ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 21, выпуск 1 2019

ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 21, Issue 1

2019

**Адрес редакции:** 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
**Зав. редакцией:** В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

**Editorial Office:** 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
**Managing editor:** V. V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 21, выпуск 1 январь–март, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ



Владикавказ
2019

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

# VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 21, issue 1 January–March, 2019

## CONTENT



Vladikavkaz
2019

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 5–15*

**УДК** 517.9
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27645

# КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ОБРАТИМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КУСОЧНО-ЛЯПУНОВСКОМ КОНТУРЕ

**А. В. Абрамян[1], В. С. Пилиди[1]**

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `annaabr@yandex.ru`, `pilidi@sfedu.ru`

**Аннотация.** Работа продолжает исследования в области критериев применимости к полным сингулярным интегральным операторам приближенных методов по семействам сильно аппроксимирующих их операторов с «вырезанной» особенностью ядра Коши. Рассматривается случай полного сингулярного интегрального оператора с непрерывными коэффициентами, действующего в $L_p$-пространстве на замкнутом контуре. Предполагается, что контур является кусочно-ляпуновским и не имеет точек возврата. Задача сводится к получению критерия обратимости элемента некоторой банаховой алгебры. Исследование проводится с помощью локального принципа Гохберга — Крупника. Основной акцент сделан на локальном анализе в угловых точках. Для этого используется аналог предложенного И. Б. Симоненко метода квазиэквивалентных операторов. Критерий формулируется в терминах обратимости некоторых интегральных операторов, сопоставляемых угловым точкам и действующих в $L_p$-пространстве на вещественной оси, и условиях сильной эллиптичности в точках контура, в которых выполняется условие Ляпунова.

**Ключевые слова:** условие Ляпунова, кусочно-ляпуновский контур, полный сингулярный интегральный оператор, сходимость приближенного метода, равномерная обратимость, локальный принцип.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 45P05, 45E05, 45L05, 47G10.

**Образец цитирования:** *Абрамян А. В., Пилиди В. С.* Критерий равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов на кусочно-ляпуновском контуре // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 5–15. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27645.

## 1. Введение

Вопросам применимости к операторам типа сингулярных и операторам близких к ним классов приближенных методов посвящены многочисленные исследования. Упомянем здесь, например, работы [1, 2] и монографию [3].

Настоящее исследование продолжает цикл работ [4–8], посвященных обоснованию метода вырезания особенности для операторов типа сингулярных в пространствах суммируемых функций. Рассматривается вопрос о применимости к полному сингулярному интегральному оператору с непрерывными коэффициентами на кусочно-ляпуновском контуре приближенного метода по семейству операторов с «вырезанной» особенностью ядра Коши.

---

## 2. Предварительные сведения

Пусть $\{A_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ — семейство линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве $X$, $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий в этом пространстве. Запись $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$ означает, что при $\varepsilon \to +0$ операторы $A_\varepsilon$ сходятся к оператору $A$ в сильной операторной топологии. Если подобное соотношение связывает, кроме того, и сопряженные операторы, будем отмечать это записью $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$. Указанное выше семейство называется *равномерно обратимым*, если все эти операторы обратимы и $\sup\{\|A_\varepsilon^{-1}\| : \varepsilon > 0\} < \infty$. Будем говорить, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *асимптотически равномерно обратимо*, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что семейство операторов $\{A_\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$ равномерно обратимо.

Предположим, что $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$ и оператор $A$ обратим. Будем говорить, что *к оператору $A$ применим приближенный метод по семейству $\{A_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to +0$*, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что все операторы семейства обратимы при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon^{-1} = A^{-1}$.

Приведенное определение аналогично определению сходимости проекционного метода [9, с. 90].

Справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом известного факта теории проекционных методов [9, с. 91, теорема 2.1].

**Предложение 1.** *Предположим, что $s\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$ и оператор $A$ обратим. К оператору $A$ применим приближенный метод по семейству $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ при $\varepsilon \to +0$ в том и только том случае, когда это семейство асимптотически равномерно обратимо.*

Приведенное утверждение позволяет использовать методы теории банаховых алгебр к решению задачи о сходимости приближенных методов рассматриваемого вида.

Перейдем к рассмотрению класса анализируемых операторов. Пусть $\Gamma$ — простая замкнутая ориентированная кусочно-ляпуновская кривая. Более точно, предполагается, что существует такое конечное множество точек $Z_\Gamma \subset \Gamma$, что каждая дуга, лежащая на кривой $\Gamma$, имеющая концами две точки из $Z_\Gamma$ и не содержащая других точек этого множества, удовлетворяет условию Ляпунова, включая свои концы.

Будем предполагать, что для каждой точки множества $Z_\Gamma$ лучи, являющиеся односторонними касательными в этой точке, не совпадают (т. е. считаем, что кривая не содержит точек возврата). Отметим, что в рассматриваемом случае точка, в которой нарушается условие Ляпунова, обязательно является угловой. Действительно, предположим, что лучи, являющиеся односторонними касательными в некоторой точке $t_0 \in \Gamma$, лежат на одной прямой и направлены в разные стороны. Справедливо следующее утверждение [10, с. 21]. Если функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для некоторой точки $c \in (a, b)$ сужения этой функции на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ удовлетворяют условию Гёльдера, то функция $f$ удовлетворяет условию Гёльдера на всем отрезке $[a, b]$. Применяя это утверждение к функции $\theta(t)$, углу наклона касательной в точке $t \in \Gamma$, получаем, что она удовлетворяет условию Гёльдера в некоторой окрестности рассматриваемой точки $t_0$.

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ (здесь и всюду ниже, если не оговорено противное, предполагается, что $1 < p < \infty$) оператор сингулярного интегрирования

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Оператор $S$ ограничен в пространстве $L_p(\Gamma)$ [11].

Для $\varepsilon > 0$ и $t \in \Gamma$ обозначим $\Gamma_\varepsilon(t) = \{\tau \in \Gamma : |t-\tau| \geqslant \varepsilon\}$. Введем семейство действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$ интегральных операторов с ограниченными ядрами

$$(S_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon(t)} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad t \in \Gamma,\ \varepsilon > 0.$$

Операторы $S_\varepsilon$ ограничены и имеет место равенство $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} S_\varepsilon = S$.

Как обычно, через $C(\Gamma)$ обозначим алгебру всех определенных и непрерывных на $\Gamma$ комплекснозначных функций. Через $\mathscr{K}_p(\Gamma)$ будем обозначать множество всех компактных операторов, действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$. Аналогичное обозначение будем использовать для $L_p$-пространств на других множествах.

Введем действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ полный сингулярный интегральный оператор с непрерывными коэффициентами $A = aI + bS + T$, где $a, b \in C(\Gamma)$, $I$ — единичный оператор, $T \in \mathscr{K}_p(\Gamma)$.

Рассмотрим семейство операторов $A_\varepsilon = aI + bS_\varepsilon + T$, $\varepsilon > 0$. Имеет место равенство $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon = A$.

Основным результатом работы является критерий асимптотической равномерной обратимости семейства $\{A_\varepsilon\}$. Формулируемый ниже критерий обобщает полученный ранее результат для случая контура типа Ляпунова [6].

Приведем некоторые вспомогательные построения.

Выберем произвольное $\alpha$, $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ лучи

$$\gamma_1 = \bigl\{e^{i\alpha}x : x \geqslant 0\bigr\}, \quad \gamma_2 = \bigl\{e^{-i\alpha}x : x \geqslant 0\bigr\}.$$

На луче $\gamma_1$ ($\gamma_2$) выберем ориентацию, соответствующую возрастанию (убыванию) параметра $x$. Обозначим: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Рассмотрим оператор $B$, действующий в пространстве $L_p(\gamma)$ по формуле

$$(Bf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{y\in\gamma,\\ |y-x|\geqslant 1}} \frac{f(y)}{y-x}\, dy, \quad x \in \gamma. \tag{1}$$

Оператор $B$ ограничен в пространстве $L_p(\gamma)$. Зависимость операторов $B$ и контуров $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ от $\alpha$ мы для краткости записи не отмечаем, оговаривая в дальнейшем, какое значение $\alpha$ имеется ввиду.

Как обычно, через $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$) обозначаем вещественную ось (соответственно положительную, отрицательную полуоси).

Введем изоморфизм $U : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\gamma)$, действующий по формуле

$$U : f \mapsto \begin{cases} f(e^{-i\alpha}x), & x \in \gamma_1, \\ f(-e^{i\alpha}x), & x \in \gamma_2. \end{cases}$$

Обозначим $S^{(\alpha)} := U^{-1}BU$. Оператор $S^{(\alpha)}$ действует в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ по формуле

$$\bigl(S^{(\alpha)}f\bigr)(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_\alpha(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где ядро $k_\alpha$ определяется на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ условиями

$$k_\alpha(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y-x}, & (x,y)\in(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)\cup(\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_-),\ |y-x|\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{y+e^{2i\alpha}x}, & x\in\mathbb{R}_+,\ y\in\mathbb{R}_-,\ |y+e^{2i\alpha}x|\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{y+e^{-2i\alpha}x}, & x\in\mathbb{R}_-,\ y\in\mathbb{R}_+,\ |y+e^{-2i\alpha}x|\geqslant 1,\\ 0, & \text{для остальных точек множества } \mathbb{R}\times\mathbb{R}.\end{cases}$$

В дальнейших построениях используются приводимые ниже оценки для нормы интегрального оператора.

Пусть $u\subset\mathbb{R}$ — измеримое множество ненулевой меры, $k$ — определенная на $u\times u$ измеримая функция. Обозначим

$$c_1=\sup_{y\in u}\operatorname{ess}\int\limits_u |k(x,y)|\,dx,\quad c_\infty=\sup_{x\in u}\operatorname{ess}\int\limits_u |k(x,y)|\,dy.$$

Если $c_1<\infty$, $c_\infty<\infty$, то [12, с. 903, теорема 9.5.1] интегральный оператор

$$(Kf)(x)=\int\limits_u k(x,y)f(y)\,dy,\quad x\in u,$$

ограничен во всех пространствах $L_p(u)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и имеет место оценка

$$\|K\|_p\leqslant c_1^{\frac{1}{p}}\cdot c_\infty^{1-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Приведем теперь основные положения локального принципа Гохберга — Крупника [11, гл. 12].

Пусть $\mathfrak{A}$ — банахова алгебра с единицей. Непустое множество $M\subset\mathfrak{A}$ называется *локализующим классом*, если оно не содержит нулевого элемента и для любых $a_1,a_2\in M$ существует такой элемент $a\in M$, что $a_1a=aa_1=a$, $a_2a=aa_2=a$. Пусть $M$ — локализующий класс. Элементы $x,y\in\mathfrak{A}$ называются *$M$-эквивалентными*, если

$$\inf_{a\in M}\|a(x-y)\|=0,\quad \inf_{a\in M}\|(x-y)a\|=0.$$

Элемент $x\in\mathfrak{A}$ называется *$M$-обратимым слева* (*справа*), если существуют такие элементы $y\in\mathfrak{A}$, $a\in M$, что $yxa=a$ ($axy=a$). Элемент $x\in\mathfrak{A}$ называется *$M$-обратимым*, если он $M$-обратим слева и справа. Система $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathrm{T}}$ локализующих классов называется покрывающей, если из любого множества элементов $a_\tau\in M_\tau$, $\tau\in\mathrm{T}$, можно выбрать конечное подмножество, сумма элементов которого является обратимым элементом алгебры $\mathfrak{A}$.

Основное утверждение локального принципа формулируется так [11, с. 355, теорема 1.1].

**Предложение 2.** *Пусть $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathrm{T}}$ — покрывающая система локализующих классов в банаховой алгебре $\mathfrak{A}$, $x\in\mathfrak{A}$ — элемент, коммутирующий со всеми элементами этих локализующих классов, и для каждого $\tau\in\mathrm{T}$ элемент $x$ $M_\tau$-эквивалентен некоторому элементу $y_\tau\in\mathfrak{A}$. Тогда элемент $x$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда для каждого $\tau\in\mathrm{T}$ $M_\tau$-обратим элемент $y_\tau$.*

## 3. Доказательство основного результата

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех ограниченных по норме семейств $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_p(\Gamma)$, для которых существуют пределы $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon$. Множество $\mathfrak{A}$ с «покоординатными» операциями сложения, умножения, умножения на (комплексный) скаляр и нормой $\|\{A_\varepsilon\}\| = \sup_{\varepsilon>0}\|A_\varepsilon\|$ является банаховой алгеброй. Обозначим через $\mathfrak{J}$ подмножество множества $\mathfrak{A}$, состоящее из всех семейств $\{T+\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, где $T \in \mathscr{K}_p(\Gamma)$, $\{\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — семейство операторов, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|\Delta_\varepsilon\| = 0.$$

Множество $\mathfrak{J}$ является собственным замкнутым двусторонним идеалом в алгебре $\mathfrak{A}$. Справедливо следующее утверждение.

**Предложение 3** [6]. *Предположим, что оператор $A$ обратим. Семейство $\{A_\varepsilon\}$ асимптотически равномерно обратимо в том и только случае, когда смежный класс $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ обратим.*

Для точки $t\in\Gamma$ обозначим через $\mathfrak{M}_t$ множество всех функций $\varphi\in C(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям: $0\leqslant\varphi(\tau)\leqslant 1$ для всех $\tau\in\Gamma$ и множество $\varphi^{-1}(1)\subset\Gamma$ является некоторой окрестностью точки $t$. Через $M_t$ обозначим множество всех смежных классов $\{\varphi I\}_{\varepsilon>0}+\mathfrak{J}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, где $\varphi\in\mathfrak{M}_t$. Очевидно, что семейство $\{M_t\}_{t\in\Gamma}$ является покрывающей системой локализующих классов в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$. Смежный класс $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ коммутирует со всеми элементами этих локализующих классов. Это вытекает из компактности коммутатора $\varphi S - S\varphi I$ для любой функции $\varphi\in C(\Gamma)$.

Для $t_0\in\Gamma$ рассмотрим семейство операторов $\{a(t_0)I+b(t_0)S_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Смежные классы $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ и $\{a(t_0)I+b(t_0)S_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ являются $M_{t_0}$-эквивалентными. Это вытекает из коммутирования этих операторов с элементами смежного класса $M_{t_0}$ и очевидного равенства

$$\inf\left\{\|\varphi(h-h(t_0))\|_{C(\Gamma)} : \varphi\in\mathfrak{M}_{t_0}\right\} = 0,$$

выполняющегося для любой функции $h\in C(\Gamma)$.

