А. В. Степанов

О НОРМАЛЬНОМ СТРОЕНИИ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД КОЛЬЦОМ

Введение

Изучение нормального строения полной линейной группы над общими кольцами началось с работ Х. Басса [12, 13] в середине шестидесятых годов, в которых, в частности, было получено исчерпывающее описание нормальных делителей предельной полной линейной группы над произвольным кольцом. Также, Х. Басс ввел новое понятие размерности кольца, так называемый стабильный ранг, и показал, что основные структурные теоремы остаются верными в полной линейной группе, если ее степень больше стабильного ранга основного кольца. Дж. Милнор [6] инициировал изучение группы Стейнберга в этом контексте. Основной вклад в этой области принадлежит А. Баку, Л. Н. Васерштейну, Р. К. Деннису, В. ван дер Каллену и А. А. Суслину.

Следующий крупный скачок в изучении нормального строения полной линейной группы над кольцом произошел благодаря результатам Дж. Уилсона [21], И. З. Голубчика [5] и А. А. Суслина [9], которые показали, что над коммутативными кольцами большая часть описания, полученного Х. Бассом, имеет место начиная с размерности 3 независимо от стабильного ранга кольца. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены З. И. Боревичем, Н. А. Вавиловым, Л. Н. Васерштейном, И. З. Голубчиком, В. И. Копейко, А. В. Михалевым, А. А. Суслиным, Дж. Таддеи и многими другими. В. ван дер Каллен и М. С. Туленбаев доказали аналогичные результаты для группы Стейнберга (начиная с размерности 4). Следует упомянуть также, что В. Н. Герасимов [4] построил (для произвольной размерности) пример такого кольца, что элементарная подгруппа не является нормальным делителем полной линейной группы (и,

Автор сердечно благодарит Санкт-Петербургскую мэрию за грант для молодых ученых, а также SFB 343 an der Universitat Bielefeld.

следовательно, нормальная структура полной линейной группы над таким кольцом не стандартна). Исчерпывающий обзор этой тематики представлен в книге А. Дж. Хана и О. Т. О'Мира [16] и в обзоре Н. А. Вавилова [20].

Одним из самых интересных вопросов теории линейных групп над кольцами в настоящее время является задача о классе колец, над которыми поведение полной линейной группы и группы Стейнберга стандартно, т.е. похоже на стабильный случай, описанный Х. Бассом и Дж. Милнором. В настоящей работе получены частичные результаты в этом направлении.

Оставшаяся часть сатьи организована следующим образом. В первом разделе вводятся основные обозначения, а также понятия стандартности нормального строения полной линейной группы и стабильного ранга кольца и приводятся их элементарные свойства. Следующие разделы посвящены соответственно:

– нормальности элементарной подгруппы в полной линейной группе;

– стандартной коммутационной формуле;

– стандартному расположению нормальных делителей $\mathrm{GL}(n,R)$;

– центральности расширения $\mathrm{St}(n,R)\to \mathrm{E}(n,R)$.

Через всю работу проходит идея о том, что стандартность нормального строения $\mathrm{GL}(n,R)$ можно "поднять" по модулю идеала I, если его стабильный ранг меньше n. В частности, мы покажем, что стандартность нормального строения $\mathrm{GL}(n,R)$ не зависит от радикала Джекобсона $\mathrm{Rad}\,R$ кольца R.

1. Обозначения и основные понятия

(1.1) Пусть G – произвольная группа. Для элементов $x,y\in G$ мы обозначаем через $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ их коммутатор, а через $x^y=y^{-1}xy$ элемент, сопряженный с x при помощи y. Двойной коммутатор $[[x,y],z]$ обозначается через $[x,y,z]$. Мы пишем $H\leqslant G$, если H подгруппа в G, и $H\lhd G$, если H нормальный делитель G. Для множества $X\subseteq G$ через $\langle X\rangle\leqslant G$ обозначается подгруппа в G, порожденная X, а через $\langle X\rangle^H$ – наименьшая подгруппа, содержащая X и нормализуемая H. Для подгрупп $F,H\leqslant G$ обозначаем через $[F,H]$ их коммутант, т.е. подгруппу, порожденную всеми коммутаторами $[f,h]$, $f\in F$, $h\in H$.

(1.2) Пусть D и G' – подгруппы в G. Напомним [8], что подгруппа F группы G' называется *D-совершенной*, если $[F,D]=F$. Для данной D-совершенной подгруппы F наибольшая подгруппа C в G', обладающая свойством $[\mathrm{C},D]=F$ называется *генерирующей* подгруппой, соответствующей F ("generic subgroup" в терминологии [4]). Ясно, что все подгруппы из любого интервала $F\leqslant\ldots\leqslant\mathrm{C}$ нормализуются группой D. Будем говорить, что *D сильно полинормальна* в G', если для любой $H\leqslant G'$ подгруппа $[H,D]$ является D-совершенной. Другими словами, для любой подгруппы $H\leqslant G'$, нормализуемой D, существует единственная D-совершенная подгруппа F такая, что H попадает в интервал $F\leqslant\ldots\leqslant\mathrm{C}$, где C – соответствующая генерирующая подгруппа.

Ниже мы будем неоднократно пользоваться следующим несложным утверждением, которое вытекает из Теоремы 1 работы [8].

1.3. Предложение. *Пусть D – совершенная нормальная подгруппа в G, т.е. $[D,D]=D\lhd G$. Тогда D сильно полинормальна в G (а, следовательно, и в любой ее подгруппе).*

(1.4) Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей 1, $\mathrm{GL}(n,R)$ – полная линейная группа степени n над R. В дальнейшем мы всегда предполагаем $n\geqslant 3$. Как обычно, для матрицы $a\in\mathrm{GL}(n,R)$ мы обозначаем через a_{ij} ее элемент в позиции (i,j), а через a'_{ij} – соответствующий элемент обратной матрицы a^{-1}. Довольно часто нам придется использовать следующее обозначение для строк и столбцов матриц a и a^{-1}: i-ые строки этих матриц будут обозначаться через a_{i*} и a'_{i*}, а i-ые столбцы – через a_{*i} и a'_{*i} соответственно. Единичная матрица степени n обозначается через $e=e_n$ *а стандартная матричная единица*, т.е. матрица с 1 в позиции (i,j) и остальными нулями, – через e^{ij}. Элемент матрицы e в позиции (i,j) обозначается через δ_{ij} (символ Кронекера).

