А. А. Панин, А. В. Яковлев

ТЕОРИЯ ГАЛУА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСCА ДЕДЕКИНДОВЫХ СТРУКТУР

§1. Введение

В серии работ З. И. Боревича и Н. А. Вавилова [4–7] было получено описание подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом R, содержащих группу диагональных матриц, в терминах сетей иделов в R.

Как было показано А. З. Симоняном [8], в частном случае, когда в качестве R рассматривается поле, эти результаты могут быть переформулированы в терминах соответствий Галуа между подструктурами некоторых структур и подгруппами их групп автоморфизмов.

В настоящей работе строится некоторая теория Галуа для структур. Из полученных результатов удается вывести упоминавшееся выше описание промежуточных подгрупп для случая, когда R – артиново кольцо.

Пусть L – некоторая структура, G – подгруппа группы всех автоморфизмов структуры L. Для подгруппы F группы G и подструктуры M структуры L положим:

$L(F)$ – множество таких элементов $l \in L$, что $f(l) = l$ для всех $f \in F$,

$G(M)$ – множество таких элементов $g \in G$, что $g(m) = m$ для всех $m \in M$ (очевидно, что $L(F)$ – подструктура L, а $G(M)$ – подгруппа G).

Пусть L_0 – подструктура L; обозначим $H = G(L_0)$, $L_0' = L(H)$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех подструктур L_0', а через $\mathfrak{N}$ – множество подгрупп G, содержащих H. Определим отображения $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ по формуле $\varphi(M) = G(M)$ для $M \in \mathfrak{M}$ и $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ по формуле $\psi(F) = L_0'(F)$ для $F \in \mathfrak{N}$. Легко видеть, что пара φ, ψ является соответствием Галуа между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Всюду ниже мы будем считать, что в произвольной структуре операции "пересечение" и "объединение" обозначаются символами $\cdot$ и $+$.

Если M – структура, $x_1, \dots, x_s \in M$, то для каждого $i, 1 \leqslant i \leqslant s$, обозначаем $\hat{x}_i = x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_s$.

§2 Формулировка основного результата

Пусть L – дедекиндова структура конечной длины, L_0 – ее подструктура, являющаяся булевой алгеброй, G – подгруппа группы всех автоморфизмов структуры L, $H = G(L_0)$.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – все атомы L_e, d – функция размерности на структуре L. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

1^0. $0_{L_0} = 0_L$, $1_{L_0} = 1_L$.

2^0. $d(e_i) = m$ для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Если имеются два набора элементов из L, а именно, $(x_1, \dots, x_k)$ и $(y_1, \dots, y_k)$, то пишем $(x_1, \dots, x_k) \leqslant (y_1, \dots, y_k)$, если $x_i \leqslant y_i$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Также определим "пересечение" и "объединение" двух таких наборов покоординатно.

Для каждого элемента $x \in L$ определим носитель $[x]$: это наименьший (относительно упорядочения, указанного выше) набор $(x_1, \dots, x_n)$, где

$$x_i \leqslant e_i \text{ для всякого } i,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ и } x \leqslant x_1 + \ldots + x_n. \qquad (+)$$

Корректность определения и некоторые свойства носителя доказываются в §4.

Будем обозначать $[x] = ([x]_1, \dots, [x]_n)$.

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, через H_i обозначим множество автоморфизмов из H, не имеющих все элементы $x \in L$, для которых $[x]_i = 0$.

Для любых различных i и j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и $x \leqslant e_j$ обозначим через $H_{ij}(x)$ множество тех элементов $f \in G$, для которых

1) $f(x_s) = x_s$ для любых $s \neq i$, $x_s \leqslant e_s$

2) $[f(x_i)]_i = x_i$ для любого $x_i \leqslant e_i$

3) $[f(e_i)]_k = \begin{cases} 0, & k \neq i, j \\ e_i, & k = i \\ x, & k = j \end{cases}$

(заметим, что множество $H_{ij}(x)$ может быть и пустым). Будем называть элементы $H_{ij}(x)$ "трансвекциями".

Обозначим через $\bar{L}_0$ множество элементов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i \leqslant$

e_i для каждого i. Как будет показано ниже (см. §4), из уже сделанных предположений вытекает, что $\bar{L}_0$ – подструктура L.

Потребуем дополнительно, чтобы выполнялись следующие условия:

3^0. Если $a \in G$, и $[a(e_i)]_i = e_i$ для некоторого i, то существует $h \in H_i$ такой, что $[ha(x_i)]_i = [ah(x_i)]_i = x_i$ для любого $x_i \leqslant e_i$.

4^0. Для любого i, $1 \leqslant t \leqslant n$, существует $h \in H_t \cap G(\bar{L}_0)$ такой, что $[aha^{-1}(x_i)]_r = [a([a^{-1}(x_i)]_t)]_r$ для всех $a \in G$, $1 \leqslant r \neq i \leqslant n$, $x_i \leqslant e_i$.

5^0. Пусть $u \in \bar{L}_0$, $u \geqslant e_i$ для некоторого i; $g \in G$, $[g(u)]_i = e_i$. Тогда существует $t \in G$ такой, что:

1) $[gt(e_i)]_i = e_i$

2) $t(e_s) = e_s$ для каждого $s \neq i$

3) $[t(e_i)]_j \leqslant [u]_j$ для любого j.

