)$ – некоторая функция, определенная в $\mathcal{U}_1$. Применяя принцип максимума (лемму 3) к функции $\omega \geqslant 0$, получаем тождество: $\omega \equiv 0$ в $\mathcal{U}_1$, из которого и вытекает требуемое утверждение. $\square$

4. Основная теорема

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть множества $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ получены в результате упорядочивания системы открытых множеств $D_1, \dots, D_m$, а функции $g_1, \dots, g_m$ – в результате упорядочивания системы функций $f_1, \dots, f_m$, $f_i : D_i \to \mathbb{R}_+$.*

Пусть B, C – вещественные константы ($B \leqslant \infty$, $C < \infty$, $C \leqslant B$) и пусть $u_i \in C^2(D_i)$ и $v_i \in C^2(\Omega_i)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \Delta\, u_i = \mu(u_i) + f_i \\ \lim\limits_{x\to\zeta} u_i(x) = B, \\ \forall \zeta \in \partial D_i \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \Delta\, v_i \geqslant \mu(v_i) + g_i \\ \limsup\limits_{x\to\zeta} v_i(x) \leqslant C \\ \forall \zeta \in \partial \Omega_i. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда при всех $x \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, m$,

$$\sum_{k=i}^{m} v_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m+1-i} u_{s_k}(x), \tag{11}$$

где во втором случае суммирование ведется по произвольному набору попарно различных индексов $s_1, \dots, s_{m+1-i}$.

Через $D_l(x)$ и $\Omega_l(x)$ будем обозначать те связные компоненты соответствующих множеств, которые содержат точку x. Равенство в (11) имеет место только в том случае, если для каждого индекса j, $i \leqslant j \leqslant m$, существует свой, неравный другим, индекс $s_{k(j)}$ из числа индексов, по которым ведется суммирование во второй сумме в (11), такой, что $\Omega_j(x) = D_{s_{k(j)}}(x)$ и

$$g_j \equiv f_{s_{k(j)}}, \qquad v_j \equiv u_{s_{k(j)}} \quad \text{в} \quad D_{s_{k(j)}}(x).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что функции u_l – субгармонические в соответствующих областях, поэтому равенство $u_l(x) = B$ при $x \in D_l$ достигается только при условиях $\mu(t) = 0$ при $t \leqslant B$ и $f_l \equiv 0$, $u_l \equiv B$ в $D_l(x)$. Аналогично, равенство $v_m(x) = C$ при $x \in \Omega_m$ достигается только в случае $\mu(t) = 0$ при $t \leqslant C$; $g_m \equiv 0$, $v_m \equiv C$ в $\Omega_m(x)$.

Воспользуемся индукцией по числу областей.

(1) В случае $m = i = 2$ требуемое утверждение вытекает непосредственно из леммы 4.

(2) Пусть $m = 2$, $i = 1$. Предположим, что функция

$$\omega = (v_1 + v_2) - (u_1 + u_2)$$

достигает положительного максимума в точке x_0:

$$\max \omega(x) = \omega(x_0) = a > 0.$$

Тогда из сделанного выше замечания следует, что $x_0 \in \Omega_1$, значит, $\omega > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta\,\omega &\geqslant (\mu(v_1) + \mu(v_2)) - (\mu(u_1) + \mu(u_2)) + (g_1 + g_2) - (f_1 + f_2)\\ &= (\mu(v_1) + \mu(v_2)) - (\mu(u_1) + \mu(u_2)).\end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда, используя доказанные неравенства $v_2 \leqslant u_k$, свойства функции μ и сделанное предположение, находим, что $\Delta\,\omega \geqslant 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. Теперь из принципа максимума для субгармонических функций вытекает, что $\omega \equiv a$ в $\mathcal{U}$. Последнее соотношение, как и при доказательстве леммы 4, приводит к тождеству $\omega \equiv a$ в $\Omega_1(x_0)$, которое противоречит предельному соотношению

$$\lim_{x \to \zeta \in \partial D_k(x_0)} \omega(x) \leqslant [C - B] + [v_1(\zeta) - u_l(\zeta)] \leqslant 0, \quad l \neq k.$$

Неравенство (11) доказано.

