ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 21, выпуск 3 2019

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 21, Issue 3 2019

**Адрес редакции:** 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
**Зав. редакцией:** В. В. БОЗРОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

**Editorial Office:** 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: `rio@smath.ru`
**Managing editor:** V. V. BOZROVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 21, выпуск 3 июль–сентябрь, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ



Владикавказ
2019

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 21, issue 3 Jule–September, 2019

## CONTENT



Vladikavkaz
2019

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 5–13*

**УДК** 517.95
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36456

# О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ДАРБУ ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

**А. А. Аллахвердян**[1]

[1] Адыгейский государственный университет,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

**Аннотация.** В работе обсуждаются элементарные преобразования Дарбу функций Бесселя. В теореме 1 мы приводим уточненную формулировку общего метода факторизации, восходящего к Э. Шредингеру, и вводим в рассмотрение взаимосвязанные дифференциальные подстановки $B_1$ и $B_2$. В основной теореме 2 рассматриваются уравнения Бесселя — Риккати и элементарные преобразования Дарбу сводятся к дробно-линейным отображениям. Показано, что неподвижная точка такого отображения порождает рациональные по $x$ решения уравнений Бесселя — Риккати из теоремы 2. Отметим, что функции Бесселя рассматриваются в данной работе как собственные функции $A\psi = \lambda\psi$ операторов Эйлера вида $A = e^{2t}\left(D_t^2 + a_1 D_t + a_2\right)$ с постоянными коэффициентами $a_1$ и $a_2$. Это позволяет (лемма 3) построить асимптотические решения уравнений Бесселя — Риккати в виде степенных рядов по обратным степеням $z = kx$, $k^2 = \lambda$, $x = e^{-t}$. Мы показываем, что эти формальные ряды по обратным степеням спектрального параметра $k = \sqrt{\lambda}$ сходятся, если существуют рациональные решения уравнений Бесселя — Риккати из теоремы 2.

**Ключевые слова:** функция Бесселя, обратимое преобразование Дарбу, непрерывные дроби, оператор Эйлера, уравнение Риккати.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 34K08.

**Образец цитирования:** *Аллахвердян А. А.* О преобразованиях Дарбу для функций Бесселя // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 5–13. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36456.

## 1. Введение

В работе рассматриваются условия обратимости элементарных преобразований линейных дифференциальных уравнений вида: $A\psi = \lambda\psi$, где $A$ — дифференциальный оператор $n$-го порядка, имеющий вид

$$A = a_0(x)D_x^n + a_1(x)D_x^{n-1} + \ldots + a_n(x), \quad D_x = \frac{d}{dx}. \tag{1}$$

Эти преобразования определяются дифференциальными подстановками

$$\widetilde{\psi} = B_1\psi, \quad \psi = B_2\widetilde{\psi}, \tag{2}$$

где $B_1$ и $B_2$ — дифференциальные операторы (вообще говоря, произвольного порядка) и позволяют переходить от исходного уравнения $A\psi = \lambda\psi$ к эквивалентному уравнению $\widetilde{A}\widetilde{\psi} = \lambda\widetilde{\psi}$, и наоборот. Обратимые преобразования решений уравнения $A\psi = \lambda\psi$

называются в современной литературе *преобразованиями Дарбу*. Они используются для построения солитоноподобных решений дифференциальных уравнений.

Если дифференциальный оператор $B_1$ имеет нулевой порядок, то, как легко видеть, преобразование сводит оператор $A$ к оператору $\widetilde{A} = b(x) \circ A \circ b^{-1}(x)$, где $b(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция. В случае, когда $B_1$ является оператором первого порядка, соответствующее преобразование имеет вид

$$\widetilde{\psi} = (b_0(x)D_x + b_1(x))\psi, \tag{3}$$

а оператор $B_2$ имеет порядок $n-1$. Здесь уже функции $b_0(x)$ и $b_1(x)$ не являются произвольными и вопрос об условиях обратимости является нетривиальным. Достаточные условия обратимости преобразования (3) указаны в теореме 1.

Далее в статье рассматривается применение преобразований Дарбу к функциям Бесселя. В этом случае они сводятся к уравнению

$$(f(x) + \beta)(\widehat{f}(x) - (\beta + 1)) = x^2,$$

где $f(x)$ — решение уравнения Риккати, связанного с уравнением Бесселя (теорема 2). Последнее уравнение позволяет определить дробно-линейное преобразование решений уравнения Риккати, а неподвижные точки этого отображения приводят к последовательности рациональных решений уравнения Риккати.

В конце первого раздела рассматривается вопрос о разрешимости уравнения Риккати (теорема 2) в классе формальных рядов. Показывается, что уравнение однозначно разрешимо в классе формальных степенных рядов следующего вида:

$$f(t) = z + \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{2z} - \frac{1}{8z} - \frac{\beta^2}{2z^2} + \frac{1}{8z^2} - \frac{\beta^4}{4z^3} + \frac{7\beta^2}{8z^3} - \frac{13}{64z^3} + \ldots \tag{4}$$

Найдены значения $\beta$, при которых формальные ряды сходятся и дают все рациональные решения данного уравнения.*

## 2. Уравнение Бесселя

Справедлива следующая теорема, которая обобщает результаты, полученные Шредингером в работах [1, 2], на случай дифференциальных операторов произвольного порядка. Обобщение этой теоремы на случай операторов высокого порядка рассматривалось ранее в [3, § 4.2.2], но в другой формулировке.

**Теорема 1.** *Уравнение для собственных функций* $A\psi = \lambda\psi$ *при* $\lambda \neq 0$ *допускает обратимую замену вида* (3) *с коэффициентами* $b_0(x) \equiv 1$ *и* $b_1(x) = D_x(\log\varphi(x))$, *где* $\varphi(x) \in \ker A$.

В основе данной теоремы лежит следующая известная лемма (см., например [3, § 4.2.2, лемма 17]) о представлении дифференциального оператора $A$.

**Лемма 1.** *Дифференциальный оператор* $A$ *порядка* $n > 1$ *представим в виде* $A = \tilde{A}(D_x - g(x))$ *в том и только том случае, если* $g = D_x(\log\varphi(x))$, *где* $\varphi(x) \in \ker A$, $\tilde{A}$ — *оператор* $(n-1)$*-го порядка.*

Итак, докажем теорему о собственных функциях.

* Можно показать, что асимптотические ряды для функций Бесселя, используемые в [4], эквивалентны (4).

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение $A\psi = \lambda\psi$, согласно лемме 1 его можно переписать в виде

$$\widetilde{A}\widehat{\psi} = \lambda\psi, \tag{5}$$

где $\widehat{\psi} = (D_x - g(x))\psi$. Из формулы (5) имеем, что

$$\lambda\psi = \widetilde{a}_0(x)\widehat{\psi}^{(n-1)} + \widetilde{a}_1(x)\widehat{\psi}^{(n-2)} + \ldots + \widetilde{a}_{n-1}(x)\widehat{\psi} = \sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{a}_i(x)\widehat{\psi}^{(n-(i+1))}. \tag{6}$$

Домножив слева обе части уравнения (5) на $(D_x - g(x))$, получим

$$\lambda\widehat{\psi} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{a}_i(x)\widehat{\psi}^{(n-(i+1))}\right] + g(x)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{a}_i(x)\widehat{\psi}^{(n-(i+1))}\right] = \widehat{A}\widehat{\psi}. \tag{7}$$

Полученное уравнение (7) при $\lambda \neq 0$ имеет тот же порядок, что и исходное $A\psi = \lambda\psi$, но другие коэффициенты.

Таким образом, доказано, что уравнение $A\psi = \lambda\psi$, $\lambda \neq 0$, допускает замену $\widehat{\psi} = (D_x - g(x))\psi$, если $g = (\log\varphi(x))_x$, $\varphi(x) \in \ker A$ и то, что данная замена обратима. $\rhd$

Рассмотрим уравнение $A\psi = \lambda\psi$, когда $A$ — оператор второго порядка. Применяя теорему 1, запишем оператор $A$ в виде

$$A = a_0(x)D_x^2 + a_1(x)D_x + a_2(x). \tag{8}$$

Произведем замену $\psi = e^{\varphi}\widehat{\psi}$ в данном уравнении и будем считать коэффициент при $D_x^2$, равным 1. Тогда оператор $A$, определяемый формулой (8), примет вид

$$A = D_x^2 + q(x). \tag{9}$$

Найдем как связана функция $q(\cdot)$ с функцией $g(\cdot)$. Для этого применим теорему 1 к (9):

$$\begin{aligned} A &= (D_x + g(x))(D_x - g(x)) \\ &= D_x^2 + g(x)D_x - g(x)D_x - g'(x) - g^2(x) = D_x^2 - g'(x) - g^2(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $q(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$g'(x) + g^2(x) - q(x) = 0. \tag{10}$$

*Уравнением Риккати*, связанным с уравнением $A\psi = \lambda\psi$, называется уравнение для логарифмической производной $f = \frac{\psi'}{\psi}$:

$$a_0f' + a_0f^2 + a_1f + (a_2 - \lambda) = 0. \tag{11}$$

В случае, когда оператор $A$ имеет вид (9), уравнение Риккати, связанное с уравнением $A\psi = \lambda\psi$, запишется в виде

$$f' + f^2 + q(x) + \lambda = 0, \quad f = \frac{\psi'}{\psi},$$

где $q(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (10).

В дальнейшем будем рассматривать применения теоремы 1 в случае, когда оператор $A$ является оператором Эйлера, т. е.

$$A = e^{mt}P_m(D_t) = e^{mt}(p_0 D_t^m + p_1 D_t^{m-1} + \ldots + p_m), \tag{12}$$

где $p_i \in \mathbb{C}$.

**Лемма 2.** *Если $A = e^{mt}P_m(D_t)$, $B = e^{nt}Q_n(D_t)$, то суперпозиция операторов Эйлера $A$ и $B$ запишется в виде*

$$A \circ B = e^{(m+n)t}U_{m+n}(D_t), \quad U_{m+n}(D_t) = P_m(D_t + n)Q_n(D_t).$$

Отметим, что вместо замены $\widehat{\psi} = (b_0 D_x + b_1)\psi$ в случае, когда $A$ определяется формулой (12) используется оператор Эйлера первого порядка

$$\widehat{\psi} = e^t(D_t + c)\psi, \quad c \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Итак, рассмотрим случай, когда оператор $A$ имеет вид

$$A = D_x^2 + \frac{1}{x}D_x - \frac{\beta^2}{x^2}. \tag{14}$$

Замечание 1. Уравнение $A\psi = \lambda\psi$, в котором $A$ определяется формулой (14) называется *уравнением Бесселя* [5]. Используя замену $x = e^{-t}$,

$$D_x = -e^{-t}D_t, \quad D_x^2 = e^{2t}(D_t^2 + D_t),$$

оператор, определяемый формулой (14), преобразуем в оператор Эйлера

$$A = e^{2t}(D_t^2 - \beta^2).$$

Применив лемму 2 к данному оператору

$$A = e^t(D_t - (\beta + 1)) \circ e^t(D_t - \beta), \tag{15}$$

уравнение $A\psi = \lambda\psi$ можно переписать в следующем виде:

$$e^t(D_t - \beta - 1) \circ e^t(D_t + \beta)\psi = \lambda\psi. \tag{16}$$

Таким образом, уравнение Бесселя является уравнением для собственных функций оператора Эйлера.

Применив теорему 1 к уравнению (16), находим

$$e^t(D_t + \beta)\psi = \widehat{\psi}, \quad e^t(D_t - (\beta + 1))\widehat{\psi} = \lambda\psi. \tag{17}$$

Теперь перепишем уравнения (17) в терминах $f = (\log\psi)_t$ и $\widehat{f} = (\log\widehat{\psi})_t$, получим

$$\begin{gathered} \widehat{\psi} = e^t(f + \beta)\psi, \quad \lambda\psi = e^t(\widehat{f} - (b + 1)), \\ (f + \beta)(\widehat{f} - (\beta + 1)) = \lambda \cdot e^{-2t}. \end{gathered} \tag{18}$$

Без ограничения общности, считая $\lambda = 1$ в последнем уравнении, докажем основную теорему.

**Теорема 2.** *Соотношение*

$$(f+\beta)(\widehat{f}-(\beta+1))=e^{-2t}, \quad \beta\in\mathbb{C}, \tag{19}$$

*устанавливает эквивалентность двух уравнений Риккати:*

$$f_t+f^2=\beta^2+e^{-2t} \iff \widehat{f}_t+\widehat{f}^{\,2}=(\beta+1)^2+e^{-2t}. \tag{20}$$

$\lhd$ Выразим $\widehat{f}$ из (19):

$$\widehat{f}=\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+(\beta+1). \tag{21}$$

Продифференцируем (21) по $t$:

$$\widehat{f}_t=\frac{-2e^{-2t}(f+\beta)-f_te^{-2t}}{(f+\beta)^2}=-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}-f_t\frac{e^{-2t}}{(f+\beta)^2}. \tag{22}$$

Заметим, что

$$f_t=\beta^2-f^2+e^{-2t}. \tag{23}$$

Подставим (23) в (22). Тогда

$$\widehat{f}_t=-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+e^{-2t}\frac{f-\beta}{f+\beta}-\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}, \tag{24}$$

$$\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}=-\widehat{f}_t-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+e^{-2t}\frac{f-\beta}{f+\beta}. \tag{25}$$

Возведем равенство (21) в квадрат

$$\widehat{f}^2=\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}+2(\beta+1)\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+(\beta+1)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}=\widehat{f}^{\,2}-2(\beta+1)\frac{e^{-2t}}{f+\beta}-(\beta+1)^2. \tag{26}$$

Таким образом, согласно (25) и (26) имеем

$$-\widehat{f}_t-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+e^{-2t}\frac{f-\beta}{f+\beta}=\widehat{f}^{\,2}-2(\beta+1)\frac{e^{-2t}}{f+\beta}-(\beta+1)^2,$$

$$\widehat{f}_t+\widehat{f}^{\,2}=(\beta+1)^2+e^{-2t}\frac{-2+f-\beta+2(\beta+1)}{f+\beta}.$$

Итак,

$$\widehat{f}_t+\widehat{f}^{\,2}=(\beta+1)^2+e^{-2t}. \rhd$$

Заменив в формуле (21) $\widehat{f}_j=f_{j+1}$, последовательно подставляя вместо $\beta$ последовательность чисел $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_j,\dots$, получим рекуррентную формулу для последовательности функций $f_j$:

$$f_{j+1}=\beta_{j+1}+\frac{x^2}{f_j+\beta_j},$$

которую можно записать в виде непрерывной дроби (ср. [6])

$$f_{j+1} = \beta_{j+1} + \cfrac{x^2}{2\beta_j + \cfrac{x^2}{2\beta_{j-1} + \cfrac{x^2}{2\beta_{j-2} + \cfrac{x^2}{\ddots}}}}.$$

**Утверждение 1.** *Отображение $f \to \widehat{f}$, определяемое* (19) *из теоремы* 2, *имеет неподвижную точку*

$$\widehat{f} = f \tag{27}$$

*при* $(\beta+1)^2 = \beta^2$.

$\triangleleft$ В случае (27) и (19), решая квадратные уравнения, мы находим, что

$$\begin{gathered} f = f_\pm = \frac{1}{2} \pm x, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \ \beta + 1 = \frac{1}{2}, \\ f_t + f^2 = \frac{1}{4} + x^2 \quad (x = e^{-t}). \end{gathered} \tag{28}$$

Нетрудно заметить, что $\widehat{f_\pm} = f_\pm$. $\triangleright$

Используя, как и выше, нумерацию, мы введем обозначения

$$\begin{gathered} \beta_1 = \frac{1}{2}, \ \beta_{j+1} = \beta_j + 1, \ j = 1, 2, \ldots, \ \Rightarrow \ \beta_j = j - \frac{1}{2}, \\ f_{j+1} = \beta_{j+1} + \frac{x^2}{f_j + \beta_j}, \quad f_1 = -x + \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Очевидно, что эта формула дает последовательность рациональных решений уравнения Риккати теоремы 2:

$$f_2 = \frac{3}{2} + \frac{x^2}{1-x}.$$

Аналогично можно определить $f_3, f_4, \ldots$:

$$\begin{gathered} f_3 = \frac{5}{2} + \frac{x^2(1-x)}{x^2 - 3x + 3} = \frac{9}{2} + 7x + \frac{7x+2}{x^2 - 3x + 3}, \\ f_4 = \frac{41}{12} - \frac{x}{6} + \frac{x^2 - 10}{12x^3 - 42x^2 + 60x - 30}, \ \ldots \end{gathered}$$

Для того чтобы доказать, что найдены все рациональные решения уравнения Риккати

$$f_t + f^2 = \beta^2 + e^{-2t}, \tag{30}$$

можно использовать следующую лемму, в которой строятся два формальных решения уравнения (30) при любом $\beta \in \mathbb{C}$. Эти решения представляют собой формальные ряды по степеням $\frac{1}{z}$ (см. [4, § 24]).

**Лемма 3.** *Формальные решения уравнения Риккати*

$$f_t + f^2 = \beta^2 + k^2 e^{-2t}$$

*определены однозначно, с точностью до выбора знака $k \in \mathbb{C}$, и записываются в виде формальных степенных рядов с постоянными коэффициентами по вспомогательной переменной $z = ke^{-t}$:*

$$f = z + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{z^j}. \tag{31}$$

$\triangleleft$ Подставим $f$, определяемое из (31), в уравнение Риккати (30), предварительно подсчитав $f_t$ и $f^2$:

$$f_t = z_t + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i \cdot i}{z^i},$$

$$f^2 = \frac{1}{4} + z + z^2 + 2z\sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i^2}{z^{2i}} + 2\sum_{i>j} \frac{\gamma_i\gamma_j}{z^{i+j}}.$$

Таким образом,

$$z_t + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i \cdot i}{z^i} + \frac{1}{4} + z + z^2 + 2z\sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i^2}{z^{2i}} + 2\sum_{i>j} \frac{\gamma_i\gamma_j}{z^{i+j}} = \beta^2 + z^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем значения $\gamma_i$:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right),\ \gamma_2 = -\frac{1}{2}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right),\ \gamma_3 = -\frac{1}{4}\left(\beta^4 - \frac{7}{2}\beta^2 + \frac{13}{16}\right), \dots, \\ &2\gamma_{i+1} + (i+1)\gamma_i + \sum_{j+j'=i} \gamma_j\gamma_{j'} = 0. \ \triangleright \end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что для последовательности $\beta_j$, определенной в (29), ряд (31) сходится и определяет рациональные функции $f_j$ из формулы (29). Например, полагая в (31) $\beta^2 = \frac{1}{4}$, находим $f_1 = -e^{-t} + \frac{1}{2}$, интегрируя уравнение $\frac{\psi_1'}{\psi_1} = -e^{-t} + \frac{1}{2}$, получим, что $\psi_1 = e^{-ke^{-t} + \frac{1}{2}t}$. Можно проверить, что эта функция с точностью до обозначений совпадает с экспоненциальной производящей функцией полиномов Чебышева [7, § 5.2.1]

$$\mathrm{Re}\left[\exp\left\{ke^{i\theta}\right\}\right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{k^n}{n!} T_n(x). \tag{33}$$

Напомним, что многочлены Чебышева определяются следующим уравнением:

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \qquad x = \cos\theta, \tag{34}$$

и удовлетворяют следующей рекуррентной формуле:

$$2xT_n(x) = T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x).$$

Произведя замену $f_n = \frac{T_{n-1}}{T_n} - x$, последнее рекуррентное соотношение можно записать в следующем виде:

$$(f_n - x)(f_{n+1} + x) = -1. \tag{35}$$

Заметим, что уравнения (35) и (19) схожи.

## 3. Заключение

Теорема 1 и формула (13) сводят задачу о функциях Бесселя к задаче о собственных функциях операторов Эйлера и своеобразной алгебре многочленов. Представляется интересным обобщение теоремы 2 на спектральные задачи третьего порядка. Можно показать также, что формальные ряды из леммы 3 применимы к задаче об асимптотических разложениях функций Бесселя и их обобщений.

**Благодарность.** В заключении хочу выразить благодарность всем участникам семинара «Интегрируемые системы» под руководством А. Б. Шабата в Адыгейском государственном университете города Майкопа за внимание к работе и полезные замечания.

## Литература


1. *Schrodinger E.* A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions // Proc. Roy. Irish Acad.—1940–1941.—Vol. A.46.—P. 9–16.
2. *Schrodinger E.* Further studies on solving eigenvalue problems by factorization // Proc. Roy. Irish Acad.—1940–1941.—Vol. A.46.—P. 183–206.
3. *Shabat A.* Symmetries of spectral problems // Lect. Notes Phys.—2009.—Vol. 767.—P. 139–173. DOI: 10.1007/978-3-540-88111-7_5.
4. *Ильин А. М., Данилин А. Р.* Асимптотические методы в анализе.—М.: Физматлит, 2009.—248 с.
5. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1945.
6. *Flajolet P., Schott R.* Non-overlapping partitions, continued fractions, bessel functions and a divergent series // Europ. J. Combinatorics.—1990.—Vol. 11, № 5.—P. 421–432. DOI: 10.1016/S0195-6698(13)80025-X.
7. *Mason J. C., Handscomb D. C.* Chebyshev Polynomials.—Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2003.—xiv+341 p.


*Статья поступила 27 июля 2019 г.*

Аллахвердян Алина Альбертовна
Адыгейский государственный университет,
*студентка Адыгейского государственного университета*
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 5–13*

## ON TRANSFORMATIONS OF BESSEL FUNCTIONS

Allahverdyan, A. A.[1]
[1] Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

**Abstract.** Elementary Darboux transformations of Bessel functions are discussed. In Theorem 1 we present an improved version of a general factorization approach which goes back to E. Schrödinger, in terms of the two interrelated linear differential substitutions $B_1$ and $B_2$. The main Theorem 2 deals with the Bessel–Riccati equations. The elementary Darboux transformations are reduced to fraction-rational ones. It is shown that a fixed point of the latter generates the rational in $x$ solutions of Bessel–Riccati equations introduced by Theorem 2. It should be noted that Bessel functions are considered as eigenfunctions $A\psi = \lambda\psi$ of the Euler operators $A = e^{2t}\left(D_t^2 + a_1 D_t + a_2\right)$ with constant coefficients $a_1$ and $a_2$. This enables one (Lemma 3) to build up asymptotic solutions of the Bessel–Riccati equations in the form of series in inverse powers of the parameter $z = kx$, $k^2 = \lambda$, $x = e^{-t}$. It is also shown that these formal series in inverse powers of the spectral parameter $k = \sqrt{\lambda}$ are convergent if the rational solutions of the corresponding Bessel–Riccati equation from Theorem 2 are exist.

**Key words:** Bessel functions, invertible Darboux transforms, continued fractions, Euler operator, Riccati equation.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 34K08.

**For citation:** *Allahverdyan, A. A.* On Transformations of Bessel Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 5–13 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36456.

## References


1. *Schrodinger, E.* A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1940–1941, vol. A.46, pp. 9–16.
2. *Schrodinger, E.* Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1940–1941, vol. A.46, pp. 183–206.

3. *Shabat A.* Symmetries of Spectral Problems, *Lecture Notes in Physics*, 2009, vol. 767, pp. 139–173. DOI: 10.1007/978-3-540-88111-7_5.
4. *Il'yin, A. M. and Danilin, A. R. Asymptotic Methods in Analysis*, Moscow, Fizmatlit, 2009, 248 p. (in Russian).
5. *Watson, J. H. Teoriya besselevyh funkcij* [Theory of Bessel Functions], Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry, 1945 (in Russian).
6. *Flajolet, P. and Schott, R.* Non-Overlapping Partitions, Continued Fractions, Bessel Functions and a Divergent Series, *European Journal of Combinatorics*, 1990, vol. 11, no. 5, pp. 421–432. DOI: 10.1016/S0195-6698(13)80025-X.
7. *Mason, J. C. and Handscomb, D. C. Chebyshev Polynomials*, Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2003, xiv+341 p.

*Received 27 June, 2019*

Alina A. Allahverdyan
Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
*Student*
E-mail: `alinaallakhverdyan@mail.ru`

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 14–23*

**УДК** 517.98
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36457

# LATTICE STRUCTURE ON BOUNDED HOMOMORPHISMS BETWEEN TOPOLOGICAL LATTICE RINGS

**O. Zabeti**[1]

[1] University of Sistan and Baluchestan, P.O. Box 98135-674, Zahedan, Iran
E-mail: o.zabeti@gmail.com

**Abstract.** Suppose $X$ is a topological ring. It is known that there are three classes of bounded group homomorphisms on X whose topological structures make them again topological rings. First, we show that if $X$ is a Hausdorff topological ring, then so are these classes of bounded group homomorphisms on $X$. Now, assume that $X$ is a locally solid lattice ring. In this paper, our aim is to consider lattice structure on these classes of bounded group homomorphisms; more precisely, we show that, under some mild assumptions, they are locally solid lattice rings. In fact, we consider bounded order bounded homomorphisms on $X$. Then we show that under the assumed topology, they form locally solid lattice rings. For this reason, we need a version of the remarkable Riesz–Kantorovich formulae for order bounded operators in Riesz spaces in terms of order bounded homomorphisms on topological lattice groups.

**Key words:** locally solid $\ell$-ring, bounded group homomorphism, lattice ordered ring.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 13J25, 06F30.

**For citation:** *Zabeti, O.* Lattice Structure on Bounded Homomorphisms Between Topological Lattice Rings, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 14–23. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36457.

## 1. Introduction and Preliminaries

Let us start with some motivation. Topological rings usually appear in many contexts in functional analysis. The ring of all continuous functions on a topological space; where the topology is given by pointwise convergence, the integers with discrete topology, the ring of all of matrices with entries in a topological ring; where the topology is given by pointwise convergence are all examples of topological rings. Many of these examples have also lattice structures. So, topological lattice rings come readily to mind as an interesting subject to study in the category of all rings. Furthermore, when we have topological lattice algebraic structures, it is a natural and interesting direction to investigate functions (homomorphisms) which respect topological, lattice and algebraic structures.

The concept of a lattice group ($\ell$-group, for short) was firstly investigated in [1, 2]. In addition, topological $\ell$-groups as an extension of topological Riesz spaces are appeared in [3, 4], at first. Although, Riesz spaces are widely investigated in many directions for decades, lattice groups are rarely considered in the literatures; only recently, a comprehensive reference announced regarding basic properties of topological $\ell$-groups (see [5] for more details).

Nevertheless, the notion of a lattice ring ($\ell$-ring) is even considered less than $\ell$-groups in the contexts. To our best knowledge, it is initially investigated in [6, 7]. The situation got stricter while adding topological notion to them; the earliest special literature is [8].

Note that since topological $\ell$-groups are a generalization of topological Riesz spaces which contain many known and applicable objects such as Banach lattices and examples therein, they are investigated in more details at least in the contexts so that topological $\ell$-rings seem to be largely unexplored with respect to topological $\ell$-groups. On the other hand, topological rings arise almost in many directions of topological fields; for example, the completion of a topological field is always a topological ring. Moreover, the set of all real continuous functions on a Hausdorff topological space, the set of all matrices defined on a field, are examples of rings which are widely useful in the literatures. So, it is of independent interest to discover different directions of rings such as topological and order notions; topological and order aspects are considered in several contexts, separately (see [7–10], for example) but using both order and topological ones have been investigated not so much.

In [11], Mirzavaziri and the author considered three non-equivalent classes of bounded group homomorphisms on a topological ring and endowed them with appropriate topologies which make them again topological rings. Now, suppose $X$ is a locally solid $\ell$-ring. In this note, our attempt is to consider lattice structures on these classes of bounded homomorphisms. In fact, we show that under some mild hypotheses, they configure locally solid $\ell$-rings.

For recent progress on topological $\ell$-groups as well as basic expositions on these notions, see [5]. Finally, for undefined terminology, general theme about $\ell$-rings and the related subjects, we refer the reader to [7].

Let us first, recall some required notions and terminology. Suppose $X$ is a topological ring. A set $B \subseteq X$ is called bounded if for each zero neighborhood $W \subseteq X$, there is a zero neighborhood $V \subseteq X$ such that $VB \subseteq W$ and $BV \subseteq W$. Now, assume that $G$ is a topological group; a subset $B \subseteq G$ is said to be bounded if for each neighborhood $U$ at the identity, there is a positive integer $n$ with $B \subseteq nU$.

By a topological lattice group ($\ell$-group), we mean an abelian topological group which is also a lattice at the same time such that the lattice operations are continuous with respect to the assumed topology. A topological lattice ring ($\ell$-ring) is a topological ring which is simultaneously an $\ell$-group such that the multiplication and order structure are compatible via the inequality $|x \cdot y| \leqslant |x| \cdot |y|$; for more details, we refer the reader to [5].

A Birkhoff and Pierce ring ($f$-ring) is a lattice ordered ring with this property: $a \wedge b = 0$ and $c \geqslant 0$ imply that $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$. For ample facts regarding this subject, see [7]. It was initially presented by Birkhoff and Pierce in [6] to illustrate some understandable examples in lattice ring theory and apparently, it turned out to have many interesting and fruitful tools among the category of lattice rings.

An $\ell$-group $G$ is called *Dedekind complete* if every non-empty bounded above subset of $G$ has a supremum. $G$ is *Archimedean* if $nx \leqslant y$ for each $n \in \mathbb{N}$ implies that $x \leqslant 0$. One may verify easily that every Dedekind complete $\ell$-group is Archimedean. In this note, all topological groups are considered to be abelian. A subset $S \subseteq G$ is called *solid* if $x \in G$, $y \in S$, and $|x| \leqslant |y|$ imply that $x \in S$. Topological $\ell$-group $(G, \tau)$ is said to be locally solid if $\tau$ contains a base of neighborhoods at identity consists of solid sets. $S$ is said to be *order bounded* if it is contained in an order interval.

Suppose $G$ is a topological $\ell$-group. A net $(x_\alpha) \subseteq G$ is said to be *order* convergent to $x \in G$ if there exists a net $(z_\beta)$ (possibly over a different index set) such that $z_\beta \downarrow 0$ and for every $\beta$, there is an $\alpha_0$ with $|x_\alpha - x| \leqslant z_\beta$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. A subset $A \subseteq G$ is called *order closed* if it contains limits of all order convergent nets which are lying on $A$.

Keep in mind that topology $\tau$ on a topological $\ell$-group $(G, \tau)$ is referred to as *Fatou* if it has a local basis at the identity consists of solid order closed neighborhoods.

Suppose $G$ and $H$ are $\ell$-groups. A homomorphism $T : G \to H$ is said to be *positive* if it maps positive elements of $G$ into positive ones in $H$.

Now, we recall some definition we need in the sequel (see [11] for further notifications about these facts). It should be mentioned here that in [11], the authors used the notion $\mathsf{B(X, Y)}$ for rings of all bounded group homomorphisms between topological rings; in this note, we replace it with $\mathsf{Hom(X, Y)}$ in compatible with [12] for homomorphisms as well as to show their nature as a homomorphism not an operator.

DEFINITION 1.Let $X$ and $Y$ be two topological rings. A group homomorphism $T : X \to Y$ is said to be

(1) $\mathsf{nr}$-*bounded* if there exists a zero neighborhood $U \subseteq X$ such that $T(U)$ is bounded in $Y$;

(2) $\mathsf{br}$-*bounded* if for every bounded set $B \subseteq X$, $T(B)$ is bounded in $Y$.

The set of all $\mathsf{nr}$-bounded ($\mathsf{br}$-bounded) homomorphisms from a topological ring $X$ to a topological ring $Y$ is denoted by $\mathsf{Hom}_{\mathsf{nr}}(X, Y)$ ($\mathsf{Hom}_{\mathsf{br}}(X, Y)$). We write $\mathsf{Hom}(X)$ instead of $\mathsf{Hom}(X, X)$.