6^0. Если $f, g \in G$ такие, что $[f(e_i)]_j \leqslant [g(e_i)]_j$ для некоторых i, j, то $[f(x)]_j \leqslant [g(x)]_j$ для любого $x \in L_0$, $x \leqslant e_i$.

7^0. Если $u \leqslant e_j$ для некоторого j, то для любого $i \neq j$ существуют $y_1 \leqslant e_j, \ldots, y_s \leqslant e_j$ такие, что $u = \sum\limits_{r=1}^{s} y_r$ и $H_{ij}(y_r) \neq \varnothing$.

8^0. Если $x = [f(e_i)]_j$ для некоторых $f \in G$, $i \neq j$, то существует $g \in H_{ij}(x)$ такой, что $[g(u)]_j = [f(u)]_j$ для каждого $u \leqslant e_i$.

9^0. Если $w \in L$, $d(w) = m$, и $[w] = (0, \ldots, e_i, \ldots, x, \ldots, 0)$, где $x \leqslant e_j$ такой, что $H_{ij}(x) \neq \varnothing$, то существует $t \in H_{ij}(x)$, для которого $t(w) = e_i$.

10^0. Пусть $a_1 \in H_{ij}(x_1), \ldots, a_s \in H_{ij}(x_s)$, и $y \leqslant x_1 + \ldots + x_s$ такой, что $H_{ij}(y) \neq \varnothing$. Тогда $H_{ij}(y) \subseteq \langle H, a_1, \ldots, a_s \rangle$.

11^0. Если $a \in G$, то для любых индексов t, $i \neq j$, и любого $h \in H_t$ $H_{ij}([aha^{-1}(e_i)]_j) \cap \langle a, H \rangle \neq \varnothing$.

Теорема 2.1. *В рассмотренной выше ситуации для любой подгруппы $F \geqslant H$ группы G существует подструктура K структуры L_0', для которой $G(K) \trianglelefteq F$. При этом, если дополнительно предположить, что структура $\bar{L}_0(H)$ конечна, то индекс $(F : G(K))$ конечен.*

Замечание. Структура K определена неоднозначно (см. §10).

Доказательству Теоремы 2.1 посвящены §§4–8. Случай $n = 1$ очевиден, поэтому всюду ниже мы предполагаем, что $n \geqslant 2$.

§3. Случай $m = 1$

А. З. Симонян в работе [8] исследовал указанное в §1 соответствие Галуа при $m = 1$.

Из Теоремы 2.1 (и результатов §10 о единственности) вытекает

Теорема 3.1. *Пусть L – дедекиндова структура конечной длины, L_0 – ее подструктура той же длины, причем L_0 – булева алгебра, G – подгруппа группы всех автоморфизмов структуры L, $H = G(L_0)$, $L_0 = L(H)$.*

Если выполнены указанные ниже условия $1'$–$4'$, то для любой подгруппы $F \geqslant H$ группы G существует единственная подструктура K структуры L_0, содержащая 0 и 1, для которой $G(K) \trianglelefteq F$, причем $(F : G(K)) < \infty$.

$1'$. Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует по крайней мере один автоморфизм из H_i, меняющий все атомы $x \in L \setminus \{e_i\}$, для которых $[x]_i = e_i$.

$2'$. Если для атомов $x, y \in L$ $[x] = [y]$, то существует $h \in H$ такой, что $h(x) = y$.

$3'$. Для любых $i \neq j$ $H_{ij}(e_j) \neq \varnothing$.

$4'$. Если $a \in G$, то для любых индексов t, $i \neq j$, и любого $h \in H_t$ $H_{ij}([aha^{-1}(e_i)]_j) \cap \langle a, H\rangle \neq \varnothing$.

Следует отметить, что условия $1'$–$4'$ Теоремы 3.1 не совпадают с условиями Теоремы 2.1 работы [8], которые являются несколько более простыми, чем наши.

§4. Свойства носителя

Лемма 4.1. *Если M – произвольная дедекиндова структура, $x, y, z, t \in M$, и $(x + z) \cdot (y + t) = 0$, то $(x + y) \cdot (z + t) = x \cdot z + y \cdot t$.*

Доказательство. См. [2, с.102].

Следствие 1. *Если $x, y \in \bar{L}_0$, то $x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{n} [x]_i \cdot [y]_i$.*

Следствие 2. *$\bar{L}_0$ – структура.*

Если имеются два набора, удовлетворяющие условию (+) из §2, то и их “пересечение” также будет удовлетворять (+). Так как по крайней мере один набор со свойством (+) существует (см. условие 1^0), то определение носителя корректно.

Лемма 4.2. *Если M – произвольная дедекиндова структура, x, $x_1, \dots, x_s \in M$, то* $\sum_{i=1}^{y}(x+\hat{x}_i)\cdot x_i = \left(\sum_{i=1}^{s} x)i\right)\cdot \prod_{i=1}^{s}(x+=hatx_i)$.

Доказательство. Проводится по индукции с применением модулярного закона.

Лемма 4.3. *Для всякого $x \in L$ и любого i $[x]_i = (x+\hat{e}_i)\cdot e_i$.*

Доказательство. По Лемме 4.2 $\sum_{i=1}^{n}(x+\hat{e}_i)\cdot e_i = \prod_{i=1}^{n}(x+\hat{e}_i) \geqslant x$. Далее, $(x+\hat{e}_i)\cdot e_i \leqslant ([x]_i+\hat{e}_i)\cdot e_i = [x]_i$, откуда все и получается.