Предположим теперь, что $\omega(x_0) = 0$ при $x_0 \in \Omega_1$. Если при этом $v_2(x_0) = u_2(x_0)$, то и $v_1(x_0) = u_2(x_0)$. Поскольку при $m = i = 2$ утверждение теоремы доказано, то при условии $v_2(x_0) = u_2(x_0)$ имеем $\Omega_2(x_0) = D_2(x_0)$ и $g_2 \equiv f_2$ в $D_2(x_0)$. Поэтому, также выполняются соотношения $\Omega_1(x_0) = D_1(x_0)$ и $g_1 \equiv f_1$ в $D_1(x_0)$. К функциям u_1 и v_1 в области $D_1(x_0)$ применима лемма 4. Следовательно, $u_1 \equiv v_1$ в $D_1(x_0)$ и утверждение теоремы в рассматриваемом случае доказано.

Пусть теперь $v_2(x_0) < u_k(x_0)$, $k = 1,2$. Тогда $v_2 < u_k < v_1$, $k = 1,2$, в достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. Если функция $\mu(t)$ не сводится к линейной на отрезке $[v_2(x_0), v_1(x_0)]$, то из (12) вытекает, что $\Delta\omega > 0$ в $\mathcal{U}$. Так как $\omega \leqslant 0$, то предыдущее неравенство приводит к противоречию с принципом максимума для субгармонических функций.

Если $\mu(t) = kt + a$, $k \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$, при $t \in [v_2(x_0),\ v_1(x_0)]$, то, используя (12), получаем неравенство

$$\Delta\omega \geqslant 2\mu(\frac{v_1 + v_2}{2}) - 2\mu(\frac{u_1 + u_2}{2}).$$

Отсюда, применяя теорему о среднем, находим

$$\Delta\omega + c_1(x)\omega \geqslant 0,$$

где $c_1(x)$ –некоторая функция, определенная в окрестности $\mathcal{U}$. Применяя принцип максимума к функции $\omega \leqslant 0$, заключаем, что $\omega \equiv 0$ в $\mathcal{U}$.

Поскольку предыдущие рассуждения применимы к любой точке $x \in \mathcal{U}$, то либо требуемое утверждение доказано, либо $\omega \equiv 0$ в $\Omega_1(x_0)$. Рассмотрим последний случай. Пусть существует точка $\zeta \in (\partial\Omega_1(x_0)) \cap \Omega_2(x_0)$. Так как при некотором $1 \leqslant k \leqslant 2$

$$\lim_{x \to \zeta} \omega(x) \leqslant v_1(\zeta) - u_k(\zeta) + C - B \leqslant 0,$$

то должны выполняться равенства: $B = C$ и $v_1(\zeta) = u_k(\zeta)$. Как было показано выше, отсюда вытекает требуемое утверждение.

Если указанных точек ζ нет, то $\Omega_1(x_0) = \Omega_2(x_0) = D_1(x_0) = D_2(x_0)$. Отсюда и из уже доказанных неравенств легко вытекает, что $v_1 \equiv v_2 \equiv u_1 \equiv u_2$ в $D_1(x_0)$. Таким образом, для $m = 2$ утверждение теоремы полностью доказано.

(3) Предположим, что утверждение теоремы выполняется для любого набора, состоящего не более чем из m множеств, соответствующего набора решений, и для любого индекса $i, 1 \leqslant i \leqslant m$. Теперь докажем, что утверждение выполняется и для любого набора, состоящего из $m+1$ множества и, соответственно, для любого набора, состоящего из $m + 1$ решения. Изменяя, если необходимо, нумерацию областей D_k, можем считать, что $s_k = k$. Пусть $j = m + 1 - i$.

Далее будем использовать введенные в п. 2 обозначения $\Omega_{s,k}$, $\Omega_{s,k}^{s+1}$, $g_{s,k}$, $g_{s,k}^{s+1}$ для объектов, соответствующих упорядочиваниям подсистем множеств $D_1, \ldots, D_s$ и подсистем функций $f_1, \ldots, f_s$. Через $v_{s,k}$ будем обозначать максимальное на множестве $\Omega_{s,k}$ решение задачи (4), (5) при $f = g_{s,k}$, а через $v_{s,k}^{s+1}$ – аналогичное решение, определенное на множестве $\Omega_{s,k}^{s+1}$ при $f = g_{s,k}^{s+1}$.

