Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина

ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ В СЕМЕЙСТВЕ СИСТЕМ ОБЛАСТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Посвящается 90-летию со дня рождения Г. М. Голузина

Введение

Под задачей об экстремальном разбиении понимается вопрос о максимуме функционала, определенного на семействе $\mathcal{D}$ систем областей D_i, ассоциированным с семейством $\mathcal{H}$ гомотопических классов кривых H_i, и представляющего собой линейную комбинацию

$$\sum_i \alpha_i^2 \mathcal{M}(D_i) \qquad (1)$$

функций областей D_i (модулей или приведенных модулей областей D_i, ассоциированных с классами H_i), α_i^2 – вещественные параметры. Начало теории задач об экстремальном разбиении положила работа Дж. Дженкинса [1], в которой установлена эквивалентность задачи о максимуме функционала (1) в семействе систем областей на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, состоящем из двусвязных областей и четырехугольников, соответствующей экстремально-метрической проблеме и выявлена роль ассоциированного квадратичного дифференциала в каждом из этих экстремальных вопросов. При доказательстве существования ассоциированного квадратичного дифференциала в [1] использовался вариационный метод Шиффера–Спенсера для функционалов на конечных римановых поверхностях. Исследования в [1] были продолжены в работах К. Штребеля (см. [2]) и Х. Ренельта [3]. В [4] Дж. Дженкинс привел доказательство, основывающееся только на технике метода экстремальной метрики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 97-01-00259.

Еще в [1] было указано на возможность распространения результата этой работы на тот случай, когда функционал (1) содержит приведенные модули $\mathcal{M}(D_i, b_i)$ односвязных областей D_i относительно точек $b_i \in D_i$. Простое доказательство в случае $\mathfrak{R} = \bar{\mathbb{C}}$ или $\mathfrak{R}$ – область на $\bar{\mathbb{C}}$, было дано в [5], теоремы в [5] получили ряд приложений.

Дальнейшие результаты в теории задач об экстремальном разбиении связаны с понятием приведенного модуля двуугольника с ненулевыми внутренними углами в его вершинах [6, 7]. Теорема об экстремальном разбиении в семействе систем областей на $\bar{\mathbb{C}}$, содержащем указанные двуугольники, была приведена в [6] и получила интересные приложения. В недавней работе А. Ю. Солынина [8] получена теорема об экстремальном разбиении в семействе систем областей общего вида на римановой поверхности.

Задача об экстремальном разбиении в семействе систем областей на $\bar{\mathbb{C}}$, содержащем двуугольники, граничные дуги которых в окрестностях их вершин асимптотически подобны логарифмическим спиралям произвольного заданного наклона, впервые рассматривалась в [9, 10], доказательства ряда утверждений в [9, 10] приведены не были.

В настоящей работе дается полное доказательство теоремы об экстремальном разбиении римановой поверхности $\mathfrak{R}$, в которой допустимое семейство областей содержит двуугольники указанного выше общего вида. Этим завершено исследование вопроса о существовании квадратичного дифференциала, имеющего полюсы второго порядка каждого из возможных типов и удовлетворяющего предписанным топологическим и метрическим условиям, и установлена роль этого дифференциала в указанной экстремальной задаче.

§1. Приведенный модуль двуугольника и его свойства

Дадим определение приведенного модуля двуугольника относительно его отмеченных граничных элементов [6, 7, 9]. Пусть D – односвязная область на $\mathbb{C}$ гиперболического типа с отмеченными граничными элементами $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$ с носителями в различных или совпадающих точках b_1, b_2. Для определенности считаем, что $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ (приводимые ниже определения непосредственно распространяются на общий случай). Будем предполагать, что область D удовлетворяет следующему условию $(*)$. Пусть $\zeta = g(z)$ – конформный гомеоморфизм области D на полосу $\Pi_0 = \{\zeta : -1/2 < \operatorname{Im}\zeta < 1/2\}$, для которого $\operatorname{Re} g(\widetilde{b}_1) = -\infty$, $\operatorname{Re} g(\widetilde{b}_2) = +\infty$. Пусть ε_1, ε_2 – достаточно малые положительные числа. Тогда в компоненте связности $\Delta_k(\varepsilon_k)$ множества $D \cap U(b_k, \varepsilon_k)$, имеющей $\widetilde{b}_k$ своим граничным элементом, справедливо равенство

$$g(z) = (-1)^{k-1}\{A_k e^{-i\beta_k} \log(z - b_k) + \widetilde{g}_k(z)\}, \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

где $A_k > 0$, $\beta_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\widetilde{g}_k(z)$ – регулярная функция в $\Delta_k(\varepsilon_k)$,

$$\widetilde{g}_k(z) = c_k + o(1) \quad \text{при} \quad z \to b_k,\ z \in \Delta_k(\varepsilon_k), \tag{$*$}$$

и рассматривается некоторая фиксированная ветвь $\log(z - b_k)$.

Ясно, что стороны двуугольника D, удовлетворяющего условию $(*)$, в окрестности отмеченного граничного элемента $\widetilde{b}_k$ асимптотически подобны траекториям квадратичного дифференциала

$$Q_k(z)dz^2 = \frac{e^{-2i\beta_k} dz^2}{(z - b_k)^2}. \tag{3}$$

Указанные траектории являются прямолинейными лучами, если $\beta_k = 0$, и логарифмическими спиралями наклона β_k, если $0 < |\beta_k| < \pi/2$.

Пусть ε_1, ε_2 – достаточно малые положительные числа. Построим четырехугольники $D(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, получаемые удалением из области D соответствующих окрестностей ее граничных элементов $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$. Противоположные стороны четырехугольника $D(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, принадлежащие границам удаляемых окрестностей, будем обозначать через $S_k(\varepsilon_k)$, $k = 1, 2$.

Пусть $z_k^{(0)}$ и $z_k^{(1)}$ – точки пересечения сторон двуугольника D с дугой окружности $C_k(\varepsilon_k)$, где $C_k(\varepsilon) = \{z : |z - b_k| = \varepsilon\}$, принадлежащей границе множества $\Delta_k(\varepsilon_k)$. Пусть $\beta_k = 0$. Тогда за сторону $S_k(\varepsilon_k)$ принимаем дугу окружности $C_k(\varepsilon_k)$, соединяющую точки $z_k^{(0)}$ и $z_k^{(1)}$ и принадлежащую границе множества $\Delta_k(\varepsilon_k)$. Пусть $\beta_k \neq 0$. Через $S_k(z)$ обозначаем ортогональную траекторию дифференциала (3), проходящую через точку z. Пусть $S_k(z_k^{(j)}, \hat{z}_k^{(j)})$, $j = 0, 1$, – дуга кривой $S_k(z_k^{(j)})$, соединяющая точки $z_k^{(j)}$ и $\hat{z}_k^{(j)}$ и представляющая собой компоненту связности множества $D \cap S_k(z_k^{(j)})$. Тогда за сторону $S_k(\varepsilon_k)$ принимаем ту из дуг $S_k(z_k^{(j)}, \hat{z}_k^{(j)})$, $j = 0, 1$, которая принадлежит кругу $|z - b_k| \leqslant \varepsilon_k$.

Пусть $\varphi_k(\varepsilon_k)$ и $\psi_k(\varepsilon_k)$ – вариация $\arg(z-b_k)$ соответственно на дуге окружности $C_k(\varepsilon_k)$, принадлежащей границе множества $\Delta_k(\varepsilon_k)$, и на дуге $S_k(\varepsilon_k)$, проходимых в направлении возрастания $\arg(z-b_k)$. В силу условия $(*)$,

$$\varphi_k(\varepsilon_k)=\varphi_k+o(1);\quad \psi_k(\varepsilon_k)=\psi_k+o(1),$$

где

$$\psi_k=\varphi_k\cos^2\beta_k=\frac{\cos\beta_k}{A_k},\quad k=1,2. \tag{4}$$

Величину ψ_k назовем внутренней угловой характеристикой области D в граничном элементе $\widetilde{b}_k$. Если $\beta_k=0$, то $\psi_k=\varphi_k$ – внутренний угол области D в граничном элементе $\widetilde{b}_k$.

Пусть область D удовлетворяет условию $(*)$. Пусть Γ – класс локально спрямляемых кривых в D, соединяющих стороны D. Пусть $D(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ – четырехугольник в D с противоположными сторонами $S_k(\varepsilon_k)$, $k=1,2$. Через $\Gamma(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ обозначаем класс локально спрямляемых кривых в $D(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, разделяющих стороны $S_1(\varepsilon_1)$ и $S_2(\varepsilon_2)$, через $\mathcal{M}(D(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$ – модуль четырехугольника $D(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ для класса $\Gamma(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Легко видеть, что предел

$$\mathcal{M}(D,\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2):=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\left\{\mathcal{M}(D(\varepsilon_1,\varepsilon_2))+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\psi_k}\log\varepsilon_k\right\} \tag{5}$$

существует и конечен. Этот предел назовем приведенным модулем области D относительно граничных элементов $\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2$ (и класса Γ).

Из определения приведенного модуля двуугольника непосредственно вытекает [9]

Лемма 1. *Пусть D – односвязная область, удовлетворяющая условию $(*)$ относительно своих вершин $\widetilde{b}_k$ с носителями в точках b_k, ψ_k – внутренние угловые характеристики области D в вершинах $\widetilde{b}_k$, $k=1,2$. Пусть $w=f(z)$ – конформный гомеоморфизм области D, причем функция $f(z)$ регулярна и однолистна в окрестностях точек b_k, $k=1,2$, и пусть $D'=f(D)$, $b'_k=f(b_k)$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{M}(D',\widetilde{b}'_1,\widetilde{b}'_2)=\mathcal{M}(D,\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\psi_k}\log|f'(b_k)|. \tag{6}$$

Действительно, четырехугольнику $D(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при отображении $w = f(z)$ соответствует четырехугольник $D'(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$, где $\varepsilon_k' = \varepsilon_k |f'(b_k)| + O(\varepsilon_k^2)$. Поэтому

$$\mathcal{M}(D'(\varepsilon_1', \varepsilon_2')) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} \log \varepsilon_k' =$$

$$= \mathcal{M}(D(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} [\log |f'(b_k)| + \log \varepsilon_k] + O(\|\varepsilon\|),$$

где ψ_k – внутренние характеристики областей D и D' в их вершинах $\widetilde{b}_k$ и $\widetilde{b}_k'$.