Следствие. *Для любых $x, y \in L$ имеем $[x+y] = [x]+[y]$.*

Лемма 4.4. *Пусть $v \in L$, $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Тогда существует $v_I \in L$ такой, что $[v_I]_i = 0$ при $i \in I$, $v + \sum_{i\in I}[v]_i = v_I + \sum_{i\in I}[v]_i$.*

Доказательство. Обозначим $v_I = \left(v+\sum_{i\in I}[v]_i\right)\cdot\left(\sum_{i\notin I}[v]_i\right)$. Очевидно, что $v_I + \sum_{i\in I}[v]_i \leqslant v + \sum_{i\in I}[v]_i$. Легко проверить, что размерности левой и правой частей совпадают.

Следствие 1. *Для всякого $t \in H_{ij}(x)$ имеем:*
а) $t(e_i)+e_i = e_i + x$,
б) $t(e_i)+x = e_i + x$.

Следствие 2. *Если $t \in H_{ij}(x)$, то и $t^{-1} \in H_{ij}(x)$.*

§5. Вспомогательные утверждения

Всюду в дальнейшем через F обозначается подгруппа группы G, содержащую группу H.

Лемма 5.1. *Для всякого $a \in F$, индексов t, $i \neq j$, и $h \in H_t$ $H_{ij}([aha^{-1}(e_i)]_j)\cap F \neq \varnothing$.*

Доказательство. Следует из условия 11^0.

Лемма 5.2. *Пусть $u \in L$ такой, что $d(u) = m$, $[u]_i = e_i$, $[u]_j = x$ (для некоторых $i \neq j$), $H_{ij}(x) \neq \varnothing$. Тогда существует $t \in H_{ij}(x)$ такой, что $[t(u)]_j = 0$.*

Доказательство. Пусть $i = 1$, $j = 2$. По Лемме 4.4 существует $w \in L$ со следующими свойствами: $[w] = (e_1, x, 0, \dots, 0)$; $u \leqslant w +$

w_1, где $w_1 = [u]_3 + \ldots + [u]_n$; $d(w) = m - d(u \cdot w_1)$. Так как по Лемме 4.4 $u + \hat{e}_1 = 1$, а $d(u) = m$, то $u \cdot \hat{e}_1 = 0$, откуда $d(w) = m$. По условию 9^0 существует $t \in H_{12}(x)$ такой, что $t(w) = e_1$. Имеем $t(u) \leqslant t(w) + t(w_1) \leqslant \hat{e}_2$, откуда $[t(u)]_2 = 0$.

Лемма 5.3. *Для любого $h \in H$ существуют такие $h_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$, что $h_n h_{n-1} \ldots h_1 h \in G(\bar{L}_0)$.*

Доказательство. Применяем условие 3^0.

Определим для любых i, j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, "идеалы трансвекций"

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(F) = \sum_{x : H_{ij}(x) \cap F \neq \varnothing} x.$$

Будем считать также, что $\sigma_{ii} = e_i$. Отметим, что для любых i, j $\sigma_{ij} \leqslant e_j$.

Лемма 5.4. 1) *если $H_{ij}(x) \cap F \neq \varnothing$, то $H_{ij}(x) \subseteq F$.*

2) *для любого $y \leqslant \sigma_{ij}$, такого, что $H_{ij}(y) \neq \varnothing$, имеем $H_{ij}(y) \subseteq F$.*

Доказательство. Применяем условие 10^0.

Лемма 5.5. *Для любых i, j $\sigma_{ij} \in L_0'$.*

Доказательство. Пусть $i \neq j$, $h \in H$. Ввиду того, что L – структура конечной длины, достаточно показать, что $h(\sigma_{ij}) \leqslant \sigma_{ij}$. Пусть $f \in H_{ij}(x) \cap F$, тогда, применяя следствие 1a) Леммы 4.4, получим, что $[hf(e_i)]_j = h(x)$. По условию 3^0 можно найти такой $\bar{h} \in H$, что $hf\bar{h} \in H_{ij}(h(x))$. Так как $hf\bar{h} \in F$, то $h(x) \leqslant \sigma_{ij}$, а, значит, $h(\sigma_{ij}) \leqslant \sigma_{ij}$.

Обозначим через $K = K(F)$ подструктуру структуры $\bar{L}_0$, порожденную нулем и элементами $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$, где i изменяется от 1 до n. По Лемме 5.5 K – подструктура L_0'.

§6. Доказательство включения $K \subseteq \overline{L_0(F)}$

Будем обозначать через $\overline{L_0(F)}$ структуру, состоящую из таких элементов $l \in \bar{L}_0$, что $f(l) \in \bar{L}_0$ для всех $f \in F$.

Лемма 6.1. *Пусть $a \in F$. Для каждого s, $1 \leqslant s \leqslant n$, обозначим $u_s = \sum\limits_{j=1}^{n} [a(\sigma_{ij})]_s$. Тогда $[a^{-1}(u_s)] \leqslant (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{in})$ для каждого s.*

Доказательство. По определению,

$$[a^{-1}(u_s)] = \left[\sum_{j=1}^{n} a^{-1}([a(\sigma_{ij})]_s\right] = \sum_{j=1}^{n}[a^{-1}([a(\sigma_{ij})]_s)].$$

Пусть $j = i$. По условию 4^0 существует $h \in H_s$ такой, что $[a^{-1}ha(e_i)]_r = [a^{-1}([a(e_i)]_s)]_r$ для всех $r \neq i$. По Лемме 5.1 имеем $[a^{-1}([a(e_i)]_s)]_r \leqslant \sigma_{ir}$ (при любых r).