Если $j \leqslant m$, то по индуктивному предположению

$$\sum_{k=1}^{j} v_{j,k} \leqslant \sum_{k=1}^{j} u_k. \tag{13}$$

Очевидно, $\Omega_{j,k} \subset \Omega_{m+1+k-j}$. Кроме того,

$$g_{j,k}(x) \leqslant g_{m+1+k-j}(x)$$

для всех $x \in \Omega_{j,k}$. Следовательно, функция $v_{m+1+k-j}$ является решением в $\Omega_{j,k}$ задачи (4), (5) при $f = g_{j,k}$. В силу максимальности решения $v_{j,k}$,

$$v_{m+1+K-j}(x) \leqslant v_{j,k}(x), \qquad k = 1, \ldots, \tag{14}$$

при всех $x \in \Omega_{j,k}$. Причем, если при некотором $x_0 \in \Omega_{j,k}$ в (14) имеет место знак равенства, то

$$v_{m+1+k-j} \equiv v_{j,k} \qquad \text{в} \quad \Omega_{j,k}, \quad k = 1, \ldots, j. \tag{15}$$

Из (13) и (14) вытекает (11).

Если при некотором $x_0 \in \Omega_{m+1+k-j}$ в (11) имеет место знак равенства, то при $x = x_0$ знак равенства имеет место также в (13) и (14). Следовательно, справедливы тождества (15). Отсюда и из индуктивного предположения о случаях достижения равенства в (13) вытекает утверждение теоремы о равенстве в (11) в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $j = m + 1$. По индуктивному предположению,

$$\sum_{k=1}^{m} v_{m,k} \; + u_{m+1} \leqslant \sum_{k=1}^{m+1} u_k. \tag{16}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает, что пары решений $v_{m,m}$, u_{m+1} и $v_{m,m}^{m+1}$, v_{m+1} удовлетворяют условиям теоремы на множествах $\Omega_{m,m}$, D_{m+1} и $\Omega_{m,m}^{m+1}$, Ω_{m+1}, соответственно. Так как при $m = 2$ утверждение теоремы уже доказано, то

$$v_{m+1} \leqslant \min\{v_{m,m}, \; u_{m+1}\}, \tag{17}$$

$$v_{m,m}^{m+1} + v_{m+1,m+1} \leqslant v_{m,m} + u_{m+1}. \tag{18}$$

Теперь мы применим предыдущее рассуждение к парам решений $v_{m,m-1}$, $v_{m,m}^{m+1}$ и $v_{m,m-1}^{m+1}$, $v_{m+1,m}$, рассматриваемых на множествах $\Omega_{m,m-1}$, $\Omega_{m,m}^{m+1}$ и $\Omega_{m,m-1}^{m+1}$, $\Omega_{m+1,m}$, затем к парам $v_{m,m-2}$, $v_{m,m-1}^{m+1}$ и $v_{m,m-2}^{m+1}$, $v_{m+1,m-1}$ и так далее. Наконец, применим это рассуждение к парам решений $v_{m,1}$, $v_{m,2}^{m+1}$ и $v_{m,1}^{m+1}$, $v_{m+1,2}$, определенных на множествах $\Omega_{m,1}$, $\Omega_{m,2}^{m+1}$ и $\Omega_{m,1}^{m+1}$, $\Omega_{m+1,2}$. В результате такого последовательного применения указанных рассуждений мы получим цепочки неравенств

$$\begin{gathered} v_{m+1,m} \leqslant \min\{v_{m,m-1},\ v_{m,m}^{m+1}\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{m+1,2} \leqslant \min\{v_{m,1},\ v_{m,2}^{m+1}\} \end{gathered} \tag{19}$$

и

$$\begin{gathered} v_{m,m}^{m+1} + v_{m+1,m} \leqslant v_{m,m-1} + v_{m,m}^{m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{m,1}^{m+1} + v_{m+1,2} \leqslant v_{m,1} + v_{m,2}^{m+1}. \end{gathered} \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$\Omega_1 = \Omega_{m,1}^{m+1}, \qquad \Omega_k = \Omega_{m+1,k}, \quad k = 2, \dots, m+1, \tag{21}$$

$$g_1 \equiv g_{m+1,1} \quad \text{в } \Omega_1, \qquad g_k \equiv g_{m+1,k} \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 2, \dots, m+1. \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) и того факта, что функции $v_{m+1,1} \overset{\mathrm{def}}{=} v_{m,1}^{m+1}$, $v_{m+1,k}$, $k = 2, \dots, m+1$, являются максимальными решениями неравенства (4) на соответствующих множествах и при соответствующих функциях f, вытекают неравенства

$$v_k(x) \leqslant v_{m+1,k}(x), \qquad x \in \Omega_k, \quad k = 1, \dots, m+1. \tag{23}$$