Now, assume $X$ is a topological ring. The class of all $\mathsf{nr}$-bounded group homomorphisms on $X$ equipped with the topology of uniform convergence on some zero neighborhood is denoted by $\mathsf{Hom}_{\mathsf{nr}}(X)$. Observe that a net $(S_\alpha)$ of $\mathsf{nr}$-bounded homomorphisms converges uniformly on a neighborhood $U$ to a homomorphism $S$ if for each neighborhood $V$ there exists an $\alpha_0$ such that for each $\alpha \geqslant \alpha_0$, $(S_\alpha - S)(U) \subseteq V$.

The class of all $\mathsf{br}$-bounded group homomorphisms on $X$ endowed with the topology of uniform convergence on bounded sets is denoted by $\mathsf{Hom}_{\mathsf{br}}(X)$. Note that a net $(S_\alpha)$ of $\mathsf{br}$-bounded homomorphisms uniformly converges to a homomorphism $S$ on a bounded set $B \subseteq X$ if for each zero neighborhood $V$ there is an $\alpha_0$ with $(S_\alpha - S)(B) \subseteq V$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$.

The class of all continuous group homomorphisms on $X$ equipped with the topology of $\mathsf{cr}$-convergence is denoted by $\mathsf{Hom}_{\mathsf{cr}}(X)$. A net $(S_\alpha)$ of continuous homomorphisms $\mathsf{cr}$-converges to a homomorphism $S$ if for each zero neighborhood $W$, there is a neighborhood $U$ such that for every zero neighborhood $V$ there exists an $\alpha_0$ with $(S_\alpha - S)(U) \subseteq VW$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Note that $\mathsf{Hom}_{\mathsf{nr}}(X)$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{br}}(X)$, and $\mathsf{Hom}_{\mathsf{cr}}(X)$ form subrings of the ring of all group homomorphisms on $X$, in which, the multiplication is given by function composition.

In contrast with the case of all bounded homomorphisms between topological groups (considered in [12]), there are no more relations between these classes of bounded group homomorphisms between topological rings; see [11, Example 2.1, Example 2.2, Example 3.1] for some examples which illustrate the situation.

## 2. Main Results

First, we prove a version of [13, Theorem 1.10] in terms of topological $\ell$-groups.

**Lemma 1.** *Suppose $G$ and $H$ are $\ell$-groups with $H$ Archimedean. Moreover, assume that $T : G_+ \to H_+$ preserves the addition group operations; that is $T(x+y) = T(x)+T(y)$ holds for positive elements $x, y \in G$. Then $T$ has a unique extension to a positive group homomorphism. In addition, this extension is determined (denoted by $T$, again) via $T(x) = T(x^+) - T(x^-)$.*

$\lhd$ Consider the extension $S$ from $G$ into $H$ determined by $S(x) = T(x^+) - T(x^-)$. Using the basic properties of $\ell$-groups [5, Lemma 4.1] and the proof of [13, Theorem 1.10], we conclude that $S$ is additive. In order to prove that $S$ preserves the inverse operation, note that the identity $0 = S(x + (-x)) = S(x) + S(-x) = S(x) - S(x)$, implies that $S(-x) = -S(x)$, as we wanted. $\rhd$

In this step, we need a type of Riesz decomposition property in $\ell$-groups; the proof relies on just addition and modulus in a Riesz space so that it can be converted without any change, using identities of [5, Lemma 4.1]. For a proof in Riesz spaces, see [13, Theorem 1.13].

**Lemma 2.** *Suppose $|x| \leqslant |y_1 + y_2|$ holds in an $\ell$-group $G$. Then there exist $x_1, x_2 \in G$ such that $x = x_1 + x_2$ and $|x_i| \leqslant |y_i|$. If $x$ is positive, $x_1$, $x_2$ can be chosen to be positive.*

Now, we consider a version of [13, Theorem 1.14] assuring us under a suitable condition, the positive part of a group homomorphism can exist.

**Lemma 3.** *Let $G$ and $H$ be topological $\ell$-groups with $H$ Archimedean and $T : G \to H$ be a homomorphism between $\ell$-groups such that* $\sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\}$ *exists for each positive $x \in G$. Then, $T^+ = T \vee 0$ exists and is determined via*

$$T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\},$$

*for each $x \in G_+$.*

$\lhd$ Define $S : G_+ \to H_+$ by $S(x) = \sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\}$ for each positive $x \in G$. Then, we show that $S$ is additive. Fix $u, v \in G_+$. For every positive $y \leqslant u$ and $z \leqslant v$, we have $T(y) + T(z) = T(y + z) \leqslant S(u + v)$ so that $S(u) + S(v) \leqslant S(u + v)$. On the other hand, if $y \leqslant u + v$ for a positive element $y$, by Lemma 2, there are $y_1, y_2 \in G_+$ such that $y = y_1 + y_2$, $y_1 \leqslant u$, and $y_2 \leqslant v$. This implies that $T(y) = T(y_1) + T(y_2) \leqslant S(u) + S(v)$ asserting that $S$ is additive. By Lemma 1, $S$ has an extension to a positive homomorphism (denoted by $S$) from $G$ into $H$. Suppose for a positive homomorphism $R$, we have $T \leqslant R$. Fix $x \in G_+$. For every positive $y \leqslant x$, we have $Ty \leqslant Ry \leqslant Rx$, resulting in $S \leqslant R$. We see that $S = T^+$. $\rhd$

Recall that a homomorphism $T : G \to H$ is said to be order bounded if it maps order bounded sets into order bounded ones. The set of all order bounded homomorphisms from $G$ into $H$ is denoted by $\mathsf{Hom^b(G, H)}$. One may justify that under group operations of homomorphisms defined in [12] and invoking [5, Theorem 4.9], $\mathsf{Hom^b(G, H)}$ is a group. Now, we prove a Riesz–Kantorovich formulae for order bounded homomorphisms compatible with [13, Theorem 1.18]. Observe that according to [14, Remark 1], not every order bounded homomorphism on a topological $\ell$-group is bounded.

**Theorem 1.** *Suppose $G$ and $H$ are $\ell$-groups with $H$ Dedekind complete. Then, the group $\mathsf{Hom^b(G, H)}$ of all order bounded homomorphisms is a Dedekind complete $\ell$-group. Moreover, $T^+$ is defined by*

$$T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\},$$

*for each $x \in G_+$.*

$\lhd$ For every order bounded homomorphism $T$, note that

$$\sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\} = \sup T[0, x].$$

By Lemma 3, $T^+$ exists. By [5, Lemma 4.1], $\mathsf{Hom^b(G, H)}$ is an $\ell$-group. To prove $\mathsf{Hom^b(G, H)}$ is Dedekind complete, we proceed the same line as in the proof of [13, Theorem 1.18]. Suppose $0 \leqslant T_\alpha \uparrow\leqslant T$ in $\mathsf{Hom^b(G, H)}$. For each $x \in G_+$, $S(x) = \sup\{T_\alpha(x)\}$ exists in $H$. The identity $T_\alpha(x + y) = T_\alpha(x) + T_\alpha(y)$ implies that $S$ is an additive map between positive parts. So, by Lemma 1, it has an extension to a positive homomorphism (denoted by $S$), resulting in $T_\alpha \uparrow S$, as desired. $\rhd$

Remark 1. Suppose $X$ is a topological ring so that a topological abelian group in its own right. Recall that a subset $B \subseteq X$ is said to be bounded (in the sense of a topological group) if for each neighborhood $U$ of the identity, there is an $n \in \mathbb{N}$ with $B \subseteq nU$. Spite to the case of topological vector spaces, not every singleton in a topological group is bounded (see [15]). Nevertheless, in many classical topological groups and also connected ones, they are bounded. Therefore, from now on, we assume that the corresponding topological groups have this mild property.

**Proposition 1.** *Suppose $X$ is a topological ring. If $X$ is Hausdorff and every singleton is bounded in the sense of a topological group, then, so are $\mathsf{Hom}_{\mathsf{nr}}(X)$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{br}}(X)$, and $\mathsf{Hom}_{\mathsf{cr}}(X)$.*

$\lhd$ First, we prove for $\mathsf{Hom}_{\mathsf{nr}}(X)$. Suppose $(T_\alpha)$ is a net of $br$-bounded homomorphisms which converges to homomorphisms $T$ and $S$ uniformly on some zero neighborhood $U \subseteq X$. We must show that $T = S$. Assume that $W$ is an arbitrary zero neighborhood. There is a zero neighborhood $V$ with $V + V \subseteq W$. There exists an $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - T)(U) \subseteq V$ and $(T_\alpha - S)(U) \subseteq V$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Thus,

$$(T - S)(U) \subseteq (T_\alpha - T)(U) + (T_\alpha - S)(U) \subseteq V + V \subseteq W.$$

So, for each $x \in U$, we have $(T - S)(x) \in W$. Since $X$ is Hausdorff, we see that $T(x) = S(x)$. Now, for any $x \in X$, there is a positive integer $n$ with $x \in nU$. This means that there is a $y \in U$ with $x = ny$. So, by the previous procedure, we conclude that $T(x) = S(x)$, as claimed.

Now, we show that $\mathsf{Hom}_{\mathsf{br}}(X)$ is also Hausdorff. Observe that every singleton in a topological ring is bounded. Suppose $(T_\alpha)$ is a net in $\mathsf{Hom}_{\mathsf{br}}(X)$ which is convergent to homomorphisms $T$ and $S$. Fix any $x \in X$. Assume that $W$ is an arbitrary zero neighborhood and choose zero neighborhood $V$ with $V + V \subseteq W$. There exists an $\alpha_0$ with $(T_\alpha - T)(x) \in V$ and $(T_\alpha - S)(x) \in V$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Thus,

$$(T - S)(x) = (T_\alpha - T)(x) + (T_\alpha - S)(x) \in V + V \subseteq W,$$

as desired.

Finally, we show that $\mathsf{Hom}_{\mathsf{cr}}(X)$ is Hausdorff. Suppose $(T_\alpha)$ is a net in $\mathsf{Hom}_{\mathsf{cr}}(X)$ which is $cr$-convergent to homomorphisms $T$ and $S$. Choose arbitrary zero neighborhood $W$ and find zero neighborhood $V$ such that $V + V \subseteq W$. Consider zero neighborhood $V_1$ with $V_1 V_1 \subseteq V$. There is a zero neighborhood $U$ such that for every zero neighborhood $V_0$ we can find an index $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - T)(U) \subseteq V_0 V_1$ and $(T_\alpha - S)(U) \subseteq V_0 V_1$ for any $\alpha \geqslant \alpha_0$. Fix any $x \in X$. There is $n \in \mathbb{N}$ with $x \in nU$. Choose zero neighborhood $V_0$ with $nV_0 \subseteq V_1$. There is an $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - T)(U) \subseteq V_0 V_1$ and $(T_\alpha - S)(U) \subseteq V_0 V_1$ for any $\alpha \geqslant \alpha_0$. Thus,

$$(T - S)(U) \subseteq (T_\alpha - T)(U) + (T_\alpha - S)(U) \subseteq V_0 V_1 + V_0 V_1.$$

Find $y \in U$ with $x = ny$. This implies that

$$\begin{aligned}(T - S)(x) = (T - S)(ny) = (T_\alpha - T)(ny) + (T_\alpha - S)(ny)\\ \in nV_0 V_1 + nV_0 V_1 \subseteq V_1 V_1 + V_1 V_1 \subseteq V + V \subseteq W. \rhd\end{aligned}$$

Remark 2. Compatible with homomorphisms on a topological $\ell$-group, not every order bounded group homomorphism between topological $\ell$-rings is bounded and vise versa.

Suppose $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, the ring of all sequences with product topology, coordinate-wise ordering and pointwise multiplication. Consider the identity group homomorphism $I$ on $X$. It is indeed order bounded but not $\mathsf{nr}$-bounded (see [11, Example 2.1]). Moreover, if we replace pointwise multiplication in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ with zero one, then the identity group homomorphism is still order bounded but neither $\mathsf{nr}$- nor $\mathsf{br}$- bounded. Suppose $X = \ell_\infty$ with the usual norm topology and $Y$ is $\ell_\infty$ with the product topology inherited from $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; both of them, with coordinate-wise ordering and pointwise multiplication are topological $\ell$-rings. Then the identity group homomorphism from $Y$ into $X$ is order bounded but not continuous, certainly.

We recall that topology $\tau$ on a topological $\ell$-ring $(X,\tau)$ is Fatou if $X$ has a base of zero neighborhoods which are order closed. Furthermore, observe that a Birkhoff and Pierce ring ($f$-ring) is a lattice ordered ring with this property: $a \wedge b = 0$ and $c \geqslant 0$ imply that $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$.

**Lemma 4.** *Suppose $X$ is a Dedekind complete locally solid $f$-ring with Fatou topology and $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$ is the ring of all order bounded $nr$-bounded group homomorphisms. Then $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$ is a topological $\ell$-ring.*

$\lhd$ It suffices to prove that for a homomorphism $T \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$, $T^+ \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$. By Theorem 1, for each positive $x \in X$, we have

$$T^+(x) = \sup\{T(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

Choose a zero neighborhood $U \subseteq X$ such that $T(U)$ is bounded. So, for arbitrary neighborhood $W$, there is a zero neighborhood $V$ with $VT(U) \subseteq W$. Therefore, for each $x \in U_+$ and for each $y \in V_+$, $yT(x) \in W$, so that using [7, Theorem 3.15], solidness of zero neighborhoods $U$, $V$, and order closedness of $W$, yields that $T^+(U)$ is also bounded. Now, we show that the lattice operations are continuous. Suppose $(T_\alpha)$ is a net of order bounded $nr$-bounded group homomorphisms that converges uniformly on some zero neighborhood $U \subseteq X$ to homomorphism $T$ in $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$. Choose arbitrary neighborhood $W \subseteq X$. Fix $x \in U_+$. Now, consider the following lattice inequality:

$$\sup\big\{T_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\big\} - \sup\big\{T(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\big\} \leqslant \sup\big\{(T_\alpha - T)(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\big\}.$$

There exists an $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - T)(U) \subseteq W$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Therefore, using the order closedness of neighborhood $W$ and solidness of neighborhood $U$, we have

$$T_\alpha{}^+(x) - T^+(x) \leqslant (T_\alpha - T)^+(x) \in W. \rhd$$

**Theorem 2.** *Suppose $X$ is a Dedekind complete locally solid $f$-ring with Fatou topology. Then $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$ is a locally solid $\ell$-ring with respect to the uniform convergence topology on some zero neighborhood.*

$\lhd$ In the view of Lemma 4 and [5, Theorem 4.1], it is sufficient to show that the lattice operation $T \to T^+$ is uniformly continuous in $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$. Let $T \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{nr}}(X)$ and $x \in X_+$. By Theorem 1, we have

$$T^+(x) = \sup\{T(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

Now, suppose $(T_\alpha)$ and $(S_\alpha)$ are nets of order bounded $nr$-bounded group homomorphisms that $(T_\alpha - S_\alpha)$ converges uniformly on some zero neighborhood $U \subseteq X$ to zero. Choose arbitrary neighborhood $W \subseteq X$. Fix $x \in U_+$. Now, consider the following lattice inequality:

$$\sup\big\{T_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\big\} - \sup\big\{S_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\big\} \leqslant \sup\big\{(T_\alpha - S_\alpha)(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\big\}.$$

There exists an $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - S_\alpha)(U) \subseteq W$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Therefore, using the order closedness of neighborhood $W$ and solidness of neighborhood $U$, we have

$$T_\alpha{}^+(x) - S_\alpha{}^+(x) \leqslant (T_\alpha - S_\alpha)^+(x) \in W.$$

Now, using [5, Theorem 4.1], yields the desired result. $\rhd$

The following lemma may be known; to our best knowledge, we could not find any proof for it; we present a proof for the sake of completeness.

**Lemma 5.** *Suppose $X$ is a locally solid $f$-ring. Then, the solid hull of a bounded set is also bounded.*

$\lhd$ Suppose $B \subseteq X$ is bounded. Then, by usual definition of a solid hull, we have

$$\mathrm{Sol}(B) = \big\{x \in X, \exists\, y \in B:\ |x| \leqslant |y|\big\}.$$

Let $W$ be an arbitrary zero neighborhood of $X$. There exists a zero neighborhood $V$ with $VB \subseteq W$. For each $x \in \mathrm{Sol}(B)$, there is $y \in B$ such that $|x| \leqslant |y|$ so that for each $z \in V$, the inequality $|zx| = |z||x| \leqslant |z||y| = |zy|$ in connection with solidness of zero neighborhood $W$, imply that $V\,\mathrm{Sol}(B) \subseteq W$, as we wanted. $\rhd$

**Lemma 6.** *Suppose $X$ is a Dedekind complete locally solid $f$-ring with Fatou topology and $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$ is the ring of all order bounded br-bounded group homomorphisms. Then $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$ is a topological $\ell$-ring.*

$\lhd$ It suffices to prove that for a homomorphism $T \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$, $T^+ \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$. By Theorem 1, we have

$$T^+(x) = \sup\big\{T(u):\ 0 \leqslant u \leqslant x\big\}.$$

Fix a bounded set $B \subseteq X$. Without loss of generality, we may assume that $B$ is also solid; otherwise consider the solid hull of $B$ which is by Lemma 5, bounded. So, for arbitrary neighborhood $W$, there is a zero neighborhood $V$ with $VT(B) \subseteq W$. Therefore, for each $x \in B_+$ and for each $y \in V_+$, $yT(x) \in W$, so that using [7, Theorem 3.15], solidness of zero neighborhood $V$ and bounded set $B$, and order closedness of $W$, we see that $T^+(B)$ is also bounded.

Now, we show that the lattice operations are continuous. Suppose $(T_\alpha)$ is a net of order bounded $br$-bounded group homomorphisms that converges uniformly on bounded sets to the homomorphism $T$ in $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$. Fix bounded set $B \subseteq X$. Choose arbitrary neighborhood $W \subseteq X$. Fix $x \in B_+$. By Lemma 5, $B$ can be considered solid. Now, observe the following lattice inequality:

$$\sup\{T_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} - \sup\{T(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} \leqslant \sup\{(T_\alpha - T)(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

There exists an $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - T)(B) \subseteq W$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Therefore, using the order closedness of neighborhood $W$ and solidness of bounded set $B$, we have

$${T_\alpha}^+(x) - T^+(x) \leqslant (T_\alpha - T)^+(x) \in W. \ \rhd$$

**Theorem 3.** *Suppose $X$ is a Dedekind complete locally solid $f$-ring with Fatou topology. Then $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$ is a locally solid $\ell$-ring with respect to the uniform convergence topology on bounded sets.*

$\lhd$ In the view of Lemma 6 and [5, Theorem 4.1], it is sufficient to show that the lattice operation $T \to T^+$ is uniformly continuous in $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$. Let $T \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{br}}(X)$ and $x \in X_+$. By Theorem 1, we have

$$T^+(x) = \sup\big\{T(u):\ 0 \leqslant u \leqslant x\big\}.$$

Now, suppose $(T_\alpha)$ and $(S_\alpha)$ are nets of order bounded $br$-bounded group homomorphisms that $(T_\alpha - S_\alpha)$ converges uniformly on bounded sets to zero. Fix bounded set $B \subseteq X$. Choose arbitrary neighborhood $W \subseteq X$. Fix $x \in B_+$. By Lemma 5, $B$ can be considered solid. Now, observe the following lattice inequality:

$$\sup\{T_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} - \sup\{S_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} \leqslant \sup\{(T_\alpha - S_\alpha)(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

There exists an $\alpha_0$ such that $(T_\alpha - S_\alpha)(B) \subseteq W$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Therefore, using the order closedness of neighborhood $W$ and solidness of bounded set $B$, we have

$$T_\alpha{}^+(x) - S_\alpha{}^+(x) \leqslant (T_\alpha - S_\alpha)^+(x) \in W. \ \rhd$$

**Lemma 7.** *Suppose $X$ is a Dedekind complete locally solid $f$-ring with Fatou topology and $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$ is the ring of all order bounded continuous group homomorphisms. Then $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$ is a topological $\ell$-ring.*

$\lhd$ It suffices to prove that for a homomorphism $T \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$, $T^+ \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$. By Theorem 1, for any $x \in X_+$, we have

$$T^+(x) = \sup\{T(u) :\ 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

Choose arbitrary zero neighborhood $W$. There exists a zero neighborhood $U$ with $T(U) \subseteq W$. Therefore, for each $x \in U_+$, $T(x) \in W$, so that $T^+(x) \in W$ using solidness of $U$ and order closedness of $W$. Thus, we see that $T^+(U) \subseteq W$.

Now, we show that the lattice operations are continuous.

Suppose $(T_\alpha)$ is a net of order bounded continuous group homomorphisms that *cr*-converges to the homomorphism $T$ in $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$. Choose arbitrary neighborhood $W \subseteq X$. There is a zero neighborhood $U \subseteq X$ such that for each zero neighborhood $V \subseteq X$ there exists an $\alpha_0$ with $(T_\alpha - T)(U) \subseteq VW$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Now, consider the following lattice inequality:

$$\sup\{T_\alpha(u) :\ 0 \leqslant u \leqslant x\} - \sup\{T(u) :\ 0 \leqslant u \leqslant x\} \leqslant \sup\{(T_\alpha - T)(u) :\ 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

Therefore, using the order closedness of neighborhoods $V$, $W$ and solidness of zero neighborhood $U$, we have

$$T_\alpha{}^+(x) - T^+(x) \leqslant (T_\alpha - T)^+(x) \in VW.$$

This would complete the proof. $\rhd$

**Theorem 4.** *Suppose $X$ is a Dedekind complete locally solid $f$-ring with Fatou topology. Then $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$ is a locally solid $\ell$-ring with respect to the cr-convergence topology.*

$\lhd$ In the view of Lemma 7 and [5, Theorem 4.1], it is sufficient to show that the lattice operation $T \to T^+$ is uniformly continuous in $\mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$. Let $T \in \mathsf{Hom}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{cr}}(X)$ and $x \in X_+$. By Theorem 1, we have

$$T^+(x) = \sup\{T(u) :\ 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

Now, suppose $(T_\alpha)$ and $(S_\alpha)$ are nets of order bounded continuous group homomorphisms that $(T_\alpha - S_\alpha)$ *cr*-converges to zero. Choose arbitrary neighborhood $W \subseteq X$. There is a zero neighborhood $U \subseteq X$ such that for each zero neighborhood $V \subseteq X$ there exists an $\alpha_0$ with $(T_\alpha - S_\alpha)(U) \subseteq VW$ for each $\alpha \geqslant \alpha_0$. Now, consider the following lattice ineqality:

$$\sup\{T_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} - \sup\{S_\alpha(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} \leqslant \sup\{(T_\alpha - S_\alpha)(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\}.$$

Therefore, using the order closedness of neighborhoods $V$, $W$ and solidness of zero neighborhood $U$, we have

$$T_\alpha{}^+(x) - S_\alpha{}^+(x) \leqslant (T_\alpha - S_\alpha)^+(x) \in VW.$$

This would complete the proof. $\rhd$

## References


1. *Birkhoff, G.* Lattice-Ordered Groups, *Annals of Mathematics*, 1942, vol. 43, no. 2, pp. 298–331. DOI: 10.2307/1968871.
2. *Clifford, A. H.* Partially Ordered Abelian Groups, *Annals of Mathematics*, 1940, vol. 41, no. 3, pp. 465–473. DOI: 10.2307/1968728.
3. *Ŝmarda, B.* Topologies in $l$-Groups, *Archivum Mathematicum* (*Brno*), 1967, vol. 3, no. 2, pp. 69–81.
4. *Ŝmarda, B.* Some Types of Topological $l$-Groups, *Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyne* (*Brno*), 1969, vol. 507, pp. 341–352.
5. *Hong, L.* Locally Solid Topological Lattice-Ordered Groups, *Archivum Mathematicum* (*Brno*), 2015, vol. 51, no. 2, pp. 107–128.
6. *Birkhoff, G. and Pierce, R. S.* Lattice-Ordered Rings, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 1956, vol. 28, pp. 41–69.
7. *Johnson, D. G.* A Structure Theory for a Class of Lattice-Ordered Rings, *Acta Mathematica*, 1960, vol. 104, no. 3–4, pp. 163–215.
8. *Warner, S. Topological Fields*, North-Holland: Elsevier Sci. Publ., 1989, North-Holland Math. Stud., vol. 157, ch. 1–2.
9. *Arnautov, V., Glavatsky, S. and Mikhalev, A. A. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules*, Monographs and Textbooks in Pure and Appl. Math., New York, Marcel Dekker, 1996.
10. *Steinberg, S. A. Lattice-Ordered Rings and Modules*, New York, Springer-Verlag, 2010. DOI: 10.1007/978-1-4419-1721-8.
11. *Mirzavaziri, M. and Zabeti, O.* Topological Rings of bounded and Compact Group Homomorphisms on a Topological Ring, *J. Adv. Res. Pure Math.*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 101–106.
12. *Kocinac, Lj. and Zabeti, O.* Topological Groups of Bounded Homomorphisms on a Topological Group, *Filomat*, 2016, vol. 30, no. 3, pp. 541–546. DOI: 10.2298/FIL1603541K.
13. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, 2nd edition, Springer, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
14. *Erkursun-Ozcan, N., Gezer, N. A. and Zabeti, O.* Spaces of $u\tau$-Dunford-Pettis and $u\tau$-Compact Operators on Locally Solid Vector Lattices, *Matematiĉki Vesnik*, 2019 [in press].
15. *Zabeti, O.* A Few Remarks on Boundedness in Topological Groups and Topological Modules, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 48, no. 2, pp. 420–426. DOI: 10.15672/HJMS.2017.524.


*Received 17 May, 2019*

Omid Zabeti
University of Sistan and Baluchestan,
P.O. Box 98135-674, Zahedan, Iran,
*Assistant Professor*
E-mail: `o.zabeti@gmail.com`

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 14–23*

# РЕШЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА В ПРОСТРАНСТВЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ГОМОМОРФИЗМОВ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ КОЛЬЦАМИ

О. Забети[1]

[1] Университет Систана и Белуджистана,
Иран, Захедан, P.O. Box 98155-987

E-mail: `o.zabeti@gmail.com`

**Аннотация.** Предположим, что $X$ топологическое кольцо. Известно, что существует три класса ограниченных групповых гомоморфизмов на $X$, топологические структуры которых снова превращают их в топологические кольца. Сначала покажем, что если $X$ является хаусдорфовым топологическим кольцом, то же таковыми будут и упомянутые классы ограниченных групповых гомоморфизмов на $X$. Затем предположим, что $X$ является локально солидным решеточно упорядоченным кольцом. Цель настоящей статьи — рассмотреть решеточную структуру в этих классах ограниченных групповых гомоморфизмов; точнее, покажем, что при некоторых слабых предположениях они являются локально солидными решеточно упорядоченными кольцами. Фактически мы покажем, что при предполагаемой топологии они образуются локально солидные решеточно упорядоченные кольца. Чтобы это сделать, нам нужны варианты формул Рисса — Канторовича дял порядково ограниченных гомоморфизмов в топологических решеточно упорядоченных группах, хорошо известные в случае порядково ограниченных линейных операторов в пространствах Рисса.

**Ключевые слова:** локально солидное $\ell$-кольцо, ограниченный групповой гомоморфизм, решеточно упорядоченная группа.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 13J25, 06F30.

**Образец цитирования:** *Zabeti, O.* Lattice Structure on Bounded Homomorphisms Between Topological Lattice Rings // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, № 3.—С. 14–23 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36457.

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 24–30*

**УДК** 512.5
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36458

# РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТРАНСВЕКЦИИ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТЕВОЙ ГРУППЕ

**С. Ю. Итарова**[1], **В. А. Койбаев**[1,2]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `sitarova1991@gmail.com`, `koibaev-K1@yandex.ru`

**Аннотация.** Работа связана с изучением элементарных сетей (ковров) $\sigma = (\sigma_{ij})$ и элементарных сетевых групп $E(\sigma)$. А именно, приводится разложение элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Наборы подмножеств (идеалов, аддитивных подгрупп и др.) $\sigma = \{\sigma_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ определенного ассоциативного кольца с условиями $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$, $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$, возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Назовем элементарную сеть (сеть без диагонали) $\sigma$ *замкнутой* (*допустимой*), если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Настоящая статья мотивирована вопросом В. М. Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46) о том, что необходимым и достаточным условием допустимости (замкнутости) элементарной сети $\sigma$ является допустимость (замкнутость) всех пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. Другими словами, включение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарную группу $E(\sigma)$ эквивалентно включению $t_{ij}(\alpha)$ в подгруппу $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (для любых $i \neq j$). Тем самым становится актуальным разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Рассматривается элементарная сеть порядка $n$ (элементарный ковер) $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп коммутативного кольца (сеть без диагонали), связанная с $\sigma$ производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$, сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ и сеть $\Omega$ является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть $\sigma$. Пусть $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, $n$ — натуральное число, $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}$ кольца $R$ называется сетью (ковром) над кольцом $R$ порядка $n$, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов $i$, $r$, $j$. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер*). Получено разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение $t_{ij}(\alpha) = ah$ двух матриц $a$ и $h$, где $a$ — элемент группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, $h$ — элемент сетевой группы $G(\tau)$, где $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \tau_{jj} \end{pmatrix}$, $\omega_{ii} \subseteq \tau_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$. В работе получены важные характеристики матриц $a$ и $h$, участвующих в разложении элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$.

**Ключевые слова:** сеть, ковер, элементарная сеть, сетевая группа, замкнутая сеть, производная сеть, элементарная сетевая группа, трансвекция.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 20G15.

**Образец цитирования:** *Итарова С. Ю., Койбаев В. А.* Разложение элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 24–30. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36458.

## 1. Введение

Работа связана с изучением элементарных сетей (ковров) $\sigma = (\sigma_{ij})$ и элементарных сетевых групп $E(\sigma)$. Точнее, приводится разложение элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть (элементарный ковер) аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}$ кольца $R$ порядка $n$ [1, 2], [3, вопрос 15.46], $\omega = (\omega_{ij})$ —

производная сеть для $\sigma$, $\Omega = (\Omega_{ij})$ — сеть, ассоциированная с элементарной сетевой группой $E(\sigma)$, $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ [4, 5]. Получено разложение (теорема) элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ из $E(\sigma)$ в произведение двух матриц $t_{ij}(\alpha) = ah$, где $a$ — элемент группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, а матрица $b$ — элемент сетевой группы $G(\tau)$, где $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \tau_{jj} \end{pmatrix}$, $\omega_{ii} \subseteq \tau_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$. Уточняется результат [7], полученный ранее, о разложении элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе.

Наборы подмножеств (идеалов, аддитивных подгрупп и др.) $\sigma = (\sigma_{ij})$ ассоциативного кольца с условиями $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$, $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$, возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались сетями или коврами, а связанные с ними кольца и группы сетевыми или ковровыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Назовем элементарную сеть $\sigma$ *замкнутой* (*допустимой*), если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых элементарных трансвекций. Настоящая статья мотивирована вопросом В. М. Левчука (Коуровская тетрадь, вопрос 15.46) о том, что необходимым и достаточным условием допустимости (замкнутости) элементарной сети $\sigma$ является допустимость (замкнутость) всех пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$. Другими словами, включение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарную группу $E(\sigma)$ эквивалентно включению $t_{ij}(\alpha)$ в подгруппу $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (для любых $i \neq j$). Тем самым становится актуальным представление элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. В силу сформулированного результата одна из матриц разложения $t_{ij}(\alpha) = ah$ берется из группы $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$. Поэтому для исследования указанного вопроса В. М. Левчука необходимо получить исчерпывающие данные о второй матрице, которая согласно нашей теореме содержится в сетевой группе $G(\tau)$. В работе (теорема) получены важные характеристики матриц $a$ и $h$, участвующих в разложении.