§2 Допустимая гомотопия. Относительный приведенный модуль двуугольника

2.1. В дальнейшем через $\bar{\mathbb{C}}'$ мы понимаем область, получаемую удалением из $\bar{\mathbb{C}}$ точечного множества P, содержащего по крайней мере три точки. Пусть D – односвязная область гиперболического типа на $\bar{\mathbb{C}}'$, представляющая собой двуугольник с вершинами $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$, имеющими своими носителями точки $b_1, b_2 \in P$, и удовлетворяющая условию $(*)$ §1. Будем говорить, что существует допустимая гомотопия области D в $\widetilde{D}$ на $\bar{\mathbb{C}}'$, если существует функция $F_t(z)$, определенная при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $z \in D$, непрерывная по t, являющаяся гомеоморфизмом по z и удовлетворяющая следующим условиям.

1°. $F_0(z) = z$, $F_t(D) \subset \bar{\mathbb{C}}'$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, $F_1(D) = \widetilde{D}$.

2°. При $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция $F_t(z)$ регулярна в компоненте связности множества $D \cap U(b_k, \varepsilon_k(t))$, имеющей $\widetilde{b}_k$ своим граничным элементом, где $\varepsilon_k(t)$ непрерывна, $\varepsilon_k(t) > 0$ и достаточно мало; $k = 1, 2$.

3°. $F_t(z) = b_k + e^{i\omega_k(t)}(z - b_k) + o(z - b_k)$ при $z \in D$, $z \to b_k$, где $\omega_k(t)$ – вещественные числа; $k = 1, 2$.

В связи с определением допустимой гомотопии нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 2. *Пусть* Π – *горизонтальная полоса высоты, равной* 1, $\varphi : \Pi \to \Pi$ – *сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, регулярный* *при* $|\operatorname{Re}\zeta| > M$ *для некоторого* $M > 0$, $\varphi(-\infty) = -\infty$, $\varphi(+\infty) = +\infty$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &\varphi(\zeta) = \zeta + x_1 + O(\exp(\pi z)) \ \ \textit{при} \ \ \operatorname{Re}\zeta \to -\infty, \\ &\varphi(\zeta) = \zeta + x_2 + O(\exp(-\pi z)) \ \ \textit{при} \ \ \operatorname{Re}\zeta \to +\infty, \end{aligned} \tag{7}$$

где x_1, x_2 – *вещественные числа.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть только случай $\operatorname{Re}\zeta \to -\infty$. Пусть $\Pi = \{\zeta : 0 < \operatorname{Im}\zeta < 1\}$. Возьмем $l > M$ и обозначим $\Pi_l = \Pi \cap \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta < -l\}$. Пусть $-\rho = \varphi(-l)$ в смысле граничного соответствия. Отображение φ продолжается по симметрии до конформного отображения полуполосы $\Pi_l \cup (-\infty, -l) \cup \overline{\Pi}_l$ на область $\varphi(\Pi_l) \cup (-\infty, -\rho) \cup \overline{\varphi(\Pi_l)}$. Суперпозиция

$$\eta(u) = \exp \circ \pi\varphi \circ \left(\frac{1}{\pi}\log u - l\right)$$

определена в области $U' = U \setminus (-1, 0)$ и отображает U' на область D с разрезом по отрезку $(-1, 0)$. Продолжая $\eta(u)$ до отображения круга U на область D, $0 \in D$, $\eta(0) = 0$, имеем

$$\eta(u) = ku(1 + c_1 u + \dots), \ \ u \in U, \ \ k > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{\pi}\log u - l\right) &= \frac{1}{\pi}\log u + \frac{1}{\pi}\log k + \frac{1}{\pi}\log(1 + c_1 u + \dots) = \\ &= \frac{1}{\pi}\log u - l + \left(l + \frac{1}{\pi}\log k\right) + O(u). \end{aligned}$$

Отсюда получаем (7).

Следствие 1. *Пусть* D – *двуугольник, удовлетворяющий условию* $(*)$. *Пусть* $h : D \to D$ – *сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, регулярный в* $\Delta_k(\varepsilon_k)$, $k = 1, 2$, *для некоторых* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. *Тогда*

$$\lim_{z \in D, z \to \widetilde{b}_k} \left\{ A_k e^{-i\beta_k} \log \frac{h(z) - b_k}{z - b_k} \right\} = x_k, \quad k = 1, 2,$$

где x_k – *вещественные числа, коэффициенты* A_k *определены в* (4).

Действительно, гомеоморфизм φ полосы Π_0, определенный равенством

$$\varphi \circ g = g \circ h,$$

где отображение $g : D \to \Pi_0$ определено в условии $(*)$, удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому для $z \in \Delta_k(\varepsilon_k)$ имеем

$$g(z) + x_k + O(\exp g(z)) = g \circ h(z),$$

откуда

$$A_k e^{-i\beta_k} \log \frac{h(z) - b_k}{z - b_k} = x_k + o(1) \text{ при } z \in D,\ z \to b_k;\ k = 1, 2.$$

Теперь мы можем доказать нужные нам свойства допустимой гомотопии.

Предложение 1. *Пусть D – двуугольник с вершинами $\widetilde{b}_k$, спиральными наклонами β_k и внутренними угловыми характеристиками ψ_k, $k = 1, 2$, удовлетворяющий условию $(*)$. Пусть $F_t(z)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, – допустимая гомотопия D в $\widetilde{D} = F_1(D)$. Области $D_t = F_t(D)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеют в своих вершинах $\widetilde{b}_k$ одни и те же спиральные наклоны β_k и внутренние угловые характеристики ψ_k, $k = 1, 2$.*

Действительно, пусть g_t – конформный гомеоморфизм области D_t на полосу Π_0, $g_t(F_t(\widetilde{b}_1)) = -\infty$, $g_t(F_t(\widetilde{b}_2)) = +\infty$; $g_0 = g$. Тогда гомеоморфизм $\varphi_t : \Pi_0 \to \Pi_0$, определенный равенством

$$\varphi_t \circ g(z) = g_t \circ F_t(z),$$

удовлетворяет условиям леммы 2. Используя выражение $(*)$ для $g(z)$ и свойство 3° допустимой гомотопии $F_t(z)$, приходим к требуемому утверждению.

Предложение 2. *Пусть D – двуугольник, рассматриваемый в предложении 1. Пусть $F_t(z)$ и $\widetilde{F}_t(z)$ – две допустимые гомотопии области D в $\widetilde{D}$, $\omega_k(t)$ и $\widetilde{\omega}_k(t)$ – соответствующие аргументы, определенные в условии 3° определения допустимой гомотопии. Тогда $\omega_k(1) = \widetilde{\omega}_k(1)$, $k = 1, 2$.*

Действительно, положим для $z \in D$

$$\Phi_t(z) = \begin{cases} F_{2t}(z) & \text{при } 0 \leqslant t < 1/2, \\ F_{2(1-t)} \circ h(z), & \text{где } \widetilde{F}_1 \circ h(z) = F_1(z), \text{ при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Гомеоморфизм $h : D \to D$ удовлетворяет условиям следствия 1, при этом

$$h(z) - b_k = e^{i(\omega_k(1) - \widetilde{\omega}_k(1))}(z - b_k) + o(z - b_k) \text{ при } z \in D,\ z \to b_k.$$

Отсюда, по следствию 1,

$$A_k e^{-i\beta_k} \cdot i(\omega_k(1) - \widetilde{\omega}_k(1) - 2n_k\pi) = x_k,$$

$$n_k \text{ – целое}, \quad x_k \text{ – вещественное}.$$

Так как $-\pi/2 < \beta_k < \pi/2$, то $\omega_k(1) - \widetilde{\omega}_k(1) = 2n_k\pi$. Предположение, что $n_k \neq 0$, приводит к противоречию, так как индекс кривой $\{\Phi_t(z) : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \cup [z, h(z)]$ относительно точки b_k один и тот же для всех $z \in D$ в силу непрерывности $\Phi_t(z)$ как функции от z. Следовательно, $\omega_k(1) = \widetilde{\omega}_k(1)$, $k = 1, 2$.

Учитывая доказанное утверждение, величины $\omega_1 = \omega_1(1)$ и $\omega_2 = \omega_2(1)$ будем называть углами поворота при допустимой гомотопии области D в $\widetilde{D}$.

2.2. Пусть области D и $\widetilde{D}$ на $\overline{\mathbb{C}}'$ имеют совпадающие вершины $\widetilde{b}_k$ и удовлетворяют условию $(*)$ с соответственно равными спиральными наклонами β_k и внутренними угловыми характеристиками ψ_k, $k = 1, 2$. Области D и $\widetilde{D}$ будем называть сравнимыми, если существует допустимая гомотопия области D в $\widetilde{D}$. Очевидно, это определение симметрично и транзитивно.

Пусть области D и $\widetilde{D}$ сравнимы, и пусть ω_1, ω_2 – углы поворота при допустимой гомотопии области D в $\widetilde{D}$. Приведенным модулем двуугольника $\widetilde{D}$ относительно D будем называть величину

$$\mathcal{M}(\widetilde{D}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2; D) := \mathcal{M}(\widetilde{D}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} \omega_k \sin 2\beta_k. \tag{8}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть D и $\widetilde{D}$ – определенные выше области. Пусть функция $f_t(z)$, $z \in D$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, непрерывна по t при фиксированном $z \in D$ и является конформным гомеоморфизмом области D на область $D_t \subset \overline{\mathbb{C}}'$ при каждом t, $f_0(z) = z$; $f_1(z) = f(z)$, $D_1 = \widetilde{D}$. Пусть $f_t(z)$ регулярна в $\Delta_k(\varepsilon_k)$ для некоторых $\varepsilon_k > 0$, $f_t(b_k) = b_k$, $k = 1, 2$. Тогда область $\widetilde{D}$ сравнима с D и справедливо равенство*

$$\mathcal{M}(\widetilde{D}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2; D) = \mathcal{M}(\widetilde{D}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2) + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} e^{-2i\beta_k} \log f'(b_k). \tag{9}$$

Доказательство. Нам нужно построить допустимую гомотопию $F_t(z)$ области D в $\widetilde{D}$. Для этого построим при $0 < t \leqslant 1$ гомеоморфизм $\varphi_t(\zeta) : \Pi_0 \to \Pi_0$, удовлетворяющий для некоторого $M > 0$ условию

$$\begin{aligned} \varphi_t(\zeta) &= \zeta + x_1(t) \text{ при } \operatorname{Re}\zeta < -M, \\ \varphi_t(\zeta) &= \zeta + x_2(t) \text{ при } \operatorname{Re}\zeta > M, \end{aligned} \tag{10}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – вещественные, и пусть гомеоморфизм $h_t(z) : D \to D$ определяется равенством

$$g \circ h_t(z) = \varphi_t \circ g(z).$$

Тогда $h_t(z)$ удовлетворяет условиям следствия 1, следовательно,

$$\lim_{z \in D, z \to b_k} \left\{ A_k e^{-i\beta_k} \log \frac{h_t(z) - b_k}{z - b_k} \right\} = x_k(t), \quad k = 1, 2.$$

Отсюда

$$h_t(z) - b_k = (z - b_k) \exp\left(\frac{x_k(t)}{A_k} e^{i\beta_k}\right) + o(z - b_k) \text{ при } z \in D,\ z \to b_k.$$

Пусть $F_t(z) = f_t \circ h_t(z)$ и положим

$$x_k(t) = -\frac{(-1)^k A_k}{\cos\beta_k} \log|f_t'(b_k)|, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$|h_t(z) - b_k| = |f_t'(b_k)|^{-1}|z - b_k| + o(z - b_k),$$

$$\arg\exp\left(\frac{x_k(t)}{(-1)^{k-1}A_k} e^{i\beta_k}\right) = -\operatorname{tg}\beta_k \log|f_t'(b_k)|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_t(z) &= b_k + f_t'(b_k)(h_t(z) - b_k) + O((z - b_k)^2) = \\ &= b_k + e^{i\omega_k(t)}(z - b_k) + o(z - b_k), \end{aligned}$$

где

$$\omega_k(t) = \arg f_t'(b_k) - \operatorname{tg}\beta_k \log|f_t'(b_k)|.$$

Таким образом, $F_t(z)$ – допустимая гомотопия области D в $\widetilde{D}$. Далее из (6) и (8) находим

$$\mathcal{M}(\widetilde{D}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2; D) = \mathcal{M}(\widetilde{D}, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} \log|f'(b_k)| + \\ + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} (\arg f'(b_k) - \operatorname{tg}\beta_k \log|f'(b_k)|) \sin 2\beta_k,$$

т.е. получаем (10).