Пусть $j \neq i$. Возьмем произвольный $x \leqslant e_j$, для которого $H_{ij}(x) \cap F \neq \varnothing$. Пусть $b \in H_{ij}(x) \cap F$. Тогда по Следствию 1а) Леммы 4.4 $b(e_i) + e_i = e_i + x$, откуда

$$ab(e_i) + a(e_i) = a(e_i) + a(x). \tag{$\star$}$$

Покажем, что $[a^{-1}([ab(e_i)]_s)] + [a^{-1}([a(e_i)]_s)] \leqslant (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{in})$ для каждого s.

Мы уже знаем, что $[a^{-1}([a(e_i)]_s)]_r \leqslant \sigma_{ir}$. Далее, поступая аналогично с $ab \in F$, имеем $[(ab)^{-1}([ab(e_i)]_s)]_r = [b^{-1}a^{-1}([ab(e_i)]_s)]_r \leqslant \sigma_{ir}$. Легко проверить, что отсюда следует $[a^{-1}([ab(e_i)]_s)]_r \leqslant \sigma_{ir}$.

Из ($\star$) $[a(x)]_s \leqslant [ab(e_i)]_s + [a(e_i)]_s$, откуда $[a^{-1}([a(x)]_s)] \leqslant (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{in})$.

Для завершения доказательства леммы осталось вспомнить определение σ_{ij}.

Теорема 6.2. *Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \in \overline{L_0(F)}$.*

Доказательство. Пусть $a \in F$. Обозначим $u = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}[a(\sigma_{ij})]_s = \sum\limits_{s=1}^{n} u_s$, где $u_s = \sum\limits_{j=1}^{n}[a(\sigma_{ij})]_s$.

Ясно, что $a\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\right) \leqslant u$. С другой стороны, по Лемме 6.1 $a^{-1}\left(\sum\limits_{s=1}^{n} u_s\right) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$, откуда $a\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\right) = u \in \bar{L}_0$ и, значит, $\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij} \in \overline{L_0(F)}$.

Следствие 1. *$K \subseteq \overline{L_0(F)}$.*

Замечание. Структура K может не совпадать со структурой $\overline{L_0(F)}$: если взять $F = H$, то $K = L_0$, но $\overline{L_0(H)} = \bar{L}_0$.

Следствие 2. *$G(\overline{L_0(F)}) \leqslant G(K)$.*

§7. Сетевые наборы в L'_0

Определение. *Назовем сетевым набором в L'_0 такой набор элементов $\tau = (\tau_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, для которого выполнены следующие условия (для любых i, j, k):*

1) $\tau_{ij} \leqslant e_j$,

2) $\tau_{ii} = e_i$,

3) $\tau_{ij} \in L_0$,

4) *для любого $g \in G$ следующие утверждения равносильны:*

а) $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$

б) $[g(\tau_{ki})]_j \leqslant \tau_{kj}$

(заметим, что в 4) нетривиальна только импликация а) $\Longrightarrow$ б) *при различных i, j, k: см. условие 6^0).*

Лемма 7.1. *Если для каждого $\alpha \in I$ $\tau^\alpha = (\tau^\alpha_{ij})$ – сетевой набор в L'_0, то $\tau' = (\tau'_{ij})$, где $\tau'_{ij} = \prod\limits_{\alpha \in I} \tau^\alpha_{ij}$, также является сетевым набором в L'_0.*

Доказательство. Вытекает из определения сетевого набора.

Для всякого сетевого набора $\tau = (\tau_{ij})$ в L'_0 обозначим через K_τ подструктуру L'_0, порожденную нулем и элементами $\sum\limits_{j=1}^{n} \tau_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что утверждение 4б) из определения сетевого набора означает, что $g \in G(K_\tau)$.

Теорема 7.2. *$G(K_\tau) = \langle H, H_{ij}(x) : x \leqslant \tau_{ij}, i \neq j \rangle$.*

Доказательство. Обозначим $V = \langle H, H_{ij}(x) : x \leqslant \tau_{ij}, i \neq j \rangle$. По определению сетевого набора $G(K_\tau) \geqslant V$. Пусть, далее, $g \in G(K_\tau)$.

А. Так как для любого i $g\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \tau_{ij}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \tau_{ij}$, то $\left[g\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \tau_{1j}\right)\right]_1 = e_1$. По условию 5^0 существует $t_1 \in G$ со следующими свойствами:

$[gt_1(e_1))]_1 = e_1$; $t_1(e_k) = e_k$ при $k \neq 1$; $[t_1(e_1)]_k \leqslant \tau_{1k}$. Покажем, что $t_1 \in V$.