В силу предложения 2, для получения критерия обратимости смежного класса $\{A_\varepsilon\}+\mathfrak{J}$ нам остается получить критерий $M_{t_0}$-обратимости смежного класса $\{A_\varepsilon^{(t_0)}\}+\mathfrak{J}$ для произвольной точки $t_0\in\Gamma$. Отметим, что в приводимом ниже анализе мы используем подход, предложенный в [13], позволяющий сравнивать локальные характеристики операторов, действующих в разных пространствах. Само определение из [13] мы не приводим, поскольку здесь используются другие классы банаховых алгебр.

Зафиксируем точку $t_0\in Z_\Gamma$. Рассмотрим замкнутую дугу $u\subset\Gamma$, содержащую точку $t_0$ внутри и не содержащую других точек множества $Z_\Gamma$. Точка $t_0$ делит дугу на две замкнутые дуги $u_1$ и $u_2$, содержащие точку $t_0$ и соответственно точки, следующие за $t_0$ и предшествующие $t_0$. Пусть $T_+$ и $T_-$ — лучи с вершинами в точке $t_0$, являющиеся односторонними касательными в точке $t_0+0$ (со стороны точек, следующих за $t_0$) и в точке $t_0-0$. Сдвигая и поворачивая контур $\Gamma$, совместим точку $t_0$ с точкой $z=0$ комплексной плоскости, а лучи $T_+$ и $T_-$ — соответственно с введенными выше лучами $\gamma_1$ и $\gamma_2$ при подходящем значении $\alpha=\alpha(t_0)$. Пусть $\varphi$ — преобразование, разворачивающее дугу $u$ на ломаную $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$. Точнее, для $t\in u_1$ ($t\in u_2$) полагаем $\varphi(t)=e^{i\alpha}s$ ($\varphi(t)=e^{-i\alpha}s$), где $s$ — длина дуги, соединяющей точки $t_0$ и $t$, лежащей в $u_1$ (соответственно в $u_2$). Из условия Ляпунова следует, что функция $\varphi$ определена и удовлетворяет условию Гёльдера на каждом из множеств $u_1$ и $u_2$. Кроме того, $\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi'(t)=1$. Следовательно [10, с. 21], функция $\varphi$ удовлетворяет условию Гёльдера на всей дуге $u$.

Обозначим: $v = \varphi(u)$. Рассмотрим линейный оператор $W : L_p(v) \to L_p(u)$, действующий по формуле $(Wf)(t) = f(\varphi(t))$, $t \in u$. Оператор $W$ является ограниченным и обратимым. Введем действующие в пространстве $L_p(u)$ операторы

$$\big(S_\varepsilon^{(u)} f\big)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{t\in u,\\ |t-\tau|\geqslant\varepsilon}} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad t \in u,\ \varepsilon > 0.$$

Аналогичные операторы в пространстве $L_p(v)$ обозначим через $S_\varepsilon^{(v)}$. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Имеет место равенство*

$$W S_\varepsilon^{(v)} W^{-1} - S_\varepsilon^{(u)} = T + \Delta_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

*где* $T \in \mathscr{K}_p(u)$, $\{\Delta_\varepsilon\}$ *— семейство линейных непрерывных операторов в пространстве* $L_p(u)$, *удовлетворяющее условию* $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\Delta_\varepsilon\| = 0$.

$\triangleleft$ Обозначим:

$$R_\varepsilon = W S_\varepsilon^{(v)} W^{-1} - S_\varepsilon^{(u)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$(R_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{\tau\in u,\\ |\varphi(\tau)-\varphi(t)|\geqslant\varepsilon}} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)-\varphi(t)} f(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\substack{\tau\in u,\\ |\tau-t|\geqslant\varepsilon}} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Рассмотрим действующий в пространстве $L_p(u)$ оператор

$$(Tf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_u \left( \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)-\varphi(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in u.$$

Это интегральный оператор, ядро которого имеет слабую особенность. Следовательно, он является компактным. Обозначим $\Delta_\varepsilon = R_\varepsilon - T$, $\varepsilon > 0$, и покажем, что имеет место равенство $\lim_{\varepsilon\to+0} \|\Delta_\varepsilon\| = 0$. Оператор $\Delta_\varepsilon$ представим в следующем виде:

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^{(1)} + \Delta_\varepsilon^{(2)} + \Delta_\varepsilon^{(3)},$$

где $\Delta_\varepsilon^{(i)}$ — интегральные операторы, действующие про формулам

$$(\Delta_\varepsilon^{(i)} f)(t) = \int\limits_u \delta_\varepsilon^{(i)}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in u,$$

а ядра $\delta_\varepsilon^{(i)}(t,\tau)$ определены на $u \times u$, равны приводимым ниже выражениям на указанных подмножествах множества $u \times u$ и равны нулю на оставшихся его частях:

$$\delta_\varepsilon^{(1)}(t,\tau) = \frac{1}{\pi i} \left( \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)-\varphi(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right), \qquad |\varphi(t)-\varphi(\tau)| < \varepsilon,\ |\tau - t| < \varepsilon;$$

$$\delta_\varepsilon^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\tau - t}, \qquad |\varphi(t)-\varphi(\tau)| \geqslant \varepsilon,\ |\tau - t| < \varepsilon;$$

$$\delta_\varepsilon^{(3)}(t,\tau) = \frac{1}{\pi i} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)-\varphi(t)}, \qquad |\varphi(t)-\varphi(\tau)| < \varepsilon,\ |\tau - t| \geqslant \varepsilon.$$

Покажем, что $\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\Delta_\varepsilon^{(i)}\right\|=0$, $i=1,2,3$.

Ядро $\delta_\varepsilon^{(1)}(t,\tau)$ допускает оценку

$$\left|\delta_\varepsilon^{(1)}(t,\tau)\right|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\tau-t|^\lambda}$$

при некотором $\lambda$, $0<\lambda<1$. Отсюда и из оценок (3) следует, что $\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\Delta_\varepsilon^{(1)}\right\|=0$.

Оцениваем сверху нормы интегральных операторов $\Delta_\varepsilon^{(2)}$. Соответствующие константы из (3) оцениваются сверху величиной

$$\sup_{t\in u}\int\frac{|d\tau|}{|\tau-t|}\leqslant\frac{1}{\pi}\sup_{t\in u}\operatorname{ess}\operatorname{mes}E_\varepsilon(t),$$

где при фиксированном $t\in u$ интеграл берется по множеству

$$E_\varepsilon(t)=\bigl\{\tau\in u:\,|\varphi(\tau)-\varphi(t)|\geqslant\varepsilon,\,|\tau-t|<\varepsilon\bigr\},$$

$\operatorname{mes}E_\varepsilon(t)$ — линейная лебегова мера множества $E_\varepsilon(t)$. Можно получить оценку $\operatorname{mes}E_\varepsilon(t)\leqslant h(\varepsilon)\varepsilon$, $t\in u$, где функция $h(\varepsilon)$ определена при $\varepsilon>0$ и $\lim_{\varepsilon\to+0}h(\varepsilon)=0$. Отсюда следует, что $\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|\Delta_\varepsilon^{(2)}\right\|=0$.

По той же схеме анализируется последовательность $\bigl\{\Delta_\varepsilon^{(3)}\bigr\}$. $\rhd$

Обозначим через $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{J}'$ банахову алгебру и ее идеал, состоящие из семейств линейных операторов, действующих в пространстве $L_p(\gamma)$, определяемые по аналогии с рассмотренными выше алгеброй $\mathfrak{A}$ и идеалом $\mathfrak{J}$. Обозначим через $\mathfrak{M}'$ множество всех функций $\psi\in C(\gamma)$, удовлетворяющих условиям $0\leqslant\psi(x)\leqslant1$, $x\in\gamma$, $\psi^{-1}(1)$, которая является некоторой окрестностью точки $0\in\gamma$. Пусть $M'\subset\mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$ — множество элементов вида $\{\psi I':\varepsilon>0\}+\mathfrak{J}'$, где $I'$ — единичный оператор в пространстве $L_p(\gamma)$. Множество $M'$ является локализующим классом в алгебре $\mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$. Введем действующий в пространстве $L_p(\gamma)$ оператор

$$(S'_\varepsilon f)(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\substack{y\in\gamma,\\|y-x|\geqslant\varepsilon}}\frac{f(y)}{y-x}\,dy,\quad x\in\gamma,\ \varepsilon>0.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Смежный класс*

$$\bigl\{a(t_0)I+b(t_0)S_\varepsilon:\,\varepsilon>0\bigr\}+\mathfrak{J}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{J}\tag{4}$$

*$M_{t_0}$-обратим в том и только том случае, когда смежный класс*

$$\bigl\{a(t_0)I'+b(t_0)S'_\varepsilon:\,\varepsilon>0\bigr\}+\mathfrak{J}'\in\mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'\tag{5}$$

*$M'$-обратим.*

$\lhd$ Воспользуемся введенными выше дугами $u$ и $v$. Обозначим через $P$ ($P'$) оператор умножения на характеристическую функцию множества $u$ (множества $v$), действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ ($L_p(\gamma)$). Смежный класс (4) $M_{t_0}$-обратим в том и только том случае, когда этим свойством обладает смежный класс

$$\bigl\{P_u(a(t_0)I+b(t_0)S_\varepsilon)P_u:\,\varepsilon>0\bigr\}+\mathfrak{J}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{J}.\tag{6}$$

Для доказательства достаточно взять в соответствующем соотношении функцию $\psi$, носитель которой содержится в множестве $u$. Из подобных соображений следует, что смежные классы (5) и

$$\{P_v(a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon)P_v : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}' \tag{7}$$

$M'$-обратимы одновременно. Остается заметить, что из леммы 1 вытекает, что смежный класс (6) $M_{t_0}$-обратим одновременно со смежным классом (7). $\rhd$

**Лемма 3.** *Смежный класс*

$$\{a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$$

*$M'$-обратим в том и только том случае, когда обратим оператор $a(t_0)I' + b(t_0)S'_1$.*

$\lhd$ Рассмотрим операторы $V_\lambda$, $\lambda > 0$, действующие в пространстве $L_p(\gamma)$ по формуле

$$(V_\lambda f)(x) = \lambda^{1/p} f(\lambda x), \quad x \in \gamma.$$

Операторы $V_\lambda$ являются изометрическими и обратимыми, $V_\lambda^{-1} = V_{1/\lambda}$. Отметим также, что $V_\lambda S_\varepsilon V_{1/\lambda} = S_{\varepsilon/\lambda}$.

Если $h \in C(\gamma)$, то $V_\lambda h V_{1/\lambda} = h^{(\lambda)} I'$, где $h^{(\lambda)}(x) = h(\lambda x)$.

При $\lambda \to \infty$ операторы $V_\lambda$ сходятся к нулевому оператору в слабой операторной топологии. Отсюда следует, что для любого оператора $T \in \mathscr{K}_p(\gamma)$ выполняется соотношение $s^*\text{-}\lim_{\varepsilon\to+0} V_\varepsilon T V_{1/\varepsilon} = 0$. Обозначим через $B_\varepsilon = a(t_0)I' + b(t_0)S'_\varepsilon$. Предположим, что смежный класс $\{B_\varepsilon : \varepsilon > 0\} + \mathfrak{J}' \in \mathfrak{A}'/\mathfrak{J}'$ $M'$-обратим. Запишем условие $M'$-обратимости слева:

$$C_\varepsilon B_\varepsilon \psi I' = \psi I' + T + \Delta_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

где $\{C_\varepsilon\}, \{\Delta_\varepsilon\} \in \mathfrak{A}'$, $\lim_{\varepsilon\to+0} \|\Delta_\varepsilon\| = 0$, функции $\psi \in \mathfrak{M}'$, $T \in \mathscr{K}_p(\gamma)$.

Покажем, что оператор $B_1$ ограничен снизу, т. е.

$$\inf\{\|B_1 f\| : f \in L_p(\gamma), \ \|f\| = 1\} > 0.$$

Предположим противное.

Умножая обе части (8) слева на операторы $V_\varepsilon$, справа — на $V_{1/\varepsilon}$, получаем

$$V_\varepsilon C_\varepsilon V_{1/\varepsilon} B_1 \psi^{(\varepsilon)} I' = \psi^{(\varepsilon)} I' + V_\varepsilon T V_{1/\varepsilon} + V_\varepsilon \Delta_\varepsilon V_{1/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Обозначим через $K = \sup_{\varepsilon>0} \|C_\varepsilon\|$. В силу предположения о неограниченности снизу оператора $B_1$ найдется такая финитная функция $f \in L_p(\gamma)$, что $\|f\| = 1$, $\|B_1 f\| < 1/2K$. Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon$ получаем соотношения $\psi^{(\varepsilon)} f = f$,

$$\|(V_\varepsilon C_\varepsilon V_{1/\varepsilon} B_1 \psi^{(\varepsilon)} I') f\| < \frac{1}{2}.$$

Остается заметить, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|(\psi^{(\varepsilon)} I' + V_\varepsilon T V_{1/\varepsilon} + V_\varepsilon \Delta_\varepsilon V_{1/\varepsilon}) f\| = 1.$$

Мы получили противоречие, оператор $B_1$ ограничен снизу.

Аналогично из $M'$-обратимости рассматриваемого смежного класса справа, переходя к сопряженным операторам, выводим ограниченность снизу оператора $B_1^*$. Следовательно, оператор $B_1$ обратим.

Если оператор $B_1$ обратим, то из равенства $B_\varepsilon = V_{1/\varepsilon}B_1V_\varepsilon$ выводим обратимость семейства $\{B_\varepsilon\}$ в алгебре $\mathfrak{A}'$, а, следовательно, и $M'$-обратимость рассматриваемого смежного класса. $\triangleright$

Введем действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ оператор $\widehat{A}^{(t_0)} = a(t_0)I + b(t_0)S^{(\alpha)}$, где значение $\alpha = \alpha(t_0)$ определено выше, оператор $S^{(\alpha)}$ определяется формулой (2). Оператор $B_1$, введенный в доказательстве леммы 3, подобен оператору $\widehat{A}^{(t_0)}$. Следовательно, эти операторы обратимы или нет одновременно.

Мы завершили анализ точек $t_0 \in Z_\Gamma$.