При этом, если $v_k(x_0) = v_{m+1,k}(x_0)$ при некотором $x_0 \in \Omega_k$, то

$$v_k \equiv v_{m+1,k} \qquad \text{в} \quad \Omega_k(x_0). \tag{24}$$

Из соотношений (16)–(20) и (23) вытекает неравенство (8).

Равенство в (11) может иметь место только при условии достижения равенства в каждом из неравенств (16)–(20) и только в том случае, если имеют место тождества (24). Отсюда, используя индуктивное предположение о случаях достижения равенства в (16), нетрудно получить утверждение теоремы о случаях достижения равенства в (11). $\square$

5. Гиперболическая метрика

Расширенную плоскость $\overline{\mathbb{R}}^2$ будем отождествлять с комплексной сферой $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $z = x + iy$, $U_R = \{z : |z| < R\}$, $U = U_1$. Если область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет более двух граничных точек, то D имеет единичный круг U в качестве универсальной накрывающей поверхности. Пусть $\Pi : U \to D$ – универсальное накрывающее отображение, тогда гиперболическая метрика (или метрика Пуанкаре) λ_D области D определяется уравнением

$$\lambda_D(\Pi(z))|\Pi'(z)| = 1/(1 - |z|^2) \qquad (z \in U,\ w = \Pi(z) \in D).$$

Хорошо известно, что гиперболическая метрика может быть охарактеризована как максимальное решение уравнения

$$\Delta \log \lambda = 4\lambda^2$$

в области D [15, с. 13]. На открытых множествах $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболическая метрика определяется покомпонентно.

Теорема 2. *Пусть множества $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ получены в результате упорядочивания системы открытых множеств $D_1, \dots, D_m$ $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$. Пусть λ_k и λ_k^* означают гиперболическую метрику множеств D_k и Ω_k, соответственно. Если Ω_m имеет более двух граничных точек, то при всех $z \in \Omega_j$, $j = 1, \dots, m$,*

$$\prod_{k=j}^{m} \lambda_k^*(z) \leqslant \prod_{k=1}^{m+1-j} \lambda_{s_k}(z), \tag{25}$$

где во втором случае произведение берется по произвольному набору попарно различных индексов $s_1, \dots, s_{m+1-j}$ таких, что $z \in D_{s_k}$ при всех $k = 1, \dots, s_{m+1-j}$.

Равенство в (25) при некотором $z_0 \in \mathbb{C}$ имеет место только в том случае, если для каждого индекса k, $j \leqslant k \leqslant m$, существует свой, неравный другим, индекс $s_{l(k)}$ из числа индексов по которым ведется суммирование в (25) такой, что $\Omega_k(z_0) = D_{s_{l(k)}}(z_0)$.

Доказательство. Аппроксимируем изнутри каждое из множеств D_k последовательностью открытых множеств $D_{k,i}$, $i = 1, 2, \dots$, тогда

$$\overline{D}_{k,i} \subset D_{k,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \qquad \text{и} \quad \cup_{i=1}^{\infty} D_{k,i} = D_k.$$

Пусть $\Omega_{k,i}$, $k = 1, \dots, m$ – результат упорядочивания системы множеств $D_{k,i}$ при $k = 1, \dots, m$ и фиксированном i. Пусть $\lambda_{k,i}$ обозначает гиперболическую метрику множества $D_{k,i}$. Как известно (см. [16]), $\lambda_{k,i} \to \lambda_k$ при $i \to \infty$, равномерно на компактах из D_k. Из известных результатов (см. [17]) вытекает, что

$$\lim \lambda_{k,i}(z) = \infty \qquad \text{при} \quad z \to \zeta \in \partial D_{k,i}, \quad z \in D_{k,i},$$

$$\sup \lambda_k^*(z) < \infty \qquad \text{при} \quad z \in \Omega_{k,i}.$$

Следовательно, при фиксированном i теорема 1 применима к множествам $D_{k,i}$, $k = 1, \dots, m$, и к функциям $u_k = \log \lambda_{k,i}$, $v_k = \log \lambda_k^*$. Значит, для таких u_k и v_k выполняется неравенство (11). Отсюда, потенцируя и переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем (25).