По Лемме 5.2 существует $\bar{t}_2 \in H_{12}([t_1(e_1)]_2) \leqslant V$ такой, что $[\bar{t}_2 t_1(e_1)]_2 = 0$. При этом, очевидно, $[\bar{t}_2 t_1(e_1)]_k = [t_1(e_1)]_k$ при $k \neq 2$. Продолжая аналогично, найдем $\bar{t}_k \in H_{1k}([t_1(e_1)]_k) \leqslant V$, $k = 3, \dots, n$, такие, что $\bar{t}_n \dots \bar{t}_2 t_1(e_1) = e_1$. Отсюда $\bar{t}_n \dots \bar{t}_2 t_1 \in H$ и, значит, $t_1 \in V$.

Б. Рассуждая так же, как в пункте А, найдем $g_1 \in V$ такой, что $g_1 g t_1(e_1) = e_1$. По индукции получаем $g \in V$.

Лемма 7.3. *Пусть* $1 \leqslant i, j, k \leqslant n, j, k$ *– все различные,* $g \in H_{ij}(x)$, $H_{ki}(y) \neq \varnothing$. *Тогда* $H_{kj}([g(y)]_j) \cap \langle H, H_{ij}(x), H_{ki}(y)\rangle \neq \varnothing$.

Доказательство. Сводится к применению Лемм 4.4, 5.2 и 5.3.

Теорема 7.4. $\sigma = \sigma(F)$ *– сетевой набор в* L_0'.

Доказательство. По Лемме 5.5 $\sigma_{ij} \in L_0'$. Осталось доказать, что из условия $[g(e_i)]_j \leqslant \sigma_{ij}$ следует, что $[g(\sigma_{ki})]_j \leqslant \sigma_{kj}$ (при различных i, j, k).

Пусть $y \leqslant \sigma_{ki}$ такой, что $H_{ki}(y) \neq \varnothing$. По условию 8^0 можно найти $f \in H_{ij}([g(e_i)]_j) \subseteq F$, для которого $[f(y)]_j = [g(y)]_j$. Тогда по Лемме 7.3 $[g(y)]_j \leqslant \sigma_{kj}$.

Если $\sigma = \sigma(F)$, то мы будем обозначать $K = K(F) = K_\sigma$.

Следствие 1. $G(K) = \langle H, H_{ij}(x) \cap F : x \leqslant e_j, i \neq j\rangle$.

Следствие 2. $G(K) \leqslant F$.

Следствие 3. $G(\overline{L_0(F)}) \leqslant F$.

Следствие 4. *Группы* $G(K)$ *и* F *имеют одни и те же “трансвекции”.*

Лемма 7.5. *Группы* $G(\overline{L_0(F)})$ *и* F *имеют одни и те же “трансвекции”.*

Доказательство. Пусть $t \in H_{kl}(x) \cap F$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in \overline{L_0(F)}$. Так как $t \in F$, то $t\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \in \bar{L}_0$. Легко проверить, что $x_i = y_i$ при $i \neq l$, а $x_l \leqslant y_l$. Из равенства размерностей получаем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$.

Лемма 7.6. *Если $\tau = (\tau_{ij})$ – сетевой набор в L'_0, то $\tau = \sigma(G(K_\tau))$.*

Доказательство. Если $t \in H_{ij}(x) \cap G(K_r)$, то $[t(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$. Таким образом, $\sigma_{ij} \leqslant \tau_{ij}$, но ввиду условия 7^0 на самом деле получается равенство.

Таким образом, все сетевые наборы в L'_0 состоят из "идеалов трансвекций".

§8. Доказательство основного результата

Лемма 8.1. $G(\overline{L_0(F)}) \trianglelefteq F$.

Доказательство. Пусть $g \in G(\overline{L_0(F)})$, $f \in F$, $l \in \overline{L_0(F)}$. Имеем (так как $f(l) \in \overline{L_0(F)}$), что $f^{-1}gf(l) = f^{-1}f(l) = l$, откуда $f^{-1}gf \in G(\overline{L_0(F)})$.

Заметим, что группы $G(\overline{L_0(F)})$ и $G(K)$ не обязаны совпадать (при $m \neq 1$, см. §9). Если $G(\overline{L_0(F)}) \geqslant H$, то по Лемме 7.5 $G(K) = G(\overline{L_0(F)})$, поэтому, конечно, $G(K) \trianglelefteq F$. Но в общем случае этот факт требует отдельного доказательства.

Теорема 8.2. $G(K) \trianglelefteq F$.

Доказательство. Пусть $f \in F$, $h \in H_t$. Обозначим $g = f^{-1}hf$. Так как по Лемме 5.1 для любых i, j $[g(e_i)]_j \leqslant \sigma_{ij}$, то по Теореме 7.4 мы получаем $g \in G(K)$.

Ввиду Следствия 1 Теоремы 7.4, Леммы 5.3 и того, что $G(\bar{L}_0) = H_{12}(0)$, для завершения доказательства осталось показать, что для любых $f \in F$, $t \in H_{ij}(x) \cap F$, автоморфизм $f^{-1}tf$ принадлежит $G(K)$. Это вытекает из того, что по Леммам 7.5 и 8.1 $t \in G(\overline{L_0(F)}) \trianglelefteq F$, а $G(\overline{L_0(F)}) \leqslant G(K)$.

Лемма 8.3. *Если структура $\bar{L}_0(H)$ конечная, то индекс подгруппы $G(K)$ в группе F конечен.*

Доказательство. Так как для любого $f \in F$ и $h \in H$ $f^{-1}hf \in G(K)$, то $hf\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}\right)$. Отсюда следует, что $f\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}\right) \in \bar{L}_0(H)$, и по условию леммы для значений $f\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}\right)$ есть лишь конечное число возможностей. Остальное очевидно.