Для точки $t_0 \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$ обозначим через $\widehat{A}^{(t_0)}$ оператор, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ по формуле

$$\big(\widehat{A}^{(t_0)}f\big)(x) = a(t_0)f(x) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int\limits_{\substack{y\in\mathbb{R},\\ |y-x|\geqslant 1}} \frac{f(y)}{y-x}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

По аналогии с приведенным выше анализом $M_{t_0}$-обратимости смежного класса $\big\{A_\varepsilon^{(t_0)}\big\} + \mathfrak{J}$ в угловой точке доказывается, что $M_{t_0}$-обратимость в этом случае равносильна обратимости оператора $\widehat{A}^{(t_0)}$. В статье [6] доказано, что оператор (9) обратим тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a(t_0) + \lambda b(t_0) \neq 0 \quad (\forall\, \lambda \in [-1, 1]).$$

Из приведенных построений вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $A = aI + bS + T$ $(a, b \in C(\Gamma)$, $T \in \mathscr{K}_p(\Gamma)$ — действующий в пространстве $L_p(\Gamma)$ обратимый оператор. К оператору $A$ применим приближенный метод по семейству операторов $A_\varepsilon = aI + bS_\varepsilon + T$ при $\varepsilon \to +0$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $t_0 \in \Gamma$ обратим действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ оператор $\widehat{A}^{(t_0)}$.*

## Литература


1. *Prößdorf, S. and Schmidt, G.* A finite element collocation method for singular integral equations // Math. Nachr.—1981.—Vol. 100.—P. 33–60.
2. *Silbermann, B.* Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren // Math. Nachr.—1981.—Vol. 104.—P. 137–146.
3. *Hagen, R., Roch, S. and Silbermann, B.* $C^*$-algebras and numerical analysis.—N. Y.: Marcel Dekker, 2001.—376 p.
4. *Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 307, № 2.—С. 280–283.
5. *Пилиди В. С.* О методе вырезания особенности для бисингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами // Функц. анализ и его прил.—1989.—Т. 23, № 1.—С. 82–83.
6. *Пилиди В. С.* Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 6.—С. 1270–1294.
7. *Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Изв. высш. уч. заведений. Сев.-Кавк. регион.—2011.—№ 1.—С. 12–17.
8. *Абрамян А. В., Пилиди В. С.* О равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Изв. высш. уч. заведений. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2013.—№ 5.—С. 5–10.
9. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—432 с.

10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд.—М., Наука, 1968.—513 с.
11. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: «Штиинца», 1973.—426 с.
12. *Эдвардс Р. Е.* Функциональный анализ: теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
13. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных интегральных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1965.—Т. 29, № 3.—С. 567–586.

*Статья поступила 15 ноября 2018 г.*

Абрамян Анна Владимировна
Южный федеральный университет,
*доцент кафедры информатики и вычислительного эксперимента*
РОССИЯ, 344090, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: annaabr@yandex.ru

Пилиди Владимир Ставрович
Южный федеральный университет,
*заведующий кафедрой информатики и вычислительного эксперимента*
РОССИЯ, 344090, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: pilidi@sfedu.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 5–15*

# CRITERION OF UNIFORM INVERTIBILITY OF REGULAR APPROXIMATIONS OF ONE-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL OPERATORS ON A PIECEWISE-LYAPUNOV CONTOUR

Abramyan, A. V.[1] and Pilidi, V. S.[1]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: annaabr@yandex.ru, pilidi@sfedu.ru

**Abstract.** The paper continues research of the criteria of applicability to complete singular integral operators of approximate methods using families of strongly approximating them operators with the "cut out" singularity of the Cauchy kernel. The case of a complete singular integral operator with continuous coefficients acting on $L_p$-space on a closed contour is considered. It is assumed that the contour is piecewise Lyapunov and has no cusps. The task is reduced to a criterion of invertibility of an element in some Banach algebra. The study is performed using the local principle of Gokhberg and Krupnik. The focus is on the local analysis at the corner points. For this purpose, an analogue of the method of quasi-equivalent operators proposed by I. B. Simonenko is used. The criterion is formulated in terms of invertibility of some integral operators associated with the corner points acting on $L_p$-space on the real axis, and strong ellipticity conditions at the contour points with the Lyapunov condition.

**Key words:** Lyapunov condition, piecewise-Lyapunov contour, complete singular integral operator, convergence of approximation method, uniform invertibility, local principle.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 45P05, 45E05, 45L05, 47G10.

**For citation:** *Abramyan, A. V. and Pilidi, V. S.* Criterion of Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators on a Piecewise-Lyapunov Contour, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 5–15 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27645.

## References


1. *Prößdorf, S. and Schmidt G.* A finite Element Collocation Method for Singular Integral Equations, *Math. Nachr.*, 1981, vol. 100, pp. 33–60.
2. *Silbermann, B.* Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren, *Math. Nachr.*, 1981, vol. 104, pp. 137–146.
3. *Hagen, R., Roch, S. and Silbermann, B.* *$C^*$-Algebras and Numerical Analysis*, New York, Marcel Dekker, 2001, 376 p.
4. *Pilidi, V. S.* On Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1989, vol. 307, no. 2, pp. 280–283 (in Russian).
5. *Pilidi, V. S.* A Method for Excision of Singularity for Bisingular Integral Operators with Continuous Coefficients, *Funct. Anal. Appl.*, 1989, vol. 23, no. 1, pp. 82–83 (in Russian).
6. *Pilidi, V. S.* A Criterion for Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1990, vol. 54, no. 6, pp. 1270–1294 (in Russian).
7. *Pilidi, V. S.* On Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators in Variable Exponent Spaces, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*, 2011, no. 1, pp. 12–17 (in Russian).
8. *Abramyan, A. V. and Pilidi, V. S.* On Uniform Invertibility of Regular Approximations of One-Dimensional Singular Integral Operators with Piecewise Continuous Coefficients in Variable Exponent Spaces, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science*, 2013, no. 5, pp. 5–10 (in Russian).
9. *Gokhberg, I. Ts. and Fel'dman, I. A.* *Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution*, Moskow, Nauka, 1971, 432 p. (in Russian).
10. *Muskhelishvili, N. I.* *Singular Integral Equations. 3rd ed.*, Moskow, Nauka, 1968, 513 p. (in Russian).
11. *Gokhberg, I. Ts. and Krupnik, N. Y.* *Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Integral Operators*, Kishinev, SHtiintsa, 1973, 426 p. (in Russian).
12. *Edvards, R. E.* *Functional Analysis*, Moskow, Mir, 1969, 1072 p. (in Russian).
13. *Simonenko, I. B.* A New General Method of Investigating Linear Operator Equations of Singular Integral Equation Type. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 567–586 (in Russian).


*Received November 15, 2018*

Anna V. Abramyan
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
*Associate Professor of the Department of Informatics and Computational Experiment*
E-mail: `annaabr@yandex.ru`

Vladimir S. Pilidi
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
*Head of the Department of Informatics and Computational Experiment*
E-mail: `pilidi@sfedu.ru`

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 16–26*

**УДК** 514.12, 514.13, 514.752
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27656

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ НА ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

**А. В. Костин**[1]

[1] Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
Россия, 423604, Елабуга, ул. Казанская, 89

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

**Аннотация.** В трехмерном расширенном гиперболическом пространстве рассмотрим «полную» псевдосферу — поверхность вращения прямой вокруг параллельной ей прямой. Поверхность, лежащая в собственной области гиперболического пространства, локально несёт на себе геометрию плоскости Лобачевского. Одна часть ее вкладывается в евклидово пространство в виде хорошо известной воронки Бельтрами — Миндинга, другая вкладывается в трехмерное пространство Минковского в виде одного из псевдоевклидовых аналогов псевдосферы. Асимптотические линии на псевдоевклидовой части поверхности мнимы. Эти мнимые асимптотические линии можно интерпретировать как вещественные асимптотические линии на поверхностях с индефинитной метрикой постоянной кривизны. Для построения интерпретации привлекаются еще два псевдоевклидовых аналога псевдосферы Бельтрами — Миндинга. Один из них глобально изометричен продолжению «полной» псевдосферы за абсолют гиперболического пространства. В работе изучаются свойства асимптотических линий на рассматриваемых поверхностях постоянной кривизны с метрикой де Ситтера в трехмерном псевдоевклидовом пространстве (пространстве Минковского). Эти свойства во многом аналогичны свойствам асимптотических на псевдосфере Бельтрами — Миндинга. Площадь сетевого четырехугольника асимптотической сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве может быть найдена по формуле Хаццидакиса. В работе рассматривается аналог этой формулы для сетевых четырехугольников асимптотической сети на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Эта формула может быть обобщена на произвольные сетевые многоугольники асимптотической сети. С использованием индефинитной метрики можно распространить действие формулы Хаццидакиса за ребро псевдосферы Бельтрами — Миндинга.

**Ключевые слова:** псевдосфера, плоскость де Ситтера, модель Пуанкаре, плоскость Лобачевского, асимптотические линии, чебышёвская сеть.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 53A35, 53B30.

**Образец цитирования:** *Костин А. В.* Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 16–26. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27656.

## 1. Предварительные сведения, постановка задачи и краткий обзор литературы

Полная псевдосфера — поверхность вращения прямой вокруг параллельной ей прямой в трехмерном пространстве Лобачевского — изометрически вкладывается в плоское пространство, имеющее внутри цилиндра евклидову метрику, а вне его — псевдоевклидову. Ось вращения является общей базой трактрис в евклидовой и псевдоевклидовой метрике. На евклидовой части — псевдосфере Бельтрами — Миндинга — имеется вещественная асимптотическая сеть. Псевдоевклидова часть получается эллиптическим вращением псевдоевклидовой трактрисы, база и касательная которой являются прямыми разных типов. Асимптотическая сеть на ней мнима, т. е. существует только в комплексифицированном пространстве. Нашей целью будет построение интерпретаций этой мнимой сети, точнее, построение ее эрзаца. Вместо мнимой сети можно рассмотреть вещественную чебышёвскую сеть в индефинитной метрике постоянной кривизны. Если параметризовать псевдосферу координатами карты Пуанкаре, все рассуждения можно вести, апеллируя к свойствам модели.

Поверхности вращения постоянной кривизны в евклидовом пространстве найдены Фердинандом Миндингом [1]. Изометрическое вложение класса $C^\infty$ полной псевдосферы в 8-мерное сферическое пространство и в 7-мерное евклидово пространство построил Данило Блануша [2, 3]. Пространство, глобально изометричное идеальной области плоскости Лобачевского [4], впервые рассмотрел, по всей видимости, Людвиг Отто Гессе в 1866 г. в работе [5]. Чебышёвская сеть введена П. Л. Чебышёвым в 1878 г. [6, 7]. Площадь сетевого четырехугольника на поверхностях постоянной отрицательной кривизны через его избыток найдена Хаццидакисом в 1880 г. [8]. С использованием формулы Хаццидакиса Д. Гильбертом была доказана теорема о том, что плоскость Лобачевского (и любая регулярная поверхность постоянной отрицательной кривизны) не вкладывается изометрически в трехмерное евклидово пространство [9]. Класс гладкости, не допускающий вложение, позднее был снижен до $C^2$. Воронка де Ситтера — Широкова была построена П. А. Широковым в 1917 г. (см. [10]) как поверхность с геометрией идеальной области плоскости Лобачевского, псевдориманову метрику на которой мы будем использовать в виде, приведенном в [11]. Интерпретации решений уравнения sin-Гордона как сетевого угла между асимптотическими на поверхностях постоянной отрицательной кривизны посвящено множество работ. Часть библиографии, посвященной этой тематике имеется в работе Э. Г. Позняка и А. Г. Попова [12], которые и сами внесли существенный вклад в ее развитие. Пионерская работа по геометрической интерпретации решений уравнения sinh-Гордона принадлежит Чженю (или Черну — в другой транслитерации фамилии автора) [13]. Отметим посвященную этой тематике работу Р. Ф. Галеевой и Д. Д. Соколова [14], а также опирающиеся на работу Чженя статьи Т. Клотц-Милнор [15] и Б. А. Розенфельда и Н. Е. Марюковой [16].

Общая теория дифференциальной геометрии кривых и поверхностей трехмерного псевдоевклидова пространства изложена в [17]. Поверхности вращения в этом пространстве описаны в [18]. Такая же связь, какая имеется у псевдосферы Бельтрами — Миндинга с катеноидом (меридиан катеноида является эволютой трактрисы), связывает и рассматриваемые в данной работе псевдоевкдидовы аналоги псевдосферы с соответствующими поверхностями нулевой средней кривизны в псевдоевкдидовом пространстве. О поверхностях такого типа см., например, [19] и [20].

## 2. Интерпретация, связанная с бабочкой де Ситтера — Широкова

В пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1}$$

рассмотрим поверхность

$$\begin{cases} x^1 = \cosh(u) \cdot \sin(v), \\ x^2 = \cosh(u) \cdot \cos(v), \\ x^3 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)), \end{cases} \tag{2}$$

являющуюся продолжением псевдосферы Бельтрами — Миндинга. Параметризуем ее координатами карты Пуанкаре $u^1 = v$, $u^2 = \frac{1}{\cosh(u)}$:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{\sin(u^1)}{u^2}, \\ x^2 = \frac{\cos(u^1)}{u^2}, \\ x^3 = \frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{u^2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{u^2}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Метрика на поверхности примет вид

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(u^2)^2}. \tag{4}$$

Область, соответствующая одной полости, в конформной карте Пуанкаре задается двойным неравенством $0 < u^2 \leqslant 1$.

Уравнения асимптотических

$$\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1-(u^2)^2}}(du^2)^2 = 0 \tag{5}$$

не имеют вещественных решений. Мнимым же асимптотическим можно дать простую наглядную интерпретацию как асимптотическим на поверхностях с индефинитной метрикой постоянной кривизны. Покажем это.

Заменим в (4) и (5) $u^1$ на $i \cdot u^1$, где $i^2 = -1$. Метрика (4) при этом перейдет в индефинитную метрику

$$ds^2 = -\frac{((du^1)^2 - (du^2)^2)}{(u^2)^2}. \tag{6}$$

Преобразованные уравнения асимптотических

$$-\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1-(u^2)^2}}(du^2)^2 = 0$$

имеют вещественные решения

$$-u^1 + c = \arcsin(u^2), \quad u^1 + c = \arcsin(u^2). \tag{7}$$

Уравнения (7) задают чебышевскую сеть в метрике (6) и в метрике, отличающейся от нее знаком. Эта сеть накрывает асимптотическую сеть на поверхности

$$\begin{cases} x^1 = \cosh(u) \cdot \sinh(v), \\ x^2 = \cosh(u) \cdot \cosh(v), \\ x^3 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)) \end{cases} \tag{8}$$

в псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

и в пространстве с метрикой, отличающейся от нее знаком. Это поверхность постоянной кривизны с индефинитной метрикой. В первом случае кривизна поверхности отрицательна, во втором (при смене знака метрики объемлющего пространства) — положительна. Выберем второй случай для метрики объемлющего пространства:

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{9}$$

Профиль (начальный меридиан) поверхности (8) представляет собой один из псевдоевклидовых аналогов трактрисы. Каждая ветвь трактрисы имеет изотропную асимптоту. Касательная прямая и ось вращения являются прямыми разных типов. Длина отрезка касательной до оси вращения у меридиана равна $i$. Поверхность получена гиперболическим вращением — лоренцевым бустом этой трактрисы. Такой аналог псевдосферы будем называть бабочкой де Ситтера — Широкова.