Элементарной трансвекцией называется матрица $t_{ij}(\xi)=e+\xi^{ij}e^{ij}$, $\xi\in R$, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$. Подгруппа $\mathrm{E}(n,R)$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$ называется *элементарной подгруппой*. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$ – столбец, а $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_j)$ – строка длины n над кольцом R. Для краткости в доказательствах мы будем использовать следующие обозначения:

$$t_{*i}(\alpha) = \prod_{j \neq i} t_{ji}(\alpha_i), \quad t_{i*}(\beta) = \prod_{j \neq i} t_{ji}(\beta_j).$$

(1.5) Напомним теперь определения некоторых подгрупп $\mathrm{GL}\,(n, R)$ нормализуемых $\mathrm{E}(n, R)$. Каждый идеал I кольца R задает каноническую проекцию $\pi_I : R \to R/I$, которая определяет гомоморфизм редукции

$$\rho_I : \mathrm{GL}\,(n, R) \to \mathrm{GL}\,(n, R/I),$$

так, что образ матрицы $x = (x_{ij})$ равен $\bar{x} = (\pi_I(x_{ij}))$. Ядро гомоморфизма ρ_I обозначается через $\mathrm{GL}\,(n, R, I)$ и называется *главной конгруэнц подгруппой уровня* I. Прообраз центра $\mathrm{C}\,(n, R/I)$ группы $\mathrm{GL}\,(n, R/I)$ при гомоморфизме ρ_I называется *полной конгруэнц подгруппой уровня* I и обозначается через $\mathrm{C}\,(n, R, I)$. *Элементарной конгруэнц подгруппой уровня* I называется группа

$$\mathrm{E}(n, R, I) = \langle t_{ij}(\xi) | \xi \in I, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle^{\mathrm{E}(n,R)}.$$

Заметим, что элементарные конгруэнц подгруппы *всегда* (при $n \geqslant 3$) являются $\mathrm{E}(n, R)$-совершенными. В частности, сама группа $\mathrm{E}(n, R)$ является совершенной.

(1.6) Оказывается, в стандартной ситуации имеют место следующие утверждения:

(1) группа $\mathrm{E}(n, R)$ нормальна в $\mathrm{GL}\,(n, R)$;

(2) для любого идеала $I \leqslant R$ выполнена *стандартная коммутационная формула*

$$[\mathrm{GL}\,(n, R, I), \mathrm{E}(n, R)] = \mathrm{E}(n, R, I);$$

(3) для любой подгруппы $H \leqslant \mathrm{GL}\,(n, R)$ нормализуемой $\mathrm{E}(n, R)$ существует единственный идеал $I \leqslant R$ такой, что

$$\mathrm{E}(n, R, I) \leqslant H \leqslant \mathrm{C}\,(n, R, I);$$

(4) группа Стейнберга $\mathrm{St}\,(n, R)$ является центральным расширением элементарной подгруппы $\mathrm{E}(n, R)$.

Если выполнены пункты (1), (2), (3), будем говорить, что нормальное строение полной линейной группы $\mathrm{GL}\,(n, R)$ стандартно.

(1.7) Предположим, что $\mathrm{E}(n,R) \lhd \mathrm{GL}\,(n,R)$. Тогда из Предложения 1.3 следует, что стандартная коммутационная формула (1.6) (2) эквивалентна формуле

$$[\mathrm{C}\,(n,R,I),\mathrm{E}(n,R)] = \mathrm{E}(n,R,I),$$

и, что элементарная подгруппа $\mathrm{E}(n,R)$ сильно полинормальна в $\mathrm{GL}\,(n,R)$. В этом случае стандартность нормального строения полной линейной группы означает, что только элементарные конгруэнц подгруппы являются $\mathrm{E}(n,R)$-совершенными в $\mathrm{GL}\,(n,R)$.

(1.8) Последнее замечание обосновывает естественность следующего определения. Будем говорить, что нормальное строение подгруппы $G' \leqslant \mathrm{GL}\,(n,R)$ стандартно, если группы $\mathrm{E}(n,R,I)$ и только они являются E(n,R)-совершенными подгруппами G'. Аналогично определяется стандартность нормального строения группы Стейнберга (см. (5.1)). В следующих предложениях собраны простейшие свойства стандартного нормального строения.

1.9. Предложение. *Пусть D – подгруппа в G, а φ – эпиморфизм $G \to \bar{G}$.*

(i) *Образ любой D-совершенной подгруппы F является $\varphi(D)$-совершенной подгруппой. Обратно, для любой $\varphi(D)$-совершенной подгруппы $\bar{H} \leqslant \bar{G}$ существует D-совершенная подгруппа $H \leqslant G$ такая, что $\varphi(H) = \bar{H}$.*

(ii) *Если D сильно полинормальна в G, то $\varphi(D)$ сильно полинормальна $\bar{G}$.*

1.10. Предложение.

(i) *Если* E(n,R) *нормальна в* $\mathrm{GL}\,(n,R)$, *то стандартность нормального строения* E(n,R) *эквивалентна стандартности нормального строения* $\mathrm{GL}\,(n,R)$.