Существенную роль в работе сыграло определение производной сети, а именно, циклический способ дополнения диагонали элементарной производной сети до полной сети, представленный в [6]. Отметим, что настоящая работа продолжает и уточняет исследования, начатые в [7].

В работе приняты следующие стандартные обозначения: $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, $n$ — натуральное число, $n \geqslant 3$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом $R$ порядка $n$. Пусть $e$ — единичная матрица порядка $n$, $e_{ij}$ — матрица, у которой на позиции $(i, j)$ стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция. Положим, далее, $t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}$.

Для элементарной сети (ковра) $\sigma$ мы рассматриваем элементарную сетевую группу $E(\sigma)$ и ее подгруппу $E_{ij}(\sigma)$, $i \neq j$:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\rangle, \quad E_{ij}(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle.$$

Далее, если $\sigma$ — (полная) сеть, то через $G(\sigma)$ обозначается сетевая группа [1].

## 2. Производная сеть

Основным содержанием раздела является изложение теоремы вложений, полученной в [6]. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца $R$ называется *сетью* (*ковром*) [1, 2] над кольцом $R$ порядка $n$, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов $i$, $r$, $j$. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер*) [1, 2], [3, вопрос 15.46]. Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца $R$, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел $i$, $r$, $j$.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) $\sigma_{ii}$ кольца $R$ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть $\sigma$ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Хорошо известно (см., например, [1]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы $\sigma_{ii}$ определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{1}$$

где суммирование берется по всем $k$, отличным от $i$.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом $R$ порядка $n \geqslant 3$. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп $\omega_{ij}$ кольца $R$, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где суммирование берется по всем $k$, отличным от $i$ и $j$. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел $i$, $r$, $j$, мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп $\omega_{ij}$ кольца $R$ является элементарной сетью. Элементарная сеть $\omega$ является дополняемой [6, предложение 1]. Дополним элементарную сеть $\omega$ до (полной) сети циклическим способом, предложенным в [6], полагая

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si},$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$. Построенную сеть мы называем *производной сетью* (для элементарной сети $\sigma$).

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом $R$ порядка $n$. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где

$$\gamma_{ij} = \Omega_{ij}\Omega_{ji} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m, \quad i \neq j.$$

Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является *элементарной сетью*, причем дополняемой, т. е. справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ [4, предложение 5]. В силу формулы (1) дополним элементарную сеть $\Omega$ до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по $k$, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki} = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Сеть $\Omega$ называется *сетью*, ассоциированной с элементарной группой $E(\sigma)$.

**Предложение 1** [6, теорема 1]**.** *Элементарная сеть $\sigma$ индуцирует производную сеть $\omega$ и сеть $\Omega$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, при этом выполняются включения $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, причем*

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$$

*для любых $r$, $i$, $j$. Далее, для любых попарно различных $i$, $r$, $j$ мы имеют место включения: $\Omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$.*

**Предложение 2** [7, предложение 2]. *Пусть $\sigma$ — элементарная сеть порядка $n$ над $R$, $\Omega$ — сеть, асссоциированная элементарной группой $E(\sigma)$. Если $a = (\delta_{ij} + a_{ij}) \in E(\sigma)$, то $a_{ij} \in \Omega_{ij}$.*

## 3. Теорема о разложении

На протяжении всего дальнейшего изложения мы предполагаем, что $n$ — натуральное и $n \geqslant 3$. Основным результатом раздела является разложение элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$ в элементарной сетевой группе $E(\sigma)$. Для простоты, не умаляя общности, мы предполагаем, что $i = 2$, $j = 1$.

По данным сетям $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$, определенным для элементарной сети $\sigma$, мы построим новую сеть $\tau$ следующим образом. В элементарной сети $\Omega$ на позицию (1, 2) вместо $\Omega_{12}$ поставим $\omega_{12}$, а на позицию (2, 1) вместо $\Omega_{21}$ поставим $\omega_{21}$. Согласно предложению 1 таблица, полученная таким образом, будет элементарной сетью, причем она является дополняемой элементарной сетью. Дополним ее до (полной) сети следующим образом. А именно, положим $\tau_{ii} = \Omega_{ii}$, $i = 3, \ldots, n$,

$$\tau_{11} = \omega_{11} + \Omega_{13}\Omega_{31} + \ldots + \Omega_{1n}\Omega_{n1}, \quad \tau_{22} = \omega_{22} + \Omega_{23}\Omega_{32} + \ldots + \Omega_{2n}\Omega_{n2}.$$

Построенная сеть имеет вид

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \omega_{12} & \Omega_{13} & \ldots & \Omega_{1n} \\ \omega_{21} & \tau_{22} & \Omega_{23} & \ldots & \Omega_{2n} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & \ldots & \Omega_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \Omega_{n3} & \ldots & \Omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу предложения 1 построенная таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является (полной) сетью.

**Лемма 1.** *Имеют место включения*

$$\tau_{11}\Omega_{12} \subseteq \omega_{12}, \quad \Omega_{12}\tau_{22} \subseteq \omega_{12}, \quad \tau_{22}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}, \quad \Omega_{21}\tau_{11} \subseteq \omega_{21}, \tag{2}$$

$$\gamma_{12}\tau_{11} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}, \quad \gamma_{12}\tau_{22} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}. \tag{3}$$

$\lhd$ Доказательства формул (2) повторяют друг друга, поэтому мы воспроизводим одно из них. Докажем, например, включение $\tau_{22}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$. Для доказательства последнего включения достаточно показать, что $(\omega_{22})\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$ и при $i \geqslant 3$ имеет место включение $\Omega_{2i}\Omega_{i2}\Omega_{21} \subseteq \omega_{21}$. Оба этих включения вытекают непосредственно из предложения 1.

Докажем формулы (3). Докажем, например, включение $\gamma_{12}\tau_{22} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}$. Согласно предложению 1 ($\gamma_{12} = \Omega_{12}\Omega_{21}$) мы имеем $\Omega_{21}\Omega_{12}\omega_{22} \subseteq \Omega_{21}\omega_{12} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}$, далее,

$$\Omega_{21}\Omega_{12}\Omega_{2i}\Omega_{i2} \subseteq \Omega_{21}\omega_{1i}\Omega_{i2} \subseteq \Omega_{21}\omega_{12} \subseteq \omega_{11} \cap \omega_{22}, \quad i \geqslant 3. \rhd$$

Рассмотрим подгруппу

$$H = \big\langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n; \ \{i, j\} \neq \{1, 2\} \big\rangle,$$

порожденную подгруппами $t_{ij}(\sigma_{ij})$ на всех позициях, за исключением позиций $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Очевидно, что $H \subseteq E(\tau) \subseteq G(\tau)$.

Следующее предложение доказывается простым «вытаскиванием» элементарных трансвекций $t_{12}(\xi)$, $\xi \in \sigma_{12}$, $t_{21}(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_{21}$.

**Предложение 3.** *Справедливо равенство $E(\sigma) = E_{12}(\sigma)H$, где $H \subseteq E(\tau) \subseteq G(\tau)$.*

**Предложение 4.** *Пусть* $t_{21}(\alpha)\in E(\sigma)$. *Тогда* $t_{21}(\alpha)=ah$, $a\in E_{12}(\sigma)$, $h\in G(\tau)$,

$$a=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1+a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & 1+a_{22}\end{pmatrix}, e_{n-2}\right),\quad h=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1+h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & 1+h_{22}\end{pmatrix}, e_{n-2}\right),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & 1+a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & 1+h_{22}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$a_{11}=h_{22},\quad \alpha a_{12}\in\omega_{11}\cap\omega_{22},\quad a_{11}\alpha\in\omega_{21},\quad \alpha-a_{21}\in\omega_{21}, \tag{5}$$

$$a_{ii},h_{ii}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12},\quad \omega_{11}\cap\omega_{22},\quad i,j=1,2. \tag{6}$$

$\lhd$ Согласно предложению 3 нам нужно доказать включения (5) и (6). Заметим в начале, что из $h,h^{-1}\in G(\tau)$ следует, что $h_{11},h_{22}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}$. Из включения $a\in E_{12}(\sigma)$ мы имеем $a_{11},a_{22}\in\gamma_{12}$, $a_{21}\in\Omega_{21}$. Далее, согласно предложению 2 мы имеем $\alpha\in\Omega_{21}$.

Согласно предложению 3 имеем включение $E(\sigma)\subseteq E_{12}(\sigma)G(\tau)$. Следовательно, $t_{21}(\alpha)=ah$, $a\in E_{12}(\sigma)$, $h\in G(\tau)$.

Докажем включения (5). Из (4) следует равенство

$$\begin{pmatrix}1+a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & 1+a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & 1+h_{22}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Отсюда, в частности, $a_{11}=h_{22}$, $a_{12}=-h_{12}$. Далее, имеем [2, лемма 1] $\tau_{22}\Omega_{21}\subseteq\omega_{21}$, откуда $h_{22}\Omega_{21}\subseteq\omega_{21}$, а потому $(a_{11}=h_{22})$ $a_{11}\Omega_{21}\subseteq\omega_{21}$, следовательно, $(\alpha\in\Omega_{21})$ $a_{11}\alpha\in\omega_{21}$. В силу (7) мы имеем $-a_{21}+\alpha+\alpha a_{11}=h_{21}\in\omega_{21}$, но согласно доказанному $a_{11}\alpha\in\omega_{21}$, следовательно, $\alpha-a_{21}\in\omega_{21}$. Отметим, наконец, что включение $\alpha a_{12}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$ вытекает из предложения 1.

Докажем включения (6). Согласно замечанию, сделанному в начале доказательства теоремы, мы имеем включение $a_{11}=h_{22}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12}$. Далее, из (7) $a_{22}-\alpha a_{12}=h_{11}$, но согласно доказанному $\alpha a_{12}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}\subseteq\tau_{11}\cap\tau_{22}$. Согласно замечанию, сделанному в начале доказательства теоремы, $h_{11}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}$, поэтому $a_{22}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}$, но $a_{22}\in\gamma_{12}$, откуда $a_{22}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12}$. С другой стороны, $\alpha a_{12}\in\Omega_{21}\omega_{12}\subseteq\Omega_{21}\Omega_{12}\subseteq\gamma_{12}$, поэтому $h_{11}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12}$. Таким образом, мы показали, что $a_{ii},h_{ii}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12}$, $i=1,2$. Но теперь из последнего включения и (3) вытекает справедливость включений $a_{ii}a_{jj},a_{ii}h_{jj},h_{ii}h_{jj}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$, $i,j=1,2$. $\rhd$

**Теорема.** *Пусть* $n\geqslant 3$, $t_{21}(\alpha)\in E(\sigma)$. *Тогда* $t_{21}(\alpha)=ah$, $a\in E_{12}(\sigma)$, $h\in G(\tau)$. *Если*

$$a=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1+a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & 1+a_{22}\end{pmatrix}, e_{n-2}\right),\quad h=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1+h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & 1+h_{22}\end{pmatrix}, e_{n-2}\right),$$

*и выполнено* (4), *то* $a_{ii},h_{ii}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12}$, $i=1,2$,

$$\alpha,a_{21}\in\Omega_{21},\quad \alpha-a_{21}\in\omega_{21},\quad a_{12},h_{12}\in\omega_{12},\quad h_{21}\in\omega_{21}, \tag{8}$$

$$a_{22}+a_{11},\ a_{22}-h_{11},\ a_{22}+h_{22},\ h_{11}+h_{22},\ h_{11}+a_{11}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}, \tag{9}$$

$\lhd$ Представление $t_{21}(\alpha)=ah$, $a\in E_{12}(\sigma)$, $h\in G(\tau)$ вытекает из предложения 4. Включения $a_{ii},h_{ii}\in\tau_{11}\cap\tau_{22}\cap\gamma_{12}$, $i=1,2$, и включения (8) следуют также из предложения 4.

Докажем включения (9). Из (7) мы имеем $a_{22}-a_{12}\alpha=h_{11}$, откуда $a_{22}-h_{11}=a_{12}\alpha\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$ (см. предложение 4, формулу (5)). Далее, из (6) следует, что $a_{11}a_{22}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$, а из предложения 1 (так как $a_{21}\in\Omega_{21}$, $a_{12}\in\omega_{12}$) следует включение $a_{21}a_{12}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$. Но так как $\det(a)=1$, то $a_{22}+a_{11}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$. Далее, $a_{11}=h_{22}$, поэтому $a_{22}+h_{22}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$. Аналогично, из того, что $\det(h)=1$ и того, что $h_{11}h_{22}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$ следует включение $h_{11}+h_{22}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$. Наконец, из равенства $a_{11}=h_{22}$ мы имеем $h_{11}+a_{11}\in\omega_{11}\cap\omega_{22}$. $\rhd$

## Литература


1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.
3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 17-е.—Новосибирск, 2010.
4. *Койбаев В. А.* Замкнутые сети в линейных группах // Вестн. СПбГУ. Сер. 1.—2013.—№ 1.—С. 25–33.
5. *Койбаева В. А., Нужин Я. Н.* Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем.—2013.—Т. 18, № 1.—С. 75–84.
6. *Джусоева Н. А., Итарова С. Ю., Койбаев В. А.* О вложении элементарной сети в промежуток сетей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. Мишеля Деза (Тула, 13–18 мая 2019 г.).—2019.—С. 73–74.
7. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А.* Разложение элементарной трансвекции в элементарной группе // Вопросы теории представлений алгебр и групп. 28, Зап. научн. сем. ПОМИ.—2015.—Т. 435.—С. 33–41.


*Статья поступила 26 марта 2019 г.*

Итарова Светлана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
*аспирант кафедры алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: sitarova1991@gmail.com

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
*ведущий научный сотрудник отдела функц. анализа*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
*заведующий кафедрой алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-5142-2612

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 24–30*

# DECOMPOSITION OF ELEMENTARY TRANSVECTION IN ELEMENTARY NET GROUP

Itarova, S. Y.[1] and Koibaev, V. A.[1,2]
[1] North-Ossetian State University,
46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: sitarova1991@gmail.com, koibaev-K1@yandex.ru

**Abstract.** The paper deals with the study of elementary nets (carpets) $\sigma = (\sigma_{ij})$ and elementary net groups $E(\sigma)$. Namely, decomposition of an elementary transvection in elementary net group $E(\sigma)$ is given. The colections of subsets (ideals, additive subgroups and etc.) $\sigma = \{\sigma_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ of an associative ring with the conditions $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$, $1 \leqslant i, r, j \leqslant n$, arose in a different situations. Such collections are called carpets or nets and a rings, while the associated groups are called carpet (net, congruence, etc.) subgroups. An elementary net (a net without diagonal) $\sigma$ is *closed* (*admissible*) if the subgroup $E(\sigma)$ does not contain new elementary transvections. The study was motivated by the question of V. M. Levchuk (The Kourovka notebook, question 15.46) whether or not a necessary and sufficient condition for the admissibility (closure) of the elementary net $\sigma$ is the admissibility (closure) of all pairs $(\sigma_{ij},\sigma_{ji})$. In other words, the inclusion of an elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ in the elementary group $E(\sigma)$ is equivalent to the inclusion of $t_{ij}(\alpha)$ in the subgroup $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$ (for any $i \neq j$). Thus, the decomposition of elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ in the elementary net group $E(\sigma)$ becomes relevant. We consider an elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ (elementary carpet) of the additive subgroups of a commutative ring of order $n$, a derived net $\omega = (\omega_{ij})$ depending on the net $\sigma$, the net $\Omega = (\Omega_{ij})$ associated with the elementary group $E(\sigma)$, where $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ and the net $\Omega$ is the least (complemented) net among all the nets which contain the elementary net $\sigma$. Let $R$ be a commutative unital ring and $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. A set $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups $\sigma_{ij}$ of the ring $R$ is said to be a net or a carpet over the ring $R$ of order $n$ if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all $i$, $r$, $j$. A net without diagonal is said to be *elementary net* or *elementary carpet*. We prove that every elementary transvection $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$ can be decomposed $t_{ij}(\alpha) = ah$ into a product of two matrices $a$ and $h$, where $a$ is a member of the group $\langle t_{ij}(\sigma_{ij}), t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle$, $h$ is a member of the net group $G(\tau)$, where $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{ii} & \omega_{ij} \\ \omega_{ji} & \tau_{jj} \end{pmatrix}$, $\omega_{ii} \subseteq \tau_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$. Important characteristics of matrices $a$ and $h$ involved in the decomposition of elementary transvection $t_{ij}(\alpha)$ were also obtained in the paper.

**Key words:** nets, carpets, elementary net, net group, closed net, derivative net, elementary net group, transvections.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 20G15.

**For citation:** *Itapova, S. Y., Koibaev, V. A.* Decomposition of Elementary Transvection in Elementary Net Group, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 24–30 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36458.

## References

1. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
2. *Levchuk, V. M.* A Note to L. Dickson's Theorem, *Algebra i logika* [Algebra and Logic], 1983, vol. 22, no. 4, pp. 421–434 (in Russian).
3. *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, issue 17, Novosibirsk, Russ. Acad. of Sciences, Siberian Div., Inst. of Mathematics, 2010 (in Russian). DOI: 10.3103/s1063454113010056.
4. *Koibaev, V. A.* Closed Nets in Linear Groups, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2013, vol. 46, no. 1, pp. 14–21. DOI: 10.3103/S1063454113010056.
5. *Koibaev, V. A. and Nuzhin, Y. N.* Subgroups of the Chevalley Groups and Lie Rings Definable by a Collection of Additive Subgroups of the Initial Ring, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 201, no. 4, pp. 458–464. DOI: 10.1007/s10958-014-2006-9.
6. *Dzhusoeva, N. A., Itarova, S. Y. and Koibaev, V. A.* On the Embedding an Elementary Net Into a Gap of Nets, *XVI International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems, Applications and Problems of History» dedicated to the 80th anniversary of the birth of Prof. Michel Desa* (*May 13–18, 2019, Tula*), 2019, pp. 73–74. (in Russian).
7. *Dryaeva, R. Y. and Koibaev, V. A.* Decomposition of Elementary Transvection in Elementary Group, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 219, no. 4, pp. 513–518. DOI: 10.1007/s10958-016-3123-4.

*Received 26 March, 2019*

Svetlana Y. Itarova
North-Ossetian State University,
46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
*Graduate Student*
E-mail: `sitarova1991@gmail.com`

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
*Leading Researcher*;
North-Ossetian State University,
46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
*Professor, Head of Department*
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 31–49*

**УДК** 51-72
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36460

# ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА И УСТОЙЧИВОСТЬ ОТКРЫТЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**К. И. Ильин[1], А. Б. Моргулис[2,3], Черныш А. С.[3]**

[1] Йоркский университет,
Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
[3] Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`, `morgulisandrey@gmail.com`,
`aleksei.0.chernysh@gmail.com`

**Аннотация.** Изучаются спектры краевых задач возникающих при линеаризации уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости на стационарных решениях, описывающих течения, в которых жидкость поступает в область течения и выводится из нее через определенные части границы. Такие течения естественно называть открытыми. Спектры таких течений относительно мало изучены, по сравнению со случаем полностью непроницаемых границ или условий периодичности. В этой статье мы указываем класс открытых течений, спектры которых состоят из «нулей» некоторой целой операторнозначной функции, представленной операторным интегралом Лапласа. Вопрос о расположении спектра таких течений сводится, следовательно, к своего рода операторнозначной проблеме Рауса — Гурвица для этого интеграла. В ряде интересных частных случаев эту операторную функцию удается выразить как мультипликаторное преобразование рядов Фурье, и тогда проблема Рауса — Гурвица становится скалярной, и более того, ее удается решить с помощью теоремы Пойа о нулях интегралов Лапласа. На этой основе мы доказываем принадлежность открытой левой полуплоскости спектров ряда конкретных течений, для которых такие доказательства не были известны.

**Ключевые слова:** уравнение Эйлера, идеальная несжимаемая жидкость, устойчивость, спектр, целые функции, проблема Рауса — Гурвица.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 76B47, 76E09, 30D20.

**Образец цитирования:** *Ильин К. И., Моргулис А. Б., Черныш А. С.* Проблема Рауса — Гурвица для оператор-функций и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 31–49. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36460.

## 1. Введение

Пусть в некоторой области эвклидова пространства (для начала, конечномерного) задано векторное поле $Q = Q(x)$, и это векторное поле имеет равновесие $y : Q(y) = 0$. Эволюция малых возмущений такого равновесия описывается линейным уравнением $\dot{z} = Q'(y)z$, где $Q'(y)$ — дифференциал поля $Q$ в равновесии $y$. Собственным числам $\lambda$ оператора $Q'(y)$ соответствуют собственные моды малых возмущений вида $z(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}b$, где $b$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda$: $Q'(y)b = \lambda b$, $b \neq 0$; соответственно, числа $\mathrm{e}^{\lambda t}$ будут собственными для оператора $\exp(tQ'(y))$. Классический результат ляпуновской теории устойчивости — принцип линеаризации — гласит, что равновесие $y$ асимптотически устойчиво, если все собственные числа $\lambda$ принадлежат полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и неустойчиво, если найдется хотя бы одно собственное число $\lambda: \ \operatorname{Re}\lambda > 0$.

В прикладных задачах, как правило, исследуются не изолированные равновесия, а семейства равновесий, зависящие от физических параметров системы. Поскольку собственные значения линеаризованной системы меняются вместе с равновесием, возможно так называемое возникновение неустойчивости, т. е. появление экспоненциально растущих мод вследствие пересечения мнимой оси ветвью (или сразу несколькими ветвями) собственных значений при плавном изменении параметров семейства. Если такое пересечение происходит в ненулевой точке мнимой оси, говорят о колебательной неустойчивости, иначе — о монотонной.

Возникновение неустойчивости — прекурсор изменения динамики нелинейной системы вследствии локальных бифуркаций, т. е. ответвления вторичного режима движения от семейства равновесий. Если нет дополнительных вырождений, и неустойчивость монотонная, то ответвляются равновесия, если колебательная — предельные циклы (бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа) [1]; в случае дополнительного вырождения, такого, например, как кратность нейтрального спектра, имеют место более сложные бифуркации, см. [2].

Эволюционные уравнения с частными производными часто рассматривают как бесконечномерные ОДУ. Такой подход широко используется в математической физике, и, в частности, в механике сплошной среды. Равновесиям бесконечномерных ОДУ могут соответствовать, например, стационарные течения жидкости или напряженно-деформированные состояния упругих тел. Спектры малых возмущений таких равновесий представляют интерес как сами по себе, так и в связи с возникновением неустойчивости и нелинейными динамическими явлениями, сопровождающими ее. При этом методы теории устойчивости и бифуркаций часто применяются эвристически, хотя во многих важных частных случаях их удается обосновать [3–5].

В настоящем сообщении речь идет о спектрах малых возмущений стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости. Такие спектры изучались многими авторами, см. [6, 7] и ссылки в этих работах. Особенность рассматриваемых нами течений в том, что они *открыты*, т. е. граница области течения содержит проницаемые части, через которые жидкость подается в область течения (вход) и выводится из нее (выход). Такие течения относительно мало изучены. Тем не менее известно, что устройство их спектров может существенно отличаться от того, что наблюдается в случае непроницаемых границ, или условий пространственной периодичности. Например, в случае непроницаемых границ, идеальная жидкость представляет собой гамильтонову систему [8]; соответственно, спектр стационарных течений, выступающих в роли равновесий, симметричен относительно мнимой оси, причем имеется как точечный, так и непрерывный спектр (возможно, неустойчивый!). В случае открытого течения спектр может потерять симметрию относительно мнимой оси, может стать чисто точечным, расположиться в левой полуплоскости, и даже исчезнуть совсем [9, 10].

В этой статье мы приводим новые примеры конкретных открытых течений, спектры которых располагаются в открытой левой полуплоскости. Доказательства этого не были известны, несмотря на элементарность этих течений. (Здесь мы имеем в виду рассмотрения качественного характера, не связанные с приближенными вычислениями и т. д.). Упомянутые примеры мы рассматриваем в контексте более общего результата; именно, мы указываем класс открытых течений, спектры которых представляют собой «нули» некоторой целой операторнозначной функции. Вопрос об устойчивости всех собственных мод таких течений сводится, следовательно, к своего рода операторнозначной проблеме Рауса — Гурвица. Во многих важных частных случаях эту операторную функцию удается выразить как мультипликаторное преобразование рядов Фурье, и тогда проблема Рауса — Гурвица становится скалярной. Хотя общее решение последней известно [11], его применение к решению конкретных задач часто затруднительно. В нашем случае, к счастью, работает более простое достаточное условие: теорема Пойа о нулях интегралов Лапласа [12].

Исследованные нами классы течений отличаются от открытых течений, рассмотренных в [9, 10], и топологическим типом рассматриваемых областей течения, и граничными условиями, которыми снабжаются уравнения движения жидкости. Оба отличия существенны: во-первых, стационарные течения, которые мы рассматриваем здесь, не всегда совместны с граничными условиями рассмотренными в [9, 10]; во-вторых, те граничные условия, которые мы рассматриваем здесь, несовместны с методами работ [9, 10].

## 2. Постановка начально-краевых задач

Уравнения движения идеальной несжимаемой и однородной жидкости — уравнения Эйлера — имеют вид

$$\mathbf{v}_t + \omega \times \mathbf{v} = -\nabla H; \quad H = P + \mathbf{v}^2/2; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Здесь векторное поле $\mathbf{v}$ (скорость течения) и скалярное поле $P$ (давление) неизвестны, и должны быть определены в каждый момент времени в каждой точке области, занятой жидкостью (область течения). Давление, как и *функция Бернулли* $H = P + \mathbf{v}^2/2$ , определяются с точностью до постоянной. В наших рассмотрениях область течения $D \subset \mathbb{R}^3$ (или $D \subset \mathbb{R}^2$) задана, неизменна, ограничена, и, во всяком случае, кусочно гладкая. Орт *внешней* нормали к $S = \partial D$ обозначается $\mathbf{n}$.

Уравнение (1) записано *в форме Громеки — Ламба.* Эквивалентная форма уравнения Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P, \tag{2}$$

где через $(\mathbf{v}, \nabla)$ обозначена ковариантная производная вдоль поля $\mathbf{v}$, индуцированная стандартной римановой метрикой на $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$. В декартовых координатах, $((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v})_i = v_j v_{i x_j}$ (где по повторяющимся индексам $i$, $j$ производится суммирование, а индексы $x_j$ обозначают частные производные по одноименным координатам). Уравнение в форме (2) получается из (1) преобразованием

$$\omega \times \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^2/2 = (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}.$$

При каждом $t$ имеет место разбиение $S = S^+(t) \cup S^-(t) \cup S^0(t)$ (с точностью до множества $(n-1)$-мерной меры нуль), где $S^+(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x,t) \cdot \mathbf{n} < 0\}$ — вход потока (сквозь него жидкость втекает), $S^-(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x,t) \cdot \mathbf{n} > 0\}$ — выход, и $S^0(t) = \{x \in S : \mathbf{v}(x,t) \cdot \mathbf{n} = 0\}$ — непроницаемая стенка. По определению, в открытом течении вход и выход не пусты.

Если поставлено граничное условие

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \gamma(x,t), \;\; x \in S = \partial D; \quad \int\limits_S \gamma \, ds = 0, \;\; t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\gamma$ — заданная функция, то вход и выход известны. Если $\gamma \equiv 0$ так, что $S^0 = S$ для всех $t$, то достаточно поставить начальное условие, и полученная начально-краевая задача будет корректна. Ей посвящена обширная литература, см. ссылки в [13].

Граничное условие (3) с $\gamma \not\equiv 0$ приводит к открытым течениям. При этом, однако, корректная постановка начально-краевой задачи для уравнений Эйлера требует дополнительного граничного условия. Выбор такого условия не прост. Вероятно, его всегда следует ставить на входе; по крайней мере, известно несколько способов сделать это. Можно, например, задать тангенциальный вихрь так, что

$$\mathbf{n} \times (\omega - \omega^{+}) = 0 \ \text{ на } \ S^{+}, \tag{4}$$

где $\omega^{+}$ — заданное векторное поле на $S^{+}$. Первоначально это условие предложил В. И. Юдович для плоской задачи протекания, где $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \omega\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, — орты декартовой системы координат, причем орт $\mathbf{e}_3$ ортогонален плоскости течения $Ox_1x_2$, $\omega = v_{x_2} - u_{x_1}$ — скаляр [14]. В таком случае условие (4) принимает вид $\omega - \omega^{+} = 0$ на $S^{+}$, при заданной скалярной функции $\omega^{+}$. В. И. Юдович установил, что классическое решение существует, единственно и неограниченно продолжаемо по времени при любых данных, удовлетворяющих ряду условий регулярности, включавших, помимо естественных требований гладкости, предположение о том, что вход, выход и непроницаемые стенки суть объединения компонент связности границы. Позже эти условия были ослаблены [15, 16].

А. В. Кажихов распространил граничное условие Юдовича на трехмерный случай [17], а также показал, что вместо (4) можно поставить условие

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{+}) = 0 \text{ на } S^{+}, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}^{+}$ — заданное векторное поле на $S^{+}$, т. е. вместо вихря на входе можно задавать тангенциальную скорость (см. [18]). Отметим, что для двумерной задачи Кажихова неограниченная продолжаемость решения не установлена, и примеры коллапса также неизвестны. Для трехмерных задач та же проблема существует при всех типах граничных условий, включая и полностью непроницаемые стенки, и условия пространственной периодичности.

Условие Кажихова на входе (5) возникает при рассмотрении открытых течений вязкой несжимаемой жидкости в пределе исчезающей вязкости, если при ненулевой вязкости полный вектор скорости задается как на входе, так и на выходе потока [19, 20]. Такие граничные условия в первом приближении описывают подачу/забор вязкой жидкости через пористые стенки [21].

С целью описания движения материальных частиц потока жидкости, рассматриваемого в заданной области $D$ при $t > 0$, поставим задачу Коши

$$\partial_s X = \mathbf{v}(X, s); \quad X|_{s=t} = x, \tag{6}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ — поле скорости течения. Предположим, что $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^1(\overline{D \times \{t > 0\}})$. Найдутся $\tau_1 = \tau_1(x, t) \in (0, t)$ и $\tau_2 = \tau_2(x, t) > t$ такие, что решение $X = X(s, x, t)$ определено для всех $s \in (\tau_1(x, t), \tau_2(x, t))$. Отображение $X$ определено для произвольной векторной функции $\mathbf{v}$. Если известно, что эта функция — решение уравнений гидродинамики (1), то отображение (6) параметризует путь материальной частицы жидкости, находящейся в момент времени $t > 0$ в точке $x \in D$. Этот путь — характеристика уравнений (1).

## 3. Функционалы Ляпунова

Пусть $\mathrm{W} : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ — функционал на фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ некоторой динамической системы $\mathscr{S}_t : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$, $t \geqslant 0$; пусть $x \in \mathbb{Y}$, положим $w_x(t) = \mathrm{W}(\mathscr{S}_t x)$. Существование такого функционала W, что $w_x$ монотонна (и не постоянна) для всех $x$ из «достаточно представительного» множества $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ — существенное проявление неконсервативности системы $\mathscr{S}_t$. Допуская некоторую вольность речи, будем называть такие W функционалами Ляпунова (классичекую теорию см. в [22]). Приведем примеры задач Кажихова и Юдовича, допускающих функционалы Ляпунова.