Параметр $u$ в уравнениях (8) совпадает с углом между касательной к меридиану и перпендикуляром к оси вращения, лежащим в плоскости меридиана. Под углом здесь понимается гиперболический угол — удвоенная площадь сектора гиперболы, служащей окружностью единичного или мнимоединичного радиуса в псевдоевклидовой плоскости. При значении $u = 0$ регулярность поверхности нарушается. В локальных координатах конформной карты Пуанкаре $u^1 = v$, $u^2 = \frac{1}{\cosh(u)}$ на псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2$ асимптотические линии на поверхности (8) задаются именно уравнениями (7). Угол между прямыми на псевдоевклидовой плоскости обычно определяется через скалярное произведение их направляющих векторов. Этот угол определить можно также через проективный инвариант. А именно, через точку пересечения прямых $a$, $b$ проведем изотропные прямые $c$, $d$. Тогда угол между прямыми $a$, $b$ будет равен $\frac{1}{2}\ln(ab, cd)$. Если пара $(cd)$ разделяет пару $(ab)$, то величина угла между прямыми $a$ и $b$ будет принимать комплексное значение. В частности, угол между ортогональными прямыми будет равен $\frac{\pi \cdot i}{2}$. Смежный с вещественным углом между прямыми угол также будет задаваться комплексным числом. Псевдоевклидовы углы, получаемые друг из друга антидвижением (в этом случае направления сторон одного угла будут соответственно сопряжены направлениям сторон другого относительно псевдоевкдидовой окружности), мы будем считать равными.

## 3. Асимптотические линии на бабочке де Ситтера — Широкова

Асимптотические линии на поверхности (8) в пространстве Минковского с метрикой (9) определяются уравнением

$$\frac{du^2}{\cosh(u)} - \cosh(u)dv^2 = 0.$$

Уравнения асимптотических линий таковы:

$$2\arctan(e^u) - v = c_1, \quad 2\arctan(e^u) + v = c_2.$$

Введем на поверхности новые локальные координаты:

$$x = -\arctan(e^u) + \frac{v}{2}, \quad y = \arctan(e^u) + \frac{v}{2}.$$

Первая квадратичная форма поверхности может быть представлена в виде

$$I = -\tanh^2(u)du^2 + \cosh^2 vudv^2 = dx^2 + 2\cosh(2u)\,dxdy + dy^2.$$

Нетрудно видеть, что сетевой угол $z = 2u$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -\sinh(z).$$

Решение этого уравнения $z = 2u = 2\ln(\tan\frac{y-x}{2})$ регулярно в полосе $0 < y - x < \pi$ (и в полосах, получающихся из нее сдвигами границ на $2\pi n$, $n \in Z$). При удалении от ребра возврата значение $z$ увеличивается. Свойства асимптотических линий на данной поверхности во многом аналогичны свойствам асимптотических на псевдосфере Бельтрами — Миндинга [21, 22]. Отметим некоторые из них.

**Теорема 1.** *Асимптотические на бабочке де Ситтера — Широкова обладают свойствами a)–f):*

*a) Асимптотические линии регулярны всюду, в том числе и в точках ребра возврата, в которых нарушается регулярность самой поверхности* [23].

*b) Угол между асимптотической и параллелью равен углу между касательной к меридиану и перпендикуляром к оси вращения, лежащим в плоскости меридиана* (*т. е. углу между касательной к меридиану и плоскостью, перпендикулярной оси вращения*).

*c) Угол между асимптотической и меридианом равен углу между касательной к меридиану и осью вращения.*

*d) На асимптотической линии возьмем пару точек $A$ и $B$. Через эти точки проведем меридианы до пересечения с ребром возврата поверхности. Точки пересечения меридианов с ребром возврата обозначим через $A_1$ и $B_1$. Дугу $A_1B_1$ ребра назовем ортогональной проекцией дуги $AB$ асимптотической линии на ребро возврата псевдосферы. Тогда длина дуги асимптотической линии будет равна длине дуги ее ортогональной проекции на ребро возврата поверхности.*

*e) Если через две точки $A$ и $B$ асимптотической линии одного семейства провести две асимптотические другого семейства до пересечения с ребром возврата, то длина отсекаемой на ребре дуги будет вдвое больше дуги асимптотической $AB$.*

*f) Длина асимптотической от ребра возврата до бесконечности равна $\frac{\pi}{2}$, длина всей обобщенной асимптотической равна $\pi$. В соответствии с этим, две асимптотические разных семейств пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между точками пересечения их с ребром возврата меньше $\pi$.*

Доказательства этих свойств в силу стандартности методов не приводим. Отметим только в дополнение к пункту a), что регулярность сети в точках ребра возврата нарушается, поскольку касательные векторы к линиям обоих семейств в точках ребра возврата коллинеарны касательным векторам к псевдоевклидовой окружности (аффинной гиперболе), служащей этим ребром возврата. Если ограничиться одной полостью поверхности, то можно также встать на такую точку зрения, что при касании с ребром возврата асимптотические линии одного семейства переходят в асимптотические линии другого семейства. При стремлении параметра $u$ к бесконечности скалярный квадрат касательного вектора асимптотической линии стремится к нулю. Это означает, что в бесконечность асимптотическая уходит в изотропном направлении.

## 4. Площади сетевых четырехугольников

Для площади сетевого четырехугольника, сторонами которого являются линии асимптотической сети на псевдосфере Бельтрами — Миндинга, хорошо известна формула Хаццидакиса [8], выражающая площадь либо через альтернированную сумму сетевых углов, либо через избыток внутренних углов сетевого четырехугольника. Элемент площади в асимптотических координатах на рассматриваемой псевдосфере де Ситтера — Широкова имеет вид $\sinh(z)\,dx\,dy$. Нетрудно видеть, что и здесь площадь сетевого четырехугольника $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_1), A_3(x_2, y_2), A_4(x_1, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, через сетевой угол $z$ — решение гиперболического уравнения с частными производными — выражается по формуле

$$S = z(A_1) - z(A_2) + z(A_3) - z(A_4). \tag{10}$$

Эта формула легко обобщается на сетевые многоугольники произвольной топологической структуры. В частности, площадь односвязного сетевого $2n$-угольника будет равна $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{(k+1)} z(A_k)$.

Заменив в формуле (10) сетевые углы внутренними углами сетевого четырехугольника, получим

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi i.$$

Здесь

$$\alpha_1 = z(A_1), \quad \alpha_3 = z(A_3), \quad \alpha_2 = \pi i - z(A_2), \quad \alpha_4 = \pi i - z(A_4).$$

В некотором смысле сеть (7) дополняет чебышёвскую сеть из гиперболических косинусов $u^2 = \cosh(u^1 - c_1)$, $u^2 = \cosh(c_2 - u^1)$ в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, накрывающую асимптотическую сеть на псевдосфере Бельтрами — Миндинга. Площадь фигуры в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского с метрикой (4) совпадает с площадью этой фигуры на плоскости с теми же координатами $u^1$, $u^2$ в метрике де Ситтера:

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 - (du^2)^2}{(u^2)^2}. \tag{11}$$

Евклидова (и псевдоевклидова) прямая $u^2 = 1$ в обеих метриках является орициклом. Этот орицикл накрывает ребра возврата всех рассматриваемых псевдосфер. К орициклу $u^2 = 1$ линии обеих сетей подходят тангенциально. В области $u^2 > 0$ (на универсальной накрывающей «полной псевдосферы») рассмотрим единую сеть, объединив чебышёвскую сеть в метрике гиперболической плоскости с чебышёвской сетью в метрике плоскости де Ситтера. При этом в области $u^2 > 1$ берется положительно определенная метрика (4), вне ее — индефинитная метрика (11). Для вычисления через сетевые углы площадей сетевых многоугольников, имеющих вершины в разных областях, потребуются некоторые уточнения. Вблизи границы площадь равностороннего сетевого четырехугольника со стороной $x$, отсекающего на граничном орицикле дугу длиной $2x$, будет равна

$$2(gd^{-1}(x) - gd(x)) = 2(\lambda(x) - gd(x)).$$

Здесь $gd(x) = \int_0^x \frac{dx}{\cosh(x)}$ — гудерманиан $x$, $\lambda(x) = gd^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\cos(x)}$ — обратная к гудерманиану функция. Такой четырехугольник с точки зрения применения к нему альтернированного варианта формулы Хаццидакиса следует считать двуугольником. Если $A$ — нижняя вершина, $B$ — верхняя, то площадь его через сетевые углы выражается так $S = z(A) - \tilde{z}(B)$, где $z$ — сетевой угол в метрике де Ситтера, $\tilde{z}$ — сетевой угол в метрике Лобачевского. Формула Хаццидакиса не реагирует на граничную вершину, являющуюся точкой возврата, и не аннулирует граничную вершину, при прохождении через которую линия сети не меняет направления.

## 5. Интерпретация, связанная с воронкой де Ситтера — Широкова

Заменим в (4) и (5) $u^2$ на $i \cdot u^2$, где также $i^2 = -1$. Метрика (4) при этом перейдет в индефинитную метрику (6). Преобразованные уравнения асимптотических

$$-\frac{\sqrt{1+(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1+(u^2)^2}}(du^2)^2 = 0$$

имеют вещественные решения

$$-u^1 + c = \operatorname{arcsinh}(u^2), \quad u^1 + c = \operatorname{arcsinh}(u^2). \tag{12}$$

Уравнения (12) тоже задают чебышёвскую сеть в метрике (6) и в метрике (11), отличающейся от нее знаком. Эта сеть накрывает асимптотическую сеть на поверхности

$$\begin{cases} x^1 = \sinh(u) \cdot \sin(v), \\ x^2 = \sinh(u) \cdot \cos(v), \\ x^3 = (\ln(\tanh(\frac{u}{2})) + \cosh(u)) \end{cases} \tag{13}$$

в псевдоевклидовых пространствах с метрикой (1) и с метрикой

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

В этом непосредственно убеждаемся, введя на поверхности параметризацию координатами карты Пуанкаре. Сетевой угол

$$z = 2u = 4\operatorname{arctanh}(e^{x+y}),$$

понимаемый здесь, как и выше, как гиперболический угол, в асимптотических координатах

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right) - \frac{v}{2},$$
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \frac{v}{2}$$

удовлетворяет уравнению sinh-Гордона:

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \sinh(z).$$

Эта поверхность является еще одним псевдоевклидовым аналогом псевдосферы. Профиль поверхности является регулярным аналогом трактрисы. Касательная и база — ось вращения — являются прямыми одного типа. Кривизна поверхности постоянна, индуцированная метрика индефинитна. Если на расширенной гиперболической плоскости задать действие дискретной группы орициклических вращений, то фактор-пространством собственной области будет полная псевдосфера. Внешняя часть орикруга при этом будет бесконечно-листно накрывать поверхность (2), внутренняя — псевдосферу Бельтрами — Миндинга. Фактор-пространством идеальной области, из которой вследствие проективной двойственности удаляется одна изотропная прямая, будет поверхность (13). Этот аналог псевдосферы будем называть воронкой де Ситтера — Широкова. Многие свойства асимптотических на воронке де Ситтера — Широкова аналогичны свойствам асимптотических на поверхности (8), но с некоторыми изменениями. В частности, в бесконечность в сторону расширения воронки асимптотическая также уходит в изотропном направлении. Если обратиться к проективной интерпретации, то уход в бесконечность соответствует уходу на абсолют. В точке касания к изотропной касательной к абсолюту линии на этих поверхностях подходят с разных сторон. На воронке де Ситтера — Широкова нет ребра возврата. Вместо него нужно взять параллель длины $2\pi$. При этом будут выполняться свойства о связи длины дуги асимптотической и ее проекции, с той разницей, что асимптотическая и параллель будут линиями разных типов. Есть много общих или аналогичных свойств меридианов, их эволют [24] и соответствующих поверхностей вращения для псевдосферы Бельтрами — Миндинга и ее аналогов в псевдоевклидовом пространстве. Кроме того, используя связи сетевых углов с углами параллельности [25], асимптотическим направлениям — внешнегеометрическому понятию — на рассматриваемых псевдосферах можно дать простую геометрическую интерпретацию в рамках внутренней геометрии этих поверхностей [26].

## Литература


1. *Minding F.* Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1839.—Vol. 1839, № 19.—P. 370–387. DOI: 10.1515/crll.1839.19.370.
2. *Blanusha D.* $C^\infty$-isometric imbeddings of the hiperbolic plane and of cylinders with hiperbolic metric in spherical spaces // Ann. Math. Pura Appl.—1962.—Vol. 57, № 1.—P. 321–337. DOI: 10.1007/BF02417747.
3. *Blanusha D.* $C^\infty$-isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in euclidean 7-space // Glas. Mat.-Fiz. i Astron.—1956.—Vol. 11, № 3–4.—P. 243–246.
4. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства.—М.: Наука, 1969.—548 с.
5. *Hesse L. O.* Über ein übertragungsprinzip // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1866.—Vol. 66.—P. 15–21. DOI: 10.1515/crll.1866.66.15.
6. *Tchebychev P. L.* Sur la coupe de vêtements // Association Francaise pour l'Avancement de Sciences., Congres de Paris.—1878.—P. 154–155.
7. *Чебышев П. Л.* О кройке одежды // Успехи мат. наук.—1946.—Т. 1, № 2 (12).—С. 38–42.
8. *Hazzidakis J. N.* Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1880.—Vol. 88.—P. 68–73. DOI: 10.1515/crll.1880.88.68.
9. *Hilbert D.* Über Flächen von konstanten Gau$\beta$scher Krümmung // Trans. Amer. Math. Soc.—1901.—Vol. 2.—P. 87–99.
10. *Широков П. А.* Интерпретация и метрика квадратичных геометрий // Избранные работы по геометрии.—Казань, 1966.—С. 15–179.
11. *Kostin A. V., Sabitov I. K.* Smarandache theorem in hyperbolic geometry // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry.—2014.—Vol. 10, № 2.—P. 221–232. DOI: 10.15407/mag10.02.221.
12. *Позняк Э. Г., Попов А. Г.* Геометрия уравнения sin-Гордона // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.—М.: ВИНИТИ, 1991.—Т. 23.—С. 99–130.
13. *Chern S. S.* Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation // Annales Polonici Mathematici.—1981.—Vol. 39.—P. 63–69. DOI: 10.4064/ap-39-1-63-69.
14. *Галеева Р. Ф., Соколов Д. Д.* О геометрической интерпретации решений некоторых уравнений математической физики // Исслед. по теории поверхностей в римановых пространствах.—Л.: ЛГПИ, 1984.—С. 8–22.
15. *Klotz-Milnor T.* Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-Space // Trans. Amer. Math. Soc.—1983.—Vol. 280, № 1.—P. 161–185. DOI: 10.2307/1999607.
16. *Rosenfeld B. A., Maryukova N. E.* Surfaces of constant curvature and Geometric interpretation of the Klein–Gordon, sin-Gordon and sinh-Gordon equation // Publications de L'Institut Mathématique.—1997.—Vol. 61 (75).—P. 119–132.
17. *Lopez R.* Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space // Int. Eletron. J. of Geometry.—2014.—Vol. 7, № 1.—P. 44–107.
18. *Barros M., Caballero M. and Ortega M.* Rotational surfaces in $L^3$ and solutions of the nonlinear sigma model // Communication in Math. Physics.—2009.—Vol. 290, № 2.—P. 437–477. DOI: 10.1007/s00220-009-0850-0.
19. *Albujer A. L., Caballero M.* Geometric properties of same mean curvature in $R^3$ and $L^3$ // J. of Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 445, № 1.—P. 1013–1024. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.07.062.