Таким образом, Теорема 2.1 полностью доказана.

Лемма 8.4. *Пусть M – произвольная подструктура $\bar{L}_0$. Если $t \in H_{ij}(x) \cap N_G G(M)$, то $t \in G(M)$.*

Доказательство. Пусть $x \in M$. Тогда $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $x_k \leqslant e_k$. По условию 4^0 существует такой $h \in H_j \cap G(\bar{L}_0)$, что $[t^{-1}ht(x_i)]_j = [t(x_i)]_j$. По условию леммы $t^{-1}ht(x) = x$, откуда $[t(x_i)]_j \leqslant x_j$. Значит, $t(x) = x$.

§9. Применение к линейным группам

В работе [5] в терминах сетей идеалов получено описание подгрупп полной линейной группы $G = GL(n, R)$ над полулокальным кольцом R, содержащих группу диагональных матриц $D = D(n, R)$.

Это описание состоит в следующем. Пусть R – полулокальное кольцо (то есть кольцо, фактор-кольцо которого по радикалу Джекобсона артиново), C – его центр (являющийся коммутативным полулокальным кольцом). Предположим, что все поля вычетов центра C по его максимальным идеалам содержат не менее семи элементов. Тогда для каждой промежуточной подгруппы F, $D \leqslant F \leqslant G$, однозначно определена D-сеть σ двусторонних идеалов в R порядка n такая, что $G(\sigma) \leqslant F \leqslant N(\sigma)$, где $N(\sigma)$ – нормализатор $G(\sigma)$ в G.

Ниже мы покажем, как из результатов §§4–8 выводится это описание промежуточных подгрупп (правда, в несколько ослабленной форме: вместо полулокальных колец рассматриваются артиновы).

Пусть R – артиново справа кольцо, все поля вычетов центра которого имеют не менее семи элементов, $V = R^n$ – свободный R-модуль ранга n, $\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ – канонический базис V, $e_1 = \bar{e}_1 R, \ldots, e_n = \bar{e}_n R$.

Обозначим через $L = L(V)$ структуру правых подмодулей модуля V, а через L_0 – подструктуру структуры L, порожденную $e_1, \ldots, e_n$. Очевидно, что L – дедекиндова структура конечной длины, L_0 – булева алгебра.

Каждый элемент $g \in GL(n, R)$ порождает некоторый автоморфизм структуры L, а именно: если ν – произвольный элемент из L, то $g(\nu) = \{g(x) : x \in \nu\}$. Таким образом, можно считать $G = GL(n, R)$ и $H = G(L_0) = D(n, R)$.

Используя элементарные факты о полулокальных кольцах (см. [1, с.82]; [3, 5]), нетрудно проверить условия 1^0–10^0 Теоремы 2.1. Утверждение, содержащееся в условии 11^0, доказано в работе [5] (см. доказательство Лемм 3 и 4).

Итак, в нашей ситуации можно применять результаты, полученные в §§4–8.

Пусть F – промежуточная подгруппа, $H \leqslant F \leqslant G$. Тогда для структуры $K = K_\sigma$ имеем $G(K) \trianglelefteq F$ (Теорема 8.2).

Поставим в соответствие структуре K таблицу идеалов в R $\sigma_K = (\sigma_{ji})$. Так как $\sigma = (\sigma_{ij})$ – сетевой набор в L_0' (Теорема 7.4), то σ_K – D-сеть двусторонних идеалов в R порядка n (см. определение сетевого набора; заметим, что условие 3) из этого определения означает, что σ_{ij} – двусторонний идеал (см. указанные выше работы)).

Ввиду условия 4) из определения сетевого набора подгруппа $G(K)$ совпадает с сетевой подгруппой $G(\sigma_K)$.

Итак, мы доказали, что для всякой подгруппы F, $H \leqslant F \leqslant G$, существует D-сеть σ идеалов в R порядка n такая, что

$$G(\sigma) \leqslant F \leqslant N(\sigma), \qquad (\Delta)$$

где через $N(\sigma)$ обозначен нормализатор $G(\sigma)$.

Покажем, что D-сеть, удовлетворяющая условию (Δ), единственна.

Пусть σ_1 и σ_2 – две D-сети, удовлетворяющие условию (Δ). Рассмотрим $K_1 = K(G(\sigma_1))$, $K_2 = K(G(\sigma_2))$. Так как $G(K_1) = G(\sigma_1)$, $G(K_2) = G(\sigma_2)$, то имеем $G(K_1) \leqslant F \leqslant N_G G(K_1)$, $G(K_2) \leqslant F \leqslant N_G G(K_2)$.

Всякая трансвекция, содержащаяся в $G(K_1)$, содержится в $N_G G(K_2)$ и, по Лемме 8.4, содержится в $G(K_2)$. Обратное тоже верно. Итак, $G(K_1)$ и $G(K_2)$ имеют одни и те же трансвекции, откуда $G(\sigma_1) = G(\sigma_2)$, то есть $\sigma_1 = \sigma_2$.