Замечание 1. Понятия приведенного модуля $\mathcal{M}(D, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2)$ двуугольника D с вершинами b_1, b_2 и относительного приведенного модуля $\mathcal{M}(\widetilde{D}, b_1, b_2; D)$ двуугольника $\widetilde{D}$ относительно D распространяются на случай конечной римановой поверхности, при этом локальные параметры в окрестностях точек b_1, b_2 выбираются фиксированным образом.

§3. Задача об экстремальном разбиении. Формулировка теоремы 1

3.1. В дальнейшем $\mathfrak{R}$ – конечная риманова поверхность. Такая риманова поверхность имеет конечный род и может иметь конечное число гиперболических граничных компонент. Пусть

$$\mathbf{A} = \{a_j\}_{j=1}^{n}, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \{b_i^{(0)}\}_{i=1}^{m}, \quad \mathbf{B} = \{b_k\}_{k=1}^{r}$$

– множества различных точек на $\mathfrak{R}$ и на границе $\mathfrak{R}$, если последняя существует, причем точки из $\mathbf{B}^{(0)}$ и $\mathbf{B}$ принадлежат $\mathfrak{R}$ (одно или два из этих множеств может быть пустым, но не каждое). Если $\mathbf{B} \neq \varnothing$, то пусть

$$\boldsymbol{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{r}$$

– система чисел из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. Мы считаем, что в окрестности каждой точки из $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$ выбран фиксированный локальный параметр.

Пусть $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}\}$. На $\mathfrak{R}'$ рассмотрим гомотопические классы локально спрямляемых жордановых кривых следующих четырех типов. К первому типу отнесем классы $H_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, m_1$, замкнутых кривых, не гомотопных нулю на $\mathfrak{R}$. Если

$\mathfrak{R}$ имеет граничные компоненты, то ко второму типу гомотопических классов отнесем классы $H_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, m_2$, дуг на $\mathfrak{R}'$, соединяющих граничные элементы $\mathfrak{R}$. Концы этих дуг свободно изменяются на граничных компонентах $\mathfrak{R}$ или же разделяют точки множества $\mathbf{A}$, принадлежащие этим граничным компонентам, если такие точки имеются. К третьему типу отнесем классы $H_i^{(3)}$, $i = 1, \ldots, m_3$ $(m_3 = m)$, замкнутых кривых, отделяющих одну из точек $b_i^{(0)} \in \mathbf{B}^{(0)}$ от остальных отмеченных точек на $\mathfrak{R}$ и от границы $\mathfrak{R}$, если она существует, следовательно, гомотопных точечной кривой в $b_i^{(0)}$; число таких классов равно числу точек множества $\mathbf{B}^{(0)}$. Наконец, если $\mathbf{B} \neq \varnothing$, то к четвертому типу отнесем классы $H_i^{(4)}$, $i = 1, \ldots, m_4$, дуг на $\mathfrak{R}'$ с концами (или предельными концевыми точками) в различных или совпадающих точках $b_{k'(i)}$, $b_{k''(i)} \in \mathbf{B}$, удовлетворяющих следующему условию. Пусть $\gamma_i^{(0)}$ – заданная жорданова дуга на $\mathfrak{R}'$ с концами в $b_{k'(i)}$, $b_{k''(i)}$. Если γ_i – дуга класса $H_i^{(4)}$, то при всех достаточно малых $\varepsilon_{k'(i)}$, $\varepsilon_{k''(i)}$ дуги $\gamma_i(\varepsilon_{k'(i)}, \varepsilon_{k''(i)})$ и $\gamma_i^{(0)}(\varepsilon_{k'(i)}, \varepsilon_{k''(i)})$, получаемые соответственно из γ_i и $\gamma_i^{(0)}$ удалением параметрических окрестностей $U(b_k, \varepsilon_k)$ точек b_k на $\mathfrak{R}$, $k = k'(i), k''(i)$, гомотопны друг другу на $\mathfrak{R}' \setminus U(b_{k'(i)}, \varepsilon_{k'(i)}) \setminus U(b_{k''(i)}, \varepsilon_{k''(i)})$ как дуги со свободными концами на границах удаляемых окрестностей. Предполагается, что каждая из точек $b_k \in \mathbf{B}$ является концом дуг, принадлежащих одному или нескольким из классов четвертого типа.

Под свободным семейством $\mathcal{H}$ гомотопических классов кривых на $\mathfrak{R}'$ понимаем множество классов $H_i^{(\mu)}$, где $H_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, m_1$, – классы первого типа, $H_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, m_2$, – классы второго типа, $H_i^{(3)}$, $i = 1, \ldots, m_3$ $(m_3 = m)$, – классы третьего типа и $H_i^{(4)}$, $i = 1, \ldots, m_4$ – классы четвертого типа. Классы одного, двух или трех из указанных типов могут отсутствовать. Предполагается, что все рассматриваемые классы существуют и различны.

Назовем двусвязную область D на $\mathfrak{R}'$ ассоциированной с классом $H_i^{(1)}$ первого типа, если семейство замкнутых жордановых кривых, лежащих в D и разделяющих ее граничные компоненты, содержится в $H_i^{(1)}$. Если $\mathfrak{R}$ имеет граничные компоненты, то четырехугольник D на $\mathfrak{R}'$, имеющий противоположные стороны на границе $\mathfrak{R}$ назовем ассоциированным с классом $H_i^{(2)}$ второго типа, если семейством дуг в D, соединяющих указанные стороны D, содержится в $H_i^{(2)}$. Односвязную область D на $\mathfrak{R}' \cup \{b_i^{(0)}\}$, $b_i^{(0)} \in D$, назовем ассоциированной с классом $H_i^{(3)}$ третьего типа, если семейство жордановых кривых в D, отделяющих точку $b_i^{(0)}$ от границы D, содержится в $H_i^{(3)}$. Двуугольник D с вершинами $\widetilde{b}_{k'}$, $\widetilde{b}_{k''}$, имеющими носителями точки $b_{k'}$, $b_{k''} \in \mathbf{B}$, назовем ассоциированным с классом $H_i^{(4)}$ четвертого типа, если дуги в D, соединяющие вершины D, принадлежат классу $H_i^{(4)}$. В этом случае предполагаем, что область D удовлетворяет условию $(*)$ относительно своих вершин $\widetilde{b}_{k'}, \widetilde{b}_{k''}$; если $\beta_{k'} \neq 0$ $(\beta_{k''} \neq 0)$, то в окрестности точки $b_{k'}$ (точки $b_{k''}$) граничные дуги области D асимптотически подобны логарифмическим спиралям наклона $\beta_{k'}$ (наклона $\beta_{k''}$). В соответствии с тем, какой из указанных четырех случаев имеет место, модуль $\mathcal{M}(D)$ двусвязной области D для класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты, модуль $\mathcal{M}^{(1)}(D)$ четырехугольника D для класса дуг, соединяющих его стороны на границе $\mathfrak{R}$, приведенный модуль $\mathcal{M}(D, b_i^{(0)})$ односвязной области D относительно точки $b_i^{(0)} \in D$ или же приведенный модуль $\mathcal{M}(D, \widetilde{b}_{k'}, \widetilde{b}_{k''})$ двуугольника D относительно его вершин $\widetilde{b}_{k'}, \widetilde{b}_{k''}$ будем называть ассоциированным с классом $H_i^{(4)}$. Значения всех указанных модулей определены выбором фиксированного локального параметра в окрестности каждой точки из $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$. Предполагается, что все классы $H_i^{(\mu)}$ определяются системами точек $\mathbf{A}, \mathbf{B}^{(0)}$ и $\mathbf{B}$ таким образом, что каждая из областей D, ассоциированных с каким-либо из этих классов, имеет в качестве ассоциированного с ним модуля величину, ограниченную сверху (в случае приведенного модуля двуугольника снизу) некоторой постоянной, зависящей только от расположения точек из $\mathbf{A}, \mathbf{B}^{(0)}$ и $\mathbf{B}$, а не от выбора указанной области.

Под допустимой системой областей $D_i^{(\mu)}$, ассоциированной с семейством $\mathcal{H}$ классов $H_i^{(\mu)}$, $i = 1, \ldots, m_\mu$; $\mu = 1, \ldots, 4$, понимаем конечное число неналегающих областей на $\mathfrak{R}' \cup \mathbf{B}^{(0)}$, каждая из которых ассоциирована с некоторым классом $H_i^{(\mu)}$ и не более чем одна из которых ассоциирована с каждым из таких классов. Если $D_i^{(4)}$ – двуугольник, ассоциированный с классом $H_i^{(4)}$ четвертого типа, то считаем, что область $D_i^{(4)}$ удовлетворяет сформулированному выше условию. Если для некоторого класса $H_i^{(\mu)}$ первого или второго типа в указанной системе областей не существует области, ассоциированной с данным классом, то будем называть соответствующую область $D_i^{(\mu)}$ вырожденной и под ее модулем, ассоциированным с классом $H_i^{(\mu)}$, будем понимать 0. Семейство всех допустимых систем областей, ассоциированных с семейством $\mathcal{H}$, обозначаем через $\mathcal{D}$.