20. *Lopez R., Kaya S.* New examples of maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space // Kyoshu J. of Math.—2017.—Vol. 71, № 2.—P. 311–327. DOI: 10.2206/kyushujm.71.311.
21. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия.—М.: Изд-во МГУ, 1990.—384 с.
22. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия.—М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.—512 с.
23. *Костин А. В.* Регулярность асимптотических линий на псевдосферах де Ситтера // Дни геометрии в Новосибирске — 2012: Тез. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Д. Александрова.—Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С. Л. Соболева СО РАН, 2012.—С. 48–49.
24. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об эволютах некоторых кривых на псевдоевклидовой плоскости // Тр. участников Междунар. шк.-сем. по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Абрау-Дюрсо, 2004.—С. 34–35.
25. *Костин А. В.* Об асимптотичкских сетях на псевдосферах // Дни геометрии в Новосибирске — 2014: Тез. Междунар. конф., посвящ. 85-летию Ю. Г. Решетняка.—Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014.—С. 41.
26. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об интерпретации асимптотических направлений // Сб. тр. междунар. молодеж. шк.-сем. «Современная геометрия и ее приложения» и междунар. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения».—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017.—С. 75–76.

*Статья поступила 26 марта 2018 г.*

Костин Андрей Викторович
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
*доцент кафедры математики и прикладной информатики*
Россия, 423604, Елабуга, ул. Казанская, 89
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
http://orcid.org/0000-0002-5353-6138

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 16–26*

# ASYMPTOTIC LINES ON THE PSEUDO-SPHERICAL SURFACES

Kostin, A. V.[1]

[1] Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89, Kazanskaya St., Elabuga 423600, Russia
E-mail: kostin_andrei@mail.ru

**Abstract.** Consider the three-dimensional extended Lobachevsky space. In a proper area of Lobachevsky space take the 'complete' pseudosphere, that is, a surface of rotation of a straight line around a given parallel straight line. One part of it is embedded into Euclidean space in the form of the Beltrami–Minding funnel, the other one into three-dimensional Minkowski space as an analogue of the pseudosphere in this space. The interpretations of imaginary asymptotic lines on this pseudospherical surface with the Lobachevsky metric in Minkowski space are considered. Imaginary asymptotic lines on the pseudo-Euclidean continuation of the pseudosphere can be interpreted as real asymptotic lines on the surface of constant curvature with indefinite metric. These surfaces are other pseudo-Euclidean analogs of the Beltrami–Minding pseudosphere. The properties of the asymptotic lines on the pseudospheres with de Sitter metric in the three-dimensional Minkowsky space are studied. The considered properties of asymptotic lines on pseudospheres of pseudo-Euclidean space (Minkowski space) are similar to that of asymptotic lines on the Beltrami–Minding pseudosphere in Euclidean space. Areas of quadrangles of the asymptotic net on a surface of constant negative curvature in Euclidean space can be found by the Hazzidakis formula. These results are transferred to surfaces of constant curvature with indefinite metric in Minkowski space.

**Key words:** pseudosphere, Lobachevsky plane, de Sitter plane, asymptotic line, Chebyshev net, Minkowski space.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 53A35, 53B30.

**For citation:** *Kostin, A. V.* Asymptotic Lines on the Pseudo-Spherical Surfaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 16–26 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27656.

## References


1. *Minding, F.* Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1839, vol. 1839, no. 19, pp. 370–387. DOI: 10.1515/crll.1839.19.370.
2. *Blanusha, D.* $C^\infty$-Isometric Imbeddings of the Hiperbolic Plane and of Cylinders with Hiperbolic Metric in Spherical Spaces, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1962, vol. 57, pp. 321–337. DOI: 10.1007/BF02417747.
3. *Blanusha, D.* $C^\infty$-Isometric Imbeddings of Cylinders with Hyperbolic Metric in Euclidean 7-Space, *Glas. Mat.-Fiz. i Astron.*, 1956, vol. 11, no. 3–4, pp. 243–246.
4. *Rosenfeld, B. A.* *Neyevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Space], Moscow, Nauka, 1969, 548 p. (in Russian).
5. *Hesse, L. O.* Über ein übertragungsprinzip, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1866, vol. 66, pp. 15–21. DOI: 10.1515/crll.1866.66.15.
6. *Tchebychev, P. L.* Sur la coupe de vêtements, *Association Francaise pour l'Avancement de Sciences. Congres de Paris*, 1878, pp. 154–155.
7. *Chebyshev, P. L.* On the Cutting of Garments, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1946, vol. 1, no. 2 (12), pp. 38–42 (in Russian).
8. *Hazzidakis, J. N.* Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1880, vol. 88, pp. 68–73. DOI: 10.1515/crll.1880.88.68.
9. *Hilbert, D.* Über Flächen von konstanten Gau*ß*scher Krümmung, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1901, vol. 2, pp. 87–99.
10. *Shirokov, P. A.* Interpretation and Metric of Quadratic Geometries, *Izbrannyye raboty po geometrii* [Selected Works on Geometry], Kazan, 1966, pp. 15–179 (in Russian).
11. *Kostin, A. V. and Sabitov, I. K.* Smarandache Theorem in Hyperbolic Geometry, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 221–232. DOI: 10.15407/mag10.02.221.
12. *Poznyak, É. G. and Popov A. G.* The Geometry of the sine-Gordon Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 70, no. 2, pp. 1666–1684. DOI: 10.1007/BF02110595.
13. *Chern, S. S.* Geometrical Interpretation of sinh-Gordon Equation, *Annales Polonici Mathematici*, 1981, vol. 39, pp. 63–69. DOI: 10.4064/ap-39-1-63-69.
14. *Galeeva, R. F. and Sokolov, D. D.* On the Geometric Interpretation of Solutions of Some Nonlinear Equations of Mathematical Physics, *Issledovaniya po teorii poverkhnostey v rimanovykh prostranstvakh* [Research on the Theory of Surfaces in Riemann Spaces], Leningrad, 1984, pp. 8–22 (in Russian).
15. *Klotz-Milnor, T.* Harmonic Maps and Classical Surface Theory in Minkowski 3-Space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 280, no. 1, pp. 161–185. DOI: 10.2307/1999607.
16. *Rosenfeld, B. A. and Maryukova, N. E.* Surfaces of Constant Curvature and Geometric Interpretation of the Klein–Gordon, sin-Gordon and sinh-Gordon equation, *Publications de L'Institut Mathématique*, 1997, vol. 61 (75), pp. 119–132.
17. *Lopez, R.* Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz–Minkowski Space, *International Electronic Journal of Geometry*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 44–107.
18. *Barros, M., Caballero, M. and Ortega, M.* Rotational Surfaces in $L^3$ and Solutions of the nonlinear Sigma Model, *Communication in Math. Physics*, 2009, vol. 290, no. 2, pp. 437–477. DOI: 10.1007/s00220-009-0850-0.
19. *Albujer, A. L. and Caballero, M.* Geometric Properties of Same Mean Curvature in $R^3$ and $L^3$, *Elsevier Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, vol. 445, no. 1, pp. 1013–1024. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.07.062.
20. *Lopez R. and Kaya S.* New examples of maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space, *Kyushu Journal of Mathematics*, 2017, vol. 71, no. 2, pp. 311–327. DOI: 10.2206/kyushujm.71.311.
21. *Poznyak, É. G. and Shikin, E. V.* *Differentsial'naya geometria* [Differential Geometry], Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1990, 384 p. (in Russian).
22. *Vygodskii, M. Ya.* *Differentsial'naya geometria* [Differential Geometry], Moscow–Leningrad, 1949, 512 p. (in Russian).
23. *Kostin, A. V.* The Regularity of Asymptotic Lines on the de Sitter Pseudosphere, *Geometry Days in Novosibirsk — 2012: Abstracts of the Inter. Conf. dedicated to 100th anniversary of A. D. Aleksandrov*, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the RAS, 2012, pp. 48–49 (in Russian).
24. *Kostin, A. V. and Kostina, N. N.* On the Evolutes of some Curves on the Pseudo-Euclidean Plane, *Trudy uchastnikov Mejdunarodnoi shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyati N. V. Efimova*

[Proceedings of the Participants of the International School-Seminar on Geometry and Analysis in Memory of N. V. Efimov], Abrau-Durso, 2004, pp. 34–35 (in Russian).
25. *Kostin, A. V.* On Asymptotic Nets on Pseudospheres, *Geometry Days in Novosibirsk — 2014: Abstracts of the Inter. Conf. dedicated to 85th anniversary of academian Yu. G. Reshetnyak*, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the RAS, 2014, p. 41 (in Russian).
26. *Kostin, A. V. and Kostina, N. N.* On the Interpretation of Asymptotic Directions, *Proceedings International Youth School-Seminar «Modern Geometry and its Applications», International Scientific Conference «Modern Geometry and its Applications»*, Kazan, Kazan Univ. Publ., 2017, pp. 75–76 (in Russian).

*Received March 26, 2018*

Andrey V. Kostin
Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89, Kazanskaya St., Elabuga 423600, Russia,
*Associate Professor of Mathematics and Applied Informatics*
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
http://orcid.org/0000-0002-5353-6138

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 27–36*

**УДК** 517.5
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27732

# О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

**М. Р. Лангаршоев**[1]

[1] Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: mukhtor77@mail.ru

**Аннотация.** Задача нахождения точной оценки величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, через усредненную величину модуля непрерывности и модуля гладкости самой функции и ее соответствующих производных является одной из интересных задач теории приближений. В свое время Н. П. Корнейчук рассмотрел эту задачу для класса $2\pi$-периодических функций $f(x)$ с выпуклым модулем непрерывности $\omega(f',t)$ в метрике пространства непрерывных функций $C[0,2\pi]$. Аналогичную задачу без предположения выпуклости модуля непрерывности граничных значений аналитических в круге функций в пространстве Харди $H_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рассмотрел Л. В. Тайков. Продолжая исследование указанных авторов, в пространствах Харди $H_p$, $p \geqslant 1$, М. Ш. Шабозов и М. М. Миркалонова доказали новые точные неравенства, в которых наилучшее полиномиальное приближение аналитических функций оценивается через суммы усредненных значений модулей непрерывности самой функции и некоторой ее производной. В настоящей работе получены точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами и модулями непрерывности и гладкости самой функции и ее второй производной в весовом пространстве Бергмана. Вычислены точные значения бернштейновских и колмогоровских $n$-поперечников классов функций, задаваемых в весовом пространстве Бергмана. Полученные в последней теоремы результаты являются обобщением результата Л. В. Тайкова, полученного для классов дифференцируемых периодических функций, на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

**Ключевые слова:** наилучшее приближение, модуль непрерывности, модуль гладкости, полином, $n$-поперечник.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 30E10.

**Образец цитирования:** *Лангаршоев М. Р.* О наилучшем полиномиальном приближении функций в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 27–36. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27732.

## 1. Введение

В настоящее время достигнут значительный прогресс в решении задач нахождения точных значений наилучших полиномиальных приближений аналитических в единичном круге функций и вычисления точных значений $n$-поперечников классов аналитических функций в различных функциональных пространствах (см., например, [1–12] и приведенную там литературу). Представленные в настоящей работе результаты продолжают и развивают исследования в указанном направлении.

Пусть $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $\mathbb{Z}_+$ — множество целых положительных чисел.

Известно, что аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it},\ 0 \leqslant \rho < 1,$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, с конечной нормой [8]

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(U)} \gamma(|z|)|f(z)|^q \, d\sigma\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{1}$$

где $\gamma(|z|)$ — положительная интегрируемая весовая функция, $d\sigma$ — элемент площади, и интеграл понимается в смысле Лебега.

Очевидно, что норму (1) можно записать в виде

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left|f\left(\rho e^{it}\right)\right|^q d\rho \, dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Через $f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r$ обозначим производную $r$-го порядка функции $f(z) = f(\rho e^{it})$ по аргументу $t$. При этом

$$f_a'(z) = f'(z) \cdot zi, \quad f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a', \quad r \geqslant 2.$$

Величины

$$\omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h| \leqslant t} \left\|f_a^{(r)}(\cdot + h) - f_a^{(r)}(\cdot)\right\|_{B_{q,\gamma}},$$

$$\omega_2\big(f_a^{(r)}, 2t\big)_{B_{q,\gamma}} = \sup_{|h| \leqslant t} \left\|f_a^{(r)}(\cdot + h) - 2f_a^{(r)}(\cdot) + f_a^{(r)}(\cdot - h)\right\|_{B_{q,\gamma}}$$

соответственно назовем *интегральным модулем непрерывности* и *интегральным модулем гладкости* функции $f_a^{(r)}(z)$ в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, поскольку функции $\omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}}$ и $\omega_2\big(f_a^{(r)}, 2t\big)_{B_{q,\gamma}}$ обладают всеми свойствами модуля непрерывности и модуля гладкости (см., например, [13]).

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, символом

$$\mathscr{P}_n = \left\{p_n(z) :\ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right\}$$

обозначим множество алгебраических комплексных полиномов степени не выше $n$.

Величину

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} :\ p_{n-1}(z) \in \mathscr{P}_{n-1}\right\}$$

назовем *наилучшим приближением* функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, множеством $\mathscr{P}_{n-1}$.