Для доказательства утверждения о достижении равенства в (25) нужно использовать само это неравенство и повторить соответствующие рассуждения доказательства теоремы 1. $\square$

Теорема 2 позволяет проинтерпретировать гиперболическую метрику как функцию множества, которая является емкостью в смысле Шоке [1]. Для этого рассмотрим проколотую сферу $\mathbb{C}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$. Без ограничения общности можем считать, что $a = -1$, $b = 1$, $c = \infty$, тогда $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Зафиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{C}'$; через $\mathcal{E}$ обозначаем семейство всех замкнутых относительно $\mathbb{C}'$ подмножеств $E \subset \mathbb{C}' \setminus \{z\}$. Запись $\lambda_z(E)$ будет обозначать гиперболическую метрику множества $\mathbb{C}' \setminus E$, вычисленную в точке z и рассматриваемую как функция множества $E \in \mathcal{E}$.

Введем функцию

$$\sigma_z(E) = \log \lambda_z(E) - \log \lambda_z(\mathbb{C}').$$

Из свойств гиперболической метрики вытекает, что $\sigma_z(E) \geqslant 0$ для всех $E \in \mathcal{E}$, причем равенство $\sigma_z(E) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $E = \emptyset$. Функция множества $\sigma_z(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) Если $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ и $E_1 \subset E_2$, то $\sigma_z(E_1) \leqslant \sigma_z(E_2)$, причем равенство здесь имеет место только в случае совпадения связных компонент множеств $\mathbb{C}' \setminus E_1$ и $\mathbb{C}' \setminus E_2$, которые содержат точку z.

(ii) Для любого непустого множества $E \in \mathcal{E}$ и числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $G \subset \mathbb{C}'$ множества E такая, что для всех

$K \in \mathcal{E}$, $E \subset K \subset G$, верно неравенство

$$\sigma_z(K) \leqslant \sigma_z(E) + \varepsilon.$$

Условие (ii) легко вытекает из утверждения А. Вейтсмана [17] о сходимости последовательности гиперболических метрик $\lambda_{D_n}(z)$ при условии сходимости к некоторому ядру соответствующей последовательности областей D_n.

(iii) Для любых множеств $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ верно неравенство Шоке:

$$\sigma_z(E_1 \cup E_2) + \sigma_z(E_1 \cap E_2) \leqslant \sigma_z(E_1) + \sigma_z(E_2),$$

причем равенство здесь имеет место только в том случае, когда совпадают пары тех связных компонент множеств $\overline{\mathbb{C}} \setminus E_1$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus E_2$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus (E_1 \cup E_2)$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus (E_1 \cap E_2)$, которые содержат точку z.

Утверждение (iii) сводится к частному случаю теоремы 2. Функции множества, которые удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii), принято называть емкостями Шоке, см., например, [19, с. 93]. Таким образом, функция $\sigma_z(E)$ дает пример такой емкости. Используя теорему 1, можно каждому дифференциальному оператору вида $\Delta(\cdot) - \mu(\cdot) - f$, где μ и f определены в параграфе 3, поставить в соответствие емкость Шоке, как это сделано выше для случая гиперболической метрики. Нам неизвестно, использовались ли такие емкости ранее.

Наши исследования свойств гиперболической метрики связаны со следующим вопросом В. Х. Дж. Фукса, [20, задача 7.73]. Пусть D_1, D_2 – области в U_R. Каково наименьшее число $A = A(R)$, для которого гиперболическая метрика $\lambda_{D_1 \cap D_2}(z)$ множества $D_1 \cap D_2$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{D_1 \cap D_2}(z) < A\,(\lambda_{D_1}(z) + \lambda_{D_2}(z))\,?$$

В нашем препринте [10] ошибочно утверждалось, что применение упорядочивающего преобразования дает решение задачи Фукса с константой $A(R) \equiv 1$, в то время как из теоремы 2 вытекает только неравенство

$$\lambda_{D_1 \cap D_2}(z) \leqslant R\,\lambda_{D_1}(z)\,\lambda_{D_2}(z),$$

которое, тем не менее, дает точную оценку гиперболической метрики пересечения областей D_1 и D_2.