(ii) *Из стандартности нормального строения* E(n,R) ($\mathrm{St}\,(n,R)$) *следует стандартность нормального строения* $\mathrm{E}(n,R/I)$ *(соответственно* $\mathrm{St}\,(n,R/I)$*) для любого идеала I кольца R.*

(1.11) Пусть R^n обозначает правый R-модуль, состоящий из всех столбцов высоты n с компонентами из R. Следуя П. М. Кону, мы обозначаем через ${}^nR$ свободный левый R-модуль, состоящий из всех строк длины n с компонентами из R. Стандартные базисы модулей R^n и ${}^nR$ обозначаются через $f^1, \ldots, f^n$ и $e^1, \ldots, e^n$ соответственно. Другими словами, f^i – это i-ый столбец единичной матрицы e степени n (определяемой из контекста), а e^i – i-ая строка e.

(1.12) Значительная часть настоящей работы использует понятие стабильного ранга, введенное Х. Бассом в работах [13, 1]. Мы будем пользоваться терминологией и некоторыми результатами работы Л. Н. Васерштейна [3]. Напомним, что строка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in {}^nR$ называется унимодулярной, если ее элементы порождают единичный правый идеал. Пусть I – идеал в R. Строка α называется I-унимодулярной, если она унимодулярна и $\alpha_i - \delta_{1i} \in I$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Унимодулярная строка α называется стабильной, если существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in R$, что строка $\alpha_1 + \alpha_n\lambda_1, \ldots, \alpha_{n-1} + \alpha_n\lambda_{n-1}$ также является унимодулярной.

(1.13) Будем говорить, что стабильный ранг пары (R, I) равен d и писать $\mathrm{sr}\,(R, I) = d$, если любая I-унимодулярная строка длины $d+1$ стабильна и существует нестабильная I-унимодулярная строка длины d. Если такого d не существует, пишем $\mathrm{sr}\,(R, I) = \infty$. Стабильным рангом кольца R ($\mathrm{sr}\ R$) называется стабильный ранг пары (R, R). Известно [3], что любая I-модулярная строка длины большей, чем $\mathrm{sr}\,(R, I)$ стабильна, а также, что $\mathrm{sr}\,(R, I)$ зависит только от идеала I (как кольца без единицы). Напомним, что $\mathrm{sr}\,(R, J) = 1$, если $J \leqslant \mathrm{Rad}\, R$.

2. Нормальность элементраной подгруппы

Известные методы доказательства нормальности элементраной подгруппы в полной линейной группе достаточно полно отражены в работах [20, 18]. Следующее утверждение является развитием идеи "*разложения трансвекции*" впервые примененной в диссертации автора. Также оно показывает, что условие нормальности E(n,R) в $\mathrm{GL}\,(n, R)$ является некоторым условием линейной зависимости элементов кольца R.

2.1. Предложение. *Пусть $D = \mathrm{E(n,R)}$, $G = \mathrm{GL}\,(n, R)$. Следующие условия эквивалентны.*

(i) $D \lhd G$.

(ii) *Для любой матрицы $a \in G$ подгруппа, порожденная матрицами $e + a'_{*i}\lambda a_{j*}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\lambda \in R$ содержит D (обозначения*

a_{j*} и a_{*j} были введены в (1.4)).

(iii) *Для любых $a \in G$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $\lambda \in R$ существует набор строк $\beta^k \in {}^nR$ и набор столбцов $\alpha^k \in R^n$ $(k = 1, \ldots, m)$ такие, что $\beta^k \alpha^k = 0$,*

$$t_{ij}(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (e + \alpha^k \beta^k)$$

и каждая строка $\beta^k a$ содержит по крайней мере один нулевой элемент.

Доказательство. Если $D \lhd G$, то $D = D^a$. Но последняя подгруппа порождена матрица $t_{ij}(\lambda)^a = e + a'_{*i} \lambda a_{j*}$, так что (i)$\Longrightarrow$(ii). Если в условии (ii) заменить a на a^{-1}, то мы сможем выразить любую элементарную трансвекцию $t_{ij}(\lambda)$ через произведение матриц $e + a_{*i_k} \lambda_k a'_{j_k *}$. Легко заметить, что строки $a'_{j_k *}$ и столбцы $e + a_{*i_k} \lambda_k$ удовлетворяют условиям пункта (iii).

Пусть теперь выполнены условия пункта (iii). Тогда

$$t_{ij}(\lambda)^a = \prod_{k=1}^{m} (e + a^{-1} \alpha^k \beta^k a).$$

Зафиксируем k и положим $\gamma = a^{-1} \alpha^k$, $\omega = \beta^k a$. По условию $\omega_p = 0$ для некоторого индекса p. Следовательно, по лемме Уайтхеда–Васерштейна

$$e + \gamma \omega = t_{p*}(\gamma_p \omega)[t_{*p}(\gamma), t_{p*}(\omega)] \in D.$$

Таким образом, $t_{ij}(\lambda)^a \in D$, а значит D нормальна в G.

Следующее утверждение посвящено подъему по идеалу маленького стабильного ранга (определение стабильного ранга идеала см. в (1.13)). Обращение Теоремы 2.2 по-видимому неверно. Это связано с тем, что полная линейная группа неконтролируемо растет при факторизации основного кольца. Однако, если идеал I лежит в радикале Джекобсона кольца R, то отображение $\mathrm{GL}\,(n, R) \to \mathrm{GL}\,(n, R/I)$ сюръективно, и, следовательно (см. (1.9)(ii)), утверждение обратное к Теореме 2.2 верно (см. Следствие 2.3).

2.2. Теорема. *Пусть $n \geqslant \mathrm{sr}\,(R, I) + 1$. Если $\mathrm{E}(n, R/I)$ нормальна в $\mathrm{GL}\,(n, R, I)$, то $\mathrm{E(n,R)}$ нормальна в $\mathrm{GL}\,(n, R)$.*

Доказательство. Очевидно, что подгруппа

$$H = \rho_I^{-1}(\mathrm{E}(n, R/I)) = \mathrm{E(n,R)} \cdot \mathrm{GL}\,(n, R, I)$$

нормальна в $\mathrm{GL}(n,R)$. Так как $n \geqslant \mathrm{sr}(R,I)+1$, по теореме Басса [1, 13] группа $K_1(n,R,I)$ абелева. Следовательно, подгруппа $\mathrm{E(n,R)} = [H,H]$ также является нормальным делителем.