Через $B_{q,\gamma,R}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < R \leqslant 1)$ обозначим пространство Бергмана $B_{q,\gamma}$ аналитических в круге $|z| \leqslant R$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f(\cdot)\|_{B_{q,\gamma,R}} \overset{\text{def}}{=} \|f(R\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < R \leqslant 1.$$

В работе [11] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma,R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < R \leqslant 1$, у которой производная $f_a^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, при любых $r, n \in \mathbb{N}$ имеют место точные неравенства

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leqslant R^n n^{-r} E_n\big(f_a^{(r)}\big)_{B_{q,\gamma}}, \tag{2}$$

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leqslant \frac{R^n}{4n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt. \tag{3}$$

В настоящей работе, исходя из неравенства (2) и (3), мы получим точные оценки величины наилучшего приближения функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, через усредненные значения модуля непрерывности и модуля гладкости самой функции и ее второй производной $f_a''(t)$, а также вычислим точные значения некоторых $n$-поперечников классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана. Отметим, что неравенство (3) является распространением результата Н. П. Корнейчука [14] на случай аналитических в единичном круге функций принадлежащих весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Приведем необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Пусть $X$ — банахово пространство; $S$ — единичный шар в $X$; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в $X$; $\Lambda_n \subset X$ — $n$-мерное подпространство $X$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}) = \sup\big\{\sup\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} :\ \Lambda_{n+1} \subset B_{q,\gamma}\big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}) = \inf\big\{\sup\{\inf\{\|f-g\|_{B_{q,\gamma}} :\ g \in \Lambda_n\} :\ f \in \mathfrak{M}\} :\ \Lambda_n \subset B_{q,\gamma}\big\}$$

называются соответственно *бернштейновским* и *колмогоровским* $n$*-поперечниками*. Указанные поперечники удовлетворяют неравенству (см. [16])

$$b_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, B_{q,\gamma}). \tag{4}$$

Пусть $\Phi(u)$ — положительная неубывающая функция, определенная для $u \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию

$$\lim\{\Phi(u) :\ u \to 0+\} = \Phi(0) = 0.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций, принадлежащий пространству $B_{q,\gamma}$, то через

$$E_n(\mathfrak{M})_{B_{q,\gamma}} := \sup\big\{E_n(f)_{B_{q,\gamma}} :\ f \in \mathfrak{M}\big\}$$

обозначим отклонение множества $\mathfrak{M} \subset B_{q,\gamma}$ от множества $\mathscr{P}_n$.

Положим также

$$(\sin t)_* = \begin{cases} \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 1, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ определим классы функций

$$W_a^{(r)}(\Phi) = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} :\ \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(f_a^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt \leqslant \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}.$$

## 2. Основной результат

**Теорема 1.** *Для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и любого заданного $h \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место точное неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{2n}\left\{\int\limits_0^h \omega\left(f_a'', 2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\left(1 - \sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau + \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \omega(f, 2\tau)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\, d\tau\right\} \tag{5}$$

*и знак равенства в неравенстве (5) реализует функция $f_0(z) = z^n \in B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.*

$\lhd$ Введем в рассмотрение оператор

$$\mathscr{F}(f_a', t) = \frac{\pi}{4h}\int\limits_0^h \left(f_a'(t+\tau) + f_a'(t-\tau)\right)\cos\frac{\pi}{2h}\tau\, d\tau.$$

Используя неравенство (2) при $R = r = 1$, запишем оценку

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n}E_n(f_a')_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n}\left(E_n\left(f_a' - \mathscr{F}\left(f_a'\right)\right)_{B_{q,\gamma}} + E_n\left(\mathscr{F}\left(f_a'\right)\right)_{B_{q,\gamma}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\left\|f_a' - \mathscr{F}(f_a')\right\|_{B_{q,\gamma}} + \left\|\mathscr{F}(f_a')\right\|_{B_{q,\gamma}}\right). \tag{6}$$

Так как

$$f_a'(t) - \mathscr{F}(f_a', t) = \frac{\pi}{4h}\int\limits_0^h \left(-f_a'(t+\tau) + 2f_a'(t) - f_a'(t-\tau)\right)\cos\frac{\pi}{2h}\tau\, d\tau, \tag{7}$$

то, интегрируя правую часть равенства (7) по частям и применяя обобщенное неравенство Минковского (см., например, [15])

$$\left\|\int\limits_a^b f(\cdot, t)\, dt\right\|_p \leqslant \int\limits_a^b \|f(\cdot, t)\|_p\, dt, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{8}$$

будем иметь

$$\left\|f_a'(\cdot) - \mathscr{F}(f_a', \cdot)\right\|_{B_{q,\gamma}} = \frac{1}{2}\left\|\int\limits_0^h \left(f_a''(t+\tau) - f_a''(t-\tau)\right)\left(1 - \sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^h \left\|f_a''(\cdot+\tau) - f_a''(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\left(1 - \sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau. \tag{9}$$

Аналогичным образом методом интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}(f_a')\right\|_{B_{q,\gamma}} &= \left\|\frac{\pi}{2h}\int\limits_0^h \left(f_a'(t+\tau)-f_a'(t-\tau)\right)\cos\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &= \left\|\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h (f(t+\tau)-f(t-\tau))\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \|f(t+\tau)-f(t-\tau)\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau.\end{aligned}\tag{10}$$

Из неравенства (6) с учетом неравенств (9) и (10) и определения модуля непрерывности следует, что

$$\begin{aligned}E_n(f)_{B_{q,\gamma}} &\leqslant \frac{1}{2n}\Bigg\{\int\limits_0^h \left\|f_a''(\cdot+\tau)-f_a''(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau\\ &\quad+\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \|f(\cdot+\tau)-f(\cdot-\tau)\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\}\\ &\leqslant \frac{1}{2n}\left\{\int\limits_0^h \omega\left(f_a'';2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau+\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \omega\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\},\end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1. Знак равенства для функции $f_0(z)=z^n$ в соотношении (5) проверяется непосредственным вычислением. $\triangleright$

**Следствие 1.** *В условиях теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{2n}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(f_a'';2\tau)_{B_{q,\gamma}}\,(1-\sin n\tau)\,d\tau+n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin n\tau\,d\tau\right\}.$$

**Теорема 2.** *Для произвольной* $f(z)\in B_{q,\gamma}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, *и любого* $h\in(0,\pi/(2n))$, $n\in\mathbb{N}$, *справедливо точное неравенство*

$$\begin{aligned}E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{\pi}{2hn^2}\cdot\frac{1}{\pi-2}\Bigg\{&\int\limits_0^h \omega_2\left(f_a'';2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau\\ &+\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\int\limits_0^h \omega_2\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\}\end{aligned}\tag{11}$$

*и знак равенства в* (11) *реализует функция* $f_0(z)=z^n$.

$\triangleleft$ Введем в рассмотрение оператор

$$\mathscr{F}(f_a'',t)=\frac{\pi}{2h}\cdot\frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^h \left(f_a''(t+\tau)+f_a''(t-\tau)\right)\left(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\right)d\tau.$$

Из неравенства (2) при $R=1$ и $r=2$ запишем следующее соотношение:

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n^2}\left\|f_a''\right\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{n^2}\Big(\left\|f_a''-\mathscr{F}(f_a'')\right\|_{B_{q,\gamma}}+\left\|\mathscr{F}(f_a'')\right\|_{B_{q,\gamma}}\Big). \tag{12}$$

Используя вышеприведенное рассуждение, оценим каждое слагаемое в правой части (12). С этой целью разность $f_a''(t)-\mathscr{F}(f_a'',t)$ представим в следующем виде:

$$f_a''-\mathscr{F}(f_a'')=-\frac{\pi}{2h(\pi-2)}\int\limits_0^h\big(f_a''(t+\tau)-2f_a''(t)+f_a''(t-\tau)\big)\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau. \tag{13}$$

Оценим равенство (13) по норме

$$\begin{aligned}&\left\|f_a''-\mathscr{F}(f_a'')\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &\qquad\leqslant\frac{\pi}{2h(\pi-2)}\int\limits_0^h\left\|f_a''(t+\tau)-2f_a''(t)+f_a''(t-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau.\end{aligned} \tag{14}$$

Переходим к оценке второго слагаемого в неравенстве (12). Дважды выполняя интегрирование по частям и используя неравенство (8), получаем

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}(f_a'')\right\|_{B_{q,\gamma}}&=\frac{\pi}{2h}\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^h\big(f_a''(\cdot+\tau)-2f_a''(\cdot)+f_a''(\cdot-\tau)\big)\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &=\Big(\frac{\pi}{2h}\Big)^2\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^h\big(f_a'(\cdot+\tau)-f_a'(\cdot-\tau)\big)\cos\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &=\Big(\frac{\pi}{2h}\Big)^3\cdot\frac{1}{\pi-2}\left\|\int\limits_0^h\big(f(\cdot+\tau)-2f(\cdot)+f(\cdot-\tau)\big)\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &\leqslant\Big(\frac{\pi}{2h}\Big)^3\cdot\frac{1}{\pi-2}\int\limits_0^h\left\|f(\cdot+\tau)-2f(\cdot)+f(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau.\end{aligned} \tag{15}$$

Складывая неравенства (14) и (15), с учетом (12) и определения модуля гладкости функции, получаем

$$\begin{aligned}E_n(f)_{B_{q,\gamma}}&\leqslant\frac{1}{n^2}\left\|f_a''\right\|_{B_{q,\gamma}}\leqslant\frac{\pi}{2hn^2}\cdot\frac{1}{\pi-2}\Bigg\{\int\limits_0^h\left\|f_a''(\cdot+\tau)-2f_a''(\cdot)+f_a''(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\\ &\quad\times\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau+\Big(\frac{\pi}{2h}\Big)^2\int\limits_0^h\left\|f(\cdot+\tau)-2f(\cdot)+f(\cdot-\tau)\right\|_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\}\\ &\leqslant\frac{\pi}{2hn^2}\cdot\frac{1}{\pi-2}\Bigg\{\int\limits_0^h\omega_2\left(f_a'';2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\Big(1-\sin\frac{\pi}{2h}\tau\Big)\,d\tau+\Big(\frac{\pi}{2h}\Big)^2\int\limits_0^h\omega_2\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin\frac{\pi}{2h}\tau\,d\tau\Bigg\}.\end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно показать, что для функции $f_0(z)=z^n\in B_{q,\gamma}$ неравенство (11) обращается в равенство. $\rhd$

**Следствие 2.** *В условиях теоремы 2 справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{(\pi-2)n}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(f_a'';2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}(1-\sin n\tau)\,d\tau + n^2\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2\left(f;2\tau\right)_{B_{q,\gamma}}\sin n\tau\,d\tau\right\},$$

*в котором равенство достигается на функции* $f_0(z)=z^n\in B_{q,\gamma}$.

**Теорема 3.** *Пусть функция* $\Phi(u)$ *для любых* $\lambda\in[0,1]$, $x\in[0,\pi]$ *удовлетворяет неравенству*

$$2\sin^2\frac{\pi}{4}\lambda \leqslant \frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)} \leqslant \frac{\lambda}{\pi/2-(\pi/2-1)\lambda}. \tag{16}$$

*Тогда справедливы равенства*

$$b_n\big(W_a^{(r)}(\Phi),B_{q,\gamma,R}\big) = d_n\big(W_a^{(r)}(\Phi),B_{q,\gamma,R}\big) = \frac{R^n}{4n^{r-1}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{17}$$

$\lhd$ Соотношение (17) достаточно доказать для случая $R=1$. В силу неравенства

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma,R}} \leqslant R^n E_n(f)_{B_{q,\gamma}}$$

и определения класса $W_a^{(r)}(\Phi)$, имеем

$$d_n\big(W_n^{(r)}(\Phi),B_{q,\gamma}\big) \leqslant E_n\big(W_n^{(r)}(\Phi),B_{q,\gamma}\big) \leqslant \frac{1}{4n^{r-1}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{18}$$

и оценка сверху для колмогоровского $n$-поперечника получена. Для получения оценки снизу используем рассуждения работы Л. В. Тайкова [2].

Введем в рассмотрение $(n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S_{n+1} = \left\{p_n(z):\ \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leqslant \frac{1}{4n^{r-1}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и докажем, что $S_{n+1}\subset W_a^{(r)}(\Phi)$. Если $m\leqslant n$, то из неравенства

$$\omega\big(p_{n,a}^{(r)},t\big)_{B_{q,\gamma}}dt \leqslant 2n^r\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*\|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \tag{19}$$

получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi/m}\omega\big(p_{n,a}^{(r)},t\big)_{B_{q,\gamma}}dt &\leqslant 2n^r\|p_n\|_{B_{q,\gamma}}\int\limits_0^{\pi/m}\sin\frac{nt}{2}\,dt\\ &= 4n^{r-1}\|p_n\|_{B_{q,\gamma}}\left(1-\cos\frac{\pi n}{2m}\right) = 2\sin^2\frac{\pi n}{4m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Полагая $\pi/m=\lambda x$, $\pi/n=x$, из (20), согласно левой части неравенства (16), будем иметь

$$\int\limits_0^{\pi/m}\omega\big(p_{n,a}^{(r)},t\big)_{B_{q,\gamma}}dt \leqslant 2\sin^2\frac{\pi n}{4m}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\sin^2\frac{\pi\lambda}{4}\Phi(x) \leqslant \Phi(\lambda x) = \Phi\left(\frac{\pi}{m}\right). \tag{21}$$

Пусть теперь $m > n$. Тогда, вновь используя неравенство (19), получаем

$$\int\limits_0^{\pi/m} \omega\big(p_{n,a}^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt = \int\limits_0^{\pi/n} \omega\big(p_{n,a}^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt + \int\limits_{\pi/n}^{\pi/m} \omega\big(p_{n,a}^{(r)}, t\big)_{B_{q,\gamma}} dt$$
$$\leqslant 4n^{r-1}\|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \cdot \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big(\frac{n}{m} - 1\Big)\Big) \leqslant \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big(\frac{n}{m} - 1\Big)\Big) \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \leqslant \Phi\Big(\frac{\pi}{m}\Big). \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) следует, что $S_{n+1} \subset W_n^{(r)}(\Phi)$. Поэтому, согласно известной теореме В. М. Тихомирова [15], получаем

$$b_n\big(W_a^{(r)}(\Phi), B_{q,\gamma}\big) \geqslant b_n\left(S_{n+1}, B_{q,\gamma}\right) \geqslant \frac{1}{4n^{r-1}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{23}$$

Сравнивая неравенства (18) и (23), с учетом соотношения (4) приходим к равенству (17), чем и завершаем доказательство теоремы 3. $\rhd$

Замечание. В [2] доказано, что условию (16) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(u) = u^{\pi/2}$.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные советы и замечания, использованные в работе.