В заключение этого раздела установим неравенство, связывающее гиперболическую метрику с квазигиперболической метрикой Ж. Ферран [8]. Здесь мы уже не используем преобразование упорядочивания множеств. Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет не менее трех граничных точек. Для точек $z \in D\backslash\{\infty\}$ определена неотрицательная функция

$$w_D(z) = \sup_{z_1, z_2 \in \partial D} \frac{|z_2 - z_1|}{|z - z_1||z - z_2|}.$$

Рассматривая $w_D(z)$ как плотность, определим, следуя [8], расстояние между точками $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$:

$$\sigma_D(z_1, z_2) = \inf \int_\gamma w_D(z)\,|dz|,$$

где инфимум берется по всем кривым $\gamma \subset D$, соединяющим точки z_1 и z_2. Метрика $\sigma_D(z_1, z_2)$ используется, например, при изучении квазиконформных отображений; ее свойства исследовались в работах [8, 9]. Следующая теорема, показывающая, что метрика Ферран мажорирует удвоенную гиперболическую метрику, дает ответ на один из вопросов работы [9].

Теорема 3. *Пусть область D имеет гиперболическую метрику, тогда*

$$\lambda_D(z) \leqslant (1/2)\, w_D(z) \qquad \forall z \in D \setminus \{\infty\}.$$

Равенство имеет место только в том случае, когда D является кругом на $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Зафиксируем $z \in D \setminus \{\infty\}$. Найдутся точки ζ_1, $\zeta_2 \in \partial D$, такие что $w_D(z) = |\zeta_1 - \zeta_2|/(|z - \zeta_1||z - \zeta_2|)$. Дифференциальные элементы $\lambda_D(z)\,|dz|$ и $w_D(z)\,|dz|$ инвариантны относительно преобразования Мёбиуса, поэтому, без ограничения общности можем считать, что $z = 0$, $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$. Тогда $w_D(0) = 2$

Пусть $D' = \{z : 1/z \in D\}$ – образ области D при инверсии $z \mapsto 1/z$, $E = \mathbb{C} \setminus D'$, и пусть $\widehat{E}$ – выпуклая оболочка компакта E. Из определения величины $w_D(0)$ следует, что для любых точек z_1, $z_2 \in E$ выполняется неравенство $|z_2 - z_1| \leqslant 2$. Тогда это же неравенство выполняется и для любых точек $z_1, z_2 \in \widehat{E}$. Таким образом, $\widehat{E}$ – континуум и $\operatorname{diam}(\widehat{E}) = 2$. В силу известного результата Полиа и Сегё, логарифмическая емкость и диаметр континуума $\widehat{E}$ связаны соотношением

$$\operatorname{cap} \widehat{E} \leqslant (1/2) \operatorname{diam}(\widehat{E}) \ (= 1\,), \tag{26}$$

при этом, как показано Дж. Дженкинсом [21] (см. также [22]), равенство в (26) имеет место тогда и только тогда, когда $\widehat{E}$ – круг.

Пусть G – прообраз области $\overline{\mathbb{C}}\setminus\widehat{E}$ при инверсии $z\mapsto 1/z$. Тогда $0\in G\subset D$, кроме того

$$\lambda_G(0) = \operatorname{cap}\widehat{E} \tag{27}$$

в силу известных соотношений между плотностью гиперболической метрики, конформным радиусом односвязной области, содержащей точку ∞, и логарифмической емкостью ее дополнения [7, гл. 7]. Из соотношений (26) и (27) вытекает утверждение теоремы. □

6. Гармоническая мера

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, имеющая регулярную (в смысле задачи Дирихле) границу. Через $\omega(x,E,D)$ будем обозначать гармоническую меру в точке $x\in D\setminus E$ компакта $E\subset\overline{D}$ относительно связной компоненты $D(x,E)\ni x$ множества $D\setminus E$.

Теорема 4. *Пусть система $F_1,\ldots,F_m$ является упорядочиванием системы компактов $E_1,\ldots,E_m$, $E_k\subset\overline{D}$. Тогда при $x\in D\setminus F_j$, $1\leqslant j\leqslant m$, выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{j}\omega(x,F_k,D)\leqslant\sum_{k=1}^{j}\omega(x,E_{s_k},D), \tag{28}$$

где во втором случае суммирование ведется по произвольному набору попарно различных индексов s_k.