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{U}$ — постоянные векторы, положим $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}+\boldsymbol{U}$. Поле $\boldsymbol{V}$ — поле скорости твердотельного движения жидкости, т. е. движения без деформации. Рассмотрим задачу Кажихова (3), (5) с $\gamma = \boldsymbol{V}\cdot\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}^+ = \boldsymbol{V}$, и пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\cdot, t)$ — ее решение. В данном случае уравнения движения удобно взять в форме (2). Непосредственно проверяется тождество

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D (\mathbf{v} - \boldsymbol{V})^2\, dx = -\int\limits_{S^-} \gamma\, (\mathbf{v} - \boldsymbol{V})^2\, dS \leqslant 0.$$

Таким образом, имеем убывающий положительный функционал Ляпунова

$$\mathbf{v} \mapsto \int\limits_D (\mathbf{v} - \boldsymbol{V})^2\, dx. \tag{7}$$

Рассмотрим плоскую задачу Юдовича. Как уже говорилось, в этом случае $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ можно отождествить со скаляром $\omega$. Пусть $\gamma$ задана произвольно, но $\omega^+ = \Omega \equiv \mathrm{const}$. Пусть $f = f(r) > 0$ при $r \neq 0$, $f(0) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D f(\omega - \Omega)\, dx = -\int\limits_{S^-} f(\omega - \Omega)\gamma\, ds \leqslant 0.$$

Тождество следует непосредственно из уравнения вихря, которое получается применением rot к (1). Следовательно, в данном случае есть целое семейство положительных невозрастающих функционалов Ляпунова

$$\omega \mapsto \int\limits_D f(\omega - \Omega)\, dx, \quad \omega = \operatorname{rot}\mathbf{v}, \tag{8}$$

где функция $f$ играет роль параметра семейства. На самом деле, функционалы Ляпунова существуют при довольно широких классах граничных условий (4) [9, 10].

Теперь рассмотрим плоскую задачу Юдовича (4), (5) в неодносвязной области. Пусть $\gamma$ задана так, что вход содержит замкнутый контур $c$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_c \mathbf{v}\cdot\mathbf{dx} = -\int\limits_c \omega^+\gamma\, ds, \tag{9}$$

где $\omega^+$ и $\gamma$ заданы. Тождество (9) проверяется непосредственным интегрированием уравнений (1). Таким образом, вдув завихренной жидкости генерирует, вообще говоря, линейный рост циркуляции вокруг входа, т. е. система имеет линейно растущий функционал Ляпунова

$$\mathbf{v} \mapsto \oint\limits_c \mathbf{v}\cdot\mathbf{dx}. \tag{10}$$

В частности, пусть $\omega^+$, $\gamma$ не зависят от времени и придают ненулевое значение правой части тождества (9). При таких данных задача Юдовича (4), (5) в неодносвязной области не имеет стационарных решений. Если при этом $\omega^+ = \Omega \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то сосуществуют возрастающий (по абсолютной величине) функционал Ляпунова (10), и убывающий положительный функционал Ляпунова (8).

## 4. Мотивирующий пример

Рассмотрим плоскую задачу Кажихова в полосе $D = \{(x, y),\ 0 < x < 1\}$ с условием $2\ell$-периодичности по $y$ и с граничными условиями

$$\mathbf{v}|_{x=0} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x|_{x=1} = 1, \tag{11}$$

где $\mathbf{e}_x$ — орт оси $Ox$. Таким образом, $S^+ = \{x = 0\}$, $S^+ = \{x = 1\}$, $S^0 = \varnothing$. При граничном условии (11) есть стационарное решение $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x$, $H = \mathrm{const}$. Спектр малых возмущений этого решения определяется задачей на собственные значения для линеаризованных уравнений (1), причем линеаризация производится на стационарном решении $\mathbf{e}_x$:

$$\lambda u = -h_x, \quad \lambda v + \omega = -h_y, \tag{12}$$

$$v_x - u_y = \omega, \quad u_x + v_y = 0, \tag{13}$$

$$u|_{x=0} = v|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \tag{14}$$

где функции $u$, $v$, $h$ неизвестны. Исключаем $h$ из уравнений (12) и приходим к уравнению

$$\lambda\omega + \omega_x = 0.$$

Его решение $\omega = \omega^+(y)e^{-\lambda x}$, где функция $\omega^+$ произвольна. Подставляем $\omega$ во второе уравнение в (12), полагаем $x = 0$ и, с учетом граничных условий (14), находим $\omega^+ = -h_y(0, y)$. Теперь восстановим скорость $(u, v)$ по вихрю и дивергенции. С этой целью вводим функцию тока $\psi = \psi(x, y)$, полагая $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$. Данная подстановка разрешает уравнение неразрывности (второе в (13)), а первое принимает вид

$$-\Delta\psi = \omega = -\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y, \tag{15}$$

где введены обозначения: $\chi(y) = h(0, y)$, $\mathrm{e}^\lambda = e^{-\lambda x}$. Решение данного уравнения должно быть определено в полосе $D$, $2\ell$-периодично по $y$ и удовлетворять краевым условиям

$$\psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=1} = 0. \tag{16}$$

Данные граничные условия эквивалентны второму и третьему граничному условию в (11), с учетом того, что функция тока определена с точностью до аддитивной постоянной. Полагаем $\psi = -\mathrm{G}(\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y)$, где $\mathrm{G} : \omega \mapsto \varphi$ — оператор Грина смешанной задачи для уравнения Пуассона $-\Delta\psi = \omega$ в полосе $D$ с условием периодичности $\varphi(x, y+2\ell) = \varphi(x, y)$ и с граничными условиями (16). Найденное выражение $\psi$ подставляем в первое из граничных условий (14) и находим

$$\partial_y|_{x=0} G(\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y) = 0.$$

Определяем оператор $\mathrm{K}(\lambda) : \chi \mapsto \partial_y|_{x=0} G(\mathrm{e}^\lambda \otimes \chi_y)$. Тогда $\chi \in \ker \mathrm{K}(\lambda)$ определяет собственную моду

$$u = \partial_y \mathrm{G}\big(\chi_y \otimes \mathrm{e}^\lambda\big), \quad v = -\partial_x \mathrm{G}\big(\chi_y \otimes \mathrm{e}^\lambda\big), \quad h(x, y) = \chi(y) - \lambda \int\limits_0^x u(y, s)\,ds.$$

Выражаем оператор $\mathrm{K}(\lambda)$ явно. Разлагаем $\chi$ в ряд Фурье и находим, что искомые решения — единичные гармоники $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\beta \in \alpha\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где $\alpha = \pi/\ell$, при этом $\mathrm{K}(\lambda)$ действует как мультипликаторное преобразование: $\mathrm{K}(\lambda)\mathrm{e}^{i\beta} = \kappa(\lambda, \beta)\mathrm{e}^{i\beta}$,

$$\kappa(\lambda, \beta) = \beta^2 \int\limits_0^1 g_\beta(0, \xi) e^{-\lambda\xi}\, d\xi, \quad \beta \in \alpha\mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \alpha = \frac{\pi}{\ell},$$

где $g_\beta$ — функция Грина задачи

$$-w''(y) + \beta^2 w = f(y), \quad y \in (0,1), \quad w'(0) = w(1) = 0.$$

Функция $g_\beta$ имеет вид

$$g_\beta(x,\xi) = \frac{1}{|\beta| \operatorname{ch} \beta} \begin{cases} \operatorname{sh} |\beta|(1-\xi) \operatorname{ch} \beta x, & x < \xi; \\ \operatorname{sh} |\beta|(1-x) \operatorname{ch} \beta \xi, & x > \xi. \end{cases}$$

Итак, мультипликатор $\kappa(\lambda, \beta)$ имеет вид

$$\frac{|\beta| e^{-\lambda}}{\operatorname{ch} \beta} \int_0^1 \operatorname{sh}(|\beta|\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau, \quad \beta \in \alpha\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \;\; \alpha = \frac{\pi}{\ell}. \tag{17}$$

Нули этих интегралов на плоскости $\lambda$ — искомые собственные значения. Нетрудно видеть, что применима теорема Пойа о нулях интегралов Лапласа, и она показывает, что все нули интегралов (17) лежат в левой полуплоскости при всех $\alpha \neq 0$.

Замечание 1. Вывод о принадлежности собственных значений открытой левой полуплоскости согласуется с существованием функционала Ляпунова (7). Однако, существование функционала Ляпунова (7) само по себе влечет лишь принадлежность собственных значений *замкнутой* левой полуплоскости.

Замечание 2. Оператор $K(\lambda)$ ограничен, например, в пространстве $\widetilde{\mathrm{L}_2}$, состоящем из квадратично-суммируемых $2\ell$-периодических функций с нулевым средним.

Замечание 3. Задача Юдовича в полосе $D$ также имеет стационарное решение $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x$, $H = \mathrm{const}$ при граничных условиях

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x|_{x=0} = 1, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x|_{x=1} = 1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}|_{x=0} = 0.$$

Собственные моды малых колебаний в этом случае — решения спектральной задачи, состоящей из уравнений (12), (13) и граничных условий

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \omega|_{x=0} = 0.$$

Но при таких граничных условиях задача имеет только одно собственное значение: $\lambda = 0$, и ему соответствует собственная мода $u = 0$, $v = \mathrm{const}$, $h = 0$.

В дальнейшем мы сосредоточим усилия на граничном условии Кажихова и в определенной степени обобщим анализ рассмотренного выше примера на более широкие классы течений.

## 5. Гармонические течения

Определение 1. Поле $\boldsymbol{V}$ назовем *гармоническим* в области $D$, если $\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$ в $D$.

Гармонические поля, определенные в достаточно регулярной области и касательные к ее границе, образуют конечномерное линейное пространство, размерность которого равна одномерному числу Бетти данной области. Определение 1 не предполагает, что гармоническое поле касается границы области.

Любое гармоническое в $D$ поле удовлетворяет уравнениям Эйлера (1) с $H = \mathrm{const}$.

Определение 2. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $S$ назовем *кольцевой*, если верно одно из двух: или многообразие с краем $D \cup S$ гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на окружность, или на $D \cup S$ действует дискретная подгруппа группы сдвигов плоскости, изоморфная $\mathbb{Z}$, причем пространство ее орбит гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на окружность.

Определение 3. Область $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $S$ назовем *кольцевой*, если верно одно из двух: или многообразие с краем $D \cup S$ гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на двумерное замкнутое ориентируемое мнооообразие, или на $D \cup S$ действует дискретная подгруппа группы сдвигов пространства $\mathbb{R}^3$, изоморфная $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$, причем пространство ее орбит гомеоморфно прямому произведению единичного отрезка на 2-тор.

Например, к числу плоских кольцевых областей относятся: собственно кольцо $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$, а также зазор между прямыми; к числу трехмерных — зазоры между сферами, торами, цилиндрами и плоскостями.

Если в кольцевой области действует дискретная группа сдвигов (это может быть зазор между цилиндрами, прямыми или плоскостями), то все рассматриваемые в такой области поля по умолчанию считаются периодическими.

Пусть $D$ — кольцевая область. Непосредственно из определений 2 и 3 следует, что $\partial D = S_1 \cup S_2$, где $S_1$ и $S_2$ — непересекающиеся связные гладкие поверхности, гомеоморфные друг другу, и любой замкнутый путь в $D$ стягиваем к (гомологичен) некоторому пути на $S_1$.

Из равенства (9) следует, что задача Юдовича в плоской кольцевой области не имеет стационарных решений при граничных данных общего положения. В исключительных случаях стационарное решение все же существует, например, при нулевой завихренности, заданной на входе (и при произвольно заданной нормальной скорости). Однако, в этом случае существует бесконечно много гармонических решений. С целью снятия указанного вырождения обратимся к граничным условиям Кажихова (3), (5). При этом, по умолчанию, считаем, что на $S = \partial D$ задана нормальная скорость $\gamma$, не зависящая от времени, и такая, что $S_1 = S^+$ и $S_2 = S^-$. Предполагаем, что тангенциальная скорость $\mathbf{v}^+$ в условии (5) также не зависит от времени и задана так, что задача имеет гармоническое решение $\boldsymbol{V}$. Это решение единственно в классе гармонических полей. В самом деле, граничное условие (5) определяет, в частности, циркуляции поля вокруг всех граничных контуров, принадлежащих входу, и потому — вокруг любого замкнутого пути в $D$ (это следует из определения кольцевой области).

Пусть $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x) \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$ — векторное поле на области $D$, $X$ — эволюционное семейство задачи Коши (6), где $\mathbf{v} = \boldsymbol{V}$.

Определение 4. Будем говорить, что векторное поле $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x) \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$ безотрывно в $D \cup S$, если в $D \cup S$ определена положительная и ограниченная функция $t^+$ такая, что для любого $x \in D \cup S$

$$X\big(\max(t - t^+(x), 0), x, \max(t, t^+(x))\big) \stackrel{\text{def}}{=} a^+(x) \in S^+. \tag{18}$$

Образ точки $x \in D \cup S$ при отображении $x \mapsto a^+(x)$ назовем местом рождения материальной частицы (находящейся в момент времени в точке $x$).

Так как задача Коши (6) в данном случае решается для автономного ОДУ $X_s = \boldsymbol{V}(X)$,

$$a^+(x) = X\big(\max(t - t_+(x), 0), x, \max(t, t^+(x))\big) = X(0, x, t^+(x)).$$

При этом, независимо от выбора $t > t_+(x)$, отображение $s \mapsto X(s, x, t)$, $s \in (t - t^+(x), t)$, параметризует отрезок $\ell_x$ линии тока (т. е. траектории поля $\boldsymbol{V}$ или траектории материальной частицы соответствующего течения), соединяющий точку $x$ со входом. Поэтому отображение $x \mapsto a^+(x)$ — не что иное, как проекция $D \to S^+$ вдоль линий тока течения $\boldsymbol{V}$.

Пример 1. Пусть $D = \{(x, y) : 0 < y < 1\}$. Выберем функцию $U \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ и определим векторное поле $\mathbf{V} : (x, y) \mapsto (U(y), 0)$. Поле $\mathbf{V}$ — стационарное решение уравнений (1). Соответствующее ему течение называют *сдвиговым*. Рассмотрим такое течение в полосе $D$. Пусть $U(y) > 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$. Тогда $S^- = \{x = 0\}$, $S^+ = \{x = 1\}$, $S^0 = \varnothing$,

$$X(s, x, y, t) = \big(x - (t - s)U(y), y\big), \quad t^+(x, y) = x/U(y),\ a^+(x, y) = (0, y).$$

Если $\inf_{\mathbb{R}} U(y) > 0$, то поле $\mathbf{V}$ безотрывно, при этом $\sup t^+ = t_* = \sup_{\mathbb{R}} U^{-1}(y)$. Безотрывное поле $\mathbf{V}$ порождает течение, полностью обновляющее состав материальных частиц за интервал времени длины $t_*$; в частности, при $t > t_*$ поток полностью состоит из частиц, прошедших через вход.

Пусть $D$ — кольцевая область. Рассмотрим задачу Кажихова в $D$ и предположим, что данные в ее граничных условиях (3), (5) таковы, что она имеет гармоническое решение $\boldsymbol{V}$, причем $S_1 = S^+$ и $S_2 = S^-$. Линеаризуем задачу вблизи $\boldsymbol{V}$. Точечный спектр $\Lambda(\boldsymbol{V})$ оператора линеаризации состоит из собственных значений $\lambda$ следующей краевой задачи

$$\lambda \mathbf{v} + \omega \times \boldsymbol{V} = -\nabla h; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{19}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S^+, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ на } S, \tag{20}$$

где $h$ — возмущение функции Бернулли $H = P + \boldsymbol{V}^2/2$.

Определение 5. Пусть $\tilde{\mathrm{L}}_2(S^+)$ — пространство квадратично-суммируемых функций на $S^+$ с нулевым средним, $\mathscr{B}^+$ — пространство ограниченных операторов в $\tilde{\mathrm{L}}_2(S^+)$.

**Теорема 1.** *Пусть поле $\boldsymbol{V}$ в кольцевой области $D$ гармоническое и безотрывное. Тогда найдется целая функция $\mathrm{K}_+ : \lambda \mapsto \mathrm{K}_+(\lambda) \in \mathscr{B}^+$ такая, что*

$$\Lambda(\boldsymbol{V}) = \{\lambda :\ \ker \mathrm{K}_+(\lambda) \neq \{0\}\},$$

*причем функцию $\mathrm{K}_+$ можно выразить через основное течение явно, с точностью до восстановления соленоидального поля в $D$ по его вихрю при граничных условиях $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $S^-$, $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$ на $S^+$.*

**Лемма 1.** *В кольцевой области $D$ рассмотрим краевую задачу*

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega,\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } D;\ \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S_1,\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S_2, \tag{21}$$

*где $\omega$ — гладкое поле такое, что $\operatorname{div} \omega = 0$ в $D$ и $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ на $S_1$. Тогда имеется ровно одно гладкое решение $\mathbf{v}$.*

$\lhd$ В силу граничного условия на $S_1$, любое решение задачи (21) имеет нулевую циркуляцию вокруг любого лежащего на $S_1$ замкнутого пути. Следовательно, решение $\mathbf{u}$ однородной задачи (21) имеет нулевую циркуляцию вокруг любого замкнутого пути в $D$ (так как $D$ — кольцевая область), и потому потенциально, т. е. $\mathbf{u} = \nabla \phi$, где $\phi$ — однозначная скалярная функция. Тогда $\Delta \phi = 0$ в $D$, $d\phi/dn = 0$ на $S_2$, $\phi \equiv \mathrm{const}$ на $S_1$; отсюда $\phi \equiv \mathrm{const}$ и $\mathbf{u} \equiv 0$ в $D$. Обратимся к построению решения. Будем, не нарушая общности, считать, что $S_1$ лежит внутри $S_2$. Продолжим поле $\omega$ до поля $\tilde{\omega}$ на $\mathbb{R}^3$, полагая $\tilde{\omega} = 0$ внутри $S_1$ и $\tilde{\omega} = \nabla \psi$ во внешности $S_2$, где $\Delta \psi = 0$, $d\psi/dn = \omega \cdot \mathbf{n}$ на $S_2$, и

$\psi(x) = o(1)$, $|x| \to \infty$. Поле $\tilde{\omega}$ имеет тангенциальный разрыв на $S_2$, но остается соленоидальным на $\mathbb{R}^3$ в обобщенном смысле, и хорошо затухает на бесконечности. Положим $G_0 = (4\pi|x|)^{-1}$, $\mathbf{b} = G_0 * \tilde{\omega}$, где $*$ — знак свертки. Заметим, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{b} = \tilde{\omega}$ в $\mathbb{R}^3$, в частности, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{b} = \omega$ в $D$. Так как $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ на $S_1$ и $D$ — кольцевая область, найдется гармоническое и тангенциальное к $S$ поле $\mathbf{h}$ такое, что $\mathbf{b}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{b} + \mathbf{h}$ имеет нулевые циркуляции вокруг любого замкнутого пути на $S_1$ так, что найдется скалярная функция $\phi_0 : (\mathbf{b}_0 - \nabla\phi_0) \times \mathbf{n} = 0$ на $S_1$. Наконец, положим $\mathbf{v} = \mathbf{b}_0 + \nabla\phi$, $\Delta\phi = 0$ в $D$, $\phi = -\phi_0$ на $S_1$ и $d\phi/dn = -\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{n}$ на $S_2$. $\triangleright$

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 1. Коммутатор

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}$$

векторных полей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ выражается в виде

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\operatorname{div}\mathbf{b})\mathbf{a} + (\operatorname{div}\mathbf{a})\mathbf{b}. \tag{22}$$

Отсюда, применив rot к (19), выводим уравнение вихря

$$\lambda\omega + [\omega, \boldsymbol{V}] = 0. \tag{23}$$

Данное уравнение интегрируется вдоль характеристик, так что

$$\partial_s \Big( \mathrm{e}^{\lambda s} \left( X'(s,x,t) \right)^{-1} \boldsymbol{\omega}\,(y) \Big) = 0, \quad y = X(s,x,t),\ s \in (t - t^+(x), t), \tag{24}$$

где $x \in D$ и $t > t^+(x)$ произвольны, $X'(s,x,t)$ — дифференциал отображения $x \mapsto X(s,x,t)$ в точке $x$. Таким образом, точка $x$ задает линию тока $\ell_x$ поля $\boldsymbol{V}$ (т. е. траекторию материальной частицы соответствующего течения жидкости), которая сталкивается со входом в месте рождения материальной частицы, координата которого $a^+(x)$ определена в (18). В силу (24)

$$X'(s,x,t)\boldsymbol{\omega}\,(x) = \mathrm{e}^{\lambda(s-t)}\boldsymbol{\omega}(y), \quad y = X(s,x,t),\ s \in (t - t^+(x), t),$$

а отсюда, устремив $s \to t - t^+(x)$, найдем

$$\omega(x) = \mathrm{e}^{-\lambda t^+(x)} \mathscr{X}^+(x)\omega^+(a^+(x)), \quad x \in D, \tag{25}$$

где $\omega^+$ — след $\omega$ на $S^+$, и введено обозначение

$$\mathscr{X}^+(x) = X'(t^+(x), a^+(x), 0). \tag{26}$$

Итак, решение $\omega$ уравнения (23) в $D$ определено своим следом $\boldsymbol{\omega}^+$ на $S^+$. Однако, построенное таким образом поле $\omega$ не обязано быть представимо в виде ротора какого бы то ни было поля в $D$. Чтобы такое представление имело место, достаточно равенства $\operatorname{div}\omega = 0$ и равенства нулю потоков поля $\omega$ через каждую компоненту границы $S$. Так как граница кольцевой области имеет ровно две компоненты, достаточно удостовериться в равенстве нулю дивергенции и одного из потоков решения $\boldsymbol{\omega}$. С этой целью проектируем уравнение (19) на касательные плоскости к входу и находим

$$\omega^+ = -\gamma^{-1}\mathbf{n} \times \nabla h, \quad \gamma = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}. \tag{27}$$

Выбираем $\boldsymbol{\omega}^+$ в формуле (25) в соответствии с (27). Тогда $\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ на $S^+$, и его поток через $S^+$ равен нулю. Заметим, что равенство $\boldsymbol{\omega}^+ \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ согласует наш выбор

$\boldsymbol{\omega}^+$ с граничным условием (20). Действительно, нормальная компонента вихря $\mathrm{rot}_n\mathbf{v}$ на $S$ не содержит нормальных производных поля $\mathbf{v}$ и не зависит от его нормальной компоненты, а касательная компонента поля $\mathbf{v}$ на $S^+$ равна нулю.

Полагаем $\rho = \operatorname{div}\omega$. Уравнение (23) в силу тождества (22) записываем так

$$\lambda\boldsymbol{\omega} + \mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}) + \rho\boldsymbol{V} = 0. \tag{28}$$

Взяв дивергенцию уравнения (28), находим

$$\lambda\rho + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho = 0.$$

Интегрируем это уравнение вдоль характеристик и находим, что $\rho\equiv 0$ при условии $\rho^+\equiv 0$, где $\rho^+$ — след $\rho$ на $S^+$. Проектируем (28) на нормаль к $S^+$, принимаем во внимание (27) и заключаем, что

$$\rho^+ = \gamma^{-1}\mathrm{rot}_n((\gamma^{-1}\mathbf{n}\times\nabla h)\times\boldsymbol{V})\big|_{S^+} = \gamma^{-1}\mathrm{rot}_n(\nabla h)\,|_{S^+}\equiv 0. \tag{29}$$

На самом деле тождество (29) выполняется для произвольной функции $h$, так как поле

$$(\gamma^{-1}\mathbf{n}\times\nabla h)\times\boldsymbol{V} - \nabla h$$

нормально к $S^+$ даже при произвольной $h$.

Пусть $\chi$ — скалярная функция на $S^+$ с нулевым средним и $\lambda\in\mathbb{C}$. Определим оператор

$$\mathrm{K}_+(\lambda):\ \chi\mapsto\mathbf{n}\cdot(\mathrm{GL}_+(\lambda)\chi)|_{S^+}\,, \tag{30}$$

где оператор $\mathrm{L}_+(\lambda):\chi\mapsto\omega$ определен в (25)–(27), где в (27) следует положить $h=\chi$, а через G обозначен оператор восстановления векторного поля по вихрю, описанный в лемме 1. Заметим, что образ $\mathrm{K}_+$ состоит из функций с нулевым средним, так как по построению $\mathbf{n}\cdot(\mathrm{GL}_+(\lambda)\chi)=0$ на $S^-$ и поле $\mathrm{GL}_+(\lambda)\chi$ имеет нулевую дивергенцию. Итак, каждому ненулевому $\chi_\lambda\in\ker\mathrm{K}_+(\lambda)$ соответствует собственное поле $\mathbf{v}_\lambda = \mathrm{GL}_+\chi_\lambda$ задачи (19), (20), что и требовалось. $\triangleright$

Замечание 4. Если $\chi_\lambda$ изменить на постоянную, то поле $\mathbf{v}_\lambda$ не изменится. Поэтому исключение тождественных функций из области определения $\mathrm{K}_+$ не приводит к потере собственных полей.

Замечание 5. Функцию $\chi$ можно интерпретировать как след возмущения $h$ функции Бернулли или давления на входе. Эти возмущения на входе совпадают в силу граничного условия (20). Поэтому подчинение $\chi$ требованию нулевого среднего на входе согласуется с тем, что функция Бернулли, равно как и давление, определены с точностью до произвольной постоянной. В частности, нулевое среднее $\chi$ на входе, с учетом граничного условия (20), можно трактовать как сохранение среднего давления на входе при возмущении потока.

Замечание 6. Мы опускаем детальное доказательство ограниченности $\mathrm{K}(\lambda)$.

## 6. Течения в зазоре между цилиндрами

Пусть $D$ — зазор между круговыми коаксиальными цилиндрами радиусов 1 и $a>1$, $r$, $\theta$, $z$ — цилиндрические координаты в $D$, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ — орты координатных направлений. В $D$ рассмотрим задачу Кажихова со следующими данными:

$$\gamma|_{r=1} = -1;\quad \gamma|_{r=a} = 1/a, \tag{31}$$

так что $S^+ = \{r = 1\}$, $S^- = \{r = a\}$ и

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \Gamma \mathbf{e}_\theta)|_{S^+} = 0, \tag{32}$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}$ — параметр, определяющий циркуляцию потока вокруг входа (она равна $2\pi\Gamma$). Вдоль оси $z$ — условия периодичности с периодом $2\ell$. Данная задача имеет гармоническое решение

$$\boldsymbol{V} = r^{-1}(\mathbf{e}_r + \Gamma \mathbf{e}_\theta). \tag{33}$$

Нетрудно убедиться, что оно безотрывно. Рассмотрим линеаризацию возле поля (33). Введем гармоники

$$\mathrm{b}_{n\alpha} = \exp\, i(n\theta + \alpha z), \quad n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \alpha_0\mathbb{Z},\ \alpha_0 = \pi/\ell,\ n^2 + \alpha^2 \neq 0.$$

Ввиду симметрии задачи, $\mathrm{K}_+(\lambda)$ представляет собой мультипликаторное преобразование рядов Фурье, так что

$$\mathrm{K}_+(\lambda) : \mathrm{b}_{n\alpha} \mapsto \kappa_{\Gamma,a}(n, \alpha, \lambda)\mathrm{b}_{n\alpha},$$

а потому точечный спектр $\Lambda(\boldsymbol{V})$ совпадает с объединением множеств нулей всех мультипликаторов $\kappa_{\Gamma,a}(n, \alpha, \lambda, )$, $n^2 + \alpha^2 \neq 0$, на плоскости комплексной переменной $\lambda$.

Вычисляем оператор $\mathrm{L}_+(\lambda)$. Полагаем $\mathbf{v} = \mathrm{b}_{n\alpha}\widehat{\mathbf{v}}(r)$, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{b}_{n\alpha}\widehat{\boldsymbol{\omega}}(r)$, где

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \xi\mathbf{e}_r + \eta\mathbf{e}_\theta + \zeta\mathbf{e}_z, \quad \widehat{\mathbf{v}} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_z;$$

при этом граничные условия (20) примут вид

$$u(1) = v(1) = w(1) = 0; \quad u(a) = 0. \tag{34}$$

В соответствии с (27), $\boldsymbol{\omega}^+ = ib_{n\alpha}(\alpha\mathbf{e}_\theta - n\mathbf{e}_z)$, так что уравнение (23) (записанное с учетом (22)), граничные условия на $S^+$ и условие $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$ примут вид

$$\lambda\xi - inr^{-2}(\eta - \Gamma\xi) - i\alpha r^{-1}\zeta = 0; \quad \xi|_{r=1} = 0; \tag{35}$$

$$\lambda\eta - i\alpha\Gamma r^{-1}\zeta + \big(r^{-1}(\eta - \Gamma\xi)\big)_r = 0; \quad \eta|_{r=1} = i\alpha; \tag{36}$$

$$\lambda\zeta + r^{-1}\zeta_r + i\beta r^{-2}\zeta = 0; \quad \zeta|_{r=1} = -in; \tag{37}$$

$$r^{-1}\left((r\xi)_r + in\eta\right) + i\alpha\zeta = 0. \tag{38}$$

С помощью (38) исключим $\eta$, $\zeta$ из (35). Получим

$$r\lambda\xi + \xi_r + r^{-1}(in\Gamma + 1)\xi = 0, \quad \xi(1) = 0.$$

Отсюда следует, что $\xi \equiv 0$. В таком случае уравнения (36), (37) и (38) зависимы, и легко интегрируются, так что

$$\zeta = -in\mathscr{E}(r); \quad \eta = i\alpha r\mathscr{E}(r); \quad \mathscr{E}(r) = \mathscr{E}(r, \lambda, n\Gamma) = r^{-in\Gamma}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda(r^2-1)}{2}}. \tag{39}$$

Вычисляем оператор $\mathrm{GL}_+(\lambda)$. Восстанавливаем скорость по найденному вихрю, с учетом граничных условий (34). Получаем

$$w(r) = \int_1^r (i\alpha u - \eta)\, ds; \quad rv(r) = \int_1^r (s\zeta + inu)\, ds.$$

Подставив эти выражения в условие $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и положив

$$\phi(r) = \int\limits_1^r u(s)\,ds,$$

получим неоднородную краевую задачу для уравнения Бесселя — Макдональда:

$$r^2\phi_{rr} + r\phi_r - (n^2 + \alpha^2 r^2)\phi = -r^2 F_{n,\alpha}; \quad \phi(1) = 0,\ \phi_r(a) = 0,$$

$$\text{где } F_{n,\alpha}(r,\lambda,n\Gamma) = \big((n/r)^2 + \alpha^2\big)\int\limits_1^r \mathscr{E}(s,\lambda,n\Gamma)\,s\,ds.$$

Теперь $\kappa_{n,\alpha}(\lambda,\Gamma,a) = u(1) = \phi_r(1)$. Более явно,

$$\kappa_{n,\alpha}(\lambda,\Gamma,a) = K^{-1}_{\alpha,n,a}(1)\int\limits_1^a K_{\alpha,n,a}(s)F_{n,\alpha}(s,\lambda,n\Gamma)\,s\,ds, \tag{40}$$

где $K_{\alpha,n,a}$ — решение задачи Коши

$$r^2K_{rr} + rK_r - (n^2 + r^2\alpha^2)K = 0; \quad K(a) = 1;\ K_r(a) = 0. \tag{41}$$

Введем обозначение

$$\beta = n\Gamma. \tag{42}$$

Запишем мультипликатор (40) в форме интеграла Лапласа:

$$\kappa_{n,\alpha}(\lambda,\beta,a) = -K^{-1}_{\alpha,n,a}(1)\int\limits_1^a r^{-i\beta}\mathrm{e}^{-\lambda(r^2-1)/2}K'_{\alpha,n,a}(r)r^2dr, \tag{43}$$

где $'$ обозначает производную по $r$. Преобразование (40) в (43) сводится к интегрированию правой части (40) «по частям» с учетом уравнения и данных задачи Коши (41).

Обозначим через $\Lambda_{n,\alpha,\beta,a}$ множество нулей интегралов Лапласа (43) на плоскости комплексного параметра $\lambda$. Из сказанного выше вытекает

**Лемма 2.** *Пусть $a > 1$, $D = \{(r,\theta,z) : 1 < r < a\}$, $\Lambda_{\Gamma,a}$ — точечный спектр задачи* (19)–(20) *в $D$, где $\boldsymbol{V}$ — поле* (33). *Тогда*

$$\Lambda_{\Gamma,a} = \bigcup_{\substack{\alpha\in\alpha_0\mathbb{Z},\ \beta=n\Gamma,\\ n\in\mathbb{Z},\ n^2+\alpha^2\neq 0}} \Lambda_{n,\alpha,\beta,a}.$$

*В силу леммы* 2, *вопрос о расположении спектра поля* (33) *относительно мнимой оси сводится к проблеме Рауса — Гурвица для интегралов Лапласа* (43).