## Литература


1. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 81–120.
2. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки.—1977.—Т. 22, № 2.—С. 285–294.
3. *Двейрин М. З.* Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций (Калуга, 24–28 июля 1975 г.).—М: Наука, 1977.—С. 129–131.
4. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки.—1986.—Т. 40, № 3.—С. 341–351.
5. *Фарков Ю. А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук.—1990.—Т. 45, № 5.—С. 197–198.
6. *Fisher S. D., Stessin M. I.* The $n$-width of the unit ball of $H^q$ // J. Approx. Theory.—1991.—Vol. 67, № 3.—P. 347–356. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90009-y.
7. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журн.—2004.—Т. 56.—Вып. 9.—С. 1155–1171.
8. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Докл. РАН.—2007.—Т. 412, № 4.—С. 466–469.
9. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$ // Мат. заметки.—2009.—Т. 85, № 3.—С. 323–329. DOI: 10.4213/mzm6633.
10. *Шабозов М. Ш., Миркалонова М. М.* Наилучшее полиномиальные приближение функций в пространстве Харди $H_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Изв. АН Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук.—2009.—№ 2(135).—С. 19–31.
11. *Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук.—2009.—№ 3 (136).—С. 7–23.
12. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб.—2010.—Т. 201, № 8.—С. 3–22. DOI: 10.4213/sm7505.
13. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.—М: Наука, 1977.—511 с.

14. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.—1961.—Т. 141, № 2.—С. 304–307.
15. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.—М: Наука, 1976.—320 с.
16. *Pinkus A.* $n$-Width in Approximation Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—292 p.

*Статья поступила 14 июля 2017 г.*

Лангаршоев Мухтор Рамазонович
Таджикский национальный университет,
*доцент кафедры мат. анализа и теории функций*
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: mukhtor77@mail.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 27–36*

# ON THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE WEIGHT BERGMAN SPACE

Langarshoev, M. R.[1]

[1] Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan
E-mail: mukhtor77@mail.ru

**Abstract.** The problem of finding an accurate estimate of the best approximation value $E_{n-1}(f)_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, using the average value of the modulus of continuity and the modulus of smoothness of the function and its corresponding derivatives is one of the important and interesting problems in the approximation theory. N. P. Korneychuk considered this problem for classes of $2\pi$ periodic functions with a convex modulus of continuity in the metric space of continuous functions $C[0, 2\pi]$. A similar problem without assuming convexity of the modulus of continuity was considered L. V. Taikov in the Hardy space $H_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Continuing this study of the Hardy spaces $H_p$, $p \geqslant 1$, M. Sh. Shabozov and M. M. Mirkalonova proved new sharp inequalities in which the best approximation of analytic functions is estimated by the sums of averaged values of the modules of continuity of the function and some of its derivatives. In this paper, we give some sharp inequalities between the best polynomial approximations of analytic in the unit disk functions by algebraic complex polynomials and moduli of continuity and smoothness of a function itself and its second derivative in weighted Bergman spaces. The exact values of Bernstein and Kolmogorov $n$-widths of classes of functions in weighted Bergman spaces are calculated. The last theorem of this work generalizes a result by L. V. Taikov obtained for classes of differentiable periodic functions, to the case of functions analytic in the unit circle belonging to the space $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

**Key words:** best approximation, modulus of continuity, modulus of smoothness, polynomial, $n$-widths.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 30E10.

**For citation:** *Langarshoev, M. R.* On the Best Polynomial Approximation of Functions in the Weight Bergman Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 27–36 (in Russian).
DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27732.

## References

1. *Tikhomirov, V. M.* Diameters of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations, *Russian Math. Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 75–111. DOI: 10.1070/rm1960v015n03abeh004093.
2. *Taikov, L. V.* Diameters of Certain Classes of Analytic Functions, *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 650–656. DOI: 10.1007/bf01780976.

3. *Dvejrin, M. Z.* Problems of the Best Approximation of Classes of Functions Analytic in the Unit Circle, *Teoriya priblizheniya funkcij. Tr. Mezhdunar. konf. po teorii priblizheniya funktsij (Kaluga, 1975)* [Approximation Theory Functions], Moscow, Nauka, 1977, pp. 129–132 (in Russian).
4. *Ainulloev, N. and Taikov, L. V.* Best Approximation in the Sense of Kolmogorov of Classes of Functions Analytic in the Unit Disc, *Math. Notes*, 1986, vol. 40, no. 3, pp. 699–705. DOI: 10.1007/bf01142473.
5. *Farkov, Yu. A.* Widths of Hardy Classes and Bergman Classes on the Ball in $\mathbb{C}^n$, *Russian Math. Surveys*, 1990, vol. 45, no. 5, pp. 229–231. DOI: 10.1070/rm1990v045n05abeh002677.
6. *Fisher, S. D. and Stessin, M. I.* The $n$-Width of the Unit Ball of $H^q$, *J. Approx. Theory*, 1991, vol. 67, no. 3, pp. 347–356. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90009-y.
7. *Vakarchuk, S. B.* On some Extremal Problems of Approximation Theory in the Complex Plane, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2004, vol. 56, no. 9, pp. 1371–1390. DOI: 10.1007/s11253-005-0122-x.
8. *Shabozov, M. Sh. and Shabozov, O. Sh.* About the Best Approximation of Some Classes of Analytic Functions in Weighted Bergman Spaces $B_{2,\gamma}$, *Doklady Akademii Nauk* [Dokl. Akad. Nauk], 2007, vol. 412, no. 4, pp. 466–469 (in Russian).
9. *Vakarchuk, S. B. and Zabutnaya, V. I.* Best Linear Approximation Methods for Functions of Taikov Classes in the Hardy Spaces $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$, *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 3–4, pp. 322–327. DOI: 10.1134/s000143460903002x.
10. *Shabozov, M. Sh. and Mirkalonova, M. M.* The best polynomial approximation of functions in the space of Hardy $H_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan. Otdelenie fiz.-mat., him., geol. i tekh. nauk* [Proceedings of the Akademii of Sciences Republik of Tajikistan. Department of Phys. Math. Chemical., Geol. and Tech. of Science], 2009, no. 2(135), pp. 19–31 (in Russian).
11. *Shabozov, M. Sh. and Langarshoev, M. R.* The Best Approximation Some Classes of Functions in the Weighted Bergman space, *Izvestiya Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan. Otdelenie fiz.-mat., him., geol. i tekh. nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences Republic of Tajikistan. Department of Phys. Math. Chemical., Geol. and Tech. of Science], 2009, no. 3 (136), pp. 7–23 (in Russian).
12. *Vakarchuk, S. B. and Shabozov, M. Sh.* The Widths of Classes of Analytic Functions in a Disc, *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, no. 8, pp. 1091–1110. DOI: 10.1070/sm2010v201n08abeh004104.
13. *Dzyadyk, V. K. Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funkcij polinomami* [Introduction into the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials], Moscow, Nauka, 1977, 511 p. (in Russian).
14. *Korneichuk N. P.* Best Uniform Approximation of Differentiable Functions, *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Dokl. Akad. Nauk SSSR], 1961, vol. 141, no. 2, 304–307 (in Russian).
15. *Korneychuk, N. P. Ekstremalnye zadachi teorii priblizheniya* [Extremum Problems of Approximation Theory], Moscow, Nauka, 1976, 320 p. (in Russian).
16. *Pinkus A. n-Width in Approximation Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1985, 292 p.

*Received Jule 14, 2017*

Mukhtor R. Langarshoev
Tajik National University,
17 Rudaki Ave., Dushanbe 734025, Tajikistan,
*Associate Professor of the Department*
*of Math. Analysis and Theory of Functions*
E-mail: mukhtor77@mail.ru

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 37–50*

**УДК** 517.956
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27733

# ТРИХОТОМИЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПЛОСКОСТИ

**А. В. Неклюдов**[1]

[1] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, Рубцовская наб., 2/18

E-mail: `nekl5@yandex.ru`

**Аннотация.** В двумерной области $Q$, внешней по отношению к кругу, рассматривается равномерно эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме с измеримыми коэффициентами, содержащее младший неотрицательный коэффициент $q(x) = q(x_1, x_2)$ типа потенциала в стационарном уравнении Шрёдингера. Изучаются обобщенные решения, принадлежащие пространству С. Л. Соболева $W_2^1$ в любой ограниченной подобласти. Рассматривается вопрос о возможном росте решений на бесконечности. Доказано, что при достаточно быстром убывании младшего коэффициента $q(x)$ на бесконечности существует положительное решение, растущее как логарифм модуля радиус-вектора точки, т. е. так же, как фундаментальное решение соответствующего эллиптического оператора без младшего члена. Построенное решение обладает равномерно ограниченным «потоком тепла» через окружности произвольного радиуса $R$, концентрические с границей области $Q$. Далее устанавливается, что для любого решения, удовлетворяющего некоторой степенной оценке роста на бесконечности, выполнена оценка интеграла Дирихле типа принципа Сен-Венана в теории упругости. Ранее подобная оценка широко использовалась в работах для эллиптических уравнений второго порядка без младших членов в неограниченных областях. Оценка типа Сен-Венана позволяет получить оценку для интеграла Дирихле решения в кольцевой области через среднее значение решения на одной из окружностей этой кольцевой области. Из этого следует, что решение на окружности радиуса $R$ имеет тот же порядок роста по $R$, что и среднее значение на этой окружности. Использование принципа максимума позволяет показать, что любое растущее на бесконечности решение имеет логарифмический рост. Основной результат статьи состоит в том, что для данного уравнения имеет место трихотомия решений, как и для уравнения без младшего члена: решение является либо ограниченным, либо растет с логарифмической скоростью, сохраняя знак, либо осциллирует и растет по максимуму модуля как минимум степенным образом. Основным условием убывания младшего коэффициента, гарантирующего трихотомию решений, является конечность интеграла $\int_Q q(x) \ln |x| \, dx$.

**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, неограниченная область, младший коэффициент, асимптотическое поведение решений, трихотомия решений.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 35J15.

**Образец цитирования:** *Неклюдов А. В.* Трихотомия решений эллиптических уравнений второго порядка с убывающим потенциалом на плоскости // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 37–50. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27733.

## 1. Введение

Поведение решений эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях изучалось различными авторами [1–4]. Хорошо известно [3], что при некоторых предположениях относительно неограниченной области, в случае уравнений второго порядка без младших членов, для решений, удовлетворяющих на границе неограниченной области однородному условию Неймана, типичной является трихотомия решений.

Трихотомия означает, что любое решение принадлежит к одному из трех классов: 1) ограниченные решения, 2) знакопостоянные решения, растущие по модулю на бесконечности со скоростью, определяемой геометрией области, 3) осциллирующие решения, растущие по максимуму модуля быстрей, чем решения из класса 2). Например, в случае цилиндрических областей класс 2) образуют решения линейного роста, класс 3) — решения, растущие по максимуму модуля на сечении цилиндра экспоненциально. Для двумерных угловых областей, а также во внешности круга решения из классов 2) и 3) обладают соответственно логарифмическим и степенным ростом. В данной работе вопрос о трихотомии рассматривается во внешности круга для уравнения, содержащего младший член вида $q(x)u(x)$ с достаточно быстро убывающим в бесконечности потенциалом $q(x)$. Ранее вопрос о трихотомии решений уравнений с убывающим потенциалом был рассмотрен [5] для цилиндрических областей с условием Неймана на боковой поверхности. Близкой к этому случаю оказалась [6] также ситуация с трихотомией решений в цилиндрических областях для уравнений без младшего члена при третьем граничном условии (условии Робена).

## 2. Основные обозначения и определения. Вспомогательные утверждения

В двумерной области $Q = \{x : |x| > R_0\}$ (будем считать, что $R_0 > 1$) рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv L_0 u - q(x)u \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - q(x)u = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_x^2$, $a_{ij}(x)$ — измеримые функции в $Q$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\lambda_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$ — ограниченная измеримая функция.

Введем следующие обозначения:

$$Q(a,b) := Q \cap \{x : a < |x| < b\}, \quad Q_R = Q(R, R+1),$$

$$S_R := \{x : |x| = R\}, \quad \nabla u := \operatorname{grad} u, \quad \overline{u}(R) := (2\pi R)^{-1} \int\limits_{S_R} u\, ds.$$

Под решениями (1) в $Q$ будем понимать обобщенные решения, т. е. функции, принадлежащие пространству Соболева $W_2^1(Q(R_0, R))$ для всех $R > R_0$ и удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{Q(R_0,R)} quv\, dx = 0 \tag{2}$$

для всех функций $v \in W_2^1(Q(R_0, R))$ таких, что $v\big|_{S_{R_0} \cup S_R} = 0$.

Для решения $u(x)$ уравнения (1) стандартным образом введем понятие «потока тепла» через окружность $S_R$:

$$P(R,u) = \lim_{h \to 0+} \left( h^{-1} \int\limits_{Q(R,R+h)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, dx \right) = \int\limits_{S_R} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, ds,$$

последнее равенство справедливо для почти всех $R \geqslant R_0$, его также можно записать в виде

$$P(R,u) = \int\limits_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds,$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}$ — производная по конормали к окружности $S_R$.

Пусть $R_0 \leqslant r < R$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. Положим в (2) $v = \Phi$, где $\Phi = \Phi(|x|)$ — непрерывная функция, $\Phi = 1$ при $r + h_1 < |x| < R$, $\Phi(r) = \Phi(R + h_2) = 0$, $\Phi$ — линейная при $r < x_1 < r + h_1$ и при $R < x_1 < R + h_2$:

$$h_1^{-1} \int\limits_{Q(r,r+h_1)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx - h_2^{-1} \int\limits_{Q(R,R+h_2)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx + \int\limits_{Q(r,R+h_2)} qu\Phi\, dx = 0.$$

Устремляя к нулю $h_1$, а затем $h_2$, получаем соотношение

$$P(R,u) - P(r,u) = \int\limits_{Q(r,R)} qu\, dx. \tag{3}$$

Легко видеть, что при $R > R_0$ в определении потока область интегрирования $Q(R, R+h)$ можно заменить на $Q(R-h, R)$.