Если в (28) имеет место знак равенства и граница каждой из областей $D(x,E_{s_k})$ регулярна в смысле задачи Дирихле, то система компонент связности $\{D(x,F_1),\ldots,D(x,F_j)\}$ совпадает (с точностью до нумерации) с системой $\{D(x,E_{s_1}),\ldots,D(x,E_{s_j})\}$.

Мы опускаем доказательство теоремы 4, которое проводится методом математической индукции, поскольку оно повторяет основные моменты доказательства теоремы 1, а в техническом отношении оказывается даже более простым.

В качестве одного из возможных приложений теоремы 4 приведем решение задачи С. Сегавы (см. [10] или [24]) о минимуме гармонической меры $\omega(0,E,U)$ в семействе компактов E, лежащих на диаметре $[-1,1]$ единичного круга U и имеющих фиксированную линейную меру. В случае "полностью несимметричных компактов,” т.е. при дополнительном условии $E \cap (-E) = \varnothing$, где $-E = \{z : -z \in E\}$, решение задачи Сегавы получено Д. Бетсакосом [24].

Теорема 5. *Пусть E – компакт, лежащий на диаметре $[-1, 1]$ единичного круга U. Если $0 \in U \setminus E$ и $\operatorname{meas} E = 2m > 0$, то*

$$\omega(0, E, U) \geqslant \omega(0, E(m), U) = \Phi_2(m), \tag{29}$$

где $E(m) = [-1, -1+m] \cup [1-m, 1]$ и

$$\Phi_n(m) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1-(1-m)^n}{1+(1-m)^n}, \ n = 2, 3, \ldots \tag{30}$$

Если область $U \setminus E$ имеет регулярную границу, то равенство в (29) достигается только в случае $E = E(m)$.

Доказательство. Пусть компакт E удовлетворяет условиям теоремы. Через F_1, F_2, $F_1 \subset F_2$, обозначим результат упорядочивания пары компактов E и $-E$. Пусть $\operatorname{meas} F_k = 2m_k$, $k = 1, 2$. Так как компакты E и $-E$ симметричны друг другу относительно мнимой оси, то каждый из компактов F_k симметричен относительно этой оси и кроме того $m_1 + m_2 = 2m$. В соответствии с теоремой 4 выполняется неравенство

$$2\omega(0, E, U) = \omega(0, E, U) + \omega(0, -E, U) \geqslant \omega(0, F_1, U) + \omega(0, F_2, U). \tag{31}$$

Если, дополнительно, граница области $D \setminus E$ регулярна в смысле задачи Дирихле, то равенство в (31) достигается только в случае $E = -E = F_1 = F_2$.

Из теоремы М. Эссена и К. Халисте [25], обобщающей классическую оценку А. Берлинга [26] для гармонической меры компактов, лежащих на радиусе (0,1), следуют неравенства

$$\omega(0, F_k, U) \geqslant \omega(0, E(m_k), U) = \Phi_2(m_k). \tag{32}$$

Указанное в (30) и (32) явное выражение для гармонической меры $\omega(0, E(m), U)$ нетрудно получить, используя конформное отображение области $U \setminus E(m)$ на верхнюю полуплоскость.

После элементарных вычислений находим:

$$\Phi_2''(m) = \frac{8}{\pi}\frac{1-m}{(1+(1-m)^2)^2} > 0 \text{ при } 0 < m < 1,$$

значит, функция $\Phi_2(m)$ выпукла при $0 < m < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\omega(0, E(m_1), U) + \omega(0, E(m_2), U) = \Phi_2(m_1) + \Phi_2(m_2) \geqslant \\ \geqslant 2\Phi_2((m_1 + m_2)/2) = 2\omega(0, E(m), U).\end{aligned} \tag{33}$$

Так как $\Phi_2(m)$ строго выпукла, то равенство в (33) имеет место только в случае $m_1 = m_2$.

Из соотношений (31)–(33) и указанных выше условий достижения равенства в этих соотношениях вытекает утверждение теоремы. □

Теорема 5 имеет симметризационный характер и, как показывает приводимое ниже следствие, ее утверждение остается в силе, если круг U заменить подходящей симметричной областью.