3.2. Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_1+m_2+m} \quad \text{и} \quad \mathbf{h} = \{h_i\}_{i=1}^{m_4}$$

– заданные системы положительных чисел, и пусть

$$\alpha_k(\mathbf{h}) = \sum_{i \in \mathbf{I}_k} h_i, \tag{11}$$

где $\mathbf{I}_k$ – множество тех индексов $i \in \{1, \dots, r\}$, для которых дуги из класса $H_i^{(4)}$ имеют точку b_k одной из своих предельных концевых точек (если дуги из некоторого класса $H_i^{(4)}$ имеют b_k своей предельной концевой точкой в обоих направлениях, то соответствующий индекс i фигурирует в $\mathbf{I}_k$ дважды).

Через $\mathcal{D}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta})$ обозначаем семейство систем областей из $\mathcal{D}$, для которых области $D_i^{(4)}$, $i = 1, \dots, n_4$, имеют в своих граничных элементах $\widetilde{b}_{k'(i)}, \widetilde{b}_{k''(i)}$ внутренние углы или внутренние угловые характеристики, удовлетворяющие условию

$$\psi_k = \frac{2\pi h_i}{\alpha_k(\mathbf{h})} \cos^2 \beta_k, \quad k = k'(i),\ k = k''(i). \tag{12}$$

Пусть $\mathring{\mathbf{D}}^{(4)} = \{\mathring{D}_i^{(4)}\}$ – некоторая система областей семейства $\mathcal{D}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta})$. Каждая система областей $\{D_i^{(4)}\}$ семейства $\mathcal{D}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta})$ соответствует системе $\mathring{\mathbf{D}}^{(4)}$ при некоторой допустимой гомотопии F, определенной для каждой из областей $D_i^{(4)}$ и $\mathring{D}_i^{(4)}$ в п. 2.1. Пусть

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_k\}_{k=1}^{r}$$

– система поворотов в точках $b_k \in \mathbf{B}$, $k = 1, \dots, r$, при указанной гомотопии. При каждом $i \in \mathbf{I}(k)$ область $D_i^{(4)} \in \mathbf{D}^{(4)}$ соответствует области $\mathring{D}_i^{(4)} \in \mathring{\mathbf{D}}^{(4)}$ при одном и том же угле поворота ω_k в точке b_k.

Для системы чисел $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\beta}$ на семействе $\mathcal{D}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$ систем областей $\mathbf{D}$ рассмотрим функционал

$$\mathcal{M}(\mathbf{D}) = \mathcal{M}(\mathbf{D};\boldsymbol{\alpha},\mathbf{h},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i^2\mathcal{M}(D_i^{(1)}) + \sum_{i=1}^{m_2}\alpha_{m_1+i}^2\mathcal{M}^{(1)}(D_i^{(2)}) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{m_1+m_2+i}^2\mathcal{M}(D_i^{(3)}, b_i^{(0)}) - \sum_{i=1}^{m_4}h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)}\widetilde{b}_{k'(i)}, \widetilde{b}_{k''(i)}; \mathring{D}_i^{(4)}), \quad (13)$$

где (используем определение (8) и условие (12))

$$\sum_{i=1}^{m_4}h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)}, \widetilde{b}_{k'(i)}, \widetilde{b}_{k''(i)}; \mathring{D}_i^{(4)}) = \\ = \sum_{i=1}^{m_4}h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)}, \widetilde{b}_{k'(i)}, \widetilde{b}_{k''(i)}) + \sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k \operatorname{tg}\beta_k, \quad (14)$$

ω_k – угол поворота при допустимой гомотопии области $\mathring{D}_i^{(4)}$ в $D_i^{(4)}$, $i \in \mathbf{I}_k$, $k = 1,\ldots,r$.

3.3. Справедлива следующая теорема об экстремальном разбиении в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ – конечная риманова поверхность, $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}\setminus\{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}^{(0)}\cup\mathbf{B}\}$, $\mathcal{H}$ – семейство гомотопических классов локально спрямляемых кривых на $\mathfrak{R}'$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_1+m_2+m_3}$ и $\mathbf{h} = \{h_i\}_{i=1}^{m_4}$ – системы положительных чисел, $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{r}$ – система чисел из $(-\pi/2,\pi/2)$. Пусть $\mathcal{D}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$ – определенное выше семейство систем областей на $\mathfrak{R}'\cup\mathbf{B}^{(0)}$, ассоциированное с семейством $\mathcal{H}$. Тогда существует квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$, мероморфный на $\mathfrak{R}$ и однозначно определяемый следующими условиями.*

1) $Q(z)dz^2$ имеет простые полюсы в точках $a_j \in \mathbf{A}$ (возможно, не во всех из этих точек), полюсы второго порядка в каждой из точек $b_i^{(0)} \in \mathbf{B}^{(0)}$ и $b_k \in \mathbf{B}$ и не имеет других полюсов на $\mathfrak{R}$.

2) Пусть Φ – объединение всех критических траекторий и дуг критических траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$, принадлежащих $\mathfrak{R}$, $\bar{\Phi}$ – замыкание $\bar{\Phi}$. Внутреннее замыкание $\widehat{\Phi}$ множества Φ пусто и $\mathfrak{R}\setminus\bar{\Phi}$ представляет собой объединение областей $D_i^{(\mu)*}$, $\mu = 1,\ldots,4$; $i = 1,\ldots,m_\mu$ $(m_3 = m)$, семейства $\mathcal{D}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$.

3) *Длины в Q-метрике траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(1)*}$, $i=1,\dots,m_1$, равны α_i, замыканий дуг траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(2)*}$, $i=1,\dots,m_2$, равны α_{m_1+i}, и траекторий указанного дифференциала в области $D_i^{(3)*}$, $i=1,\dots,m_3$, равны $\alpha_{m_1+m_2+i}$. Длины в Q-метрике замыканий дуг ортогональных траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(4)*}$, $i=1,\dots,m_4$, равны h_i.*

В семействе $\mathcal{D}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$ справедливо неравенство

$$\mathcal{M}(\mathbf{D};\boldsymbol{\alpha},\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})\leqslant\mathcal{M}^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{h},\boldsymbol{\beta}),$$

где

$$\mathcal{M}^*(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i^2\mathcal{M}(D_i^{(1)*})+\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_{m_1+i}\mathcal{M}^{(1)}(D_i^{(2)*})+$$
$$+\sum_{i=1}^{m_3}\alpha_{m_1+m_2+i}^2\mathcal{M}(D_i^{(3)*},b_i^{(0)})-\sum_{i=1}^{m_4}h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)*},\widetilde{b}_{k'(i)},\widetilde{b}_{k''(i)};\mathring{D}_i^{(4)}).$$

Здесь

$$h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)*},\widetilde{b}_{k'(i)},\widetilde{b}_{k''(i)};\mathring{D}_i^{(4)})=$$
$$=h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)*},\widetilde{b}_{k'(i)},\widetilde{b}_{k''(i)})+\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k^*\mathrm{tg}\,\beta_k,$$

ω_k^* – угол поворота в точке b_k при допустимой гомотопии области $\mathring{D}_i^{(4)}$ в $D_i^{(4)*}$, $i\in\mathbf{I}_k$, $k=1,\dots,r$.

Равенство в (15) достигается только для системы областей $D_i^{(\mu)*}$ $(i=1,\dots,m_\mu;\ \mu=1,\dots,4)$.

Замечание 2. Теорема 1 непосредственно распространяется на более общие случаи, например, на задачу об экстремальном разбиении $\mathfrak{R}$, в которой рассматриваемый функционал содержит линейную комбинацию

$$-\sum_j h_j'^2\mathcal{M}^{(2)}(D_j),$$

где $\mathcal{M}^{(2)}(D_j)$ – модуль двусвязной области D_j, ассоциированный с гомотопическим классом H_j замкнутых жордановых кривых на

$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}\}$ относительно семейства дуг, соединяющих ее граничные компоненты, h'_j – положительные числа. Мы не приводим здесь этот результат исключительно ради простоты формулировок.

Замечание 3. В случае, когда семейство $\mathcal{D}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta})$ состоит из систем областей первых двух типов ($\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B} = \varnothing$) теорема 1 доказана Дженкинсом [1, 4]. Если $\mathbf{B}^{(0)} \neq \varnothing$, следовательно, области третьего типа имеются, а $\mathbf{B} = \varnothing$, теорема 1 в случае $\mathfrak{R} = \bar{\mathbb{C}}$ или $\mathfrak{R}$ – область на $\bar{\mathbb{C}}$, доказана в [5, 11]. Если области четвертого типа имеются: $\mathbf{B} \neq \varnothing$ и при этом $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, то теорема 1 в случае $\mathfrak{R} = \bar{\mathbb{C}}$ впервые получена Е. Г. Емельяновым [6] (пробел доказательства в [6], указанный А. Ю. Солыниным [8], легко устраняется). Полное доказательство теоремы 1 в случае наличия областей четвертого типа при условии $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ получено в фундаментальном исследовании А. Ю. Солынина [8], при этом в [8] рассматривается более общий функционал по сравнению с (13). Задача об экстремальном разбиении $\bar{\mathbb{C}}$ в случае наличия областей четвертого типа с $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ исследовалась в [9, 10], однако полного доказательства существования ассоциированного квадратичного дифференциала в [9, 10] приведено не было и в указанных работах имеется ряд неточностей и опечаток[1)].

Укажем простые следствия теоремы 1.

Следствие 2. Из метрических условий теоремы 1 вытекают дифференциальные уравнения для функций $g_i^{(\mu)}(z)$, отображающих области $D_i^{(\mu)*}$ соответственно на круговое кольцо, четырехугольник, круг или полосу.

В терминах локального параметра z, для которого $z(b_i^{(0)}) = 0$ (соответственно, $z(b_k) = 0$), для функции $Q(z)$ имеем разложения

$$Q(z) = -\frac{\alpha_i^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{z^2} + \dots, \text{ если } b_i^{(0)} \in \mathbf{B}^{(0)};$$
$$Q(z) = \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{4\pi^2 \cos^2 \beta_k}\,\frac{e^{-2i\beta_k}}{z^2} + \dots, \text{ если } b_k \in \mathbf{B}.$$

Следствие 3. Если $\mathfrak{R} = \bar{\mathbb{C}}$, то для квадратичного дифференциала

[1)] В формулах (3) и (4) в [10] вместо φ_1, φ_2 должно быть ψ_1, ψ_2, формулы (3) и (4) в работе [9] верны.

теоремы 1 имеем простое аналитическое выражение:

$$Q(z)dz^2 = P(z)\left\{\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)\prod_{i=1}^{m}(z-b_i^{(0)})^2\prod_{k=1}^{r}(z-b_k)^2\right\}^{-1} dz^2,$$

где $P(z)$ – полином от z степени $N \leqslant n + 2(m+k) - 4$.