2.3. Следствие. *Предположим, что идеал I содержится в радикале Джекобсона $\mathrm{Rad}\,R$ кольца R. Тогда нормальность группы $\mathrm{E(n,R)}$ в $\mathrm{GL}(n,R)$ эквивалентна нормальности $\mathrm{E}(n,R/I)$ в $\mathrm{GL}(n,R/I)$.*

3. Стандартная коммутационная формула

(3.1) Пусть I – двусторонний идеал кольца R. Следуя А. Баку, обозначим через $R \ltimes I$ удвоение кольца R вдоль идеала I (Stein double ring), т.е. подкольцо в $R \ltimes R$, состоящее из всех элементов (λ,μ), для которых $\lambda-\mu \in I$. Аналогично, для подгруппы H группы G мы обозначаем через $G \ltimes H$ полупрямое произведение G на H, которое может быть описано как подгруппа в $G \ltimes G$, состоящая из всех таких пар (a,b), что $ab^{-1} \in H$.

Идея следующего утверждения неоднократно использовалась многими авторами (см., например, [9, 11]). Она состоит в том, что стандартная коммутационная формула почти эквивалентна нормальности элементарной подгруппы в полной линейной группе, но над другим кольцом.

3.2. Предложение. *Подгруппа $\mathrm{E}(n,R\ltimes I)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R\ltimes I)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{E(n,R)}$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R)$, и выполнена стандартная коммутационная формула*

$$[\mathrm{GL}(n,R,I),\mathrm{E(n,R)}] = \mathrm{E}(n,R,I).$$

Доказательство. Легко видеть, что группа $\mathrm{GL}(n,R\ltimes I)$ изоморфна полупрямому произведению $\mathrm{GL}(n,R) \ltimes \mathrm{GL}(n,R,I)$ и $\mathrm{E}(n,R\ltimes I) \cong \mathrm{E(n,R)} \ltimes \mathrm{E}(n,R,I)$ относительно того же изоморфизма. Пусть $a \in \mathrm{E(n,R)}$, $c \in \mathrm{GL}(n,R)$ и $d \in \mathrm{GL}(n,R,I)$. Если $\mathrm{E}\,(n,R\ltimes I$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R\ltimes I)$, то

$$[(a,a),(c,dc)] = ([a,c],[a,d]^c[a,c]) \in \mathrm{E}\,(n,R\ltimes I).$$

Следовательно, $[a,c] \in \mathrm{E}\,(n,R)$. Это доказывает нормальность $\mathrm{E}\,(n,R)$ в $\mathrm{GL}(n,R))$ и тот факт, что $[a^c,d^c] \in \mathrm{E}\,(n,R,I)$. Так как a^c и d^c являются произвольными элементами групп $\mathrm{E(n,R)}$ и

$\mathrm{GL}\,(n,R,I)$ соответственно, имеет место стандартная коммутационная формула.

Обратно, если E(n,R) нормальна в $\mathrm{GL}\,(n,R)$ и

$$[\mathrm{GL}\,(n,R,I),\mathrm{E(n,R)}]=E(n,R,I),\ \text{то}\ [(a,a)(c,cd)]\in \mathrm{E}\,(n,R\ltimes I).$$

Значит, последняя группа содержит коммутант $[\mathrm{GL}\,(n,R\ltimes I),D]$, где $D=\{(a,a)|a\in \mathrm{E(n,R)}\}$. Соотношения Стейнберга между элементарными трансвекциями показывают, что на самом деле имеет место равенство

$$\mathrm{E}\,(n,R\ltimes I)=[\mathrm{GL}\,(n,R\ltimes I),D].$$

Но этот коммутант очевидно является нормальным делителем в $\mathrm{GL}\,(n,R\ltimes I)$.

Оставшаяся часть настоящего раздела посвящена доказательству аналога Теоремы 2.2. Следующее утверждение принадлежит В. ван дер Каллену (см. [15], Лемма 44.25).

3.3. Лемма. *Для любых двусторонних идеалов I,J кольца R*

$$\mathrm{sr}\,(R\ltimes I,J\ltimes(I\cap J))\leqslant \mathrm{sr}\,(R,J).$$

3.4. Следствие. *Пусть I,J – двусторонние идеалы кольца R, $n\geqslant \mathrm{sr}\,(R,J)+1$ и $\bar I=\pi_J(I)$ – образ идеала I в кольце $\bar R=R/J$. Если $\mathrm{E}\,(n,\bar R)$ нормальна в $\mathrm{GL}\,(n,\bar R)$, то стандартная коммутационная формула*

$$[\mathrm{GL}\,(n,\bar R,\bar I),\mathrm{E}\,(n,\bar R)]=\mathrm{E}\,(n,\bar R,\bar I)$$

над кольцом $\bar R$ эквивалентна аналогичной формуле

$$[\mathrm{GL}\,(n,R,I),\mathrm{E(n,R)}]=\mathrm{E}\,(n,R,I)$$

над кольцом R.