Тем самым доказано, что для всякой подгруппы F, $H \leqslant F \leqslant G$, существует единственная D-сеть σ идеалов в R порядка n такая, что $G(\sigma) \leqslant F \leqslant N(\sigma)$, то есть мы получим требуемое описание промежуточных подгрупп.

Если R – артиново слева кольцо, то это описание также может быть получено при помощи перехода к противоположному кольцу.

Замечание 1. Из Леммы 8.3 вытекает, что если структура $\bar{L}_0(H)$ конечна, то индекс $G(\sigma)$ в F конечен. Структура $\bar{L}_0(H)$ в нашей ситуации состоит из прямых сумм двусторонних идеалов в R. Таким образом, если дополнительно предположить, что в кольце R есть лишь конечное число двусторонних идеалов (например, R – полупростое артиново), то $(F : G(\sigma)) < \infty$. (На самом деле справедливо более сильное утверждение: см. [5].)

Замечание 2. В начале §8 отмечено, что группы $G(\overline{L_0(F)})$ и $G(K)$ не обязаны совпадать. Конкретные примеры легко построить для некоммутативного кольца R и $F = H$.

§10. Дополнение

Зафиксируем $x \in \bar{L}_0 \cap L'_0$ (пишем $x_k = [x]_k$) и пару индексов i, j.

Будем говорить, что $u \leqslant e_j$ удовлетворяет условию ($\Box$), если для любого $f \in G$ из условия $[f(e_i)]_j \leqslant u$ следует, что $[f(x_i)]_j \leqslant x_j$.

Пример. $u = 0$ удовлетворяет условию ($\Box$) для любых x, i, j.

Лемма 10.1. *Если u_1, u_2 удовлетворяют условию ($\Box$), то и $u_1 + u_2$ тоже удовлетворяет условию ($\Box$).*

Доказательство. По условию 7^0 $u_k = \sum_{l=1}^{s_k} y_{kl}$, где $H_{ij}(y_{kl}) \neq \varnothing$, $k = 1, 2$. Так как по условию 8^0 для произвольного $f \in G$ существует $g \in H_{ij}([f(e_i)]_j)$, для которого $[g(x_i)]_j = [f(x_i)]_j$, то будем считать, что $f \in H_{ij}(y)$, и $[f(e_i)]_j \leqslant u_1 + u_2$.

По условию 10^0 $H_{ij}(y) \subseteq \langle H, H_{ij}(y_{kl}),\ k = 1, 2,\ l = 1, \ldots, s_k \rangle$.

Если $h \in H$, то для любого s $h(x_s) = x_s$, так как $x_s \in L_0$.

Если $t \in H_{ij}(y_{kl})$, то $[t(e_i)]_j = y_{kl} \leqslant u_k$, откуда $t(x_i) \leqslant x_i + x_j$.

Следствие. *Для любого $x \in \bar{L}_0 \cap L'_0$, индексов i, j, существует наибольший элемент $\tau_{ij} = \tau_{ij}(x) \leqslant e_j$, удовлетворяющий условию ($\Box$).*

Лемма 10.2. *$\tau = (\tau_{ij})$ – сетевой набор в L'_0.*

Доказательство. Проверим условия 1)–4) из определения сетевого набора.

1) Очевидно.

2) Следует из условия 6^0.

3) Очевидно, что для всякого $h \in H$ $h(\tau_{ij})$ удовлетворяет условию ($\Box$). Тогда по определению τ_{ij} $h(\tau_{ij}) \leqslant \tau_{ij}$.

4) По условию 7^0 $\tau_{ki} = \sum\limits_{r=1}^{s} y_r$, где $H_{ki}(y_r) \neq \varnothing$. Пусть $g \in H_{ij}(z)$ и $f \in H_{kj}(y)$ такие, что $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$ и $[f(e_k)]_j \leqslant \sum\limits_{r=1}^{s} [g(y_r)]_j$. Нужно проверить, что $[f(x_k)]_j \leqslant x_j$.

По Лемме 7.3 для каждого r, $1 \leqslant r \leqslant s$, существует $t_r \in H_{kj}([g(y_r)]_j) \cap \langle H, H_{ij}(z), H_{ki}(y_r)\rangle$.

Так как $y_r \leqslant \tau_{ki}$ и $z \leqslant \tau_{ij}$, то для любых $t \in H_{ki}(y_r)$, $\bar{t} \in H_{ij}(z)$ мы имеем, что $t(x_k+x_i+x_j) \leqslant x_k+x_i+x_j$ и $\bar{t}(x_k+x_i+x_j) \leqslant x_k+x_i+x_j$. Отсюда $[t_r(x_k)]_j \leqslant x_j$.

Далее, по условию 10^0 $H_{kj}(y) \subseteq \langle H, t_r, r = 1, \ldots, s\rangle$, поэтому $[f(x_k)]_j \leqslant x_j$. Лемма доказана.

Лемма 10.3. *Если $g \in G$ и $[g(x_i)]_j \leqslant x_j$, то $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$.*

Доказательство. Если $f \in G$ и $[f(e_i)]_j \leqslant [g(e_i)]_j$, то по условию 6^0 $[f(x_i)]_j \leqslant [g(x_i)]_j \leqslant x_j$, так что $[g(e_i)]_j$ удовлетворяет условию ($\square$).

Введем на множестве подструктур L_0' отношение эквивалентности, а именно, считаем $M_1 \sim M_2$, если $G(M_1) = G(M_2)$.