Если $\mathfrak{R} = U$ или H, где H – верхняя полуплоскость, то для дифференциала теоремы 1 имеем аналогичное выражение: в этом случае множество нулей и полюсов дифференциала $Q(z)dz^2$ симметрично относительно границы круга U или полуплоскости H.

§4. Доказательство теоремы 1

4.1. В ряде случаев теорема 1 известна (см. замечание 3). В том случае, когда области четвертого типа имеются: $\mathbf{B} \neq \varnothing$, но при этом $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, теорема 1 доказана в [8].

Наличие областей четвертого типа с $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ значительно усложняет доказательство теоремы 1 по сравнению с другими случаями. Приводимое ниже доказательство теоремы 1 справедливо одновременно для всех случаев (естественно, в частных случаях это доказательство существенно упрощается, поскольку некоторые утверждения становятся тривиальными).

Предлагаемое доказательство теоремы 1 основывается на рассмотрении более широкого семейства систем областей $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$. Системы областей $\widehat{\mathbf{D}}$ семейства $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$ рассматриваются как точки топологического пространства $\widehat{X}$. Используя свойства последовательностей систем областей $\widehat{\mathbf{D}}_n$, как точек пространства $\widehat{X}$, мы устанавливаем существование экстремальной системы областей в семействе $\widehat{\mathcal{D}}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$. Метод квазиконформных вариаций приводит к описанию этой системы областей в терминах квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, из которого следует, что экстремальная система областей принадлежит исходному семейству $\mathcal{D}(\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$.

4.2. Пусть $\mathbf{D}^{(\mu)}$, $\mu = 1,2,3$, – определенные выше системы двусвязных областей $D_i^{(1)}$, четырехугольников $D_i^{(2)}$ и односвязных областей $D_i^{(3)}$, $b_i^{(0)} \in D_i^{(3)}$, и пусть $\widehat{\mathbf{D}}^{(4)} = \{\widehat{D}_i^{(4)}\}_{i=1}^{p}$ – система двуугольников, имеющих вершины $\widetilde{b}_k$ с носителями в точках $b_k \in \mathbf{B}$, $k = k'(i), k''(i)$, и удовлетворяющих всем условиям, указанным в теореме 1, за исключением условия $(*)$. Будем рассматривать семейства $\widehat{\mathbf{D}} = \bigcup\limits_{\mu=1}^{3} \mathbf{D}^{(\mu)} \cup \widehat{\mathbf{D}}^{(4)}$ как точки x топологического пространства $\widehat{X}$. Предлагаемое ниже доказательство теоремы 1 основывается на следующем простом факте.

Предложение 3. *Пусть $\widehat{X}$ – топологические пространство со счетной базой, $X \subset \widehat{X}$, $\Phi(x)$ – вещественная функция, заданная на X и полунепрерывная сверху, т.е.*

$$\begin{gathered} \varlimsup_{n\to\infty} \Phi(x_n) \leqslant \Phi(x) \text{ при } x_n, x \in X,\ x_n \to x; \\ \sup_{x\in X} \Phi(x) < \infty. \end{gathered} \tag{16}$$

Через $\bar{X}$ обозначаем замыкание X в $\widehat{X}$. Пусть на $\bar{X}$ задана вариация $\operatorname{Var}_\delta$, т.е. определено непрерывное отображение

$$\operatorname{Var}_\delta : \bar{X} \to \bar{X}, \quad \operatorname{Var}_\delta(X) \subset X, \tag{17}$$

удовлетворяющее условию

$$\Phi(\operatorname{Var}_\delta(x)) \geqslant \Phi(x) - \delta v(x) + o_x(\delta),$$

где $x \in X$, $v(x)$ – непрерывная функция, $\delta > 0$ и $o_x(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно на $\bar{X}$. Тогда, если $x_n \to x^* \in \bar{X}$ и

$$\Phi(x_n) \to M = \sup_{x\in X} \Phi(x_n),$$

то

$$v(x^*) \geqslant 0. \tag{18}$$

Доказательство. Положим $y_n = \operatorname{Var}_\delta(x_n)$. Из непрерывности $\operatorname{Var}_\delta$ следует, что $y_n \to y = \operatorname{Var}_\delta(x^*)$. В силу (17),

$$\begin{aligned} M \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \Phi(y_n) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} (\Phi(x_n) - \delta v(x_n) + o_{x_n}(\delta)) = \\ = M - \delta v(x^*) + o_x(\delta). \end{aligned}$$

По определению M, $v(x^*) \geqslant o_x(\delta)/\delta$, что и доказывает предложение 3.

Ниже мы будем пользоваться обычным понятием сходимости последовательности систем областей $\widehat{\mathbf{D}}_n$. Пусть $D_{i,n}^{(1)}$ – последовательностей областей из $\mathbf{D}^{(1)}$. Будем говорить, что $D_{i,n}^{(1)} \to$

$D_i^{(1)}$ при $n \to \infty$, если либо $D_i^{(1)} = \varnothing$ и $\mathcal{M}(D_{i,n}^{(1)}) \to 0$, либо $\mathcal{M}(D_{i,n}^{(1)}) = \frac{1}{2\pi} \log R_{i,n}$, где $R_{i,n} \to R_i > 1$, и существует последовательность конформных отображений $f_{i,n}\colon \mathcal{K}(1, R_{i,n}) \to D_{i,n}^{(1)}$, где $\mathcal{K}(1,R) = \{\zeta : 1 < |\zeta| < R\}$, сходящаяся в $\mathcal{K}(1,R_i)$ к отображению $f_i : \mathcal{K}(1,R_i) \to D_i^{(1)}$. Последовательность $\mathbf{D}_n^{(1)} = \{D_{i,n}^{(1)}\}$ сходится к $\mathbf{D}^{(1)} = \{D_i^{(1)}\}$, если $D_{i,n}^{(1)}$ сходится к $D_i^{(1)}$ при каждом $i = 1, \dots, n_1$. Аналогично определяется сходимость последовательности систем четырехугольников $\mathbf{D}_n^{(2)} = \{\mathbf{D}_{i,n}^{(2)}\}$ к $\mathbf{D}^{(2)} = \{D_i^{(2)}\}$.

Пусть $D_{i,n}^{(3)}$ – последовательность областей из $\mathbf{D}^{(3)}$. Будем говорить, что $D_{i,n}^{(3)} \to D_i^{(3)}$, если последовательностей конформных отображений $f_{i,n}\colon U \to D_{i,n}^{(3)}$, $f_{i,n}(\zeta) = R_{i,n}\zeta + \dots$, сходится в U к отображению $f_i : U \to D_i^{(3)}$. $\mathbf{D}_n^{(3)} = \{D_{i,n}^{(3)}\} \to \mathbf{D}^{(3)} = \{D_i^{(3)}\}$, если $D_{i,n}^{(3)} \to D_i^{(3)}$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Пусть, наконец, $\widehat{D}_{i,n}^{(4)}$ – последовательность областей из $\widehat{\mathbf{D}}^{(4)}$. Будем говорить, что $\widehat{D}_{i,n}^{(4)} \to \widehat{D}_i^{(4)}$, если существует последовательность конформных отображений $f_{i,n} : \Pi_0 \to \widehat{D}_{i,n}^{(4)}$, где $\Pi_0 = \{\zeta : -1/2 < \operatorname{Im}\zeta < 1/2\}$, $f_{i,n}(-\infty) = b_{k'(i)}^{(n)}$, $f_{i,n}(+\infty) = b_{k''(i)}^{(n)}$, сходящаяся в Π_0 к конформному отображению $f_i : \Pi_0 \to \widehat{D}_i^{(4)}$, $f_i(-\infty) = b_{k'(i)}$, $f_i(+\infty) = b_{k''(i)}$. $\widehat{\mathbf{D}}_n^{(4)} = \{\widehat{D}_{i,n}^{(4)}\} \to \widehat{\mathbf{D}}^{(4)} = \{\widehat{D}_{i,n}^{(4)}\}$, если $\widehat{D}_{i,n}^{(4)} = \widehat{D}_i^{(4)}$ при каждом $i = 1, \dots, n_4$.

Будем говорить, что $x_n = \widehat{\mathbf{D}}_n \to x = \widehat{\mathbf{D}}$, если $\mathbf{D}_n^{(\mu)} \to \mathbf{D}^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, 3$, $\widehat{\mathbf{D}}_n^{(4)} \to \widehat{\mathbf{D}}^{(4)}$.

4.3. Имеют место следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть X – множество всех рассматриваемых в теореме 1 систем областей $x = \mathbf{D}$, функционал $\Phi(x)$ определен равенством (13), сходимость $x_n \to x$ понимается в указанном выше смысле. Если $x_n, x \in X$, $x_n \to x$, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \Phi(x_n) \leqslant \Phi(x).$$

Лемма 5. *При условиях леммы* 1

$$\sup_{x \in X} \Phi(x) < \infty.$$

Доказательство леммы 4. Запишем функционал $\mathcal{M}(\mathbf{D}) = \mathcal{M}(\mathbf{D};\boldsymbol{\alpha},\mathbf{h},\boldsymbol{\beta})$ (см. (13)) в виде

$$\Phi(x) = \Sigma(\mathbf{D}^{(1)}) + \Sigma(\mathbf{D}^{(2)}) + \Sigma(\mathbf{D}^{(3)}) - \Sigma(\mathbf{D}^{(4)}). \tag{19}$$

В случае $\mathbf{B} = \varnothing$ четвертая сумма в (19) отсутствует, пространство X замкнуто относительно описанной в п. 4.2 сходимости и функция $\Phi(x)$ непрерывна, следовательно, леммы 4 и 5 очевидны. Определенную трудность представляет лишь доказательство леммы 4 в случае $\mathbf{B} \neq \varnothing$. Достаточно показать, что при $\mathbf{D}_n^{(4)} \to \mathbf{D}^{(4)}$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (-\Sigma(\mathbf{D}_n^{(4)})) \leqslant -\Sigma(\mathbf{D}^{(4)}). \tag{20}$$

Обозначим

$$\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^{m_4} h_i^2 \bigg[\mathcal{M}(D_{i,n}^{(4)}(\varepsilon_{k'(i)}, \varepsilon_{k''(i)})) + \\ + \frac{1}{\psi_{i,k'(i)}} \log \varepsilon_{k'(i)} + \frac{1}{\psi_{i,k''(i)}} \log \varepsilon_{k''(i)}\bigg]. \tag{21}$$

Используя равенство (11), по лемме Грётша для $\varepsilon'_k < \varepsilon_k$, $k = 1,\dots,r$, получаем

$$\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon}') \geqslant \Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{i\in\mathbf{I}(k)} h_i^2 \mathcal{M}(D_{i,n}(\varepsilon'_k,\varepsilon_k)) - \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{2\pi\cos^2\beta_k} \log\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k'}}\right], \tag{22}$$