Доказательство. Прямая импликация непосредственно следует из (2.2), (3.2) и (3.3). Обратное утверждение на самом деле не зависит от стабильного ранга идеала J. Действительно, по условию группа

$$F=[\mathrm{GL}\,(n,\bar R,\bar I),\mathrm{E}\,(n,\bar R)]$$

содержится в $\mathrm{E}\,(n,\bar R)$, а по Предложению 1.3 она является $\mathrm{E}\,(n,\bar R)$-совершенной. Поэтому

$$F=[\mathrm{GL}\,(n,\bar R,\bar I)\cap \mathrm{E}\,(n,\bar R),\mathrm{E}\,(n,\bar R)]=$$
$$\rho_j\big([\mathrm{GL}\,(n,R,I+J),\mathrm{E}\,(n,R)\cdot \mathrm{GL}\,(n,R,J)]\big).$$

Но правая часть последнего равенства очевидно совпадает с

$$\rho_J(\mathrm{E}\,(n,R,I)) = \mathrm{E}\,(n,\bar{R},\bar{I}).$$

4. Расположение нормальных делителей

Первая часть данного раздела посвящена доказательству Теоремы 4.4, говорящей о том, что при наличии стандартной коммутационной формулы для всех идеалов кольца стандартное расположение нормальных делителей (1.6)(3) следует из некоторого условия линейной зависимости элементов кольца (отличного от условия (iii) Предложения 2.1). Начнем с доказательства нескольких вспомогательных утверждений. Лемма 4.1 использует стандартную технику. Ее аналоги можно найти, например, в работах [1, 2, 5, 18, 19].

4.1. Лемма. *Пусть F – подгруппа в $\mathrm{GL}\,(n,R)$ нормализуемая $\mathrm{E}\,(n,R)$ и $c \in F$. Предположим, что F не содержит ни одной элементраной трансвекции. Если для некоторого унимодулярного столбца $\alpha \in R^n$ и для некоторых индексов $i,j \in \{1,\dots,n\}$ элементы α_i и $(c\alpha)_j$ равны нулю, то матрица c центральна. В частности, c центральна, если она содержит обратимый элемент или элемент из радикала кольца R.*

Доказательство. Напомним [1, 2, 18] что, если $c_{ij} = 0$, то, либо c центральна, либо F содержит нетривиальную элементарную трансвекцию. Пусть теперь c – нецентральная матрица, и столбец α удовлетворяет условиям леммы. Введем обозначение: $\beta = c\alpha$, и рассмотрим матрицу

$$d = ct_{*i}(\alpha)c^{-1}t_{*i}(-\alpha) = (e + \beta c'_{i*})t_{*i}(-\lambda),$$

принадлежащую F. Так как $\beta_j = 0$, то $d_{jk} = \delta_{jk}$ для всех $k \neq i$ и значит $d = e$. Следовательно $\beta c'_{im} = 0$ при всех $m \neq i$. Таким образом $c'_{im} = 0$ (потому что столбец β унимодулярен), что невозможно.

Если матрица c содержит обратимый элемент, то ее центральность очевидно вытекает из доказанного. Предположим наконец, что $c_{ij} \in \mathrm{Rad}\, R$. Рассмотрим матрицу $a = [t_{ki}(1), c] \in F$, где $k \neq i,j$. Вычисления показывают, что $a_{mj} = \delta_{mj} + c'_{mk}c_{ij}$. В частности, элемент a_{jj} обратим, и, следовательно, матрица a

центральна. Значит $c'_{mk}c_{ij} = 0$ при всех m, откуда $c_{ij} = 0$. Таким образом, матрица c также центральна.

Следующая лемма является ключом к доказательству Теоремы 4.4. Она показывает, как можно извлекать трансвекции из матрицы, содержащей делители нуля.

(4.2) Для матрицы $c \in \mathrm{GL}\,(n, R)$ обозначим через $I(c)$ наименьший идеал в R такой, что $c \in \mathrm{C}\,(n, R, I)$, т.е. наименьший идеал, содержащий элементы c_{ij}, $c_{ii} - c_{jj}$ для всех $i \neq j$. Через $I^{\perp}(c)$ обозначим пересечение левого и правого аннулятора идеала $I(c)$.

4.3. Лемма. *Пусть F – подгруппа в $\mathrm{GL}\,(n, R)$, нормализуемая $\mathrm{E}\,(n, R)$, $\xi \in R$ и $c \in F$. Предположим, что F не содержит нетривиальных элементарных трансвекций и $\xi c_{ij} = 0$ для некоторых индексов i, j. Тогда $\xi \in I^{\perp}(c)$.*

Доказательство. Выберем произвольные $\lambda \in R$ и $k \neq i$. Рассмотрим матрицу

$$d = [t_{ki}(\lambda\xi), c] = t_{ki}(-\lambda\xi)(e + c'_{*k}\lambda\xi c_{i*}),$$

принадлежащую F. Так как $\xi c_{ij} = 0$, то $d_{mj} = \delta_{mj}$ для всех $m \neq k$. Следовательно, по предыдущей лемме матрица d центральна. Точнее, $d = e$, так как $d_{jj} = 1$ (последнее верно даже при $k = j$). Таким образом $c'_{lk}R\xi = 0$ при всех $k \neq i$, $l \neq k$. В силу аналогичных соображений можно заключить, что матрица c коммутирует с трансвекциями $t_{lk}(\lambda\xi\mu)$ при всех $l \neq k$, $\lambda, \mu \in R$. В частности, $c_{kl}\lambda\xi = \xi\lambda c_{kl} = 0$ для всех $l \neq k$, $\lambda \in R$.

Пусть теперь $a = t_{pq}(-1)ct_{pq}(1) \in F$, где $p \neq q$. Так как $\xi a_{ph} = 0$ для всех h не равных p и q, то также, как в первом абзаце доказательства, получим $\xi\lambda a_{pq} = 0$. Но

$$\xi\lambda a_{pq} = \xi\lambda(c_{pq} + c_{pp} - c_{qq}) = \xi\lambda(c_{pp} - c_{qq}).$$

Аналогично $(c_{pp} - c_{qq})\xi\lambda = 0$, что завершает доказательство.

Пусть H – подгруппа в $\mathrm{GL}\,(n, R)$, нормализуемая E(n,R). Легко заметить, что множество всех $\xi \in R$ таких, что $t_{ij}(\xi) \in H$ для некоторых (а значит и для всех) $i \neq j$, образует идеал в R. Напомним [2], что он называется идеалом, ассоциированным с подгруппой H.