Следствие. *Пусть область D симметрична по Штейнеру относительно координатных осей и пусть $D \cap \{z : \operatorname{Re} z = 0\} = (-iA, iA)$, где $A > 0$. Пусть функция $f(z)$ отображает область D конформно и однолистно на круг U так, что $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Если $|f'(it)|$ не возрастает при $0 < t < A$, то для любого компакта E, $\operatorname{meas} E = 2m > 0$, лежащего на отрезке $[-iA, iA]$, выполняется неравенство*

$$\omega(0, E, D) \geqslant \omega(0, E(m, A), D), \tag{34}$$

где $E(m, A) = [-iA, -i(A - m)] \cup [i(A - m), iA]$.

Если граница области $D \setminus E$ регулярна в смысле задачи Дирихле, то равенство в (34) имеет место только при условии $E = E(m, A)$.

Замечание. Неравенства (31) и (32) обобщаются на случай компактов E, имеющих фиксированную меру $E = nm$ и лежащих на n радиусах единичного круга, расположенных над равными углами друг к другу. Однако при $n > 2$ доказать соотношение, аналогичное неравенству (29), без дополнительных ограничений на параметры n и m не удается, так как при $n > 2$ функция $\Phi_n(m)$ (гармоническая мера возможной экстремальной конфигурации) уже не является выпуклой на всем интервале (0,1).

Литература

1. G. Choquet, *Theory of Capacities,* Annales Inst. Fourier **5** (1951/52), 131–295.
2. H. Renggli, *An inequality for logarithmic capacities,* Pacif. J. Math. **11** (1961), 313–314.

3. M. Klein, *Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping,* Pacif. J. Math. **22** (1967), 267–279.
4. И. П. Митюк, *Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия,* Известия вузов. Математика **8** (1987), 39–47.
5. И. П. Митюк, *Оценка снизу суммы емкости конденсаторов,* Укр. матем. журн. **41** (1989), 1442–1444.
6. И. П. Митюк, А. Ю. Солынин, *Упорядочивание систем областей и конденсаторов в пространстве,* Известия вузов. Математика **8** (1991), 54–59.
7. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-ое изд. М., 1966.
8. J. Ferrand, *A characterization of quasiconformal mappings by the behaviour of a function of three points,* Proc. 13th Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1987). Lect. Notes in Math. **1351** (1988), 110–123.
9. P. Seittenranta, *Möbius-invariant metrics* (to appear).
10. S. Segawa, *Martin boundaries of Denjoy domains,* Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 177–183.
11. А. Ю. Солынин, *Упорядочивание множеств и теоремы сравнения,* Препринт ПОМИ 5/1996; С.-Петербург: ПОМИ, 1996, 10с.
12. А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения.* М.: Мир, (1983).
13. А. Ю. Солынин, *Применение поляризации для доказательства функциональных неравенств,* Препринт ПОМИ 10/1995, С.-Петербург: ПОМИ, 1995, 24 с.
14. А. Ю. Солынин, *Поляризация и функциональные неравенства,* Алгебра и анализ **8** (1996), 148–185.
15. F. Brock, A. Yu. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization* (to appear).
16. M. Protter, H. Weinberger, *Maximum principle in differential equations,* Prentice-Hall, 1967.
17. M. Heins, *On a class of conformal metrics,* Nagoya Math. J. **21** (1962), 1–60.
18. A. Weitsman, *A symmetry property of the Poincaré metric,* Bull. Lond. Math. Soc. **11** (1979), 295–299.
19. A. Beardon, Ch. Pommerenke, *The Poincaré metric of plane domains,* J. Lond. Math. Soc. (2) **18** (1978), 475–483.
20. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Л., 1985.
21. D. A. Brannan, W. K. Hayman, *Research problems in complex analysis,* Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 1–35.
22. J. A. Jenkins, *A uniqueness result in conformal mapping,* Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 324–325.
23. A. Pfluger, *On a uniqueness theorem in conformal mapping,* Michigan Math. J. **23** (1977), 363–365.
24. D. Betsacos, *On certain harmonic measures on the unit disk,* Colloq. Math. **73** (1997), 221–228.
25. M. Essen, K. Haliste, *On Beurling's theorem for harmonic measure and the rings of Saturn,* Complex Variables, Theory and Appl. **12** (1989), 137–152.

26. A. Beurling, *The collected works of Arne Beurling,* Complex Analysis **1**, Birkhäuser, 1989.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 9 апреля 1997 г.