где

$$D_{i,n}(\varepsilon'_k,\varepsilon_k) = D_{i,n}(\varepsilon'_k,\cdot) \setminus D_{i,n}(\varepsilon_k,\cdot).$$

Фиксируем $k \in \{1,\dots,r\}$ и рассмотрим в окрестности точки b_k функцию

$$\zeta = G_k(z) = \frac{1}{2\pi\cos\beta_k} e^{-i\beta_k} \log(z - b_k). \tag{23}$$

Пусть $i \in \mathbf{I}(k)$. Для упрощения формул в дальнейшем индекс k будем опускать. При отображении (23) логарифмические спирали с вершиной в точке b переходят в горизонтальные прямые, а ортогональные спирали – в вертикальные прямые. Для z, достаточно близких к b, через $S(z)$ обозначаем ортогональную спираль, проходящую через точку z, через $l(\zeta)$ – ее образ при отображении (23). Будем считать, что точка b_k является носителем одного отмеченного граничного элемента, пусть $\widetilde{b}_{i,n}$, каждой из областей $D_{i,n}^{(4)}$ (в противном случае доказательство совершенно аналогично). В соответствии с обозначениями §1, через $\Delta_{i,n}(\delta)$ обозначаем компоненту связности множества $D_{i,n}^{(4)} \cap U(b,\delta)$, имеющую $\widetilde{b}_{i,n}$ своим граничным элементом. Через $z_{i,n}(\varepsilon)$, где $\varepsilon < \delta$, обозначаем ту точку пересечения $\partial\Delta_{i,n}(\delta) \cap \{z : |z-b| = \varepsilon\}$, для которой дуга логарифмической спирали $S(z_{i,n}(\varepsilon))$, содержащаяся в $\Delta_{i,n}(\delta)$, лежит в круге $U(b,\varepsilon)$; $z^{(0)}(\varepsilon)$ определяется аналогичным образом для области $\overset{\circ}{D}{}_i^{(4)}$.

Пусть $\sigma_{i,n} = G(D_{i,n}^{(4)} \cap U(b,\delta))$, $\sigma_i = G(D_i^{(4)} \cap U(b,\delta))$. Через $\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)$ обозначаем пересечение $\sigma_{i,n}$ с полосой, ограниченной вертикальными прямыми $l(z_{i,n}(\varepsilon'))$ и $l(z_{i,n}(\varepsilon)$, аналогично определяется $\sigma_i(\varepsilon',\varepsilon)$. Угол поворота в точке b_k при допустимой гомотопии области $\overset{\circ}{D}{}_i^{(4)}$ в $D_i^{(4)}$ обозначаем через ω, а области $\overset{\circ}{D}{}_i^{(4)}$ в $D_{i,n}^{(4)}$ – через $\omega^{(n)}$; $\varkappa_{i,n}(\varepsilon) = \arg(z_{i,n}(\varepsilon)/z_i(\varepsilon))$. Имеем

$$\mathcal{M}(D_{i,n}^{(4)}(\varepsilon',\varepsilon)) = \mathcal{M}(\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)), \quad \varkappa_{i,n}(\varepsilon) \to \varkappa_{i,n} = \omega^{(n)} - \omega.$$

Пусть $l_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)$ – расстояние в $\sigma_{i,n}(\varepsilon'\varepsilon)$ между вертикальными сторонами. В силу условия $D_{i,n}^{(4)} \to D_i^{(4)}$ и условия $(*)$,

$$l_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2\pi\cos^2\beta}\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{\varkappa_{i,n}(\varepsilon')}{2\pi\cos\beta}\sin\beta + r_n, \ r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{24}$$

и

$$\mathcal{M}(\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)) \geqslant \frac{l_{i,n}^2(\varepsilon',\varepsilon)}{\text{пл.}\,\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)}.$$

Кроме того,

$$\sum_{i \in \mathbf{I}(k)} \text{пл.}\,\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2\pi\cos^2\beta}\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}. \tag{25}$$

Пользуясь неравенством Буняковского, в силу (24), (25) и (11), получаем

$$\sum_{i\in\mathbf{I}(k)} h_i^2\mathcal{M}(D_{i,n}^{(4)}(\varepsilon',\varepsilon))\geqslant \sum_{i\in\mathbf{I}(k)}\frac{h_i^2 l_{i,n}^2(\varepsilon',\varepsilon)}{\text{пл.}\,\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)}\geqslant\frac{\Big(\sum\limits_{i\in\mathbf{I}(k)} h_i l_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)\Big)^2}{\sum\limits_{i\in\mathbf{I}(k)}\text{пл.}\,\sigma_{i,n}(\varepsilon',\varepsilon)}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{2\pi\cos^2\beta_k}\,\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}-\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,(\omega^{(n)}-\omega)\mathrm{tg}\,\beta+r_1(\varepsilon')+r_2(n),\qquad(26)$$

где $r_1(\varepsilon')\to 0$ при $\varepsilon'\to 0$, $r_2(n)\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно по ε'. Наконец, из (22) получаем

$$\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon}')+\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k^{(n)}\mathrm{tg}\,\beta_k\geqslant\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon})+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\sum_{i\in\mathbf{I}(k)}\left[h_i^2\mathcal{M}(D_{i,n}^{(4)}(\varepsilon_k',\varepsilon_k))-\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{2\pi\cos^2\beta_k}\,\log\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k'}+\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k^{(n)}\mathrm{tg}\,\beta_k\right].$$

В силу (26),

$$\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon}')\geqslant\Sigma^{(n)}(\varepsilon)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k\mathrm{tg}\,\beta_k+r_1(\boldsymbol{\varepsilon}')+r_2(n),$$

где $r_1(\boldsymbol{\varepsilon})\to 0$, $r_2(n)\to 0$. Переходя к пределу при $\boldsymbol{\varepsilon}'\to 0$, отсюда получаем

$$\Sigma(\mathbf{D}_n^{(4)})\geqslant\Sigma^{(n)}(\boldsymbol{\varepsilon})-\Sigma(\boldsymbol{\varepsilon})+\Sigma(\varepsilon)+\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k\mathrm{tg}\,\beta_k+r_2(n).$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty}\Sigma(\mathbf{D}^{(4)})\geqslant\Sigma(\boldsymbol{\varepsilon})+\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi}\,\omega_k\mathrm{tg}\,\beta_k,$$

значит, справедливо (20).

Доказательство леммы 5. Как и при доказательстве леммы 4, достаточно доказать ограниченность суммы $\Sigma(\mathbf{D}^{(4)})$ снизу.

Пусть $\Sigma(\varepsilon)$ определена в (21). Поскольку при фиксированном $\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\}$ существует постоянная $M_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, зависящая только от расположения точек из $\mathbf{P}$ и такая, что $\Sigma(\varepsilon) \geqslant M_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, то достаточно доказать ограниченность при каждом $k \in \{1, \dots, r\}$ величины

$$\sum_{i \in \mathbf{I}(k)} h_i^2 \mathcal{M}(D_i^{(4)}(\varepsilon'_k, \varepsilon_k)) - \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{2\pi \cos^2 \beta_k} \log \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon'_k} + \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi} \omega_k \operatorname{tg} \beta_k,$$

где ω_k – угол поворота в точке b_k при допустимой гомотопии области $\overset{\circ}{D}{}_i^{(4)}$ в $D_i^{(4)}$, $i \in \mathbf{I}_k$. Используем обозначения доказательства леммы 4 и пусть $\sigma_i(\varepsilon', \varepsilon)$ и $l_i(\varepsilon', \varepsilon)$ соответствуют $\sigma_{i,n}(\varepsilon', \varepsilon)$ и $l_{i,n}(\varepsilon', \varepsilon)$. Аналогично (24), имеем при $i \in \mathbf{I}_k$

$$l_i(\varepsilon', \varepsilon) \geqslant \frac{1}{2\pi \cos^2 \beta_k} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{\varkappa_i^{(0)}(\varepsilon')}{2\pi \cos \beta_k} \sin \beta_k + r,$$

где $\varkappa_i^{(0)}(\varepsilon') = \arg\{z_i(\varepsilon')/z_i^{(0)}(\varepsilon')\}$, $\varkappa_i^{(0)}(\varepsilon') \to \omega_k$, r – постоянная, зависящая только от расположения точек из $\mathbf{P}$.

Теперь, как и при доказательстве леммы 4, получаем

$$\sum_{i \in \mathbf{I}(k)} h_i^2 \mathcal{M}(D_i^{(4)}(\varepsilon'_k, \varepsilon_k)) \geqslant \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{2\pi \cos^2 \beta_k} \log \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon'_k} - \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{\pi} \omega_k \operatorname{tg} \beta_k + r_1(\varepsilon'_k) + r_2,$$

где $r_1(\varepsilon') \to 0$, а r_2 – постоянная, что и доказывает лемму 5.

Замечание 4. Если $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, а двуугольники $D_i^{(4)}$ удовлетворяют менее ограничительному условию по сравнению с $(*)$: при всех достаточно малых ε_k, $k = k'(i), k''(i)$, пересечение $D_i^{(4)} \cap C(b_k, \varepsilon_k)$ состоит из одной дуги, если $b_{k'(i)} = b_{k''(i)}$, и из двух дуг, если $b_{k'(i)} = b_{k''(i)}$, то справедливость лемм 4 и 5 достаточно очевидна.

4.4. Пусть $\mathbf{D}^*$ –экстремальная система областей на $\mathfrak{R} \setminus \{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}\}$. Для описания геометрических свойств этой системы областей применим метод вариации. Множество $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$ будем обозначать также через $\mathbf{P}$. Определяя вариацию в (17), рассмотрим квазиконформное отображение

$$w = F(z) = z + \varepsilon \lambda(z), \tag{27}$$

где $\lambda(z)$ – гладкая финитная функция на $\mathfrak{R}$ с компактным носителем $\operatorname{supp} \lambda(z) \subset \Omega$, где $\Omega \cap \mathbf{P} = \varnothing$, $\varepsilon > 0$ и достаточно мало. Отображение $F(z)$ оставляет неподвижными точки из $\mathbf{P}$ и конформно в окрестности каждой из этих точек.

Оценим искажение модулей областей семейства $\mathbf{D}$ при отображении $F(z)$.