**Лемма 3.**

$$\Lambda_{n,\alpha,0,a} \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\} \quad (\forall\, n\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\mathbb{R}).$$

$\lhd$ Доказательство состоит в применении теоремы Пойа о нулях интегралов Лапласа (см. [12]) к интегралам вида

$$\int\limits_1^a \mathrm{e}^{-\lambda(r^2-1)/2}\,(-rK_r)\,r\,dr, \quad K = K_{\alpha,n,a}.$$

С целью сделать это, убедимся, что для любого $r \in (1, a)$

$$\text{(i) } K_r(r) < 0; \qquad \text{(ii) } (rK_r(r))_r > 0.$$

В силу задачи Коши (41),

$$\int\limits_s^a (\alpha^2 r + n^2/r)K^2 dr = -K(s)K_r(s) - \int\limits_s^a K_r^2 r\, dr \quad (\forall\, s:\ 1 \leqslant s < a).$$

Следовательно, $K(s)K_r(s) \neq 0$ при $s \in [1, a)$. Отсюда следуют утверждения (i)–(ii), с учетом уравнения и начальных условий задачи Коши (41). $\rhd$

Непосредственно из лемм 2 и 3 следует теорема 2.

**Теорема 2.** *Пусть в условиях леммы* 2 $\Lambda_{\Gamma,a} \cap \{\lambda : \mathrm{Re}\ \lambda \geqslant 0\} \neq \varnothing$. *Тогда* $\beta = n\Gamma \neq 0$.

Таким образом, теорема 2 утверждает, во-первых, что потенциальное течение ($\Gamma = 0$, поток радиален) не имеет ни нейтральных, ни неустойчивых мод вида $\widehat{\mathbf{v}}\,(r)\mathrm{e}^{(t\lambda + i(\alpha z + \theta n))}$, $\mathrm{Re}\ \lambda \geqslant 0$, $\alpha^2 + n^2 \neq 0$, и, во-вторых, вращательно-симметричные моды ($n = 0$) не могут быть ни нейтральными, ни неустойчивыми.

Утверждение теоремы 2 верно и в том случае, если в основном течении источник заменить на сток, т. е. положить

$$\boldsymbol{V} = r^{-1}(-\mathbf{e}_r + \Gamma \mathbf{e}_\theta).$$

В таком случае вход и выход потока меняются местами: $S^- = \{r = 1\}$ и $S^+ = \{r = a\}$. Соответствующая линеаризованная задача будет состоять из уравнения (19) и граничных условий

$$u(a) = v(a) = w(a) = 0; \quad u(1) = 0.$$

Если $\lambda \in \Lambda_{n,\alpha,\beta,a}$, то малое возмущение давления на входе имеет вид $\exp(\lambda t + in\theta + i\alpha z)$ (это вытекает из сказанного на стр. 41). Однако, течение (33) в зазоре между цилиндрами допускает малые возмущения, сохраняющие давление на входе. Такие возмущения обращаются в нуль за конечное время. В самом деле, линеаризуем уравнение Эйлера на потоке (33) и будем разыскивать малые возмущения, представимые в виде $\mathbf{v} = v(r, t)\mathbf{e}_\theta + w(r, t)\mathbf{e}_z$, $p = p(r, t)$ ($p$ — возмущение давления). Придем к системе

$$\tfrac{2\Gamma v}{r^2} = p_r, \quad (rv)_t + \tfrac{(rv)_r}{r} = 0, \quad w_t + \tfrac{w_r}{r} = 0, \quad t > 0,\ r \in (1, a), \tag{44}$$

$$v|_{r=1} = 0, \quad w|_{r=1} = 0, \quad p|_{r=1} = 0, \tag{45}$$

где основное течение — источник. В случае стока граничные условия нужно перенести в точку $a$. Граничное условие для $p$ вытекает из сохранения среднего давления на входе. В любом случае система (44)–(45) интегрируется явно и любое ее решение обращается в нуль для всех $r \in (1, a)$ при любом $t > (a^2 - 1)/2$. Отсюда, в частности, следует неполнота системы спектральных проекторов, соответствующих дискретному спектру $\Lambda_{a,\Gamma}$.

## 7. Течения в зазоре между сферами

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Эйлера (1) в сферическом слое $D = \{1 < |x| < a\}$, $a > 1$, с граничными условиями Кажихова (3), (5), где $\gamma = \mp 1$ при $r = 1$ и $\gamma = \pm a^{-2}$ при $r = a$, и $\mathbf{v}^+ = 0$. Данная задача вращательно-инвариантна, и при каждом выборе знаков имеем вращательно-инвариантные решения

$$\mathbf{V} = \pm \mathbf{e}_r / r^2, \quad H = 0. \tag{46}$$

Если в (46) выбран знак «+», то $S^+ = \{x \in S : r = 1\}$, иначе $S^+ = \{x \in S : r = a\}$.

Пусть $S^+$ — сфера меньшего радиуса. Вычисляем оператор $\mathrm{L}_+(\lambda)$. С этой целью переходим к сферическим координатам

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

и пусть $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ — соответствующие орты. Полагаем

$$\boldsymbol{\omega} = \xi \mathbf{e_r} + \eta \mathbf{e}_\theta + \zeta \mathbf{e}_\phi$$

и приходим к задаче Коши

$$\lambda\xi - \frac{1}{r^3 \sin\theta}\big\{(\eta \sin\theta)_\theta + \zeta_\phi\big\} = 0, \quad \xi|_{S^+} = 0, \tag{47}$$

$$\lambda\eta + \frac{1}{r^3}\{r\eta_r - \eta\} = 0, \quad \eta|_{S^+} = \frac{\chi_\phi}{\sin\theta}, \tag{48}$$

$$\lambda\zeta + \frac{1}{r^3}\{r\zeta_r - \zeta\} = 0, \quad \zeta|_{S^+} = -\chi_\theta. \tag{49}$$

Решив задачу (47)–(49), с учетом граничных условий, найдем

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\mathscr{E}(\lambda, r)\chi_\phi}{\sin\theta}, \quad \zeta = -\mathscr{E}(\lambda, r)\chi_\theta, \quad \mathscr{E}(\lambda, r) = re^{-\frac{\lambda(r^3-1)}{3}}. \tag{50}$$

Вычисляем оператор $\mathrm{GL}_+(\lambda)$. Имеем

$$(w\sin\theta)_\theta = v_\phi, \quad \frac{u_\phi}{\sin\theta} - (rw)_r = \frac{r\mathscr{E}\chi_\phi}{\sin\theta}, \quad (rv)_r - u_\theta = -r\mathscr{E}\chi_\theta. \tag{51}$$

Интегрируем второе равенство в (51) с учетом граничных условий. Находим

$$w = \tfrac{\Phi_\phi - \mathscr{E}_1\chi_\phi}{r\sin\theta}, \quad v = \tfrac{1}{r}(\Phi_\theta - \mathscr{E}_1\chi_\theta), \tag{52}$$

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \int\limits_1^r u\, dr, \quad \mathscr{E}_1(\lambda, r) = \int\limits_1^r \mathscr{E}(\lambda, s)s\, ds. \tag{53}$$

Заметим, что первое уравнение в (51) следует из выражений (52). Подставляем эти выражения в уравнение $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и находим

$$\Delta\Phi + \mathscr{E}_1(\lambda, r)r^{-2}\Delta_+\chi = 0, \tag{54}$$

где $\Delta_+ f = -\frac{1}{\sin\theta}(f_\theta \sin\theta)_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} f_{\phi\phi}$ — оператор Бельтрами на сфере. Полагаем $\chi = \mathrm{b}_m$, $\Phi = \widehat{\Phi}(r)\mathrm{b}_m$, где $\mathrm{b}_m$ — собственная функция оператора Бельтрами, соответствующая собственному значению $\mu_m = m(m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, и приходим к краевой задаче

$$\left(r^2 \widehat{\Phi}'_m\right)' - \mu_m\ (\widehat{\Phi}_m - \mathscr{E}_1(\lambda, r)) = 0, \tag{55}$$

$$\widehat{\Phi}'_m(1) = 0, \quad \widehat{\Phi}_m(1) = 0, \quad \widehat{\Phi}'_m(a) = 0. \tag{56}$$

Итак,

$$\mathrm{K}_+(\lambda)\mathrm{b}_m = u|_{r=1} = \widehat{\Phi}'_m(1)\mathrm{b}_m \quad (\forall\, b_m \in \mathrm{H}_m),$$

где $\mathrm{H}_m$ — собственное подпространство оператора Бельтрами на сфере, соответствующее собственному числу $\mu_m = m(m+1)$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, мультипликатором служит $\kappa_m(\lambda, a) = \widehat{\Phi}'_m(1)$, где $\widehat{\Phi}_m$ — решение задачи (55)–(56). Записываем это решение с помощью функции Грина и находим

$$\kappa_m(\lambda, a) = \frac{\mu_m}{K_{m,a}(1)} \int_1^a K_{m,a}(r)\mathscr{E}_1(\lambda, r)\, dr, \tag{57}$$

где $K_{m,a}$ — решение однородного уравнения (55), удовлетворяющее условиям $K_{m,a}(a) = 1$, $K'_{m,a}(a) = 0$. Выражаем $\mu_m K_{m,a}$ из указанного уравнения, интегрируем по частям и получаем интеграл

$$\kappa_m(\lambda, a) = -\frac{1}{K_{m,a}(1)} \int_1^a K'_{m,a}(r)\mathscr{E}(\lambda, r) r^3 dr = 0. \tag{58}$$

Данный интеграл приводим к интегралу Лапласа, к которому применяем теорему Пойа, и устанавливаем, что все его нули — в открытой левой полуплоскости. Точно также разбираем случай, когда вход потока расположен на сфере радиуса $a$.

Подведем итог.

**Теорема 3.** *Пусть* $D = \{x : 1 < |x| < a\} \subset \mathbb{R}^3$ *и* $\Lambda_a$ — *точечный спектр задачи* (19)–(20) *в* $D$, *где* $\mathbf{V} = \pm|x|^{-3}x$. *Тогда* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *для любых* $\lambda \in \Lambda_a$ *и* $a \in (1, \infty)$.

## Литература


1. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.—М.: Мир., 1983.—301 с.
2. *Арнольд В. И. и др.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.—1986.—Т. 5.—С. 5–218.
3. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.
4. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. матем. и мех.—1971.—Т. 35, №. 4.—С. 638–655.
5. *Haragus M., Iooss G.* Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems.—London: Springer, 2010. DOI: 10.1007/978-0-85729-112-7.
6. *Дикий Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы.—Гидрометеоиздат, 1976.
7. *Shvydkoy R., Latushkin Y.* Operator algebras and the Fredholm spectrum of advective equations of linear hydrodynamics // J. Func. Anal.—2009.—Vol. 257, № 10.—P. 3309–3328. DOI: 10.1016/j.jfa.2009.06.006.
8. *Arnold V.* Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits // Annales de l'institut Fourier.—1966.—Vol. 16, № 1.—P. 319–361. DOI: 10.5802/aif.233.
9. *Morgulis A. B., Yudovich V. I.* Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.—2002.—Vol. 12, № 2.—P. 356–371. DOI: 10.1063/1.1480443.
10. *Моргулис А. Б.* Вариационные принципы и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Сиб. электр. мат. изв.—2017.—Т. 14.—С. 218-251.
11. *Островский И. В.* Исследования М. Г. Крейна по теории целых и мероморфных функций и их дальнейшее развитие // Укр. мат. журн.—1994.—Т. 46, № 1–2.—С. 87–99.
12. *Седлецкий А. М.* О нулях преобразований Лапласа // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 6.—С. 883–892.
13. *Chemin J. Y.* Fluides Parfaits Incompressibles.—Paris, 1995.—Ser. Astérisque. Vol. 230
14. *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Мат. сб.—1964.—Т. 64 (106), № 4.—С. 562–588.
15. *Алексеев Г. В.* О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды.—1976.—Т. 24.—С. 15–35.

16. *Bardos C.* Existence et unicite de la solution de l'equation d'Euler en dimension deux // J. Math. Anal. Appl.—1972.—Vol. 40, № 3.—P. 769–790.
17. *Кажихов А. В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикл. матем. и мех.—1980.—Т. 44, вып. 5.—С. 947–949.
18. *Антонцев С., Кажихов А., Монахов В.* Краевые задачи механики неоднородной жидкости.—Новосибирск: Наука, 1983.—320 с.
19. *Temam R., Wang X.* Boundary layers associated with incompressible Navier–Stokes equations: the noncharacteristic boundary case // J. Differential Equations.—2002.—Vol. 179, № 2.—P. 647–686. DOI: 10.1006/jdeq.2001.4038.
20. *Ilin K.* Viscous boundary layers in flows through a domain with permeable boundary // European J. of Mechanics-B/Fluids.—2008.—Vol. 27, № 5.—P. 514–538. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2007.10.003.
21. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. of Fluid Mech.—1967.—Vol. 30, № 1.—P. 197–207. DOI: 10.1017/S0022112067001375.
22. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения.—М.: Наука, 1990.—176 с.

*Статья поступила 6 мая 2019 г.*

Ильин Константин Иванович
Йоркский университет, *лектор*
Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD
E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`
https://orcid.org/0000-0003-2770-3489;

Моргулис Андрей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
*ведущий научный сотрудник отдела диф. уравнений*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
*профессор кафедры вычислительной математики и мат. физики*
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `morgulisandrey@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-8575-4917;

Черныш Алексей Сергеевич
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
*аспирант кафедры вычислительной математики и мат. физики*
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `aleksei.0.chernysh@gmail.com`

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 31–49*

## OPERATOR-VALUED LAPLACE'S INTEGRALS AND STABILITY OF THE OPEN FLOWS OF INVISCID INCOMPRESSIBLE FLUID

Ilin, K. I.[1], Morgulis, A. B.[2,3] and Chernish, A. S.[3]
[1] The University of York, Heslington, York YO10 5DD, UK;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[3] I. I. Vorovich Institute of Mathematics,
Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia
E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`, `morgulisandrey@gmail.com`,
`aleksei.0.chernysh@gmail.com`

**Abstract.** We study the spectra of boundary value problems arising upon the linearization of the Euler equations of an ideal incompressible fluid near stationary solutions, describing the flows in which the fluid is entering the flow region and leaving it through some parts of the boundary. It is natural to refer to such flows as the open ones. The spectra of open flows have been explored in less details than in the case of completely impermeable boundaries or conditions of periodicity. In this paper, we discover a class of open flows the spectra of which consists of 'zeros' of an entire operator-valued function represented by kind of Laplace's integral. The localizing of the spectra of such flows reduces, therefore, to an operator-valued Routh–Hurwitz's problem for this integral. In a number of interesting special cases, this operator function can be expressed as a multiplier transformation of Fourier series, and then the above Routh–Hurwitz's problem turns to be scalar, and moreover, it can be solved with the help of Polias' theorem on zeros of the Laplace integrals. On this base, we proved the localization of the spectra inside the open left complex half-plane for a number of specific flows for which such proofs have not been known earlier.

**Key words:** Euler equations, inviscid incompressible fluid, stability, spectra, entire functions, Routh-Gurwitz's problem.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 76B47, 76E09, 30D20.

**For citation:** Ilin, K. I., Morgulis, A. B. and Chernish, A. S. Operator-Valued Laplace's Integrals and Stability of the Open Flows of Inviscid Incompressible Fluid, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 31–49 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36460.

## References

1. *Iooss, G. and Joseph, D. D. Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer Science & Business Media, 2012.
2. *Arnold, V. I. et al. Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*, Springer Science & Business Media, 2013, vol. 5.
3. *Yudovich, V. I. The Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory*, Transl. of Math. Monogr., vol. 74, American Math. Soc., Providence, RI, 1989, iv+170 pp.
4. *Yudovich, V. I.* The Onset of Auto-Oscillations in a Fluid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, no. 4, pp. 587–603.
5. *Haragus, M. and Iooss, G. Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, London, Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-112-7.
6. *Dikiy, L. A. Hydrodynamic Stability and Atmosphere Dynamics*, Gidrometeoizdat, Leningrad, 1976 (in Russian).
7. *Shvydkoy, R. and Latushkin, Y.* Operator Algebras and the Fredholm Spectrum of Advective Equations of Linear Hydrodynamics, *Journal of Functional Analysis*, 2009, vol. 257, no. 10, pp. 3309–3328.
8. *Arnold, V.* Sur la Geometrie Differentielle des Groupes de Lie de Dimension Infinie et ses Applications a l'Hydrodynamique des Fluides Parfaits, *Annales de l'institut Fourier*, 1966, vol. 16, no. 1, pp. 319–361. DOI: 10.5802/aif.233.
9. *Morgulis, A. B. and Yudovich, V. I.* Arnold's Method for Asymptotic Stability of Steady Inviscid Incompressible Flow Through a Fixed Domain with Permeable Boundary, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2002, vol. 12, no. 2, pp. 356–371. DOI: 10.1063/1.1480443.
10. *Morgulis, A. B.* Variational Principles and Stability of the Inviscid Open Flows, *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2017, vol. 14, pp. 218–251 (in Russian).
11. *Ostrovskii, I. V.* M. G. Krein's Investigations in the Theory of Entire and Meromorphic Functions and their Further Development, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1994, vol. 46, no. 1–2, pp. 87–100. DOI: 10.1007/BF01057003.
12. *Sedletskii, A. M.* On the Zeros of Laplace Transforms, *Mathematical Notes*, 2004, vol. 76, no. 5–6, pp. 824–833. DOI: 10.1023/B:MATN.0000049682.65990.e7.
13. *Chemin, J. Y. Fluides Parfaits Incompressibles*, Paris, 1995. Ser. Astérisque, vol. 230.
14. *Yudovich, V. I.* A Two-Dimensional Non-Stationary Problem on the Flow of an Ideal Incompressible Fluid Through a Given Region, *Matematicheskii sbornik* (N.S.) [Sbornik: Mathematics], 1964, vol. 64, no. 106, pp. 562–588 (in Russian).
15. *Alekseev, G. V.* On Solvability of the Nonhomogeneous Boundary Value Problem for Two-Dimensional Nonsteady Equations of Ideal Fluid Dynamics, *Dinamika Sploshnoy Sredy*, 1976, vol. 24, pp. 15–35 (in Russian).
16. *Bardos, C.* Existence et Unicite de la Solution de l'Equation d'Euler en Dimension Deux, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1972, vol. 40, no. 3, pp. 769–790.
17. *Kazhikhov, A. V.* Note on the Formulation of the Problem of Flow Through a Bounded Region Using Equations of Perfect Fluid, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, vol. 44, no. 5, pp. 672–674.

18. *Antontsev, S. N., Kazhikhov, A. V. and Monakhov, V. N. Boundary-Value Problems in the Mechanics of Nonuniform Fluids*, Amsterdam, North-Holland, 1990, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 22.
19. *Temam, R. and Wang, X.* Boundary Layers Associated with Incompressible Navier–Stokes Equations: the Noncharacteristic Boundary Case, *Journal of Differential Equations*, 2002, vol. 179, no. 2, pp. 647–686. DOI: 10.1006/jdeq.2001.4038.
20. *Ilin, K.* Viscous Boundary Layers in Flows Through a Domain with Permeable Boundary, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2008, vol. 27, no. 5, pp. 514–538. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2007.10.003.
21. *Beavers, G. S. and Joseph, D. D.* Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 30, no. 1, pp. 197–207. DOI: 10.1017/S0022112067001375.
22. *Chetaev N. G. The Stability of Motion*, Pergamon Press, 1961.


*Received 6 May, 2019*


Konstantin Ilin
The University of York,
Heslington, York YO10 5DD, United Kingdom,
*Lecturer*
E-mail: `konstantin.ilin@york.ac.uk`
https://orcid.org/0000-0003-2770-3489

Andrey Morgulis
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
*Leading Researcher at the Division of Differential Equation*;
I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia,
*Professor*
E-mail: `morgulisandrey@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-8575-4917

Alexey Chernish
I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia,
*Ph.D. Student*
E-mail: `aleksei.0.chernysh@gmail.com`

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 50–61*

**УДК** 517.9
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36461

# О МАТРИЧНОМ ОПЕРАТОРЕ РИМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

**А. Э. Пасенчук**[1], **В. В. Серегина**[2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105;
[2] Азово-черноморский инженерный институт,
Россия, 347740, Зерноград, ул. Ленина, 21

E-mail: pasenchuk@mail.ru, vic.victora@yandex.ru

**Аннотация.** В пространстве гладких на единичной окружности вектор-функций рассматривается матричный оператор линейного сопряжения, порождаемый краевой задачей Римана. Предполагается, что коэффициенты краевой задачи являются гладкими матрицами-функциями. Вводится и изучается понятие гладкой вырожденной факторизации типов «плюс» и «минус» гладкой матрицы-функции. В терминах вырожденных факторизаций даются необходимые и достаточные условия нетеровости рассматриваемого матричного оператора Римана в пространстве гладких вектор-функций. Для гладкой на окружности функции, имеющей не более чем конечное число нулей конечных порядков, вводится и изучается понятие сингулярного индекса, обобщающее понятие индекса невырожденной непрерывной функции. Для нетерового матричного оператора Римана получена формула для вычисления индекса этого оператора, совпадающая с общеизвестной аналогичной формулой в случае, когда коэффициенты оператора Римана невырождены.

**Ключевые слова:** оператор, Риман, нетеровость, гладкий, индекс, формула.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 47B35.

**Образец цитирования:** *Пасенчук А. Э., Серегина В. В.* О матричном операторе Римана в пространстве гладких вектор-функций // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 50–61. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36461.

## 1. Введение

Будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ для множеств натуральных, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно. Положим также

$$\mathbb{Z}_+ = \{j \in \mathbb{Z} : j \geqslant 0\}, \quad \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}_+, \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad D^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, будем рассматривать декартову степень $\mathbb{C}^n$ как банахово пространство относительно покоординатных линейных операций и евклидовой нормы. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная банахова алгебра. Через $M_n(\mathfrak{A})$ обозначим банахову алгебру матриц порядка $n$ со стандартными операциями и некоторой матричной нормой. В частности, рассматривая $M_n(\mathbb{C})$, будем считать, что введена операторная норма.

Для банахова пространства $B$ введем следующие линейные многообразия $B$-значных функций, определенных на $\Gamma$:

$$C^m(\Gamma, B) = \left\{ A(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi^j,\ a_j \in B : \sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^m \|a_j\| < \infty,\ \xi \in \Gamma \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+;$$

$$C^\infty(\Gamma, B) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} C^m(\Gamma, B),$$

считая, что в этих множествах линейные операции определены поточечно. Хорошо известно, что $C^\infty(\Gamma, B)$ является счетно-нормированным пространством с определяющей системой полунорм

$$\|A(\xi)\|_m = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (|j|+1)^m \|a_j\|, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем в пространстве $C^\infty(\Gamma, B)$ операторы проектирования

$$P^\pm :\ P^\pm\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi^j\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_\pm} a_j \xi^j$$

и положим

$$C_+^\infty(\Gamma, B) = P^+(C^\infty(\Gamma, B)), \quad \widetilde{C}_-^\infty(\Gamma, B) = P^-(C^\infty(\Gamma, B)), \quad C_-^\infty(\Gamma, B) = B \oplus \widetilde{C}_-^\infty(\Gamma, B).$$

В этой работе рассматривается оператор линейного сопряжения

$$R_{A,B} :\ C^\infty(\Gamma, C^n) \to C^\infty(\Gamma, C^n),\ R_{A,B} = A(\xi)P^+ + B(\xi)P^-,$$

в предположении, что $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(C))$. Уравнение $R_{A,B}\varphi = f$ принято называть задачей Римана в связи с тем, что впервые уравнение такого рода было приведено Б. Риманом (см. [1]). Задаче Римана и оператору $R_{A,B}$ посвящено большое число работ (см. [1–9, 12] и цитируемые там работы). Наиболее полные результаты относительно задачи Римана и соответствующего оператора были получены в банаховых пространствах гёльдеровых и суммируемых вектор-функций. В этих случаях для широкого класса коэффициентов $A(\xi)$, $B(\xi)$ была построена полная теория Нётера. Именно, показано, что необходимым и достаточным условием нётеровости оператора $R_{A,B}$ является невырожденность коэффициентов для всех $\xi \in \Gamma$. В терминах правой канонической факторизации матрицы-функции $A(\xi)B^{-1}(\xi)$ эффективно описаны ядро, коядро оператора $R_{A,B}$, построен обобщенный обратный оператор, найдена формула для индекса

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = -\operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} \det A(\xi) + \operatorname{ind}_{\xi\in\Gamma} \det B(\xi).$$

В пространстве гладких вектор-функций $C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ оператор Римана также рассматривался (см. [7, 10, 11] и цитируемые там работы). В результате был получен критерий нётеровости этого оператора. Оказалось, что нётеровы в пространствах гладких вектор-функций операторы Римана могут иметь коэффициенты с вырождениями на $\Gamma$ специального типа. Точнее, оператор $R_{A,B}$ нётеров в пространстве $C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда каждая из функций $\det A(\xi)$, $\det B(\xi)$ имеет на $\Gamma$ разве лишь конечное число нулей конечных порядков. Однако удобной формулы для подсчета индекса, аналогичной приведенной выше, найдено не было. В предлагаемой работе получена такая формула для индекса оператора $R_{A,B} : C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$.

## 2. Вспомогательные результаты

Некоторые из приводимых ниже результатов известны или могут быть легко получены так же, как и в случаях пространств гёльдеровых или суммируемых вектор-функций. В связи с этим ниже мы приводим лишь доказательства нестандартных утверждений.

Вместе с оператором $R_{A,B}$ будем рассматривать пару операторов Тёплица

$$T_A^+ :\ C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)\to C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n),\ T_A^+ = P^+A(\xi)I,$$
$$T_B^- :\ C_-^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)\to C_-^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n),\ T_B^- = P^-B(\xi)I.$$

**Лемма 1.** *Пусть $A(\xi), B(\xi)\in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. Оператор $R_{A,B}$ нётеров тогда и только тогда, когда нетеров каждый из операторов $T_A^+$ и $T_B^-$. При выполнении этих условий*

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = \operatorname{ind} T_A^+ + \operatorname{ind} T_B^-.$$

$\lhd$ Утверждение леммы является следствием того факта, что каждый из операторов $P^-A(\xi)P^+$, $P^+B(\xi)P^-$ компактен в пространстве $C^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$ (см., например [7]), а оператор $P^+A(\xi)P^+ + P^-B(\xi)P^-$ есть прямая сумма операторов $T_A^+$, $T_B^-$. $\rhd$

Следующее утверждение носит, по-существу, алгебраический характер. Мы формулируем его для оператора Теплица с гладким матричным символом, рассматриваемого в одном из пространств $C_\pm^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$.

**Теорема 1.** *Пусть $A(\xi)\in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. Оператор $T_A^\pm$ нётеров тогда и только тогда, когда в пространстве $C_\pm^\infty(\Gamma,\mathbb{C})$ нётеров оператор $\mathrm{T}_{\det A}^\pm$.*

$\lhd$ Рассмотрим квадратную матрицу порядка $n$, составленную из линейных ограниченных операторов, действующих в некотором топологическом пространстве. Будем считать, что элементы этой операторной матрицы коммутируют с точностью до компактных слагаемых. Тогда с точностью до компактных слагаемых для этой матрицы определены алгебраические дополнения, определитель, присоединенная матрица. Для операторной матрицы $U$ через $U^\nabla$ обозначим определенную с точностью до компактного слагаемого присоединенную матрицу. Условимся писать $A = B(\operatorname{mod} K)$, если оператор $A - B$ компактен. Нетрудно видеть, что

$$(I+k)^\nabla = I(\operatorname{mod} K),\quad U^\nabla U{=}UU^\nabla = E_n\det U(\operatorname{mod} K),$$

где $k$ — компактный оператор, а $E_n$ — единичная матрица порядка $n$. Отметим также, что если элементы операторных матриц $U$, $V$ попарно коммутируют по модулю компактных операторов, то $(UV)^\nabla = V^\nabla U^\nabla(\operatorname{mod} K)$.

Будем рассматривать оператор $T_A^+$ как операторную матрицу, элементами которой являются одномерные операторы Теплица с гладкими символами. Поскольку такие операторы коммутируют с точностью до компактного оператора, то ввиду сделанных замечаний имеем

$$(T_A^+)^\nabla T_A^+ = T_A^+(T_A^+)^\nabla = E_n\mathrm{T}_{\det A(\xi)}^+(\operatorname{mod} K).$$

Если предположить теперь, что оператор $\mathrm{T}_{\det A(\xi)}^+$ нётеров, а $R$ — его регуляризатор, то, очевидно, операторы $(RE_n)(T_A^+)^\nabla$, $(T_A^+)^\nabla(RE_n)$ являются левым, правым регуляризаторами, соответственно, оператора $T_A^+$. Обратно, если оператор $T_A^+$ нетеров и $\Omega$ его регуляризатор, то $\Omega T_A^+ = T_A^+\Omega = I(\operatorname{mod} K)$. Нетрудно убедиться в том, что элементы операторной матрицы $\Omega$ с точностью до компактного оператора попарно коммутируют и коммутируют в том же смысле с элементами $T_A^+$. Но, тогда в силу сделанных замечаний

$$(\Omega T_A^+)^\nabla = (T_A^+\Omega)^\nabla = I(\operatorname{mod} K) \quad \text{или} \quad (T_A^+)^\nabla \Omega^\nabla = \Omega^\nabla (T_A^+)^\nabla = I(\operatorname{mod} K).$$

Последнее означает, что оператор $(T_A^+)^\nabla$ нётеров и регуляризатором для него является оператор $\Omega^\nabla$. Ввиду справедливости равенства $(T_A^+)^\nabla T_A^+ = T_A^+(T_A^+)^\nabla = E_n \mathrm{T}^+_{\det A(\xi)}(\operatorname{mod} K)$ оператор $E_n \mathrm{T}^+_{\det A(\xi)}$ является нетеровым как композиция нетеровых операторов. Последнее эквивалентно нётеровости оператора $T^\pm_{\det A}$. $\triangleright$

Определение 1. Будем говорить, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую (левую) вырожденную факторизацию типа минус, если

$$A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi) \quad (A(\xi) = A^+(\xi)D(\xi)A^-(\xi)),$$

где

1)$A^+(\xi) \in GC_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$;

2) $A^-(\xi) \in C_-^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^-$ матрица $A^-(\xi_0)$ обратима, и если $(A^-(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j \xi^{-j}, \xi \to \infty$, то найдутся $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ так, что $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$;

3) $D(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi^{\kappa_j} P_j$, причем $P_j = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Числа $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, n$, называются частными индексами соответствующей факторизации.

Тот факт, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую вырожденную факторизацию типа минус будем обозначать $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\bar\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$. Число $\kappa_r^-(A) = \sum_{j=1}^n \kappa_j$ называть суммарным индексом правой вырожденной факторизации типа минус. Обозначения $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_l^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\kappa_l^-(A)$ будем применять в случае гладкой левой вырожденной факторизации типа минус.

Определение 2. Будем говорить, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую (левую) вырожденную факторизацию типа плюс, если

$$A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi) \quad (A(\xi) = A^+(\xi)D(\xi)A^-(\xi)),$$

где

1)$A^-(\xi) \in GC_-^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$;

2) $A^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^+$ матрица $A^+(\xi_0)$ обратима, и если $(A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j \xi^{j}, \xi \to 0$, то найдутся $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ так, что $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$;

3) $D(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi^{\kappa_j} P_j$, причем $P_j = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, n$.