4.4. Теорема. *Предположим, что для каждого собственного двустороннего идеала I кольца R выполнены следующие условия:*

(a) $[\mathrm{GL}(n,R,I), \mathrm{E(n,R)}] = \mathrm{E}(n,R,I)$*;*

(b) *для любой матрицы $a \in \mathrm{GL}(n,R)$ существуют $b \in \mathrm{E}(n,R/I)$ и $\alpha \in (R/I)^n$, $(\alpha \neq 0)$ такие, что $\alpha_i = (u^b\alpha)_j = 0$ для некоторых $i,j \in \{1,\dots,n\}$, где $u = \rho_I(a)$ – образ матрицы a в $\mathrm{GL}(n,R/I)$.*

Тогда нормальное строение группы $\mathrm{GL}(n,R)$ стандартно.

Доказательство. Пусть I – идеал, ассоциированный с H, а $F = \rho_I(H)$ – образ H в $\mathrm{GL}(n,R/I)$. Если F содержит нетривиальную элементарную трансвекцию, то стандартным способом (см. [1, 2, 18]) можно поднять ее в группу H. Это противоречит тому, что все элементарные трансвекции из H лежат в ядре гомоморфизма ρ_I.

Предположим теперь, что F не содержит нетривиальных элементарных трансвекций, и $a \in F$. Если матрица a нецентральна, то $I^\perp(a) \neq R/I$. Пусть

$$\bar R = (R/I)/I^\perp(a), \quad \varphi = \rho_{I^\perp(a)} : \mathrm{GL}(n,R/I) \to \mathrm{GL}(n,\bar R) \text{ и } \bar a = \varphi(a).$$

Так как $\bar R$ является факторкольцом кольца R, а $\bar a$ – образ некоторой матрицы из H, то можно выбрать $\bar b$ и $\bar\alpha$, удовлетворяющие условиям теоремы. Пусть α – прообраз $\bar\alpha$ в $(R/I)^n$, $b \in \varphi^{-1}(\bar b)$, а λ – произвольный элемент кольца R/I. Обозначим: $c = a^b$, $\beta = c\alpha$, и рассмотрим матрицу

$$d = ct_{*i}(\alpha\lambda)c^{-1}t_{*i}(-\alpha\lambda) = (e + \beta\lambda'_{i*})t_{*i}(-\alpha\lambda)$$

принадлежащую F Заметим, что $I(d) \leqslant I(c) = I(a)$. По условию (b) теоремы матрица $\varphi(d)$ содержит нулевой элемент в позиции (j,k) при некоторых $k \neq j$, т.е. $d_{jk} \in I^\perp(a) \leqslant I^\perp(d)$. Поэтому $d_{jk}(R/I)d_{jk} = 0$, и, значит $d_{jk} \in \mathrm{Rad}(R/I)$. По Лемме 4.1 d лежит в центре $\mathrm{GL}(n,R/I)$. Следовательно, $\xi(R/I)c'_{im} = 0$ для всех $m \neq i$, где ξ – элемент столбца β, не принадлежащий $I^\perp(c)$ (такой элемент существует, потому что β имеет ненулевой образ в $\bar R^n$, и $I^\perp(c) = I^\perp(a)$). Но это противоречит Лемме 4.3. Следовательно, матрица a должна быть центральной. Таким образом F лежит в центре $\mathrm{GL}(n,R)$ и $H \leqslant \mathrm{C}(n,R,I)$.

В заключении настоящего раздела мы докажем, что стандартность нормального строения полной линейной группы можно "поднять" по модулю идеала маленького стабильного ранга. Доказательство следующего утверждения может быть извлечено из работы [13], поэтому мы не будем его воспроизводить.

4.5. Лемма. *Если* $n \geqslant \mathrm{sr}\,(R,J)+1$*, то нормальное строение группы* $\mathrm{GL}\,(n,R,J)$ *стандартно.*

4.6. Теорема. *Пусть* $n \geqslant \mathrm{sr}\,(R,J)+1$*, и нормальное строение группы* $\mathrm{GL}\,(n,R/J)$ *стандартно. Тогда нормальное строение группы* $\mathrm{GL}\,(n,R)$ *также стандартно.*

Доказательство. По Следствию 3.4 стандартная коммутационная формула выполнена в $\mathrm{GL}\,(n,R)$ для любого идеала кольца R. В частности, $\mathrm{E(n,R)}$ нормальна в $\mathrm{GL}\,(n,R)$. Поэтому (см. (1.7)) мы должны доказать, что любая $\mathrm{E(n,R)}$-совершенная подгруппа H группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$ совпадает с $E(n,R,I)$. Пусть I – идеал, ассоциированный с H. Так как нормальное строение группы $\mathrm{GL}\,(n,R/J)$ стандартно, то

$$\rho_J(H) = \mathrm{E}\,(n, R/J, \bar{I})$$

для некоторого идеала $\bar{I} \leqslant R/J$. Также, как и в начале доказательства Теоремы 4.4, мы можем заключить, что группа $\mathrm{E}\,(n,R/J,\bar{I})$ не содержит элементарных трансвекций $t_{ij}(\xi)$, если $\xi \notin \pi_J(I)$. Таким образом, $\bar{I} = \pi_J(I)$. Следовательно, $H \leqslant \mathrm{GL}\,(n,R,J)\cdot \mathrm{E}\,(n,R,I)$. Легко видеть, что существует подгруппа $F \leqslant \mathrm{GL}\,(n,R,J)$ такая, что $H = F\cdot E(n,R,I)$. По Лемме 4.5

$$\mathrm{E}\,(n,R,I_1) \leqslant F \leqslant \mathrm{C}\,(n,R,I_1) \text{ для некоторого } I_1 \leqslant J.$$