1) Пусть D – некоторая из областей $D_i^{(1)*}$ системы $\mathbf{D}^*$. Будем следовать изложению в [2]. Пусть $\widetilde{D}$ – образ области D при отображении F. Пусть $\zeta = g(z)$ – отображение области D на круговое кольцо $\mathcal{K} = \{\zeta : 1 < |\zeta| < M\}$. Пусть L – кривая в D, которой в кольце $\mathcal{K}$ соответствует радиальный отрезок $I = [1, M]$, и пусть

$$t(z) = \frac{i\alpha}{2\pi}\,\log g(z) \tag{28}$$

– отображение кольца $\mathcal{K}$ с разрезом по отрезку I на прямоугольник Π со сторонами α и h, при этом отрезку I соответствуют стороны длины h. Аналогично, пусть $\widetilde{\zeta} = \widetilde{g}(w)$ – отображение области $\widetilde{D}$ на кольцо $\mathcal{K} = \{\widetilde{\zeta} : 1 < |\widetilde{\zeta}| < \widetilde{M}\}$, $\widetilde{L} = F(L)$, $\widetilde{I} = \widetilde{g}(\widetilde{L})$, и пусть

$$v(w) = \frac{i\alpha}{2\pi}\,\log \widetilde{g}(w) \tag{29}$$

– отображение четырехугольника $\widetilde{\mathcal{K}} \setminus \widetilde{I}$ на четырехугольник $\widetilde{\Pi}$, для которого расстояние между противоположными сторонами, являющимися образами кривой $\widetilde{I}$, равно α, а высота равна $\widetilde{h}$. Определим отображение $v = f(t)$ равенством

$$f \circ g(z) = \widetilde{g} \circ F(z). \tag{30}$$

Функция $f(t)$ отображает Π на $\widetilde{\Pi}$. Для дилатации μ_f отображения f имеем

$$\mu_f \circ g(z) = \mu_F \cdot \frac{(g'(z))^2}{|g'(z)|^2}.$$

Известное неравенство дает

$$\alpha h \leqslant \iint\limits_{\Pi} |f_t + f_{\bar t}|\,d\sigma_t = \iint\limits_{\Pi} J_f^{1/2}\frac{|f_t + f_{\bar t}|}{J_f^{1/2}}\,d\sigma_t \leqslant$$
$$\leqslant \left(\iint\limits_{\Pi} J_f\,d\sigma_t\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{\Pi}\frac{|1+\mu_f|^2}{1-|\mu_f|^2}\,d\sigma_t\right)^{1/2}, \tag{31}$$

где J_f – якобиан отображения $f : J_f = |f_t| - |f_{\bar{t}}|$. Из (31) получаем

$$\alpha^2 h^2 \leqslant \alpha \widetilde{h} \iint\limits_{\Pi} (1 + 2\operatorname{Re}\mu_f + O(\mu_f^2)) d\sigma_t =$$

$$= \alpha \widetilde{h}(\alpha h + 2\operatorname{Re} \iint\limits_{\Pi} \mu_f \, d\sigma_t + O(\mu_f^2)),$$

откуда

$$2\operatorname{Re} \iint\limits_{\Pi} \mu_f \, d\sigma_t \geqslant \alpha \frac{h^2}{\widetilde{h}} - \alpha h + O(\mu_f^2) \geqslant \alpha h - \alpha \widetilde{h} + O(\mu_f^2)$$

или

$$2\operatorname{Re} \iint\limits_{D} \mu_F(z) \cdot {t'}^2(z) d\sigma_z \geqslant \alpha^2 \mathcal{M}(D) - \alpha^2 \mathcal{M}(\widetilde{D}) + O(\mu_F^2). \tag{32}$$

2) Пусть D – одна из областей $D_i^{(2)*}$ системы $\mathbf{D}^*$. Повторяя предыдущие рассуждения или же рассматривая двусвязную область, соответствующую D на дубле поверхности $\mathfrak{R}'$, получаем неравенство

$$2\operatorname{Re} \iint\limits_{D} \mu_F(z) {t'}^2(z) d\sigma_z \geqslant \alpha^2 \mathcal{M}^{(1)}(D) - \alpha^2 \mathcal{M}^{(1)}(\widetilde{D}) + O(\mu_F^2), \tag{33}$$

где $t(z)$ – отображение области D прямоугольник со сторонами длины α и h.

3) Пусть D – одна из областей $D_i^{(3)*}$ системы $\mathbf{D}^*$, $b = b_i \in D$. Пусть $\zeta = g(z)$ – отображение D на круг $|\zeta| < R$, $g(b) = 0$, $g'(b) = 1$, γ – прообраз отрезка $[0, R]$ при отображении $g(z)$. Функция (28) при надлежащем выборе ветви логарифма отображает область $D \setminus \gamma$ на вертикальную полуполосу ширины α. Аналогично, пусть $\widetilde{D}$ – образ области D при отображении F. Пусть функция $\widetilde{\zeta} = \widetilde{g}(w)$ отображает область $\widetilde{D}$ на круг $|\widetilde{\zeta}| < \widetilde{R}$, $\widetilde{\gamma} = F(\gamma)$. Функция (29) отображает область $\widetilde{D} \setminus \widetilde{\gamma}$ на полуполосу Π с криволинейными противоположными сторонами, расстояние между которыми равно α. Пусть $D_\delta = D \setminus U(b, \delta)$, $\Pi_\delta = t(D_\delta)$ – прямоугольник длины

$$l(\delta) = \frac{\alpha}{2\pi} \log \frac{1}{\delta} + O(\delta).$$

Положим $\widetilde{D}_\delta = F(D_\delta)$, $\widetilde{\Pi}_\delta = v(\widetilde{D}_\delta)$, и пусть f определено в (30). Также как и выше, получаем неравенство

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{D_\delta} \mu_F(z){t'}^2(z)d\sigma_z \geqslant \alpha^2\mathcal{M}(D_\delta) - \alpha^2\mathcal{M}(\widetilde{D}_\delta) + O(\mu_F^2) + O(\delta).$$

В силу условия $F'(b) = 1$ в пределе при $\delta \to 0$ получаем неравенство

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{D} \mu_F(z){t'}^2(z)d\sigma_z \geqslant \alpha^2\mathcal{M}(D,b) - \alpha^2\mathcal{M}(\widetilde{D},b) + O(\mu_F^2). \qquad (34)$$

4) Пусть, наконец, D – один из двуугольников $D_i^{(4)*}$ системы $\mathbf{D}^*$, $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2$ – вершины D, β_1, β_2 – углы наклона в этих вершинах. Пусть $\zeta = g(z)$ – отображение области D на горизонтальную полосу Π высоты h, $v = \widetilde{g}(z)$ – отображение области $\widetilde{D} = F(D)$ на горизонтальную полосу $\widetilde{\Pi}$ той же высоты h, $f = f(\zeta)$ – функция (30). Пусть $\delta_1, \delta_2 > 0$, $D(\delta_1, \delta_2)$ – четырехугольник в D, для которого $\Pi(\delta_1,\delta_2) = g(D(\delta_1,\delta_2))$ – прямоугольник высоты h и длины $\alpha = \alpha(\delta_1,\delta_2)$ (мы заменяем здесь определение четырехугольника $D(\delta_1,\delta_2)$, данное в §1, равносильным определением). Пусть $\widetilde{D}(\delta_1,\delta_2) = F(D(\delta_1,\delta_2))$, $\widetilde{\Pi}(\delta_1,\delta_2) = \widetilde{g}(\widetilde{D}(\delta_1,\delta_2))$ – четырехугольник, расстояние между противоположными сторонами которого равно $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(\delta_1,\delta_2)$. Имеем

$$\widetilde{\alpha} \leqslant \iint\limits_{\Pi(\delta_1,\delta_2)} |f_\zeta + f_{\bar\zeta}|d\sigma_\zeta \leqslant \Bigg(\iint\limits_{\Pi(\delta_1,\delta_2)} J_f d\sigma_\zeta\Bigg)^{1/2}\Bigg(\iint\limits_{\Pi(\delta_1,\delta_2)} \frac{|1+\mu_f|^2}{1-|\mu_f|^2}\,d\sigma_\zeta\Bigg)^{1/2},$$

откуда

$$\widetilde{\alpha}h \leqslant \alpha h + 2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\Pi(\delta_1,\delta_2)} \mu_f d\sigma_\zeta + O(\mu_f^2)$$

или

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\Pi(\delta_1,\delta_2)} \mu_f d\sigma_\zeta - \left(\frac{h^2}{\mathcal{M}^{(1)}(\Pi(\delta_1,\delta_2))} - \frac{h^2}{\mathcal{M}^{(1)}(\widetilde{\Pi}(\delta_1,\delta_2))}\right) + O(\mu_f^2).$$

Последнее неравенство можем записать в виде

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{D(\delta_1,\delta_2)} \mu_F(z){g'}^2(z)d\sigma_z \geqslant$$
$$\geqslant -(h^2\mathcal{M}(D(\delta_1,\delta_2)) - h^2\mathcal{M}(\widetilde{D}(\delta_1,\delta_2)) + O(\|\delta\|) + O(\mu_F^2).$$

Учитывая условие $F'(b_1) = F'(b_2) = 1$ и переходя к пределу при $\|\delta\| \to 0$, отсюда получаем

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{D} \mu_F(z){g'}^2(z)d\sigma_z \geqslant -(h^2\mathcal{M}(D(\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2) - h^2\mathcal{M}(\widetilde{D}(\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2)) + O(\mu_F^2).$$

При этом, если $\overset{\circ}{D}$ – некоторая исходная область сравнения, то из последнего неравенства и совпадения углов поворота области $\overset{\circ}{D}$ в D и $\widetilde{D}$ вытекает неравенство

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{D} \mu_F(z){g'}^2(z)d\sigma_z \geqslant$$
$$\geqslant -(h^2\mathcal{M}(D(\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2;\overset{\circ}{D}) - h^2\mathcal{M}(\widetilde{D}(\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2;\overset{\circ}{D})) + O(\mu_F^2). \quad (35)$$

Выше для каждой области $D_i^{(\mu)*}$ экстремальной системы $\mathbf{D}^*$ определено отображение $\zeta = g_i(z) = g_i^{(\mu)}(z)$ этой области на круговое кольцо, четырехугольник, круг или полосу высоты 1. Легко видеть, что множество $\bigcup\limits_{\mu,i} D_i^{(\mu)*}$ не имеет внешних точек на $\mathfrak{R}$. Определим функцию $Q(z)$ условием

$$Q(z) = -\frac{\alpha_i^2}{4\pi^2}(g_i'(z)/g_i(z))^2, \text{ если } z \in D_i^{(\mu)*},\ \mu = 1,2,3; \quad (36)$$

$$Q(z) = h_i^2 g_i'(z), \text{ если } z \in D_i^{(4)*}, \quad (37)$$

для остальных $z \in \mathfrak{R}$ функцию $Q(z)$ доопределяем произвольным образом. Тогда из (32)–(35) для допустимой системы областей $\widetilde{\mathbf{D}}$ получаем

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\Omega} \mu_F(z)Q(z)d\sigma_z \geqslant \mathcal{M}(\mathbf{D}^*) - \mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{D}}) + O(\mu_F^2). \quad (38)$$

Используя выражение для $F(z)$, из (38) находим

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\Omega} \lambda_{\bar{z}}(z)Q(z)d\sigma_z \geqslant \mathcal{M}(\mathbf{D}^*) - \mathcal{M}(\widetilde{\mathbf{D}}) + O(\mu_F^2). \quad (39)$$

На основании предложения 3, в силу экстремальности системы $\mathbf{D}^*$ и произвольности $\arg\lambda$ из (39) получаем равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \lambda_{\bar{z}}Q(z)d\sigma_z = 0. \quad (40)$$

Поскольку (40) верно для каждой гладкой финитной функции λ, $\operatorname{supp}\lambda \subset \Omega$, то по лемме Вейля (см., например, [12]) получаем, что $Q(z)$ совпадает п.в. в Ω с аналитической функцией. Взяв точку z_0 на границе какой-либо из областей $D_i^{(\mu)*}$, $z_0 \notin \mathbf{P}$, и предположив, что $U(z_0,\varepsilon) \subset \Omega$, находим, что граничная дуга $\partial D_i^{(\mu)*}$, принадлежащая $U(z_0,\varepsilon)$, является аналитической дугой, удовлетворяющей уравнению $Q(z)dz^2 > 0$. Таким образом, множество особенностей функции $Q(z)$ содержится в $\mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$.