Числа $\kappa_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, n$, называются частными индексами соответствующей факторизации.

Тот факт, что матрица-функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ допускает гладкую правую вырожденную факторизацию типа плюс будем записывать следующим образом: $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^+(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\bar\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$. Число $\kappa_r^+(A) = \sum_{j=1}^n \kappa_j$ называется суммарным индексом правой вырожденной факторизации типа плюс.

При $n = 1$ левые и правые гладкие вырожденные факторизации совпадают, поэтому в этом случае будем пользоваться обозначением $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(\kappa, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$.

Из данных выше определений следует, что $A(\xi) \in \mathrm{Fact}_r^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ тогда и только тогда, когда $(A(\xi))^\tau \in \mathrm{Fact}_l^-(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ и $A(\xi^{-1}) \in \mathrm{Fact}_l^+(-\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$.

**Лемма 2.** *Оператор* $T_D^+ : C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n) \to C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$ $(T_D^- : C_-^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n) \to C_-^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n))$, *где* $D(\xi)=\sum_{j=1}^n \xi^{\kappa_j}P_j$, *нётеров и при этом имеют место равенства*

$$1)\ \dim\ker T_D^+ = -\sum_{\kappa_j<0}\kappa_j \quad \Bigl(\dim\ker T_D^- = \sum_{\kappa_j>0}\kappa_j\Bigr),$$

$$2)\ \dim\operatorname{coker} T_D^+ = \sum_{\kappa_j>0}\kappa_j \quad \Bigl(\dim\operatorname{coker} T_D^- = -\sum_{\kappa_j<0}\kappa_j\Bigr),$$

$$3)\ \operatorname{ind} T_D^+ = -\sum_{j=1}^n \kappa_j = -\kappa(D) \quad \Bigl(\operatorname{ind} T_D^- = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \kappa(D)\Bigr).$$

**Лемма 3.** *Если* $A^+(\xi)\in GC_+^\infty(\Gamma,M_n(\mathbb{C}))$ $(B^-(\xi)\in GC_-^\infty(\Gamma,M_n(\mathbb{C})))$, *то оператор* $T_{A^+}^+(T_{B^-}^-)$ *обратим и при этом*

$$\bigl(T_{A^+}^+\bigr)^{-1} = T_{(A^+)^{-1}}^+ \quad \bigl((T_{B^-}^-)^{-1} = T_{(B^-)^{-1}}^-\bigr).$$

**Лемма 4.** *Пусть* $A^-(\xi)\in C_-^\infty(\Gamma,M_n(\mathbb{C}))$, *для любого* $\xi_0\in D^-$ *матрица* $A^-(\xi_0)$ *обратима и если* $(A^-(\xi))^{-1}=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}B_j\xi^{-j}$, $\xi\to\infty$ *и при этом* $\|B_j\|\leqslant c(j+1)^{m_0}$ *для некоторых* $c>0$ *и* $m_0\in\mathbb{Z}_+$, *тогда оператор* $T_{A^-}^+$ *обратим.*

$\lhd$ Поскольку для любого $\phi\in\mathbb{C}^n$, $k\in\mathbb{Z}_+$, имеет место равенство

$$P^+(A^-(\xi))^{-1}\phi\xi^k = P^+\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}B_j\phi\xi^{j-k}\right) = \sum_{j=0}^k B_j\phi\xi^{j-k},$$

то оператор $P^+(A^-(\xi))^{-1}P^+$ в силу линейности определен на всех многочленах с коэффициентами из $\mathbb{C}^n$. Кроме того, для каждого такого многочлена $\phi(\xi)$ справедливы легко проверяемые равенства

$$T_{A^-}^+P^+(A^-(\xi))^{-1}\phi(\xi) = P^+(A^-(\xi))^{-1}T_{A^-}^+\phi(\xi) = \phi(\xi).$$

Таким образом, ввиду того, что множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{C}^n$ всюду плотно в $C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$, достаточно доказать, что оператор $P^+(A^-(\xi))^{-1}P^+ : C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)\to C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$ ограничен в пространстве $C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$.

Пусть $\varphi(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\varphi_k\xi^k\in C_+^\infty(\Gamma,\mathbb{C}^n)$, тогда

$$P^+(A^-(\xi))^{-1}\varphi(\xi) = P^+\sum_{j\in Z_+}B_j\xi^{-j}\sum_{k\in Z_+}\varphi_k\xi^k = \sum_{j\in Z_+}\left(\sum_{k=j}^\infty B_{k-j}\varphi_k\right)\xi^j.$$

Отсюда получаем

$$\bigl\|P^+(A^-(\xi))^{-1}\varphi(\xi)\bigr\|_m = \sum_{j\in Z_+}(j+1)^m\left\|\sum_{k=j}^\infty B_{k-j}\varphi_k\right\| \leqslant \sum_{j\in Z_+}(j+1)^m\sum_{k=j}^\infty\|B_{k-j}\|\,\|\varphi_k\|$$

$$= \sum_{k\in Z_+}\|\varphi_k\|\sum_{j=0}^k(j+1)^m\|B_{k-j}\| \leqslant c\sum_{k\in Z_+}\|\varphi_k\|\sum_{j=0}^k(j+1)^m(k-j+1)^{m_0}$$

$$\leqslant c\sum_{k\in Z_+}(k+1)^{m+m_0+1}\|\varphi_k\| = \|\varphi(\xi)\|_{m+m_0+1}. \quad \rhd$$

**Лемма 5.** *Пусть $A^+(\xi) \in C^\infty_+(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^+$ матрица $A^+(\xi_0)$ обратима и если $(B^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^j$, $\xi \to 0$ и при этом $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ для некоторых $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, тогда оператор $T^-_{A^+}$ обратим.*

**Лемма 6.** *Если $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm_r(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ $(\mathrm{Fact}^\pm_l(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))))$, то*

$$\det A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm\bigl(\kappa^\pm_r(A), C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})\bigr)\ \bigl(\mathrm{Fact}^\pm\bigl(\kappa^\pm_l(A), C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})\bigr)\bigr).$$

$\lhd$ Предположим, для определенности, что $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^+_r(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$. Тогда $\det A(\xi) = \det A^-(\xi)\det D(\xi)\det A^+(\xi)$. При этом $\det A^-(\xi) \neq 0$, $\xi \in \overline{D^-}$ ввиду обратимости в $C^\infty_-(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ матрицы-функции $A^-(\xi)$. Ясно, что тогда $\det A^-(\xi) \in GC^\infty_-(\Gamma, \mathbb{C})$. Кроме того, очевидно,

$$\det D(\xi) = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \kappa^+_r(A).$$

В силу условия 2) определения вырожденной факторизации типа плюс $A^+(\xi) \in C^\infty_+(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, для любого $\xi_0 \in D^+$ матрица $A^+(\xi_0)$ обратима, и если

$$(A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^j, \quad \xi \to 0,$$

то $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ для некоторых $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Из обратимости матрицы $A^+(\xi_0)$, $\xi_0 \in D^+$, следует, что $\det A^+(\xi) \neq 0$, $\xi \in D^+$. Кроме того, очевидно,

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \det(A^+(\xi))^{-1} = \det\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} B_j\xi^j\right), \quad \xi \to 0.$$

Тогда по определению определителя

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{k=1}^{n!}(-1)^{s(\sigma_k)}\prod_{k=1}^n\sum_{l\in\mathbb{Z}_+}(B_l)_{k\sigma_k}\xi^l,$$

где через $(B)_{km}$ обозначены элементы матрицы $B$ с номерами $k$, $m$, а через $s(\sigma_k)$ — четность перестановки $k \mapsto s(\sigma_k)$. Из последнего равенства следует, что

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} d_j\xi^j, \quad \text{где} \quad d_j = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=j}\ \sum_{k=1}^{n!}(-1)^{s(\sigma_k)}\prod_{k=1}^n(B_{s_j})_{k\sigma_k}.$$

Какова бы ни была матричная операторная норма из неравенства $\|B_j\| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ следует, что $|(B_j)_{km}| \leqslant c(j+1)^{m_0}$ для любых $k$, $m$. Но тогда

$$|d_j| = \left|\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=j}\ \sum_{k=1}^{n!}(-1)^{s(\sigma_k)}\prod_{k=1}^n(B_{s_j})_{k\sigma_k}\right|$$
$$\leqslant \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=j}\ \sum_{k=1}^{n!}\prod_{k=1}^n|(B_{s_j})_{k\sigma_k}| \leqslant c^n(n!+1)(j+1)^{nm_0}.$$

По определению это означает, что $\det A(\xi) \in \mathrm{Fact}^+(\kappa_r(A), C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$. $\rhd$

**Лемма 7.** *Если* $A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi)(A(\xi) = A^+(\xi)D(\xi)A^-(\xi))$, *где* $A^\pm(\xi) \in C^\infty_\pm(\Gamma, \mathbb{C}^n)$, *то*

$$T^+_A = T^+_{A^-}T^+_D T^+_{A^+} \quad (T^-_A = T^-_{A^+}T^-_D T^-_{A^-}).$$

**Следствие 1.** *Если* $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^-_r(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$ $(B(\xi) \in \mathrm{Fact}^+_l(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))))$, *то оператор* $T^+_A$ $(T^-_B)$ *нётеров и при этом*

$$\operatorname{ind} T^+_A = -\kappa^-_r(A) = -\kappa^-(\det A) \quad \big(\operatorname{ind} T^-_B = \kappa^+_l(B) = \kappa^+(\det B)\big).$$

## 3. Гладкие факторизации, нётеровость, индекс

**Теорема 2.** *Матрица-функция* $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ *допускает одну из гладких вырожденных факторизаций тогда и только тогда, когда функция* $\det A(\xi)$ *имеет на* $\Gamma$ *не более чем конечное число нулей конечных порядков.*

$\triangleleft$ Будем, для определенности рассматривать случай правой вырожденной факторизации типа плюс.

*Необходимость.* Если $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^+_r(\bar\kappa, C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C})))$, $\bar\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$, то из равенства $A(\xi) = A^-(\xi)D(\xi)A^+(\xi)$ в силу свойств определителя следует, что

$$\det A(\xi) = \det A^-(\xi)\xi^\kappa \det A^+(\xi), \quad \text{где} \quad \kappa = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \kappa^+_r(A).$$

Согласно лемме 7 полученное равенство является гладкой вырожденной факторизацией типа плюс функции $\det A(\xi)$ с индексом факторизации $\kappa^+_r(A)$. Покажем, что из последнего условия вытекает, что $\det A(\xi)$ имеет на $\Gamma$ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Предположим противное, т. е. что $\det A(\xi) \in \mathrm{Fact}^+(\kappa, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$, но имеет более чем конечное число нулей конечных порядков. Это означает, что либо $A(\xi)$ имеет нуль бесконечного порядка в некоторой точке $\xi_0 \in \Gamma$, либо — бесконечное число нулей. Поскольку в последнем случае точка сгущения нулей является нулем бесконечного порядка, то достаточно предполагать, что $A(\xi)$ имеет нуль бесконечного порядка в некоторой точке $\xi_0 \in \Gamma$. По определению вырожденной факторизации типа плюс $\det A^-(\xi) \in GC^\infty_-(\Gamma, \mathbb{C})$. Но тогда функция $\det A^+(\xi)$ обязана иметь в точке $\xi_0 \in \Gamma$ нуль бесконечного порядка. По определению нуля бесконечного порядка

$$\left(\frac{d^l(\det A^+(\xi))}{d\xi^l}\right)\Bigg|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда $\det A^+(\xi) = (\xi - \xi_0)^l A^+_l(\xi)$, где $A^+_l(\xi) \in C^\infty_+(\Gamma, \mathbb{C})$, каково бы ни было $l \in \mathbb{Z}_+$. По определению вырожденной факторизации типа плюс

$$(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} B_j \xi^j, \quad \xi \to 0,$$

и при этом $|B_j| < c(j+1)^{m_0}$ для некоторых $c > 0$ и $m_0 \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, имеет место равенство

$$A^+_l(\xi)(\det A^+(\xi))^{-1} = (\xi - \xi_0)^{-l}, \quad \xi \to 0.$$

Поскольку $A_l^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$, а коэффициенты Фурье $(\det A^+(\xi))^{-1}$ растут не быстрее, чем $(j+1)^{m_0}$, где $j$ — номер коэффициента, то и коэффициенты ряда Фурье функции $A_l^+(\xi)(\det A^+(\xi))^{-1}$ также растут не быстрее, чем $(j+1)^{m_0}$. С другой стороны,

$$(\xi - \xi_0)^{-l} = (-\xi_0)^{-l}\big(1 - \xi_0^{-1}\xi\big)^{-l} = (-\xi_0)^{-l}\sum_{j=0}^{\infty} C_{l+j-1}^{j}\xi_0^{-j}\xi^j,$$

и, следовательно,

$$A_l^+(\xi)(A^+(\xi))^{-1} = (-\xi_0)^{-l}\sum_{j=0}^{\infty} C_{l+j-1}^{j}\xi_0^{-j}\xi^j.$$

Таким образом, если

$$A_l^+(\xi)(\det A^+(\xi))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\xi^j,$$

то

$$c_j = C_{l+j-1}^{j}\xi_0^{-j}(-\xi_0)^{-l}.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, будем иметь

$$|c_j| \approx \frac{\exp(l-1)}{(l-1)^{l-1}\sqrt{2\pi(l-1)}}\, j^{l-1}.$$

Отметим, что в произведенных выкладках $l \in \mathbb{Z}_+$ — произвольно. Выбрав $l = m_0 + 2$, получим

$$|c_j| \approx \sigma_{m_0} j^{m_0+1}, \quad \sigma_{m_0} = \frac{\exp(m_0+1)}{(m_0+1)^{m_0+1}\sqrt{2\pi(m_0+1)}}.$$

Но последняя эквивалентность противоречит тому, что коэффициенты $c_j$ должны расти не быстрее, чем $(j+1)^{m_0}$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

*Достаточность.* Пусть $\det A(\xi)$ имеет на $\Gamma$ не более чем конечное число нулей конечных порядков. Пользуясь методом отщепления нулей (см. [1, 2, 7]), представим матрицу-функцию $A(\xi)$ в виде $A(\xi) = A_0(\xi)\Omega^+(\xi)$, где $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$, $\Omega^+(\xi) \in C_+^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. При этом $\det A_0(\xi) \neq 0$, $\xi \in \Gamma$, а $\det \Omega^+(\xi) = \prod_k (\xi - z_k)^{n_k}$, где $\{z_k\}$ — множество всех нулей функции $\det A(\xi)$ на окружности $\Gamma$. Хорошо известно, что матрица-функция $A_0(\xi)$ допускает стандартную (невырожденную) правую факторизацию $A_0(\xi) = B^-(\xi)D(\xi)B^+(\xi)$. Полагая $A^-(\xi) = B^-(\xi)$, $A^+(\xi) = B^+(\xi)\Omega^+(\xi)$, получим правую вырожденную факторизацию типа плюс матрицы-функции $A(\xi)$. $\rhd$

**Следствие 2.** *Суммарные индексы правой и левой вырожденных гладких факторизаций матрицы-функции $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ одного типа совпадают и равны индексу факторизации того же типа функции* $\det A(\xi)$.

**Теорема 3.** *Пусть $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. Оператор $T_A^+$ $(T_A^-)$ нётеров в пространстве $C_+^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ $(C_-^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n))$ тогда и только тогда, когда матрица-функция $A(\xi)$ допускает правую (левую) гладкую вырожденную факторизацию типа минус (плюс) в алгебре $C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. При выполнении последнего условия*

$$\operatorname{ind} T_A^+ = -\kappa_r^-(A) \quad (\operatorname{ind} T_A^- = \kappa_l^+(A)).$$

$\lhd$ Достаточность теоремы вытекает из лемм 3–8. Необходимость является следствием теоремы Б. Зильбермана [12] и теоремы 1. $\rhd$

**Следствие 3.** *Пусть* $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$ *и каждая из функций* $\det A(\xi)$, $\det B(\xi)$ *имеет на* $\Gamma$ *не более чем конечное число нулей конечных порядков. Тогда*

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = -\kappa^-(\det A) + \kappa^+(\det B).$$

Замечание 1. Достаточность теоремы 3 может быть доказана независимо от результата Б. Зильбермана, но более громоздко (см. [12]).

Определение 3. Сингулярным индексом функции $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$, имеющей конечное число нулей конечных кратностей, будем называть число

$$\kappa_c(A) = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int\limits_\Gamma \frac{A'(\xi)}{A(\xi)}\, d\xi.$$

Пусть $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ и имеет на $\Gamma$ конечное число нулей $z_k$ порядков $n_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, соответственно. Назовем число $n(A) = \sum_{k=1}^s n_k$ суммарным числом нулей этой функции.

**Лемма 8.** *Пусть* $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ *и* $n(A) < \infty$, *а*

$$A_0(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s (\xi - z_k)^{-n_k} \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}) \quad \left(A_1(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s \left(1 - z_k \xi^{-1}\right)^{-n_k} \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})\right)$$

*и не обращается в нуль на* $\Gamma$. *Тогда имеет место равенство*

$$\kappa_c(A) = n(A) + 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_0(\xi) \quad \big(\kappa_c(A) = -n(A) + 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_1(\xi)\big).$$

$\lhd$ Воспользуемся тем, что для невырождающейся, дифференцируемой на $\Gamma$ функции

$$v.p.\, \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{A_0'(\xi) d\xi}{A_0(\xi)} = 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_0(\xi)$$

и тем, что для фиксированного $z_k \in \Gamma$ справедливо равенство

$$v.p. \int\limits_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z_k} = \pi i.$$

Тогда

$$\kappa_c(A) = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int\limits_\Gamma \frac{A'(\xi) d\xi}{A(\xi)} = \frac{1}{\pi i}\, v.p. \int\limits_\Gamma \frac{A_0'(\xi) d\xi}{A_0(\xi)} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^s v.p. \int\limits_\Gamma \frac{n_k d\xi}{\xi - z_k} = 2 \operatorname*{ind}_{\xi\in\Gamma} A_0(\xi) + n(A).$$

Доказательство второй формулы аналогично приведенному. $\rhd$

Нетрудно заметить, что если функция $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$ имеет конечное число нулей конечных кратностей, то $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(\kappa^\pm, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$ и при этом,

$$\kappa^+ = \operatorname{ind}_\xi A_0(\xi), \quad A_0(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s (\xi - \xi_k)^{-n_k},$$

$$\kappa^- = \operatorname{ind}_\xi A_1(\xi), \quad A_1(\xi) = A(\xi) \prod_{k=1}^s (1 - \xi_k \xi^{-1})^{-n_k}.$$

Принимая во внимание лемму 8, последним формулам можно придать следующий вид: $\kappa_c(A) = n(A) + 2\kappa^+$, $\kappa_c(A) = -n(A) + 2\kappa^-$. Таким образом, индексы вырожденной факторизации функции $A(\xi) \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{C})$, в случае ее существования, могут быть найдены следующим образом: $\kappa^\pm = \frac{1}{2}(\kappa_c(A) \mp n(A))$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Лемма 9.** *Функция* $A(\xi) \in \mathrm{Fact}^\pm(\kappa^\pm, C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}))$ *тогда и только тогда, когда эта функция имеет на* $\Gamma$ *не более чем конечное число нулей конечных порядков. При выполнении последнего условия индексы вырожденных факторизаций могут быть найдены по формулам*

$$\kappa^\pm = \frac{1}{2}\big(\kappa_c(A) \mp n(A)\big).$$

**Теорема 4.** *Пусть* $A(\xi), B(\xi) \in C^\infty(\Gamma, M_n(\mathbb{C}))$. *Оператор* $R_{A,B} : C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n) \to C^\infty(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ *нётеров тогда и только тогда, когда каждая из функций* $\det A(\xi)$, $\det B(\xi)$ *имеет на* $\Gamma$ *не более чем конечное число нулей конечных порядков. При выполнении этих условий индекс оператора может быть найден по формуле*

$$\operatorname{ind} R_{A,B} = -\frac{1}{2}\big(\kappa_c(\det A) + n(\det A)\big) + \frac{1}{2}\big(\kappa_c(\det B) - n(\det B)\big).$$

## Литература


1. *Gahov F. D.* Boundary Value Problems.—N. Y.: Dover, 1990.—561 p.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—599 с.
3. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений.—М.: Наука, 1970.—252 с.
4. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
6. *Симоненко И. Б.* Некоторые общие вопросы краевой задачи Римана // Изв. АН СССР.—1968.— Т. 32, № 5.—С. 1138–1146.
7. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Мир, 1979.—493 с.
8. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.—М.: Высш. шк., 1991.—210 с.
9. *Волевич Л. З., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках.—М.: Наука, 1994.— 336 с.
10. *Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К.* Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Изв. вузов. Математика.—1967.—№ 10.—С. 39–49.
11. *Зильберман Б.* О сингулярных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций // Мат. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1971.—Т. 6, № 3.— С. 168–179.
12. *Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2013.—279 с.


*Статья поступила 26 ноября 2018 г.*

Пасенчук Александр Эдуардович
Южный федеральный университет,
*профессор кафедры алгебры и дискретной математики*
РОССИЯ, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105
E-mail: pasenchuk@mail.ru

Серегина Виктория Викторовна
Азово-черноморский инженерный институт,
*доцент кафедры математики и механики*
РОССИЯ, 347740, Зерноград, ул. Ленина, 21
E-mail: vic.victora@yandex.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 50–61*

# ABOUT RIEMANN MATRIX OPERATOR IN THE SPACE OF SMOOTH VECTOR FUNCTIONS

Pasenchuk, A. E.[1] and Seregina, V. V.[2]
[1] Southern Federal University,
105 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia;
[2] Azov-Black Sea Engineering Institute,
21 Lenina Str., Zernograd, 347740, Russia
E-mail: pasenchuk@mail.ru, vic.victora@yandex.ru

**Abstract.** In the space of vector functions smooth on the unit circle, we consider the matrix operator of linear conjugation generated by the Riemann boundary-value problem. It is assumed that the coefficients of the boundary value problem are smooth matrix functions. The concept of smooth degenerate factorization of the plus and minus types of a smooth matrix function is introduced and studied. In terms of degenerate factorizations, we give necessary and sufficient conditions for the noethericity of the considered Riemann matrix operator in the space of smooth vector functions. For a function smooth on a circle having at most finitely many zeros of finite orders, the concept of a singular index is introduced and studied, generalizing the concept of the index of a non-degenerate continuous function. For the Noetherian matrix Riemann operator, a formula is obtained for calculating the index of this operator, which coincides with the well-known similar formula in the case where the coefficients of the Riemann operator are non-degenerate.

**Key words:** operator, Riemann, Noetherian, smooth, index, formula.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 47B35.

**For citation:** *Pasenchuk, A. E. and Seregina, V. V.* About Riemann Matrix Operator in the Space of Smooth Vector Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 50–61 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36461.

## References

1. *Gahov, F. D. Boundary Value Problems*, New York, Dover, 1990, 561 p.
2. *Muskhelishvili, N. I. Singuljarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations], Moscow, Nauka, 1968, 599 p. (in Russian).
3. *Vekua, N. P. Sistemy singuljarnykh integral'nykh uravnenii* [Systems of Singular Integral Equations], Moscow, Nauka, 1970, 252 p. (in Russian).
4. *Gohberg, I. C. and Fel'dman, I. A. Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* [Convolution Equations and Projection Methods for their Solution], Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russian).
5. *Gohberg, I. C. and Krupnik, N. Ya. Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov* [Introduction to the Theory of One-Dimentional Singular Integral Operators], Kishinev, Shtiintsa, 1973, 426 p. (in Russian).
6. *Simonenko, I. B.* Some General Questions in the Theory of the Riemann Boundary Problem, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 5, p. 1091–1099. DOI: 10.1070/IM1968v002n05 ABEH000706.
7. *Presdorf, Z. Nekotorye klassy singulyarnykh uravneniy* [Some Classes of Singular Equations], Moscow, Mir, 1979, 493 p. (in Russian).
8. *Soldatov, A. P. Odnomernye singulyarnye operatory i kraevye zadachi teorii funktsii* [One-Dimensional Singular operators and Boundary Value Problems of the Theory of Functions], Moscow, Vysshaya shkola, 1991, 210 p. (in Russian).
9. *Volevich, L. Z. and Gindikin, S. G. Obobshhennye funktsii i uravneniya v svertkakh* [Generalized Convolution Functions and Equations], Moscow, Nauka, 1994, 336 p. (in Russian).
10. *Dybin, V. B. and Karapetyants, N. K.* Application of the Normalization Method to a Class of Infinite Systems of Linear Algebraic Equations, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1967, no. 10, p. 39–49. (in Russian).

11. *Zilberman, B.* On Singular Operators in Spaces of Infinitely Differentiable and Generalized Functions, *Matematicheskiye Issledovaniya*, Kishinev, Shtiinca, 1971, vol. 6, no. 3, p. 168–179. (in Russian).
12. *Pasenchuk, A. E. Diskretnye operatory tipa svertki v klassakh posledovatel'nostei so stepennym kharakterom povedeniya na beskonechnosti* [Discrete Operators of Convolution Type in Classes of Sequences with Power-Law Behavior at Infinity], Rostov-on-Don, SFU, 2013, 279 p. (in Russian).

*Received 26 November, 2018*

Alexandr E. Pasenchuk
Southern Federal University,
105 Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia,
*Professor*
E-mail: `pasenchuk@mail.ru`

Victoria V. Seregina
Azov-Black Sea Engineering Institute,
21 Lenina Str., Zernograd, 347740, Russia,
*Associate Professor*
E-mail: `vic.victora@yandex.ru`

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 62–86*

**УДК** 517.518.82+519.117
**DOI** 10.23671/VNC.2019.3.36462

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ КОМБИНАТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ#

**М. А. Петросова**[1]**, И. В. Тихонов**[2]**, В. Б. Шерстюков**[3]

[1] Московский педагогический государственный университет,
Россия, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14;
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1;
[3] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: `petrosova05@mail.ru`, `ivtikh@mail.ru`, `shervb73@gmail.com`

**Аннотация.** Ставится вопрос о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна по степеням независимой переменной. Кратко обсуждается общая постановка задачи на произвольном отрезке $[a,b]$. Для полноты картины напоминаются формулы Вигерта, действующие для коэффициентов полиномов Бернштейна на стандартном отрезке $[0,1]$. В центре внимания сейчас другой случай — симметричного отрезка $[-1,1]$, что представляет несомненный интерес для теории аппроксимации. В работе найдены выражения, регулирующие образование коэффициентов полиномов Бернштейна на $[-1,1]$. Для интерпретации ответа потребовалось ввести новые числовые объекты — специальные «трапеции Паскаля». Они строятся аналогично классическому треугольнику по своим «начальным» и «краевым» условиям. С трапециями Паскаля связаны разнообразные соотношения, во многом обобщающие привычные комбинаторные тождества. В работе проведено систематическое исследование подобных свойств; составлена сводка основных формул. Полученные результаты находят применение при изучении поведения коэффициентов полиномов Бернштейна на $[-1,1]$. Так, например, оказывается, что есть универсальная связь двух коэффициентов $a_{2m,m}(f)$ и $a_{m,m}(f)$, действующая при всех $m \in \mathbb{N}$ для любой функции $f \in C[-1,1]$. В итоге установлено существенное отличие картины на $[-1,1]$ от случая стандартного отрезка $[0,1]$. Намечен ряд перспективных тем для дальнейших исследований, часть из которых активно проводится в последнее время.

**Ключевые слова:** полиномы Бернштейна, симметричный отрезок, трапеции Паскаля, комбинаторные соотношения.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 41A10, 11B83, 05A10, 05A19.

**Образец цитирования:** *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 62–86. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36462.

## 1. Введение

Полиномы Бернштейна — известный объект анализа, играющий значимую роль в задачах аппроксимации. Базовые сведения по теории классических полиномов Бернштейна см. в [1–7]. Дополнительная информация, связанная с недавними исследованиями авторов, представлена в обзоре [8]. Традиционно полиномы Бернштейна рассматривают на стандартном отрезке $[0,1]$. Считается, что переход к другому отрезку не несет ничего существенно нового. С точки зрения характера аппроксимации это действительно так:

#Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00236.

основные закономерности, регулирующие сходимость полиномов Бернштейна к порождающей их непрерывной функции, сохраняются на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ с соответствующими техническими поправками. Однако, алгебраическая и комбинаторная информация, обильно заложенная в полиномах Бернштейна, может неожиданно трансформироваться при формальном переходе на другой отрезок. Помимо стандартного случая $[0,1]$ естественно выделить симметричный отрезок $[-1,1]$, на котором полиномы Бернштейна ранее почти не изучались. Ясно, что симметричный отрезок тесно связан с соображениями «четности» и «нечетности», принципиально важными для анализа, но не очень органичными на стандартном отрезке $[0,1]$. В работе [9] авторы показали, какие изменения претерпевает формулировка так называемого «правила склеивания» при переходе к симметричному отрезку $[-1,1]$.

Займемся теперь другим вопросом — о том, что произойдет с развернутой алгебраической записью полиномов по степеням переменной $x$, если рассматривать конструкцию Бернштейна на $[-1,1]$. Оказывается, технические отличия от $[0,1]$ будут весьма значительными — возникнут принципиально новые комбинаторные объекты в виде серии специальных «трапеций Паскаля», своеобразно обобщающих привычный треугольник.

Для традиционных биномиальных коэффициентов используем обозначение

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\dots,n; \quad C_0^0 = 1. \tag{1}$$

Основное тождество

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \tag{2}$$

выполненное при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1,\dots,n$, будем называть *правилом Паскаля*.

Для того чтобы более отчетливо проследить связь новых результатов с тем, что известно для стандартного случая, целесообразно начать с общих положений и изложить фактуру с единой точки зрения.

## 2. Общее определение полиномов Бернштейна

Для функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, непрерывной на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *полиномы Бернштейна* вводят формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) C_n^k (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

с независимой переменной $x$ и биномиальными коэффициентами (1). Формула (3) для полиномов $B_n(f,x) = B_n(f;a,b;x)$ «привязана» к выбранному отрезку $[a,b]$. Для упрощения записей не будем отмечать зависимость от отрезка в последующих обозначениях, ограничиваясь четким указанием на обсуждаемый случай.

Ясно, что любой полином $B_n(f,x)$ имеет степень, не большую собственного номера:

$$\deg B_n(f,x) \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому полиномы (3) допускают алгебраическую запись

$$B_n(f,x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Числовые коэффициенты

$$a_{n,m}(f), \quad n \in \mathbb{N},\ m = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

являются линейными комбинациями, составленными из значений функции $f$ в точках соответствующей равномерной сетки на $[a, b]$, в том смысле, что

$$a_{n,m}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,m}^{k}\, f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},\ m = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Конкретные значения множителей $A_{n,m}^{k} \in \mathbb{R}$ зависят от выбора отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$, но не зависят от взятой функции $f \in C[a, b]$.

Если для некоторой функции $f \in C[a, b]$ каждое выражение (6) дает значение нуль, то все полиномы (4) тождественно равны нулю, и по аппроксимационной теореме Бернштейна функция $f(x)$ будет тождественно равна нулю на $[a, b]$, как предельная функция последовательности полиномов $B_n(f, x)$.

Другими словами, совокупность всех коэффициентов (5), возникающих на $[a, b]$ при алгебраической записи полиномов Бернштейна (3), образует тотальную систему линейных непрерывных функционалов в пространстве $C[a, b]$. Эта система является избыточной — в зависимости от выбора отрезка $[a, b]$ некоторые функционалы (5) могут линейно выражаться через другие. Например, на отрезке $[-1, 1]$ возникает особая последовательность коэффициентов $a_{m,m}(f)$ и $a_{2m,m}(f)$, связанных друг с другом пропорциональным образом (см. теорему 5 ниже).