Очевидно, $I_1 \leqslant I$, и, следовательно,

$$H \leqslant \mathrm{C}\,(n,R,I_1)\cdot \mathrm{E}\,(n,R,I) \leqslant \mathrm{C}\,(n,R,I).$$

Наконец,

$$H = [H, \mathrm{E(n,R)}] \leqslant [\mathrm{C}\,(n,R,I), \mathrm{E(n,R)}] = \mathrm{E}\,(n,R,I).$$

4.7. Следствие. *Если* $J \leqslant \mathrm{Rad}\,R$*, то стандартность нормального строения группы* $\mathrm{GL}\,(n,R)$ *эквивалентна стандартности нормального строения группы* $\mathrm{GL}\,(n,R/J)$*.*

5. Центральность K_2

В последнем разделе мы выясняем связи между центральностью расширения $\mathrm{St}(n, R) \to \mathrm{E(n,R)}$, стандартностью нормального строения элементарной подгруппы E(n,R) и группы Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$. Мы также покажем, что центральность этого расширения эквивалентна центральности расширения $\mathrm{St}(n, R/J) \to \mathrm{E}(n, R/J)$, если $n \geqslant \mathrm{sr}(R, J) + 2$. В заключении мы приведем пример кольца A, для которого центральность $K_2(n, A)$ следует из Теоремы 5.4 и не была до сих пор известна.

(5.1) Напомним [6, 10], что $K_2(n, R)$ – это ядро канонической проекции $\pi : \mathrm{St}(n, R) \to \mathrm{E(n,R)}$ (определение группы Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ можно найти в упомянутых работах). Образующие этой группы мы обозначаем через $x_{ij}(\xi)$. Для идеала I кольца R обозначим через $\mathrm{St}(n, R, I)$ ядро канонического эпиморфизма $\mathrm{St}(n, R) \to \mathrm{St}(n, R/I)$. Другими словами, $\mathrm{St}(n, R, I)$ – это наименьший нормальный делитель $\mathrm{St}(n, R)$, содержащий все образующие $x_{ij}(\xi)$, $i \neq j$, $\xi \in I$. Очевидно, что подгруппы $\mathrm{St}(n, R, I)$ являются $\mathrm{St}(n, R)$-совершенными.

Будем говорить, что нормальное строение группы Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ стандартно, если других $\mathrm{St}(n, R)$-совершенных подгрупп в группе Стейнберга нет.

5.2. Предложение. *Следующие условия эквивалентны.*
(i) *Нормальное строение группы* E(n,R) *стандартно и* $K_2(n, R)$ *централен в* $\mathrm{St}(n, R)$.
(ii) *Нормальное строение группы* $\mathrm{St}(n, R)$ *стандартно.*
(iii) *Условие* (i) *или* (ii) *выполнено для всех факторколец* R/I.

Доказательство. Пусть H является $\mathrm{St}(n, R)$-совершенной подгруппой. Если нормальное строение группы E(n,R) стандартно, то $\pi(H)$ совпадает с одной из групп $\mathrm{E}(n, R, I)$. Следовательно,

$$H \leqslant \mathrm{St}(n, R, I) \cdot K_2(n, R) \text{ и } H = [H, H] \leqslant \mathrm{St}(n, R, I).$$

С другой стороны, если $\xi \in I$, то существует элемент $a \in K_2(n, R)$ такой, что $ax_{12}(\xi) \in H$. Тогда равенство

$$x_{32}(\xi) = [x_{31}(1), ax_{12}(\xi)] \in H$$

влечет обратное включение $\mathrm{St}(n, R, I) \leqslant H$.

Обратно, так как $K_2(n,R)$ не содержит образующих $x_{ij}(\xi)$, то он централен по определению стандартности нормального строения группы Стейнбурга (5.1). Стандартность нормального строения E(n,R) следует из (1.9). Эквивалентность (ii) $\Longleftrightarrow$(iii) очевидна.

5.3. Лемма. *Если* $[\mathrm{GL}\,(n,R,I),\mathrm{E(n,R)}]=\mathrm{E}\,(n,R,I)$ *и* $K_2(n,R)$ *централен в* $\mathrm{St}\,(n,R)$*, то* $K_2(n,R,I)$ *централен в* $\mathrm{St}\,(n,R/I)$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}\,(n,R) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{St}\,(n,R/I) \arrow[d] \\
\mathrm{E(n,R)} \arrow[r, "\rho_I"] & \mathrm{E}\,(n,R/I)
\end{tikzcd}$$

Обозначим $H=\varphi^{-1}(K_2(n,R/I))$ и $H'=[H,\mathrm{St}\,(n,R)]$. Ясно, что $\pi(H)\leqslant \mathrm{GL}\,(n,R,I)$. По Предложению 1.3. и 1.9(i) группа $\pi(H')$ является E(n,R)-совершенной. Стандартная коммутационная формула показывает, что $\pi(H')\leqslant \mathrm{E}\,(n,R,I)$, т.е. $H'\leqslant \mathrm{St}\,(n,R,I)\cdot K_2(n,R)$. Так как $[H',\mathrm{St}\,(n,R)]=H'$, то центральность $K_2(n,R)$ влечет включение $H'\leqslant \mathrm{St}\,(n,R,I)$. Таким образом

$$[K_2(n,R/I),\mathrm{St}\,(n,R/I)]=\varphi(H')=\{e\}.$$

5.4. Теорема. *Пусть* $n\geqslant \mathrm{sr}\,(R,I)+2$*. Тогда центральность* $K_2(n,R)$ *эквивалентна центральности* $K_2(n,R,I)$.