Если точка $a_k \in \mathbf{A}$ не является точкой регулярности функции $Q(z)$, то она принадлежит границе одной из областей $D_i^{(\mu)*}$ системы $\mathbf{D}^*$. Поскольку $Q(z)$ аналитична в некоторой окрестности $U(a_k,\varepsilon)\backslash\{a_k\}$, а функция $g_i(z)$ ограничена, то a_k является простым полюсом $Q(z)$.

Если точка $b_i^{(0)} \in \mathbf{B}^{(0)}$ принадлежит области $D_i^{(3)*}$ системы $\mathbf{D}^*$, то в силу (36) в терминах локального параметра z, $z(b_i^{(0)}) = 0$, справедливо разложение

$$Q(z) = -\frac{\alpha_i^2}{4\pi^2}\, z^{-2} + \dots .$$

Для точки $b_k \in \mathbf{B}$ рассмотрим области $D_i^{(4)*}$, где $i \in \mathbf{I}(k)$. В силу "основной структурной теоремы" Дженкинса в терминах локального параметра z, $z(b_k) = 0$, имеем разложение

$$Q(z) = \frac{\alpha_k^2(\mathbf{h})}{4\pi^2\cos^2\gamma_k}\, e^{-2i\gamma_k} z^{-2} + \dots ,\, ,$$

где $\gamma_k \in (-\pi/2, \pi/2)$. Предположим, что $\gamma_k \neq \beta_k$, и пусть $\mathbf{D}_n \to \mathbf{D}^*$ при $n \to \infty$. Усиливая оценку (24), тогда находим, что $\Sigma(\mathbf{D}_n^{(4)}) \to +\infty$. Значит, случай $\gamma_k \neq \beta_k$ невозможен.

Таким образом, $b_i^{(0)}$ и b_k – двойные полюсы $Q(z)$ с указанными разложениями.

4.5. Предположим, что существует экстремальная система $\mathbf{D}$ областей $D_i^{(\mu)}$, отличная от $\mathbf{D}^*$. Пусть системам областей $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^*$ соответствуют квадратичные дифференциалы $Q(z)dz^2$ и $Q^*(z)dz^2$, удовлетворяющие указанным выше нормирующим условиям.

В силу известных результатов метода экстремальной метрики имеем неравенства (мы следуем рассуждению в [9])

$$\text{площ.}_{Q^*} D_i^{(1)} \geqslant \alpha_i^2 \mathcal{M}(D_i^{(1)}); \quad i = 1, \dots, m_1; \tag{41}$$

$$\text{площ.}_{Q^*} D_i^{(2)} \geqslant \alpha^2_{m_1+i}\mathcal{M}^{(1)}(D_i^{(2)}); \quad i=1,\dots,m_2; \tag{42}$$

и равенство в (41) и (42) имеет место соответственно только в случае $D_i^{(1)} = D_i^{(1)*}$ и $D_i^{(2)} = D_i^{(2)*}$. Пусть $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_1,\dots,\delta_m\}$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\}$ – системы положительных чисел. Полагая $D_i^{(3)}(\delta_i) = D_i^{(3)} \setminus \overline{U(b_i^{(0)},\delta_i)}$, имеем

$$\text{площ.}_{Q^*} D_i^{(3)}(\delta_i) + \frac{\alpha^2_{m_1+m_2+i}}{2\pi}\log\delta_i \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha^2_{m_1+m_2+i}}{2\pi}\mathcal{M}(D_i^{(3)}(\delta_i)) + \frac{\alpha^2_{m_1+m_2+i}}{2\pi}\log\delta_i + o(1). \tag{43}$$

Пусть теперь $D_i^{(4)*}(\varepsilon_{k'(i)},\varepsilon_{k''(i)}$ – четырехугольник, определенный в §1, $l_i(\varepsilon_{k'(i)},\varepsilon_{k''(i)}) + O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)$ – длина дуги траектории дифференциала $Q^*(z)dz^2$, принадлежащей этому четырехугольнику:

$$\frac{1}{h_i}\,l_i(\varepsilon_{k'(i)},\varepsilon_{k''(i)}) + \sum_{k=k'(i),k''(i)}\frac{1}{\psi_k}\log\varepsilon_k =$$
$$= \mathcal{M}(D_i^{(4)*}(\widetilde{b}_{k'(i)},\widetilde{b}_{k''(i)})) + O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|).$$

Обозначая через ω_k^* и ω_k углы поворота в точке b_k области $\mathring{D}_i^{(4)}$ соответственно в $D_i^{(4)*}$ и $D_i^{(4)}$, $i\in\mathbf{I}(k)$, имеем равенство

$$\text{площ.}_{Q^*} D_i^{(4)}(\varepsilon_{k'(i)},\varepsilon_{k''(i)}) + h_i^2\sum_{k=k'(i),k''(i)}\frac{1}{\psi_k}\log\varepsilon_k \geqslant$$
$$\geqslant \left(l_i(\varepsilon_{k'(i)},\varepsilon_{k''(i)}) + \sum_{k=k'(i),k''(i)}\frac{\alpha_k(\mathbf{h})}{2\pi}(\omega_k^*-\omega_k)\operatorname{tg}\beta_k\right)^2 \times$$
$$\times\left[\mathcal{M}(D_i^{(4)}(\varepsilon_{k'(i)},\varepsilon_{k''(i)})\right]^{-1} + h_i^2\sum_{k=k'(i),k''(i)}\frac{1}{\psi_k}\log\varepsilon_k + o(1) =$$
$$= -h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)}(\widetilde{b}_{k'(i)},\widetilde{b}_{k''(i)})) + 2h_i^2\mathcal{M}(D_i^{(4)*}(\widetilde{b}_{k'(i)},\widetilde{b}_{k''(i)}))+$$
$$+2h_i\sum_{k=k'(i),k''(i)}\frac{\alpha_k(\mathbf{h})}{2\pi}(\omega_k^*-\omega_k)\operatorname{tg}\beta_k + o(1). \tag{44}$$

Суммируя левые и правые части неравенств (41)–(44), переходя к пределу при $\|\boldsymbol{\delta}\| \to 0$ и $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \to 0$ и учитывая возможность усиления неравенств (43) и (44) в случае несовпадения областей $D_i^{(3)}$, $D_i^{(3)*}$ и $D_i^{(4)}$, $D_i^{(4)*}$, получаем неравенство (функционал (13) обозначаем через $\mathcal{M}(\mathbf{D}; \mathring{D}^{(4)})$)

$$\mathcal{M}(\mathbf{D}^*; \mathring{D}_i^{(4)}) \geqslant \mathcal{M}(\mathbf{D}; \mathring{D}_i^{(4)}), \tag{45}$$

при этом равенство в (45) имеет место только в случае $D_i^{(\mu)} = D_i^{(\mu)*}$ при всех μ, i и $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \dots, \omega_r\} = \mathbf{0}$. Отсюда и из равенства

$$\mathcal{M}(\mathbf{D}^*; \mathring{D}_i^{(4)}) = \mathcal{M}(\mathbf{D}; \mathring{D}_i^{(4)})$$

вытекает единственность квадратичного дифференциала и экстремальной системы областей теоремы 1.

4.6. В работе А. Ю. Солынина [8] получены формулы, устанавливающие зависимость функционала $\mathcal{M}^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\beta})$ теоремы 1 от расположения отмеченных точек из $\mathbf{P}$ в случае $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. В работе [13] этот результат распространяется на случай $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. Именно, пусть в окрестности точки $p_k \in \mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$ выбран локальный параметр z, $z(p_k) = 0$. Экстремальное значение $\mathcal{M}^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\beta})$ функционала теоремы 1 будем рассматривать как функцию от z в некоторой окрестности начала координат и обозначать через $\mathcal{M}(z)$. Имеет место

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M}(0) = \pi\lambda_{-1}(k),$$

где $\lambda_{-1}(k) = \operatorname*{Res}_{z=0} Q(z)$, $Q(z)dz^2$ *– квадратичный дифференциал теоремы* 1.

Литература

1. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general metrics,* Ann. Math. **66**, No. 3 (1957), 440–453.
2. K. Strebel, *Quadratic differentials,* In: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.F., Bd 5, Springer, Berlin u.a. (1984).
3. H. Renelt, *Konstruktion gewisser quadratischer Differentiale mit Hilfe von Dirichletintegralen,* Math. Nachr. **73** (1970), 125–142.

4. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general metrics. II,* Tôhoku Math. J. **(2) 45**, No. 2 (1993), 247–257.
5. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Матем. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
6. Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 76–89.
7. Г. В. Кузьмина, *Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 110–129.
8. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы,* PDMI Preprint-3/1997, 1–66.
9. Г. В. Кузьмина, *Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с траекториями, асимптотически подобными логарифмическим спиралям,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 121–137.
10. Г. В. Кузьмина, *О существовании квадратичных дифференциалов с полюсами высоких порядков,* Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 129–138.
11. Г. В. Кузьмина, *Проблема модуля для классов кривых в круговом кольце,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 115–127.
12. И. Кра, *Автоморфные формы и клейновы группы,* М., 1985.
13. Е. Г. Емельянов, *Зависимость функционала в задаче об экстремальном разбиении римановой поверхности от параметров,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998) (принято к печати).

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 4 сентября 1997 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina @ pdmi.ras.ru