Как уже сказано, конструкцию Бернштейна обычно рассматривают на стандартном отрезке $[0, 1]$. Напомним, как выглядит запись (4) и какие выражения получаются для коэффициентов (5) в этом каноническом случае.

## 3. Случай стандартного отрезка

Согласно общему определению (3) для функции $f \in C[0, 1]$ полиномы Бернштейна имеют вид

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Непосредственно из (7) нетрудно получить несколько первых явных формул:

$$B_1(f, x) = f(0) + (f(1) - f(0))\, x,$$

$$B_2(f, x) = f(0) + 2\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right) x + \left(f(1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)\right) x^2,$$

$$\begin{aligned} B_3(f, x) = f(0) &+ 3\left(f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right) x + 3\left(f\left(\frac{2}{3}\right) - 2f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0)\right) x^2 \\ &+ \left(f(1) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right) x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4(f, x) = f(0) &+ 4\left(f\left(\frac{1}{4}\right) - f(0)\right) x + 6\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{4}\right) + f(0)\right) x^2 \\ &+ 4\left(f\left(\frac{3}{4}\right) - 3f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f\left(\frac{1}{4}\right) - f(0)\right) x^3 \\ &+ \left(f(1) - 4f\left(\frac{3}{4}\right) + 6f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f\left(\frac{1}{4}\right) + f(0)\right) x^4. \end{aligned}$$

Вопрос об общей алгебраической записи (4) для стандартных полиномов (7) поставил и решил Вигерт [10]. Он показал, что коэффициенты (5) в этом случае выглядят так:

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, C_m^j \, f\left(\frac{m-j}{n}\right) = C_n^m \, \Delta_{1/n}^m \, f(0). \tag{8}$$

Здесь

$$\Delta_{1/n}^m \, f(0) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \, C_m^j \, f\left(\frac{m-j}{n}\right)$$

есть конечная разность порядка $m$ с шагом $1/n$, взятая от функции $f \in C[0,1]$ в выделенной точке $x = 0$. (Про конечные разности см. [11, с. 157–160].) Для сравнения с последующим напомним вывод результата (8) (см. также [5, с. 108–109], [7, с. 249–251]).

Определим стандартные *первичные полиномы Бернштейна*

$$P_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \; k = 0, 1, \ldots, n. \tag{9}$$

По формуле бинома запишем

$$P_{n,k}(x) = C_n^k x^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \, C_{n-k}^j \, x^j = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \, C_n^k C_{n-k}^j \, x^{k+j}.$$

Но

$$C_n^k C_{n-k}^j = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} = \frac{n!}{(k+j)!(n-k-j)!} \, \frac{(k+j)!}{k! \, j!} = C_n^{k+j} \, C_{k+j}^k.$$

Поэтому

$$P_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \, C_n^{k+j} C_{k+j}^k \, x^{k+j} = \{m = k+j\} = \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} C_n^m C_m^k \, x^m.$$

Итак, для первичных полиномов (9) получено представление

$$P_{n,k}(x) = \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} \, C_n^m C_m^k \, x^m. \tag{10}$$

После подстановки (10) в формулу (7) имеем

$$\begin{aligned} B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} C_n^m C_m^k \, x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} x^m C_n^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \, C_m^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) x^m, \end{aligned}$$

где

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) = \{j = m-k\} = C_n^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j \, f\left(\frac{m-j}{n}\right),$$

что и совпадает с указанным выше выражением (8).

Особо отметим «локальный» характер коэффициентов $a_{n,m}(f)$ на стандартном отрезке $[0,1]$. Действительно, в выражении (8) для конкретного коэффициента $a_{n,m}(f)$ участвуют значения функции $f$ только из отрезка $[0, m/n]$. Но такие отрезки стягиваются к нулю, если зафиксировать $m \in \mathbb{N}$ и положить $n \to \infty$. Попросту говоря, коэффициенты $a_{n,m}(f)$ при любой выбранной степени $x^m$, начиная с соответствующего (достаточно большого) номера $n$, «чувствуют» значения функции лишь вблизи нуля — в малой окрестности $[0,\delta]$ и «нечувствительны» к изменениям $f(x)$ вне отрезка $[0,\delta]$.

Точнее, справедлив *принцип локализации*: если $f, g \in C[0,1]$, и $f(x) \equiv g(x)$ на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \delta$ с некоторым $\delta \in (0,1)$, то для коэффициентов (8) имеем совпадение

$$a_{n,m}(f) = a_{n,m}(g), \quad \forall\, n \geqslant \lceil m/\delta \rceil, \tag{11}$$

где $\lceil m/\delta \rceil$ — *потолок* числа $m/\delta$ по терминологии [12], т. е. наименьшее целое число, большее или равное $m/\delta$.

Дополнительную информацию о поведении коэффициентов $a_{n,m}(f)$ в полиномах Бернштейна на стандартном отрезке $[0,1]$ см. в [10, 13].

## 4. Полиномы Бернштейна на симметричном отрезке

Изучим теперь правила, регулирующие алгебраическую запись (4) для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$. Краткое изложение полученных результатов дано нами в заметке [14]. Некоторые дополнительные сведения о полиномах Бернштейна на симметричном отрезке можно найти в [9, 15].

Согласно общему определению (3) для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна принимают вид

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(-1+\frac{2k}{n}\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Наряду с исходным определением (12) удобно использовать эквивалентную запись

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(1-\frac{2k}{n}\right) C_n^k (1-x)^k (1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

с суммированием от правой границы отрезка $[-1,1]$, а не от левой, как в формуле (12). Элементарный переход от (12) к (13) происходит с учетом равенства $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Прямые вычисления по формуле (12) (или (13)) дают следующие результаты:

$$B_1(f,x) = \frac{1}{2}\big(f(1)+f(-1)\big) + \frac{1}{2}\big(f(1)-f(-1)\big)x,$$

$$B_2(f,x) = \frac{1}{4}\big(f(1)+2f(0)+f(-1)\big) + \frac{2}{4}\big(f(1)-f(-1)\big)x + \frac{1}{4}\big(f(1)-2f(0)+f(-1)\big)x^2,$$

$$B_3(f,x) = \frac{1}{8}\left(f(1)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+3f\left(-\frac{1}{3}\right)+f(-1)\right)$$
$$+\frac{3}{8}\left(f(1)+f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(-\frac{1}{3}\right)-f(-1)\right)x + \frac{3}{8}\left(f(1)-f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(-\frac{1}{3}\right)+f(-1)\right)x^2$$
$$+\frac{1}{8}\left(f(1)-3f\left(\frac{1}{3}\right)+3f\left(-\frac{1}{3}\right)-f(-1)\right)x^3,$$

$$
\begin{gathered}
B_4(f,x)=\frac{1}{16}\left(f(1)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+6f(0)+4f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)\right)\\
+\frac{4}{16}\left(f(1)+2f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(-\frac{1}{2}\right)-f(-1)\right)x\\
+\frac{6}{16}\left(f(1)-2f(0)+f(-1)\right)x^2+\frac{4}{16}\left(f(1)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)-f(-1)\right)x^3\\
+\frac{1}{16}\left(f(1)-4f\left(\frac{1}{2}\right)+6f(0)-4f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)\right)x^4.
\end{gathered}
$$

Некоторые дроби специально оставлены не сокращенными для лучшего наблюдения за действующими закономерностями.

Требуется найти общие правила, регулирующие образование коэффициентов в подобных формулах. Понятно, что комбинаторная природа возникающих соотношений здесь более сложная, чем в аналогичных примерах на $[0,1]$. Сразу обратим внимание на одну особенность первых полиномов $B_n(f,x)$, записанных для $[-1,1]$. Все суммы в скобках перед степенями $x$ удобно начинать с $f(1)$, поскольку именно $f(1)$ всегда присутствует со знаком «плюс». Как выяснилось в процессе исследований, при выводе соответствующей общей формулы целесообразно исходить из представления (13), где суммирование также начинается с $f(1)$. Именно на (13) и будем основываться.

## 5. Первичные полиномы в симметричном случае

Согласно (13) *первичные полиномы Бернштейна* на $[-1,1]$ определим формулой

$$
T_{n,k}(x)=\frac{1}{2^n}C_n^k(1-x)^k(1+x)^{n-k},\quad n\in\mathbb{N},\ k=0,1,\dots,n. \tag{14}
$$

Для разложения полинома $T_{n,k}(x)$ по степеням $x$ надо перемножить два бинома, каждый из которых раскрывается со своим числом слагаемых. Перемножение упростится, если раскрывать биномы в виде бесконечных «рядов Лорана», стандартно расширив определение биномиальных коэффициентов (1) так, чтобы верхний индекс мог принимать любые целые значения.

При $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ положим

$$
C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=0,\quad k\in\{\dots,-3,-2,-1\}\cup\{n+1,n+2,n+3,\dots\}. \tag{15}
$$

Это согласуется с известным свойством факториала

$$
\frac{1}{(-m)!}=0,\quad m\in\mathbb{N},
$$

и с общим подходом к биномиальным коэффициентам [12, с. 178–180]. Понятно, что правило Паскаля (2) сохранится при всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $k\in\mathbb{Z}$.

Приняв соглашение (15), в формулах биномов можно перейти к бесконечным суммам:

$$
(1-x)^k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j\,x^j=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^jC_k^j\,x^j,
$$

$$
(1+x)^{n-k}=\sum_{l=0}^{n-k}C_{n-k}^l\,x^l=\sum_{l=-\infty}^{\infty}C_{n-k}^l\,x^l.
$$

Формально перемножим получившиеся ряды Лорана:

$$(1-x)^k(1+x)^{n-k} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j C_k^j\, x^j\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{n-k}^l\, x^l\right)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j+l=m} (-1)^j C_k^j C_{n-k}^l\right)x^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m.$$

Отдельно рассмотрим возникшие свертки биномиальных коэффициентов

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j} \equiv \sum_j (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}. \tag{16}$$

Как обычно, суммирование без указания пределов означает, что сумма вычисляется по всем возможным ненулевым слагаемым. Для того чтобы $j$-е слагаемое в формуле (16) было отличным от нуля, должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant k, \\ 0 \leqslant m-j \leqslant n-k, \end{cases}$$

из которых следует, что $0 \leqslant m \leqslant n$. Поэтому при $m < 0$ и при $m > n$ все слагаемые в свертке (16) обращаются в нуль, и сама свертка тоже равна нулю. Оставляя лишь ненулевые свертки, приходим к формуле перемножения биномов

$$(1-x)^k(1+x)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_j (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m. \tag{17}$$

Подставим (17) в формулу (14). Получим

$$T_{n,k}(x) = \frac{1}{2^n}\, C_n^k \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_j (-1)^j C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_j (-1)^j C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j}\right)x^m.$$

Заметим, что

$$C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j} = C_n^m C_m^j C_{n-m}^{k-j}, \tag{18}$$

ибо

$$C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{k!}{j!(k-j)!}\ \frac{(n-k)!}{(m-j)!(n-k-m+j)!}$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\ \frac{m!}{j!(m-j)!}\ \frac{(n-m)!}{(k-j)!(n-m-k+j)!} = C_n^m C_m^j C_{n-m}^{k-j}.$$

Итак, для первичных полиномов (14) справедливы разложения

$$T_{n,k}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n} C_n^m\left(\sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}\right)x^m, \quad n\in\mathbb{N},\ k=0,1,\ldots,n. \tag{19}$$

С помощью формулы (19) легко вывести явное алгебраическое представление по степеням переменной $x$ для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке.

## 6. Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке

Основное утверждение состоит в следующем.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле (13). Тогда коэффициенты полиномов $B_n(f,x)$ в алгебраической записи (4) выражаются в виде*

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k \, f\left(1 - \frac{2k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},\ m = 0, 1, \ldots, n, \tag{20}$$

*со значениями*

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j}. \tag{21}$$

$\lhd$ Согласно (13) имеем

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) T_{n,k}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

с первичными полиномами $T_{n,k}(x)$ из формулы (14). Воспользуемся разложениями (19) и получим

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left( \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \right) x^m$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \right) f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f) x^m,$$

где

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \right) f\left(1 - \frac{2k}{n}\right).$$

Но это и есть запись (20) с числами $D_{n,m}^k$ из формулы (21). $\rhd$

Установленные формулы содержат богатую комбинаторную информацию. Раскроем арифметическую природу чисел $D_{n,m}^k$ и покажем, что их можно находить через весьма регулярные процедуры.

Наиболее простая ситуация со значениями $D_{n,0}^k$, отвечающими выбору $m = 0$. Эти числа фигурируют в записи свободного коэффициента $a_{n,0}(f)$ полинома $B_n(f,x)$. Согласно (21) имеем

$$D_{n,0}^k = \sum_j (-1)^j C_0^j C_n^{k-j} = C_0^0 C_n^k = C_n^k, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Поэтому формула (20) дает выражение

$$a_{n,0}(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(1 - \frac{2k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последнее полностью согласовано с равенством $a_{n,0}(f) = B_n(f,0)$, если вычислять значение $B_n(f,0)$, исходя из представления (13).

Итак, поскольку
$$D^k_{n,0} = C^k_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{22}$$
то числа $D^k_{n,0}$ находятся из обычного треугольника Паскаля, правда, со «срезанной» вершиной (ибо значение $D^0_{0,0}$ просто не нужно). Следующее утверждение показывает, что при любом другом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ числа $D^k_{n,m}$ с переменными $n$,$k$ тоже образуют своеобразные «трапеции Паскаля», построенные по своим начальным и краевым условиям.

**Теорема 2.** *При любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ числа $D^k_{n,m}$, определенные по формуле* (21), *обладают свойствами:*
$$D^k_{m,m} = (-1)^k C^k_m, \quad k \in \{0, 1, \ldots, m\}, \tag{23}$$
$$D^0_{n,m} = 1, \quad D^n_{n,m} = (-1)^m, \quad n \in \{m, m+1, \ldots\}, \tag{24}$$
$$D^{k-1}_{n,m} + D^k_{n,m} = D^k_{n+1,m}, \quad n \in \{m, m+1, \ldots\},\ k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{25}$$

$\lhd$ Согласно (21) при $n = m$ имеем
$$D^k_{m,m} = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k-j}_0 = (-1)^k C^k_m,$$
так как единственное ненулевое слагаемое будет при $j = k$. Соотношение (23) доказано.

Оба соотношения в (24) следуют из схожих соображений:
$$D^0_{n,m} = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{-j}_{n-m} = C^0_m C^0_{n-m} = 1,$$
$$D^n_{n,m} = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{n-j}_{n-m} = (-1)^m C^m_m C^{n-m}_{n-m} = (-1)^m,$$
поскольку в первом случае единственное ненулевое слагаемое встретится при $j = 0$, а во втором — при $j = m$.

Осталось доказать (25). Используя определение (21), запишем
$$\begin{aligned} D^{k-1}_{n,m} + D^k_{n,m} &= \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k-1-j}_{n-m} + \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k-j}_{n-m} \\ &= \sum_j (-1)^j C^j_m \bigl(C^{k-j-1}_{n-m} + C^{k-j}_{n-m}\bigr) = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k-j}_{n-m+1} = D^k_{n+1,m}. \end{aligned}$$
Все заявленные факты установлены. $\rhd$

Свойства, отмеченные в теореме 2, позволяют организовать регулярный процесс вычисления значений $D^k_{n,m}$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$. Формулу (23) надо трактовать как начальное условие, а соотношения (24) — как краевые условия. Ключевое свойство (25) естественно считать *правилом Паскаля*, действующим при последовательном увеличении номера $n$. Вместо дальнейших объяснений проще перейти к наглядным иллюстрациям.

## 7. Трапеции Паскаля

Итак, при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ рассматриваем числа $D^k_{n,m}$, введенные в теореме 1. Они возникают в формуле (20), выражающей коэффициенты $a_{n,m}(f)$ перед выбранной степенью $x^m$ в явной алгебраической записи (4) для полиномов Бернштейна (13). Используя свойства (23)–(25), будем записывать элементы $D^k_{n,m}$ в строки, каждая из которых соответствует своему номеру $n$ в нумерации $n = m$, $n = m+1$, $n = m+2$ и так далее. Элементы фиксированной строки с номером $n$ отвечают разным значениям $k$, взятым от 0 до $n$. Из-за сходства идеи с классической конструкцией будем называть возникающие таблицы *трапециями Паскаля.*

Напомним, что согласно (22) числам $D^k_{n,0}$ со значением $m = 0$ отвечает обычный набор биномиальных коэффициентов:

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Приведены первые восемь строк, начиная с $n = 1$ и до $n = 8$. Ясно, что такую таблицу (как и все последующие) можно продолжать до бесконечности.

При $m = 1$ для чисел $D^k_{n,1}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -1 \\
1 \quad 0 \quad -1 \\
1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\
1 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \\
1 \quad 3 \quad 2 \quad -2 \quad -3 \quad -1 \\
1 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad -5 \quad -4 \quad -1 \\
1 \quad 5 \quad 9 \quad 5 \quad -5 \quad -9 \quad -5 \quad -1 \\
1 \quad 6 \quad 14 \quad 14 \quad 0 \quad -14 \quad -14 \quad -6 \quad -1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 1$ до $n = 8$.

При $m = 2$ для чисел $D^k_{n,2}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -2 \quad 1 \\
1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\
1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad -2 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad -1 \quad -4 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 1 \quad -5 \quad -5 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 4 \quad -4 \quad -10 \quad -4 \quad 4 \quad 4 \quad 1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 2$ до $n = 8$.

При $m = 3$ для чисел $D^k_{n,3}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -3 \quad 3 \quad -1 \\
1 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad -1 \\
1 \quad -1 \quad -2 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \\
1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \\
1 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \quad -1 \quad -1 \\
1 \quad 2 \quad -2 \quad -6 \quad 0 \quad 6 \quad 2 \quad -2 \quad -1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 3$ до $n = 8$.

При $m = 4$ для чисел $D^k_{n,4}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \\
1 \quad -3 \quad 2 \quad 2 \quad -3 \quad 1 \\
1 \quad -2 \quad -1 \quad 4 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \\
1 \quad -1 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \quad -3 \quad -1 \quad 1 \\
1 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 4$ до $n = 8$.

При $m = 5$ для чисел $D^k_{n,5}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -5 \quad 10 \quad -10 \quad 5 \quad -1 \\
1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \quad -5 \quad 4 \quad -1 \\
1 \quad -3 \quad 1 \quad 5 \quad -5 \quad -1 \quad 3 \quad -1 \\
1 \quad -2 \quad -2 \quad 6 \quad 0 \quad -6 \quad 2 \quad 2 \quad -1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 5$ до $n = 8$.

При $m = 6$ для чисел $D^k_{n,6}$ получаем трапецию вида

$$
\begin{array}{c}
1 \quad -6 \quad 15 \quad -20 \quad 15 \quad -6 \quad 1 \\
1 \quad -5 \quad 9 \quad -5 \quad -5 \quad 9 \quad -5 \quad 1 \\
1 \quad -4 \quad 4 \quad 4 \quad -10 \quad 4 \quad 4 \quad -4 \quad 1
\end{array}
$$

Приведены строки, начиная с $n = 6$ до $n = 8$.

Дальнейший процесс понятен. Используя такие таблицы и формулу (20) из теоремы 1, легко получить развернутую алгебраическую запись для любого полинома $B_n(f, x)$, по крайней мере, при не слишком больших значениях $n \in \mathbb{N}$ (ср. с примерами из п. 4 выше).

Разумеется, возникающие линейные комбинации (20) могут весьма нетривиально вычисляться даже для простых функций $f(x)$, когда требуется привести ответ (алгебраическую запись полиномов Бернштейна) к упрощенному «завершенному» виду. Но с теоретической точки зрения полезно иметь в распоряжении общие формулы, раскрывающие внутренний закон образования коэффициентов.

Заметим, между прочим, что большинство элементов в трапециях Паскаля заведомо отлично от нуля, хотя отдельные нули все же встречаются. Но тогда по формуле (20) при увеличении номера $n$ вычисление коэффициентов $a_{n,m}(f)$ неизбежно «размазывается» по всему отрезку $[-1, 1]$, не локализуясь в меньшие промежутки. Другими словами, в отличие от стандартного случая, на симметричном отрезке $[-1, 1]$ не действует принцип локализации: если вычислять коэффициенты полиномов Бернштейна по формуле (20), фиксируя $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то из совпадения двух функций $f$ и $g$ на каком-нибудь отдельном промежутке $[\delta_1, \delta_2] \subsetneqq [-1, 1]$ не следует совпадение значений $a_{n,m}(f)$ и $a_{n,m}(g)$ при всех достаточно больших номерах $n$ (ср. с правилом (11) для коэффициентов (8)).

Систематическое изучение трапеций Паскаля обнаруживает множество закономерностей. Некоторые базовые факты полезно отметить сразу для применения в последующих исследованиях. Начнем с простых соображений «четности» и «нечетности».

## 8. По поводу четности и нечетности

Непосредственно из приведенных выше трапеций видно, что в распределении чисел $D^k_{n,m}$ есть естественная симметрия при четных $m$ и антисимметрия при нечетных $m$. Точное правило в зависимости от $m \in \mathbb{N}$ можно сформулировать так:

$$D^{n-k}_{n,m} = (-1)^m D^k_{n,m}, \quad n \geqslant m,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Действительно, по определению (21) имеем

$$D^{n-k}_{n,m} = \sum_j (-1)^j C^j_m C^{n-k-j}_{n-m} = (-1)^m \sum_j (-1)^{m-j} C^{m-j}_m C^{k-(m-j)}_{n-m}$$
$$= (-1)^m \sum_l (-1)^l C^l_m C^{k-l}_{n-m} = (-1)^m D^k_{n,m},$$

что и требовалось показать. Понятно, что общее правило (26) распадается на два случая.

При $m = 2q$, где $q \in \mathbb{N}$, получаем *соотношение симметрии*

$$D^{n-k}_{n,2q} = D^k_{n,2q}, \quad n \geqslant 2q,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{27}$$

При $m = 2q - 1$, где $q \in \mathbb{N}$, получаем *соотношение антисимметрии*

$$D^{n-k}_{n,2q-1} = -D^k_{n,2q-1}, \quad n \geqslant 2q - 1,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Как обычно, из (28) следует равенство

$$D^j_{2j,2q-1} = 0, \quad j = q,\, q+1,\, q+2, \ldots, \tag{29}$$

что также непосредственно наблюдается в трапециях с нечетными номерами.

Используя соотношения (27)–(29), можно отдельно упростить выражения для полиномов Бернштейна от четных и нечетных функций. Опустим элементарные обоснования и сразу приведем окончательный результат.

Итак, рассматриваем четную или нечетную функцию $f \in C[-1, 1]$ и ее полиномы Бернштейна (13), для которых ставится вопрос о явной алгебраической записи (4). В зависимости от характера функции $f$ имеем один из следующих ответов.

Если функция $f$ является четной на $[-1, 1]$, то $B_1(f, x) \equiv f(1)$ (константа), а затем

$$B_{2p}(f, x) = \sum_{q=0}^{p} a_{2p,2q}(f) x^{2q}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

где

$$a_{2p,2q}(f) = \frac{1}{2^{2p}} C^{2q}_{2p} \left[ D^p_{2p,2q}\, f(0) \;+\; 2 \sum_{k=1}^{p} D^{p-k}_{2p,2q}\, f\left(\frac{k}{p}\right) \right], \tag{31}$$

и

$$B_{2p+1}(f,x)=\sum_{q=0}^{p}\,a_{2p+1,2q}(f)x^{2q},\quad p\in\mathbb{N},\tag{32}$$

где

$$a_{2p+1,2q}(f)=\frac{1}{2^{2p}}C_{2p+1}^{2q}\sum_{k=0}^{p}\,D_{2p+1,2q}^{p-k}\,f\left(\frac{2k+1}{2p+1}\right).\tag{33}$$

Числа $D_{n,m}^k$ в формулах (31) и (33) определены по правилу (21).

Если функция $f$ является нечетной на $[-1,1]$, то $B_1(f,x)=f(1)x$, а затем

$$B_{2p}(f,x)=\sum_{q=1}^{p}a_{2p,2q-1}(f)\,x^{2q-1},\quad p\in\mathbb{N},\tag{34}$$

где

$$a_{2p,2q-1}(f)=\frac{1}{2^{2p-1}}C_{2p}^{2q-1}\sum_{k=1}^{p}D_{2p,2q-1}^{p-k}\,f\left(\frac{k}{p}\right),\tag{35}$$

и

$$B_{2p+1}(f,x)=\sum_{q=0}^{p}a_{2p+1,2q+1}(f)x^{2q+1},\quad p\in\mathbb{N},\tag{36}$$

где

$$a_{2p+1,2q+1}(f)=\frac{1}{2^{2p}}C_{2p+1}^{2q+1}\sum_{k=0}^{p}\,D_{2p+1,2q+1}^{p-k}\,f\left(\frac{2k+1}{2p+1}\right).\tag{37}$$

Числа $D_{n,m}^k$ в формулах (35) и (37) также определены по правилу (21).

По формулам (30), (32) и (34), (36) полиномы Бернштейна имеют ту же четность, что и порождающая их функция $f\in C[-1,1]$. Этот элементарный факт очевидно связан с соотношениями симметрии и антисимметрии в трапециях Паскаля, но может быть легко доказан и другим, совсем простым способом (см., например, [9]).

Обсудим теперь закономерности иного характера. Краткое изложение последующих результатов дано нами в заметке [16].

## 9. Алгебраические тождества в трапециях Паскаля

Сравнивая определение (21) для чисел $D_{n,m}^k$ с формулой перемножения биномов (17), замечаем связь этих соотношений. После элементарных переобозначений в (17) получим тождество

$$(1-x)^m(1+x)^{n-m}=\sum_{k=0}^{n}D_{n,m}^k\,x^k,\quad m,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant m,\tag{38}$$

с числами $D_{n,m}^k$ из формулы (21). Отсюда делаем вывод: каждая трапеция Паскаля с выбранным номером $m$ совпадает с таблицей коэффициентов для выражений

$$R_{n,m}(x)=(1-x)^m(1+x)^{n-m},\tag{39}$$

раскрываемых при фиксированном $m$ и последовательном увеличении значения $n\geqslant m$.

Всюду в данном пункте полагаем, что $m,n\in\mathbb{N}$ и $n\geqslant m$. Разумеется, формула (38) и ряд последующих соотношений (но не все!) будут справедливы также при $m=0$ со значениями $D^k_{n,0} = C^k_n$ (см. (22)). Но поскольку свойства биномиальных коэффициентов хорошо изучены, исключим из рассмотрения этот случай, считая везде, что $m \geqslant 1$.

Выражение $R_{n,m}(x)$ вида (39) будем называть *двойным биномом* или *бибиномом*, а формулу разложения (38) — *формулой бибинома*. Фактически бибином (39), взятый при фиксированных $n$, $m$, можно рассматривать как производящую функцию для $n$-й строки в $m$-й трапеции Паскаля. Подробнее про производящие функции для числовых последовательностей см. [12, гл. 5 и 7].

Из формулы бибинома (38) элементарно следуют все соотношения для чисел $D^k_{n,m}$, отмеченные в теореме 2 выше. Действительно, ввиду (38) свойства (23), (24) очевидны, а правило Паскаля (25) получается естественной индукцией по $n$, проводимой при последовательном умножении $(1-x)^m$ на $(1+x)$, затем снова на $(1+x)$, и снова на $(1+x)$, и т. д.

Как всегда, при наличии хороших производящих функций можно установить много полезных фактов про коэффициенты, возникающие в разложениях. Отметим наиболее простые, базовые соотношения.

**Теорема 3.** *Числа $D^k_{n,m}$, определенные по формуле (21), обладают свойствами:*

$$\sum_{k=0}^{n} D^k_{n,m} = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{40}$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k D^k_{m,m} = 2^m, \quad m \geqslant 1, \tag{41}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k_{n,m} = 0, \quad n > m \geqslant 1, \tag{42}$$

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} D^{2j}_{n,m} = 0, \qquad \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} D^{2j+1}_{n,m} = 0, \quad n > m \geqslant 1, \tag{43}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k D^k_{n,m} = (-1)^m 3^{n-m}, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{44}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k D^k_{n,m} = (-1)^{n-m} 3^m, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{45}$$

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} 2^{2j} D^{2j}_{n,m} = \frac{(-1)^m 3^{n-m} + (-1)^{n-m} 3^m}{2}, \quad n \geqslant m \geqslant 1, \tag{46}$$

$$\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} 2^{2j+1} D^{2j+1}_{n,m} = \frac{(-1)^m 3^{n-m} - (-1)^{n-m} 3^m}{2}, \quad n \geqslant m \geqslant 1. \tag{47}$$

$\lhd$ Используем формулу бибинома (38) и краткое обозначение $R_{n,m}(x)$, введенное в (39). При подстановке в (38) значения $x = 1$ получаем тождество (40), ибо $R_{n,m}(1) = 0$. Если $n = m$, то при подстановке в (38) значения $x = -1$ получим тождество (41), ибо $R_{m,m}(-1) = 2^m$. Если же $n > m$, то при подстановке в (38) значения $x = -1$ получим тождество (42), ибо тогда $R_{n,m}(-1) = 0$. Соотношения (43) получаются как сумма и разность тождеств (40) и (42). Соотношения (44) и (45) возникают при подстановке в (38) значений $x = 2$ и $x = -2$. Сумма и разность соотношений (44) и (45) дают соответственно (46) и (47). Доказательство завершено. $\rhd$

Другие полезные формулы можно установить при последовательном дифференцировании базового тождества (38).

**Теорема 4.** *Числа $D^k_{n,m}$, определенные по формуле* (21), *обладают свойствами:*

$$\sum_{k=1}^{n} kD^k_{n,1} = -2^{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{n} kD^k_{n,m} = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 2. \tag{49}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)D^k_{n,1} = -(n-1)2^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{50}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)D^k_{n,2} = 2^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{51}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)D^k_{n,m} = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 3. \tag{52}$$

*Общая формула, верная при любом фиксированном $p \in \mathbb{N}$, выглядит так:*

$$\sum_{k=p}^{n} (k)_p D^k_{n,m} = \begin{cases} (-1)^m (p)_m (n-m)_{p-m}\, 2^{n-p}, & n \geqslant p \geqslant m, \\ 0, & n \geqslant m \geqslant p+1, \end{cases} \tag{53}$$

*где $(\alpha)_j$ — символ Похгаммера (убывающий факториал), определенный для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ по правилу: $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_1 = \alpha$, $(\alpha)_2 = \alpha(\alpha-1)$, $(\alpha)_j = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 3$. В частности, в дополнение к (48) и (50) имеем*

$$\sum_{k=p}^{n} k(k-1)\ldots(k-p+1)D^k_{n,1} = -p(n-1)\ldots(n-p+1)\, 2^{n-p}, \quad n \geqslant p, \tag{54}$$

*для любого $p \geqslant 3$.*

$\lhd$ Нетрудно убедиться, что все соотношения (48)–(52) и (54) являются частными случаями общей формулы (53). Сама же формула (53) получается $p$-кратным дифференцированием базового тождества (38) с последующей подстановкой в результат значения $x = 1$. Так как бибином $R_{n,m}(x)$ в (38) имеет степень $n$, то требование $n \geqslant p$ нужно для содержательности задачи. Затем, поскольку $x = 1$ является для $R_{n,m}(x)$ корнем кратности $m$, то $R^{(p)}_{n,m}(1) = 0$ всякий раз, когда $m > p$, т. е. когда $m \geqslant p+1$. Отсюда следует второе (нижнее) соотношение в (53) при $n \geqslant m \geqslant p+1$. Для доказательства первого тождества при $n \geqslant p \geqslant m$ воспользуемся правилом Лейбница, согласно которому

$$\sum_{k=p}^{n} (k)_p D^k_{n,m} = R^{(p)}_{n,m}(1) = \big((1-x)^m(1+x)^{n-m}\big)^{(p)}\,\Big|_{x=1}$$

$$= \sum_{j=0}^{p} C^j_p \big((1-x)^m\big)^{(j)}\, \big((1+x)^{n-m}\big)^{(p-j)}\,\Big|_{x=1} = C^m_p \big((1-x)^m\big)^{(m)}\, \big((1+x)^{n-m}\big)^{(p-m)}\,\Big|_{x=1}$$

$$= C^m_p\, m!\, (-1)^m\, (n-m)(n-m-1)\ldots(n-p+1)\, 2^{n-p} = (-1)^m (p)_m (n-m)_{p-m}\, 2^{n-p},$$

что и утверждается в (53). Теорема доказана. $\rhd$

Установленные соотношения позволяют получить такие тождества

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,1}^{k} = -n2^{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{55}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,2}^{k} = 2^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{56}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,m}^{k} = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 3, \tag{57}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,1}^{k} = -(3n^2+3n-2)2^{n-3}, \quad n \geqslant 1, \tag{58}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,2}^{k} = 3n \cdot 2^{n-2}, \quad n \geqslant 2, \tag{59}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,3}^{k} = -3 \cdot 2^{n-2}, \quad n \geqslant 3, \tag{60}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 D_{n,m}^{k} = 0, \quad n \geqslant m \geqslant 4, \tag{61}$$

и так далее. Подобные соотношения получаются как линейные комбинации соответствующих тождеств из теоремы 4. Например, для доказательства (55) воспользуемся тождествами (48) и (50), рассуждая по схеме

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 D_{n,1}^{k} = \sum_{k=1}^{n} (k(k-1)+k) D_{n,1}^{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) D_{n,1}^{k} + \sum_{k=1}^{n} k D_{n,1}^{k}$$
$$= -(n-1)2^{n-1} - 2^{n-1} = -n2^{n-1}.$$

Аналогичный прием действует в остальных примерах (56)–(61).