Доказательство. По Следствию 3.4 имеет место стандартная коммутационная формула

$$[\mathrm{GL}\,(n,R,I),\mathrm{E(n,R)}]=\mathrm{E}\,(n,R,I).$$

Следовательно, по Лемме 5.3 центральность $K_2(n,R)$ в $\mathrm{St}\,(n,R)$ влечет центральность $K_2(n,R/I)$. Обратно, если $K_2(n,R/I)$ лежит в центре группы Стейнберга, то

$$F=[K_2(n,R),\mathrm{St}\,(n,R)]\leqslant \mathrm{St}\,(n,R,I).$$

Так как $n\geqslant \mathrm{sr}\,(R,I)+2$, то мы можем повторить доказательство сюр]ективной стабилизации K_2 из работы [10] в группе $\mathrm{St}\,(n,R,I)$ и показать, что любой элемент из $\mathrm{St}\,(n,R,I)\cap K_2(n,R)$ принадлежит $\mathrm{St}\,(n-1,R)$. Обычные аргументы (см., например,

[6]) показывают, что такой элемент централен. Таким образом, группа F лежит в центре $\mathrm{St}\,(n,R)$. По Предложению 1.3 группа $\mathrm{St}\,(n,R)$ сильно полинормальна в самой себе. Следовательно, $F=[F,\mathrm{St}\,(n,R)]=\{e\}$, т.е. $K_2(n,R)$ централен.

(5.5) В заключении рассмотрим следующий пример. Пусть R – произвольное коммутативное кольцо, а $R\langle x,y\rangle$ – свободная (ассоциативная) алгебра над R. Рассмотрим факторалгебру $A=R\langle x,y\rangle/(xy=1)$ алгебры $R\langle x,y\rangle$ по соотношению $xy=1$. Обозначим через I наименьший двусторонний идеал в A, содержащий элемент $yx-1$. В работе [7] показано, что $\mathrm{sr}\,(A,I)=2$. С другой стороны ясно, что кольцо A/I коммутативно, и следовательно, по теореме Ван дер Каллена [17] $K_2(n,A/I)$ централен при $n\geqslant 4$. Отсюда по Теореме 5.4 можно заключить, что $K_2(n,A)$ также является центральным. Из Теоремы 4.6 следует к тому же, что нормальное строение группы $\mathrm{GL}\,(n,A)$ стандартно при $n\geqslant 3$. Последнее утверждение можно вывести также из результатов работ [19] и [7].

Литература

1. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* М., Мир, 1973, 591 с.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Труды Мат. ин-та Акад. Наук СССР **165** (1984), 24–42.
3. Л. Н. Васерштейн, *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств.* — Функц. Анализ и его приложения **5, No. 2** (1971), 102–110.
4. В. Н. Герасимов, *Группа единиц свободнойго произведения колец.* — Мат. сб. **134, No. 1** (1987), 42–65.
5. И. З. Голубчик, *О полной линейной группе над ассоциативным кольцом.* — Успехи Мат. Наук **28, No. 3** (1973), 179–180.
6. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию.* М., Наука, 1974, 197 с.
7. А. В. Степанов, *Кольцо конечного стабильного ранга не обязательно конечно по Дедекинду.* — Докл. Акад. Наук СССР **296, No. 3** (1987), 546–549.
8. А. В. Степанов, *О расположении подгрупп, нормализуемых фиксированной.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **198** (1991), 92–102.
9. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов.* — Изв. Акад. Наук СССР **41, No. 2** (1977), 235–252.
10. А. А. Суслин, М. С. Туленбаев, *Теорема о стабильности для K_2-функтора Милнора.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **64** (1976), 131–152.

11. A. Bak, *Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability.* — K-theory **4** (1991), 363–397.
12. H. Bass, *The stable structure of quite general linear groups.* — Bull. Amer. Math. Soc. **70**, No. **3** (1964), 430–434.
13. H. Bass, *K-theory and stable algebra.* — Publ. Math. IHES No. 22 (1964), 5–60.
14. D. L. Costa, G. Keller, *The* $\mathrm{E}(2,A)$ *sections of* $\mathrm{SL}(2,A)$. — Ann. Math. **134** (1991), 159–188.
15. C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representations theory.* vol. 2, New York, 1987, J. Wiley and Sons.
16. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Berlin et al., Springer, 1989, 576 p.
17. W. van der Kallen, *Another presentation for the Steinberg group.* — Proc. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A **80** (1977), 304–312.
18. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvection.* in preparation.
19. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of* GL_n *over a ring.* — Lect. Nor. Math. **854** (1981), 456–465.
20. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics, Hiroshima – 1990 (1991), 219–335, Singapore et. al., World Sci. Publ..
21. J. S. Wilson, *The normal and subnrmal structure of general linear groups.* — Proc. Cambr. Phil. Soc. **71** (1972), 163–177.

Stepanov A. V. On the normal structure of the general linear group over a ring.

The article is devoted to investigation of the normal subgroups of the general linear group over a ring and centrality of the extension $\mathrm{St}(n,R) \to E(n,R)$. The notions of the standard commutator formula and the standard normal structure of $\mathrm{GL}(n,R)$, $\mathrm{E}(n,R)$, and $\mathrm{St}(n,R)$ and their relationships are discussed. In particular, it is shown that the normality of $\mathrm{E}(n,R)$ in $\mathrm{GL}(n,R)$ and the standard distribution of subgroups normalized by $\mathrm{E}(n,R)$ follow from some conditions of linear dependence in R. Also, it is proved that the standardness of the normal structure of $\mathrm{GL}(n,R)$ and centrality of $K_2(n,R)$ in $\mathrm{St}(n,R)$ follow from the same conditions over a quotient ring R/I provided $\operatorname{sr} I \leqslant n-1$. Under some additional assumptions (e.g I is contained in the Jacobson radical of R) the converse is also true. The standard tecnique due to H. Bass, Z. I. Borevich, N. A. Vavilov, L. N. Vaserstein, W. van der Kallen, A. A. Suslin, M. S. Tulenbaev, and others is used and developed in the article.

Санкт-Петербургский
Электротехнический университет

Поступило 16 декабря 1996 г.