Теорема 10.4. *Если выполнены условия 1^0–11^0 Теоремы 2.1, а также 12^0. $L_0' \subseteq \bar{L}_0$, то для всякой промежуточной подгруппы F, $H \leqslant F \leqslant G$, существует единственный класс эквивалентных подструктур L_0' такой, что $G(M) \trianglelefteq F$ для любой M из этого класса.*

Доказательство. Существование вытекает из Теоремы 2.1.

Пусть M – подструктура $L_0' \subseteq \bar{L}_0$. По Лемме 10.2 для любого $x \in M$ $\tau(x) = (\tau_{ij}(x))$ – сетевой набор в L_0'. Определим $\tau'_{ij} = \prod\limits_{x \in M} \tau_{ij}(x)$. По Лемме 7.1 $\tau' = (\tau'_{ij})$ – также сетевой набор в L_0'. По Теореме 7.2 $G(K_{\tau'})$ порождается H и своими “трансвекциями”.

Покажем, что $G(K_{\tau'}) = G(M)$. Действительно, пусть $g \in G(K_{\tau'})$. Тогда для любых i,j $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$, откуда $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}(x)$ для любого $x \in M$ и, значит, $g \in G(M)$.

Если же $g \in G(M)$, то для любого $x \in M$ $[g(x_i)]_j \leqslant x_j$, и по Лемме 10.3 $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}(x)$, откуда $[g(e_i)]_j \leqslant \tau'_{ij}$, поэтому $g \in G(K_{\tau'})$.

Единственность класса следует теперь из Леммы 8.4.

В процессе доказательства Теоремы 10.4 получено описание замкнутых объектов в $\mathfrak{N}$ (см. §1): замкнутые подгруппы в $\mathfrak{N}$ –

это в точности все подгруппы $G(K_\tau)$, где τ пробегает множество сетевых наборов в L'_0.

Далее, подструктурами $L'_0(\tau) = L'_0(G(K_\tau)) = \{x \in L'_0 : g(x) = x$ для всех $g \in G$ таких, что $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$ при любых $i, j\}$ исчерпываются все замкнутые подструктуры в $\mathfrak{M}$.

Таким образом, указанное в §1 соответствие Галуа является биекцией между множеством подгрупп вида $G(K_\tau)$ и множеством подструктур вида $L_0(\tau)$ (и то, и другой множество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством сетевых наборов в L'_0 – см. Лемму 7.6).

Рассмотрим теперь подробнее случай $m = 1$. Заметим, что в предположениях Теоремы 3.1 условие 12^0 Теоремы 10.4 автоматически выполняется (так как L_0 – будева алгебра).

Так как все подструктуры $L'_0 = L_0$, содержащие 0 и 1, являются замкнутыми (см. [8]), то каждый класс эквивалентных подструктур L_0, содержащих 0 и 1, оказывается одноэлементным, поэтому отсюда следует обещанная в Теореме 3.1 единственность (а также и утверждение Теоремы 3.1 работы [8]). Заметим также, что из равенства $G(\overline{L_0(F)}) = G(K)$ (см. начало §8) мы получаем $K = \overline{L_0(F)}$.

Пусть теперь L, L_0 и G – такие же, как в §9. Легко доказать, что в этой ситуации выполняется условие 12^0 Теоремы 10.4. Отсюда вытекает

Теорема 10.5. *Для всякой промежуточной подгруппы F, $D(n, R) \leqslant F \leqslant GL(n, R)$, существует единственный класс эквивалентных подструктур L'_0 такой, что $G(M) \trianglelefteq F$ для всякой M из этого класса.*

Очевидно, что каждому сетевому набору σ в L'_0 соответствует сеть (σ_{ji}) двусторонних идеалов в R порядка n. Это соответствие является биекцией.

Замкнутые подгруппы в $\mathfrak{N}$ – это сетевые подгруппы, а замкнутые подструктуры в $\mathfrak{M}$ – это подструктуры вида $L'_0(\sigma) = \{x \in L'_0 : \sigma_{ij} x_j \subseteq x_i\}$ (σ-сеть).

Легко построить примеры, показывающие, что структура M, для которой $G(M) \trianglelefteq F$, определена неоднозначно. Очевидно, что в каждом классе эквивалентных подструктур L'_0 имеются: наибольший элемент, который является замкнутой подструктурой, а также “каноническая подструктура”, порожденная суммами "идеалов трансвекций". Обычно последняя подструктура далека от своего замыкания, но можно построить примеры, показывающие, что она не является и наименьшим элементом класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Санкт-Петербурга и Госкомвуза РФ, грант No. 25.

Литература

1. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* М, 1973, с. 591.
2. Г. Биркгоф, *Теория решеток.* М, 1984, с. 568.
3. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. ун-тф No. 13 (1976), 16–24.
4. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
5. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
6. Н. А. Вавилов, *Об описании полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 30–33.
7. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 1 (1981), 10–15.
8. А. З. Симонян, *Теория Галуа для дедекиндовых структур.* — Канд. дисс. СПб. (1992), 73.

Panin A. A., Yakovlev A. V. The Galois theory for a class of modular lattices.

A Galois theory for a class of the modular lattices is constructed. The known description of the intermediate subgroups of the full linear group over an artinian ring, containing the group of diagonal matrices, can be deduced from the proved results.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 ноября 1996 г.