Еще одна любопытная формула обнаруживается при интегрировании бибинома. Речь идет о соотношении

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{1}{2j+1} D_{n,m}^{2j} = \frac{2^n}{(n+1)C_n^m}, \quad n \geqslant m \geqslant 1. \tag{62}$$

Действительно, согласно (38) имеем

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^m (1+x)^{n-m}\, dx = \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^{k} \int_{-1}^{1} x^k\, dx = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{2}{2j+1} D_{n,m}^{2j}$$

при $m, n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m$. Интеграл в левой части с помощью подстановки $x = 2t-1$ сводится к эйлеровой бета-функции:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^m (1+x)^{n-m}\, dx = 2^{n+1} \int_{0}^{1} t^{n-m}\, (1-t)^m\, dt = \frac{2^{n+1}}{(n+1)C_n^m},$$

что верно, поскольку

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} = \frac{1}{(p+q+1)C_{p+q}^q}, \quad p,q \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Из полученных выражений следует нужное тождество (62).

Формула (62) при $m=0$ переходит в известную сумму

$$\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{1}{2j+1} C_n^{2j} = \frac{2^n}{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Отметим, что внешне «более простые» суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} D_{n,m}^k, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} C_n^k,$$

по-видимому, не имеют универсальных замкнутых выражений.

## 10. Комбинации с элементами из разных трапеций

Все перечисленные до сих пор соотношения «не перемешивали» элементы из разных трапеций Паскаля: в каждом отдельно взятом тождестве фигурировали числа $D_{n,m}^k$, выбранные из одной трапеции с фиксированным значением $m \in \mathbb{N}$. Впрочем, не подлежит сомнению, что разные трапеции сочетаются друг с другом многими связями.

Для примера отметим, что

$$C_n^m D_{n,m}^k = C_n^k D_{n,k}^m, \quad n \in \mathbb{N},\ k,m \in \{0,1,\dots,n\}. \tag{63}$$

Действительно, используя определение (21) и тождество (18), имеем

$$C_n^m D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_n^m C_m^j C_{n-m}^{k-j} = \sum_j (-1)^j C_n^k C_k^j C_{n-k}^{m-j} = C_n^k D_{n,k}^m,$$

что и требовалось показать.

Полезно сравнить (63) с выражениями (20) для коэффициентов в алгебраической записи (4) полиномов Бернштейна (13). Полученное означает, что при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ вклад от значения $f\left(1-\frac{2k}{n}\right)$ в коэффициент $a_{n,m}(f)$ при $x^m$ будет ровно тот же, что и вклад от значения $f\left(1-\frac{2m}{n}\right)$ в коэффициент $a_{n,k}(f)$ при $x^k$ (под «вкладом» мы понимаем множитель, стоящий в коэффициентах $a_{n,m}(f)$ и $a_{n,k}(f)$ при указанных выше значениях). Это своеобразное *правило баланса* действует для коэффициентов полиномов Бернштейна именно на $[-1,1]$.

Отметим также формулу

$$D_{n,m}^k = (-1)^k D_{n,n-m}^k, \quad n \in \mathbb{N},\ k,m \in \{0,1,\dots,n\}, \tag{64}$$

связывающую $n$-е строки в двух трапециях с номерами $m$ и $n-m$ (эти номера очевидно различны при $n \neq 2m$). Соотношение (64) следует напрямую из (21), поскольку

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} = \sum_l (-1)^{k-l} C_m^{k-l} C_{n-m}^l = \sum_l (-1)^{k-l} C_{n-m}^l C_m^{k-l}$$
$$= (-1)^k \sum_l (-1)^l C_{n-m}^l C_{n-(n-m)}^{k-l} = (-1)^k D_{n,n-m}^k.$$

В частности, при $n = m$ из (64) получаем $D^k_{m,m} = (-1)^k D^k_{m,0} = (-1)^k C^k_m$, что совпадает с прежней формулой (23).

Приведем еще одно соотношение

$$D^{k+1}_{n+1,m+1} = D^{k+1}_{n,m} - D^k_{n,m}, \quad n \in \mathbb{N},\ k, m \in \{0, 1, \dots, n\}, \tag{65}$$

связывающее элементы из «соседних» трапеций Паскаля. Действительно, выкладка

$$\begin{aligned} D^{k+1}_{n,m} - D^k_{n,m} &= \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k+1-j}_{n-m} - \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k-j}_{n-m} \\ &= \sum_j (-1)^j C^j_m C^{k+1-j}_{n-m} - \sum_j (-1)^{j-1} C^{j-1}_m C^{k+1-j}_{n-m} \\ &= \sum_j (-1)^j \bigl(C^j_m + C^{j-1}_m\bigr) C^{k+1-j}_{n-m} = \sum_j (-1)^j C^j_{m+1} C^{k+1-j}_{n-m} = D^{k+1}_{n+1,m+1} \end{aligned}$$

сразу дает нужный результат. При $k = n$ в формуле (65) принято соглашение $D^{n+1}_{n,m} = 0$. С учетом него $D^{n+1}_{n+1,m+1} = -D^n_{n,m}$, что согласуется со вторым условием в (24).

Обсудим теперь другое специальное свойство трапеций Паскаля, которое влечет весьма неожиданное следствие для коэффициентов полиномов Бернштейна.

## 11. Универсальная связь двух коэффициентов

Непосредственно изучая трапеции Паскаля, можно заметить одну закономерность: в $m$-й по счету трапеции с фиксированным $m \in \mathbb{N}$ строка с номером $n = 2m$ выглядит так же, как строка с номером $n = m$, только «прореженная» нулями. Аналитически этот факт выражается в виде

$$D^{2j}_{2m,m} = (-1)^j C^j_m = D^j_{m,m}, \quad m \in \mathbb{N},\ j = 0, \dots, m, \tag{66}$$

$$D^{2j-1}_{2m,m} = 0, \quad m \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, m. \tag{67}$$

Для обоснования соотношений (66), (67) подставим $n = 2m$ в формулу (38). Получим

$$(1 - x)^m (1 + x)^m = \sum_{k=0}^{2m} D^k_{2m,m} x^k, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

С другой стороны, по традиционной формуле бинома

$$(1 - x)^m (1 + x)^m = (1 - x^2)^m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C^j_m x^{2j}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Сравнивая (68) и (69), а затем учитывая (23), приходим к соотношениям (66), (67). Отметим, что (67) следует также из (64), если подставить туда $n = 2m$ и $k = 2j - 1$.

Обнаруженная закономерность позволяет установить следующее правило, связывающее коэффициенты $a_{m,m}(f)$ и $a_{2m,m}(f)$ в алгебраической записи полиномов Бернштейна на $[-1, 1]$.

**Теорема 5.** *Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле* (13). *Тогда в алгебраической записи* (4) *для этих полиномов действует правило*

$$a_{2m,m}(f) = 2^{-m} C^m_{2m}\, a_{m,m}(f), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{70}$$

$\triangleleft$ По формуле (20) имеем выражения

$$a_{m,m}(f)=\frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m}D^j_{m,m}\ f\left(1-\frac{2j}{m}\right),\tag{71}$$

$$a_{2m,m}(f)=\frac{1}{2^{2m}}C^m_{2m}\sum_{k=0}^{2m}D^k_{2m,m}\ f\left(1-\frac{k}{m}\right).\tag{72}$$

Используем в (72) соотношения (66), (67). Получим

$$a_{2m,m}(f)=\frac{1}{2^{2m}}C^m_{2m}\sum_{j=0}^{m}D^{2j}_{2m,m}\ f\left(1-\frac{2j}{m}\right)=\frac{1}{2^{2m}}C^m_{2m}\sum_{j=0}^{m}D^j_{m,m}\ f\left(1-\frac{2j}{m}\right).$$

Сравнивая результат с (71), приходим к равенству (70). $\triangleright$

Подчеркнем, что правило (70) носит универсальный характер: оно связывает центральный коэффициент $a_{2m,m}(f)$ полинома $B_{2m}(f,x)$ со старшим коэффициентом $a_{m,m}(f)$ полинома $B_m(f,x)$ для любой функции $f\in C[-1,1]$ при любом выборе $m\in\mathbb{N}$. Отмеченное свойство не имеет аналогов на стандартном отрезке $[0,1]$.

Обратим также внимание на то, что множитель $2^{-m}C^m_{2m}$ в формуле (70) быстро увеличивается с ростом $m$. По формуле Стирлинга имеем

$$2^{-m}C^m_{2m}\sim\frac{2^m}{\sqrt{\pi m}},\quad m\to\infty.\tag{73}$$

Используя асимптотику (73) и связь (70) между коэффициентами $a_{m,m}(f)$ и $a_{2m,m}(f)$, нетрудно обосновать экспоненциальный рост при $m\to\infty$ коэффициента $a_{2m,m}(f)$ на единичном шаре в пространстве $C[-1,1]$. Данный факт представляет интерес не только «сам по себе», но и в связи с вопросом о скорости роста коэффициентов в равномерных полиномиальных аппроксимациях (см. [17–19]).

## 12. Заключительные замечания

Итак, трапеции Паскаля полезны для теории полиномов Бернштейна и, кроме того, обладают богатым внутренним математическим содержанием. В связи с этим укажем несколько перспективных тем для дальнейших исследований.

1) Распределение нулей в трапециях Паскаля при различных $m\in\mathbb{N}$. Частотность и регулярность встречающихся нулей. Группы «очевидных» регулярных нулей описаны правилами (29) и (67). Есть ли какие-то содержательные дополнения к этим случаям?

2) Потенциальная скорость роста элементов в трапециях Паскаля при том или ином значении $m\in\mathbb{N}$. Требуется дать оценки для величин

$$\mu_{n,m}\equiv\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|D^k_{n,m}\right|,\quad \eta_{n,m}\equiv\sum_{k=0}^{n}\left|D^k_{n,m}\right|\tag{74}$$

при увеличении номера $n\geqslant m$ с фиксированным $m\in\mathbb{N}$.

3) Рекуррентные соотношения, связывающие элементы из разных трапеций Паскаля. Типичным примером такого соотношения служит формула (65) выше.

4) Простые выражения для элементов $D^k_{n,m}$ при фиксированном $m\in\mathbb{N}$ (наподобие известной формулы биномиальных коэффициентов). Возможно, что эта проблема имеет лишь частные решения, полезные при малых значениях $m$.

Так, для элементов первой трапеции имеем представление

$$D^k_{n,1} = C^k_{n-1} - C^{k-1}_{n-1} = C^k_n - 2C^{k-1}_{n-1} = \frac{n-2k}{n} C^k_n, \quad n \geqslant 1,\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

легко выводимое из определения (21). Последующая серия выглядит так:

$$D^k_{n,2} = C^k_n - 4C^{k-1}_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

$$D^k_{n,3} = C^k_n - 6C^{k-1}_{n-3} - 2C^{k-3}_{n-3}, \quad n \geqslant 3,$$

$$D^k_{n,4} = C^k_n - 8C^{k-1}_{n-4} - 8C^{k-3}_{n-4}, \quad n \geqslant 4,$$

$$D^k_{n,5} = C^k_n - 10C^{k-1}_{n-5} - 20C^{k-3}_{n-5} - 2C^{k-5}_{n-5}, \quad n \geqslant 5,$$

при $k = 0, 1, \ldots, n$ с учетом соглашения (15). Перечисленные формулы проще исходного определения (21). Они являются частными проявлениями универсального правила

$$D^k_{n,m} = C^k_n - 2 \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} C^{2j+1}_m C^{k-2j-1}_{n-m}, \quad m, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant m, \tag{75}$$

верного при $k = 0, 1, \ldots, n$. Для вывода (75) надо вспомнить (см. [12, с. 195–196]) известную *свертку Вандермонда*

$$C^k_n = \sum_l C^l_m C^{k-l}_{n-m}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

и применить ее в исходном определении (21) по схеме

$$\begin{aligned} D^k_{n,m} &= \sum_l (-1)^l C^l_m C^{k-l}_{n-m} = \sum_l C^l_m C^{k-l}_{n-m} + \sum_l ((-1)^l - 1) C^l_m C^{k-l}_{n-m} \\ &= C^k_n - 2 \sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} C^{2j+1}_m C^{k-2j-1}_{n-m}. \end{aligned}$$

Использованный прием сократил количество слагаемых примерно в два раза.

И, наконец, последнее. Весьма перспективным представляется операторный анализ формул (20), (21), полученных на отрезке $[-1, 1]$ для коэффициентов $a_{n,m}(f)$. Напомним (см. п. 3 выше), что в случае стандартного отрезка $[0, 1]$ ответ записывается через оператор конечной разности. В случае симметричного отрезка $[-1, 1]$ картина оказывается более сложной — помимо оператора разности приходится привлекать еще оператор суммы.

Действительно, следуя классическому трактату Нёрлунда [20] (но видоизменяя его обозначения), введем парные *операторы разности* и *суммы*

$$\delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \sigma_h f(x) = \frac{f(x+h) + f(x)}{2}, \tag{76}$$

вычисляемые от функции $f$ в допустимой точке $x \in \mathbb{R}$ с фиксированным шагом $h > 0$. Нетрудно убедиться (эти соображения отсутствуют в [20]), что последовательные композиции операторов (76) записываются через элементы трапеций Паскаля.

Точнее, при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и последовательном увеличении значения $n$ ($n = m$, $n = m + 1$, $n = m + 2$, $\ldots$) получаются формулы

$$\sigma_h^{n-m} \delta_h^m f(x) = \frac{1}{2^{n-m} h^m} \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k \, f(x + (n-k)h) \tag{77}$$

с числами $D_{n,m}^k$, взятыми из $m$-й трапеции Паскаля. Сравнивая (77) с основной формулой (20), устанавливаем операторное представление

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{n^m} \, C_n^m \, \sigma_{2/n}^{n-m} \, \delta_{2/n}^m f(-1), \quad n \in \mathbb{N}, \ m = 0, 1, \ldots, n. \tag{78}$$

Аккуратное обоснование (78) и разбор возникающих следствий лучше провести отдельно.

Авторы признательны Д. Г. Цветкович за техническую помощь и проверку многих полученных соотношений.

**Добавление к заключению.** Почти весь предыдущий текст был подготовлен и сдан в печать в 2016 г., но его издание несколько затянулось. В связи с этим полезно отметить следующее. В недавней работе авторов [21] дано применение изложенной выше теории к задаче о скорости роста коэффициентов полиномов Бернштейна на симметричном отрезке. Некоторые из результатов [21] оказались весьма неожиданными (см., в частности, явные выражения и асимптотики для величины $\eta_{n,m}$ из формулы (74), указанные в [21] при малых значениях $m \in \mathbb{N}$).

Кроме того, в самое последнее время мы обнаружили, что объекты, родственные числам $D_{n,m}^k$, активно используются в теории вероятностей, криптографии и теории кодирования как значения некоторых специальных *полиномов Кравчука* (см. [22–24]). Математический контекст и принятые там обозначения существенно отличаются от наших, но многие имеющиеся параллели могут обогащать как теорию полиномов Бернштейна, так и теорию полиномов Кравчука.

## Литература


1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials.—Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.—x+130 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу.—Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.—64 с.
3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.—М.–Л: ГИТТЛ, 1949.—688 с.
4. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений.—М.: ГИФМЛ, 1959.—212 с.
5. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation.—N. Y.: Dover, 1975.—xvi+394 p.
6. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer–Verlag, 1993.—x+450 p.
7. *Phillips G. M.* Interpolation and Approximation by Polynomials.—N.Y.–Berlin–Heidelberg: Springer, 2003.—xiv+312 p.
8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Мат. форум. Т. 8. Ч. 1. Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 126–175.—(Итоги науки. Юг России).
9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2015.—Т. 15, вып. 3.—С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.
10. *Wigert S.* Réflexions sur le polynome d'approximation $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) x^\nu (1-x)^{n-\nu}$ // Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.—1927.—Bd. 20, Häfte 2.—S. 1–15.
11. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.—М.: Наука, 1977.—512 с.
12. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики.—М.: Мир, 1998.—704 с.

13. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Материалы науч. конф. Герценовские чтения–2015. Некоторые актуальные проблемы современной математики и мат. образования.—СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015.—С. 115–121.
14. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // Материалы науч. конф. Герценовские чтения–2015. Некоторые актуальные проблемы современной математики и мат. образования.—СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015.—С. 121–124.
15. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 15. Материалы XV Междунар. науч. конф.—Смоленск: СмолГУ, 2014.—С. 184–186.
16. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 17. Материалы XVII Междунар. науч. конф.—Смоленск: СмолГУ, 2016.—С. 177–182.
17. *Stafney J. D.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$ // Duke Math. J.—1967.—Vol. 34, № 3.—P. 393–396.
18. *Roulier J. A.* Permissible bounds on the coefficients of approximating polynomials // J. Approx. Theory.—1970.—Vol. 3, № 2.—P. 117–122.
19. *Гурарий В. И., Мелетиди М. А.* Об оценках коэффициентов полиномов, аппроксимирующих непрерывные функции // Функциональный анализ и его прил.—1971.—Т. 5, вып. 1.—С. 73–75.
20. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung.—Berlin: Springer Verlag, 1924.—ix+551 p.
21. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 19. Материалы XIX Междунар. науч. конф.—Смоленск: СмолГУ, 2018.—С. 336–347.
22. *Feinsilver P., Kocik J.* Krawtchouk polynomials and Krawtchouk matrices // Recent Advances in Applied Probability / Eds.: Baeza-Yates R., Glaz J., Gzyl H., Hüsler J., Palacios J. L.—Boston, MA: Springer, 2005.—P. 115–141.
23. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А.* Анализ спектра случайных симметрических булевых матриц // Матем. вопр. криптогр.—2013.—Т. 4, вып. 1.—С. 59–76. DOI: 10.4213/mvk73.
24. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Миронова В. А.* Многочлены Кравчука и их применения в задачах криптографии и теории кодирования // Матем. вопр. криптогр.—2015.—Т. 6, вып. 1.—С. 33–56. DOI: 10.4213/mvk150.

*Статья поступила 21 июня 2016 г.*
*Дополненный вариант — 22 июня 2019 г.*

Петросова Маргарита Арсеновна
Московский педагогический государственный университет,
*аспирант кафедры математического анализа*
РОССИЯ, 107140, Москва, Краснопрудная, 14
E-mail: petrosova05@mail.ru

Тихонов Иван Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
*профессор кафедры математической физики*
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: ivtikh@mail.ru

Шерстюков Владимир Борисович
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
*доцент кафедры высшей математики*
РОССИЯ, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: shervb73@gmail.com

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 3, P. 68–86*

# ALGEBRAIC REPRESENTATION FOR BERNSTEIN POLYNOMIALS ON THE SYMMETRIC INTERVAL AND COMBINATORIAL RELATIONS

Petrosova, M. A.[1], Tikhonov, I. V.[2], Sherstyukov, V. B.[3]

[1] Moscow State Pedagogical University, 14 Krasnoprudnaya Str., Moscow 107140, Russia;
[2] Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie gory, Moscow 119991, Russia;
[2] National Research Nuclear University MEPhI, 31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia
E-mail: petrosova05@mail.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

**Abstract.** We pose the question of explicit algebraic representation for Bernstein polynomials. The general statement of the problem on an arbitrary interval $[a, b]$ is briefly discussed. For completeness, we recall Wigert formulas for the polynomials coefficients on the standard interval $[0, 1]$. However, the focus of the paper is the case of the symmetric interval $[-1, 1]$, which is of fundamental interest for approximation theory. The exact expressions for the coefficients of Bernstein polynomials on $[-1, 1]$ are found. For the interpretation of the results we introduce a number of new numerical objects named Pascal trapeziums. They are constructed by analogy with a classical triangle, but with their own "initial" and "boundary" conditions. The elements of Pascal trapeziums satisfy various relations which remind customary combinatorial identities. A systematic research on such properties is fulfilled, and summaries of formulas are given. The obtained results are applicable for the study of the behavior of the coefficients in Bernstein polynomials on $[-1, 1]$. For example, it appears that there exists a universal connection between two coefficients $a_{2m,m}(f)$ and $a_{m,m}(f)$, and this is true for all $m \in \mathbb{N}$ and for all functions $f \in C[-1, 1]$. Thus, it is set up that the case of symmetric interval $[-1, 1]$ is essentially different from the standard case of $[0, 1]$. Perspective topics for future research are proposed. A number of this topics is already being studied.

**Key words:** Bernstein polynomials, symmetric interval, Pascal trapeziums, combinatorial relations.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 41A10, 11B83, 05A10, 05A19.

**For citation:** *Petrosova, M. A., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* Algebraic Representation for Bernstein Polynomials on the Symmetric Interval and Combinatorial Relations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 62–86 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36462.

## References

1. *Lorentz, G. G. Bernstein Polynomials*, Toronto, Univ. of Toronto Press, 1953, x+130 p.
2. *Videnskij, V. S. Mnogochleny Bernshtejna. Uchebnoe posobie k speckursu* [Bernstein Polynomials. Textbook for the Special Course], Leningrad, LSPI n. a. A. I. Herzen, 1990, 64 p. (in Russian).
3. *Natanson, I. P. Konstruktivnaya teoriya funkcij* [Constructive Theory of Functions], Moscow–Leningrad, GITTL, 1949, 688 p. (in Russian).
4. *Korovkin, P. P. Linejnye operatory i teoriya priblizhenij* [Linear Operators and the Theory of Approximation], Moscow, Fizmatgiz, 1959, 212 p. (in Russian).
5. *Davis, P. J. Interpolation and Approximation*, N. Y., Dover, 1975, xvi+394 p.
6. *DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. Constructive Approximation*, Berlin–Heidelberg–N. Y., Springer–Verlag, 1993, x+450 p.
7. *Phillips, G. M. Interpolation and Approximation by Polynomials*, N.Y.–Berlin–Heidelberg, Springer, 2003, xiv+312 p.
8. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Bernstein Polynomials: the Old and the New, *Matematicheskij forum. T. 8. Ch. 1. Issledovaniya po matematicheskomu analizu* (*Itogi nauki. Yug Rossii*) [Math. forum. Vol. 8. Part. 1. Studies in Mathematical Analysis (Results of Science. South of Russia)], Vladikavkaz, SMI VSC RAS & RNO-A, 2014, pp. 126–175 (in Russian).
9. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Gluing rule for Bernstein polynomials on the symmetric interval, *Izv. Saratov Univ.* (*N. S.*)*, Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 288–300 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.

10. *Wigert S.* Réflexions sur le polynome d'approximation $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1927, Bd. 20, Häfte 2, S. 1–15.
11. *Dzyadyk, V. K. Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funkcij polinomami* [Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials], Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian).
12. *Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Boston, Addison-Wesley Longman Publ. Co., Inc., 1994, 672 p.
13. *Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* On the Behavior of the Coefficients of Bernstein Polynomials as Algebraic Notation on a Standard Interval, *Materialy nauchnoj konferencii. Gercenovskie chteniya–2015. Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i mat. obrazovaniya* [Materials of the Sci. Conf. Herzen Readings–2015. Some Current Issues Modern Mathematics and Math. Education], Saint Petersburg, Publishing House of RSPU n. a. A. I. Herzen, 2015, pp. 115–121 (in Russian).
14. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* Explicit Expressions for Coefficients Bernstein Polynomials in Algebraic Notation on a Symmetric Interval, *Materialy nauchnoj konferencii. Gercenovskie chteniya–2015. Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i mat. obrazovaniya* [Materials of the Sci. Conf. Herzen Readings–2015. Some Current Issues Modern Mathematics and Math. Education], Saint Petersburg, Publishing House of RSPU n. a. A. I. Herzen, 2015, pp. 121–124 (in Russian).
15. *Petrosova, M. A., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* The Case of a Symmetric Interval in the Theory of Classical Bernstein Polynomials, *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. Vyp. 15. Materialy XV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Computer Mathematics Systems and Their Applications. Vol. 15. Materials of the XV International Sci. Conf.], Smolensk, Smolensk State Univ., 2014, pp. 184–186 (in Russian).
16. *Petrosova, M. A., Tikhonov, I. V. and Sherstyukov, V. B.* Combinatorial Relations Related with Bernstein Polynomials on a Symmetric Interval, *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. Vyp. 17. Materialy XV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Computer Mathematics Systems and Their Applications. Vol. 17. Materials of the XVII International Sci. Conf.], Smolensk, Smolensk State Univ., 2016, pp. 177–182 (in Russian).
17. *Stafney, J. D.* A Permissible Restriction on the Coefficients in Uniform Polynomial Approximation to $C[0,1]$, *Duke Math. J.*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 393–396.
18. *Roulier, J. A.* Permissible Bounds on the Coefficients of Approximating Polynomials, *J. Approx. Theory*, 1970, vol. 3, no. 2, pp. 117–122.
19. *GurariiM, V. I. and. Meletidi, A* Functional Analysis and Its Applications, *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, no. 1, pp. 60–62. DOI: 10.1007/BF01075850.
20. *Nörlund, N. E. Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Berlin, Springer Verlag, 1924, ix+551 p.
21. *Tikhonov, I. V., Sherstyukov, V. B. and Petrosova, M. A.* New Research, Associated with the Algebraic Representation of Bernstein Polynomials on a Symmetric Interval, *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. Vyp. 19. Materialy XIX Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii* [Computer Mathematics Systems and Their Applications. Vol. 19. Materials of the XIX International Sci. Conf.], Smolensk, Smolensk State Univ., 2018, pp. 336–347 (in Russian).
22. *Feinsilver P., Kocik J.* Krawtchouk Polynomials and Krawtchouk Matrices, *Recent Advances in Applied Probability*, Eds.: Baeza-Yates R., Glaz J., Gzyl H., Hüsler J., Palacios J. L., Boston, MA, Springer, 2005, pp. 115–141.
23. *Ivchenko, G. I., Medvedev, Yu. I. and Mironova, V. A.* Analysis of the Spectrum of Random Symmetric Boolean Functions, *Mat. Vopr. Kriptogr.*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 59–76 (in Russian). DOI: 10.4213/mvk73.
24. *Ivchenko, G. I., Medvedev, Yu. I. and Mironova, V. A.* Krawtchouk Polynomials and their Applications in Cryptography and Coding Theory, *Mat. Vopr. Kriptogr.*, 2015, vol. 6, no. 1, pp. 33–56 (in Russian). DOI: 10.4213/mvk150.

*Received 21 June, 2016*
*Supplemented 22 Jule, 2019*

Margarita A. Petrosova
Moscow State Pedagogical University,
14 Krasnoprudnaya Str., Moscow 107140, Russia,
*Graduate Student of the Department of Math. Analysis*
E-mail: petrosova05@mail.ru

Ivan V. Tikhonov
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie gory, Moscow 119991, Russia,
*Professor of the Department of Math. Physics*
E-mail: ivtikh@mail.ru

Vladimir B. Sherstyukov
National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoe shosse, Moscow 115409, Russia,
*Associate Professor of Higher Mathematics Department*
E-mail: shervb73@gmail.com

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 3, С. 87–88*

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## ЮРИЮ ГРИГОРЬЕВИЧУ РЕШЕТНЯКУ 90 ЛЕТ

26 сентября 2019 г. — день 90-летия выдающегося российского ученого академика Российской академии наук Юрия Григорьевича Решетняка.

Решетняку принадлежат фундаментальные результаты в геометрии, теории функций, вариационном исчислении и родственных разделах науки. Он является основоположником ряда новых направлений в математике, занимающих пограничное место между анализом и геометрией. Одно из них — теория пространственных отображений с ограниченным искажением. Эти отображения представляют собой многомерный вещественный аналог аналитических функций и «неоднолистное» обобщение пространственных квазиконформных отображений.

В работах Решетняка заложены основы нелинейной теории потенциала, в рамках которой достигнуты существенные продвижения в теории функций с обобщенными производными. Идеи Решетняка стали основой исследований созданной им научной школы, насчитывающей несколько десятков докторов и кандидатов наук.

Мировую известность приобрело полученное Решетняком окончательное решение проблемы М. А. Лаврентьева об устойчивости конформных отображений. Классическими стали теоремы Решетняка о слабой сходимости якобианов, о полунепрерывности снизу функционалов вариационного исчисления и о дифференцируемости почти всюду функций с обобщенными производными в смысле С. Л. Соболева.

Исследования в области квазиконформного анализа и нелинейной теории потенциала интенсивно ведутся во всем мире. Становится все более ясной значения развиваемых Решетняком подходов для приложений в теории пространств Соболева, для анализа граничного поведения функций многих комплексных переменных и решений квазилинейных эллиптических уравнений, для теории многообразий ограниченной кривизны, теории пространственных кривых и в ряде других математических направлений.

Решетняк вложил много сил в создание, становление и формирование научного облика «Сибирского математического журнала», в котором он активно работаете с первых дней организации журнала.

Решетняк — ученик А. Д. Александрова и учитель тысяч математиков, выпускников НГУ, которых он знакомил с началами математического анализа. Все они с благодарностью вспоминают блестящие лекции, монографии и учебные пособия Решетняка. Ученый по убеждениям всегда стремится привести своих учеников к границам непознанного. Курс Решетняка уже более полувека знаменует переход от классики преподавания дифференциального и интегрального исчисления в стиле Г. М. Фихтенгольца к современному анализу на основе теории множеств, метрических и банаховых пространств, внешних форм и теории меры.

Ученый по убеждениям шире узких рамок специализации, противник любых нарушений академических принципов свободы и непредвзятости, непримиримый враг лженауки, борец с околоучеными. Решетняк всегда защищает своих учеников и сотрудников от преследований, дает отпор клеветникам на предшественников невзирая ни на какие внешние обстоятельства. Качества совсем нечастые в научной среде. Нельзя не отметить доброжелательность и отзывчивость Решетняка, к каждому, кто нуждается в его помощи.

Все, кто знаком с Юрием Григорьевичем, желают ему и его близким счастья и радости.

*А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе*

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

## Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

**Примечание:** более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

**Том 21**

**Выпуск 3**

Зав. редакцией В. В. Бозрова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

---

Подписано в печать 23.09.2019. Дата выхода в свет 28.09.2019.
Формат бумаги $60{\times}84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 10,46. Тираж 100 экз. Цена свободная.

---

**Учредитель:**
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

**Издатель:**
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

**Адрес издателя:**
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380