Далее будем использовать неравенство Пуанкаре следующего вида:

$$\int\limits_{S_R} v^2\, ds \leqslant cR^2 \int\limits_{S_R} |\nabla v|^2\, ds$$

($c > 0$ не зависит от функции $v$ и $R$) для $v \in W_2^1(S_R)$ таких, что $\overline{v}(R) = 0$; и

$$\int\limits_{Q(aR,bR)} v^2\, dx \leqslant c(a,b) R^2 \left( \int\limits_{Q(aR,bR)} |\nabla v|^2\, dx + \overline{v}^2(R) \right)$$

для $v \in W_2^1(Q(aR,bR))$, $0 < a \leqslant 1$, $b > 1$.

Будем использовать также оценку [7, лемма 1]

$$|\overline{v}(R) - \overline{v}(R_1)| \leqslant (2\pi)^{-1/2} \ln^{1/2}\left(\frac{R}{R_1}\right) \left( \int\limits_{Q(R_1,R)} |\nabla v|^2\, dx \right)^{1/2}, \tag{4}$$

$R > R_1 > 0$, $v \in W_2^1(Q(R_1,R))$.

## 3. Существование положительного решения с логарифммичеким ростом

Рассмотрим соответствующее уравнению (1) уравнение без младшего члена

$$L_0 V \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{5}$$

Хорошо известно, например [8, формула (7.5)], что в $Q$ существует фундаментальное решение $V(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее при $|x| > R_0$ оценке

$$C_1 \ln|x| \leqslant V(x) \leqslant C_2 \ln|x|,$$

$C_1$, $C_2$ — неотрицательные константы.

Естественно ожидать, что при достаточно быстром убывании коэффициента $q(x)$ на бесконечности решение с логарифмическим поведением существует и для уравнения (1).

**Теорема 1.** *Пусть $q(x) \geqslant 0$ в $Q$, $\int_Q q(x)\ln|x|\,dx < \infty$, $0 \leqslant q(x) \leqslant c|x|^{-2}\ln|x|$ при $|x| > R_1 = \mathrm{const}$; $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от $\lambda_1$, $\lambda_2$. Тогда в $Q$ существует положительное решение $U(x)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$U\Big|_{S_{R_0}} = 0, \quad A_1\ln|x| \leqslant U(x) \leqslant A_2 \ln|x| \quad (0 < A_i = \mathrm{const},\ i = 1, 2),$$

$$P(R, U) \to p_0 \quad \textit{при}\ R \to \infty \quad (0 < p_0 = \mathrm{const}).$$

$\lhd$ Для произвольного $N \in \mathbb{N}$, $N > R_0$, в области $Q(R_0, N)$ рассмотрим решение $U_N(x)$ задачи

$$LU_N = 0, \quad U_N\Big|_{S_{R_0}} = 0, \quad \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\bigg|_{S_N} = (2\pi N)^{-1}.$$

Функция $U_N$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q(R_0,N)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{Q(R_0,N)} qU_N v\,dx = (2\pi N)^{-1}\int\limits_{S_N} v\,ds \tag{6}$$

для всех функций $v \in W_2^1(Q(R_0, N))$ таких, что $v|_{S_{R_0}} = 0$.

Полагая в интегральном тождестве (6) для решения $U_N$ пробную функцию $v = U_N$ и используя оценку вида (4) для $\overline{U}_N(N)$, получаем

$$\int\limits_{Q(R_0,N)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial U_N}{\partial x_i}\frac{\partial U_N}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{Q(R_0,N)} qU_N^2\,dx$$

$$= (2\pi N)^{-1}\int\limits_{S_N} U_N\,ds = \overline{U}_N(N) \leqslant (2\pi)^{-1/2}\ln^{1/2}\left(\frac{N}{R_0}\right)\left(\int\limits_{Q(R_0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Отсюда с учетом эллиптичности уравнения (1) получаем, что

$$\int\limits_{Q(R_0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx + \int\limits_{Q(R_0,N)} qU_N^2\,dx \leqslant c_1 \ln N, \tag{7}$$

здесь и далее в доказательстве неотрицательные константы $c_i$ зависят только от $\lambda_1$, $\lambda_2$.

Очевидно, что $P(N, U_N) = 1$.

В силу принципа экстремума $U_N$ не может иметь отрицательный минимум в $Q(R_0, N)$, а в силу граничного условия на $S_N$ не может иметь минимум на $S_N$. Отсюда $U_N > 0$ в $Q(R_0, N)$. Так как согласно (3) при $R_0 \leqslant r < N$

$$P(r, U_N) = P(N, U_N) - \int\limits_{Q(r,N)} qU_N\,dx,$$

то из положительности $U_N$ и равенства $P(N, U_N) = 1$ получаем, что $P(r, U_N) \leqslant 1$ при $R_0 \leqslant r < N$.

Получим оценку интеграла Дирихле для $U_N$ по области $Q(R_0, r)$, $R_0 < r < N$. Для почти всех $r$ имеем

$$\int\limits_{Q(R_0,r)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial U_N}{\partial x_i} \frac{\partial U_N}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{Q(R_0,r)} q U_N^2\, dx = \int\limits_{S_r} U_N \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\, ds.$$

Отсюда с учетом эллиптичности уравнения, используя неравенства Коши — Буняковского и Пуанкаре, получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q(R_0,r)} \big(|\nabla U_N|^2 + q U_N^2\big)\, dx &\leqslant c_2 \int\limits_{S_r} U_N \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\, ds = c_2 \int\limits_{S_r} \big(U_N - \overline{U}_N(r)\big) \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\, ds \\ &+ c_2 P(r, U_N) \overline{U}_N(r) \leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + c_2 P(r, U_N) \overline{U}_N(r). \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда с учетом оценки вида (4) для $\overline{U}_N(r)$ и неравенства $P(r, U_N) \leqslant 1$ получим

$$\begin{aligned} I(r) \equiv \int\limits_{Q(R_0,r)} \Big(|\nabla U_N|^2 + q U_N^2\Big)\, dx &\leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + c_4 \ln^{1/2} r \left( \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U_N|^2\, dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + \frac{1}{2} c_4^2 \ln r + \frac{1}{2} \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U_N|^2\, dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I(r) \leqslant 2 c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + c_4^2 \ln r \leqslant 2 c_3 r I'(r) + c_4^2 \ln r.$$

Запишем это неравенство в виде

$$\big(I(r) r^{-\delta}\big)' \geqslant -c_5 r^{-\delta-1} \ln r, \quad \delta = (2c_3)^{-1} > 0,\ c_5 = c_4^2/(2c_3).$$

Интегрируя и учитывая логарифмическую оценку (7) интеграла Дирихле для $U_N$ по области $Q(R_0, N)$, получаем оценку

$$I(r) \leqslant I(N) \left( \frac{r}{N} \right)^{\delta} + c_5 r^{\delta} \int\limits_{r}^{N} \rho^{-\delta-1} \ln \rho\, d\rho \leqslant c_6 \ln r, \tag{9}$$

если $r^2 \leqslant N$.

Таким образом, последовательность $U_N$ $(N \geqslant r^2)$ ограничена в $W_2^1(Q(R_0, r))$ для любого $r > R_0$. Отсюда, применяя диагональный процесс, получаем последовательность $U_{N_k}$, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q(R_0, r))$ и сильно сходящуюся в $L_2(Q(R_0, r))$ для любого $r > R_0$ к некоторой функции $U$, являющейся решением уравнения (1). Очевидно, что $U > 0$ в $Q$, и справедлива оценка

$$\int\limits_{Q(R_0,r)} \big(|\nabla U|^2 + q U^2\big)\, dx \leqslant c_6 \ln r. \tag{10}$$

Тогда в силу (4)

$$|\overline{U}(r)| \leqslant c_4 \ln^{1/2} r \left( \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U|^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant c_7 \ln r.$$

Из оценки Де Джорджи [9, теорема 8.17] и неравенства Пуанкаре получаем, что

$$\sup_{S_r} |U_N(x)| \leqslant c_8 r^{-1} \left( \int\limits_{Q(r/2,2r)} U_N^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant c_9 \left[ \left( \int\limits_{Q(r/2,2r)} |\nabla U_N^2| \, dx \right)^{1/2} + \overline{U}_N(r) \right].$$

Отсюда, учитывая оценки (4) для $\overline{U}_N(r)$ и (9) для интеграла Дирихле функции $U_N$, получаем

$$\sup_{S_r} |U_N(x)| \leqslant c_{10} \ln r,$$

откуда

$$\sup_{S_r} |U(x)| \leqslant c_{10} \ln r. \tag{11}$$

Из этой оценки, с учетом того, что $P(N, U_N) = 1$ и $\int_Q q(x) \ln |x| \, dx < \infty$, получаем, что при $R \geqslant R_1 = \mathrm{const}$ и $N > R$ справедливо неравенство

$$P(R, U_N) = P(N, U_N) - \int\limits_{Q(R,N)} q U_N \, dx \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из (3) следует, что

$$P(R, U_N) = \int\limits_{R_0}^{R_0+1} \left( P(r, U_N) + \int\limits_{Q(r,R)} q U_N \, dx \right) dr,$$

откуда вытекает, что $P(R, U) = \lim_{N \to \infty} P(R, U_N)$ и, следовательно, $P(R, U) \geqslant 1/2$ для достаточно больших $R$. Из (3) и оценки сверху (11) для функции $U$ также следует, что $P(R, U) \to p_0 = \mathrm{const}$, причем $p_0 \geqslant 1/2$.

Очевидно также, что

$$\int\limits_{S_r} |\nabla U|^2 \, ds \geqslant c_{11} r^{-1} P^2(r, U) \geqslant c_{12} r^{-1},$$

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla U|^2 \, dx \geqslant c_{13} \ln R. \tag{12}$$

Получим логарифмическую оценку снизу для $U(x)$.

Для интеграла Дирихле функции $U$ справедливо дифференциальное неравенство вида (8):

$$J(r) \equiv \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U|^2 \, dx \leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U|^2 \, ds + c_2 P(r, U) \overline{U}(r)$$

$$\leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U|^2 \, ds + c_2 \overline{U}(r) = c_3 r J'(r) + c_2 \overline{U}(r),$$

$$\big(J(r)r^{-\varepsilon}\big)' \geqslant -c_{14}r^{-\varepsilon-1}\overline{U}(r), \quad \varepsilon = c_3^{-1},\ c_{14} = c_2/c_3.$$

Интегрируя это неравенство от $R$ до $mR$ при $m > 1$, получаем

$$\int\limits_R^{mR} \overline{U}(r)r^{-\varepsilon-1}\,dr \geqslant c_{14}^{-1}\big(J(R)R^{-\varepsilon} - J(mR)(mR)^{-\varepsilon}\big).$$

Отсюда, используя двустороннюю логарифмическую оценку (10), (12) для $J(R)$, получим

$$\int\limits_R^{mR} \overline{U}(r)r^{-\varepsilon-1}\,dr \geqslant c_{15}R^{-\varepsilon}\ln R - c_{16}(mR)^{-\varepsilon}\ln(mR).$$

Пусть $m > 1$ таково, что $c_{15} - 2m^{-\varepsilon}c_{16} \geqslant c_{15}/2$. Возьмем $R > m$. Получим оценку

$$\int\limits_R^{mR} \overline{U}(r)r^{-\varepsilon-1}\,dr \geqslant \frac{1}{2}\,c_{15}\,R^{-\varepsilon}\ln R.$$

Тогда для некоторого $\xi \in (R, mR)$ имеем

$$(m-1)R\overline{U}(\xi)\xi^{-\varepsilon-1} \geqslant \frac{1}{2}\,c_{15}\,R^{-\varepsilon}\ln R,$$

отсюда

$$\overline{U}(\xi) \geqslant \frac{1}{2}(m-1)^{-1}c_{15}\ln R.$$

Так как в силу (4)

$$\big|\overline{U}(\xi) - \overline{U}(R)\big| \leqslant (2\pi)^{-1/2}\ln\left(\frac{\xi}{R}\right)\left(\int\limits_{Q(R,\xi)} |\nabla U|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant c_{17}\ln^{1/2}R,$$

то из предыдущей оценки для $\overline{U}(\xi)$ получаем для достаточно больших $R$ оценку

$$\overline{U}(R) \geqslant c_{18}\ln R. \tag{13}$$

Так как функция $w = U - \overline{U}(R)$ удовлетворяет уравнению $L_0 w = qU$, то из оценки Де Джорджи [9, теорема 8.17] имеем

$$\sup_{S_R}|U(x) - \overline{U}(R|^2 \leqslant c_8\left(R^{-2}\int\limits_{Q(R/2,2R)} \big|U - \overline{U}(R)\big|^2\,dx + R^2\int\limits_{Q(R/2,2R)} q^2U^2\,dx\right).$$

Используя неравенство Пуанкаре, условия на функцию $q(x)$ и оценку (10), получаем, что

$$\sup_{S_R}|U(x) - \overline{U}(R|^2 \leqslant c_{19}\left(\int\limits_{Q(R/2,2R)} |\nabla U|^2\,dx + c\ln R\int\limits_{Q(R/2,2R)} qU^2\,dx\right) \leqslant \frac{1}{4}\,c_{18}^2\ln^2 R,$$

если константа $c$ достаточно мала. С учетом нижней логарифмической оценки (13) для $\overline{U}(R)$ получим оценку $U(x) \geqslant A_1\ln|x|$, $A_1 = \mathrm{const}$, $A_1 > 0$. $\triangleright$

Заметим также, что точечную оценку $q(x) \leqslant c|x|^{-2}\ln|x|$ для неотрицательной функции $q(x)$ в условии теоремы можно заменить на интегральную оценку $\int_{Q(R/2,2R)} q^2\,dx \leqslant cR^{-2}$, если постоянная $c > 0$ достаточно мала.

## 4. Трихотомия решений

**Лемма 1.** *Пусть $u(x)$ — решение (1) в $Q$, $q(x) \geqslant 0$. Тогда при $R > R_0+1$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q(R_0+1,R)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_1R^{-2} \int\limits_{Q(R,2R)} u^2\,dx,$$

*$c_1 > 0$ зависит только от $\lambda_1$, $\lambda_2$.*

$\lhd$ Пусть $\Phi = \Phi(|x|) = 1$ при $R_0+1 < |x| < R$, $\Phi(|x|) = |x| - R_0$ при $R_0 < |x| < R_0+1$, $\Phi(|x|) = \varphi^2(|x|)$ при $R < |x| < 2R$, где $\varphi(|x|) = \frac{2R-|x|}{R}$. Положим в интегральном тождестве (2) $v = u\Phi$:

$$\int\limits_{Q(R_0,2R)} \Phi \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{Q(R_0,2R)} qu^2\Phi\,dx = 2R^{-1} \int\limits_{Q(R,2R)} \varphi u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx.$$

Используя эллиптичность уравнения (1) и неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\int\limits_{Q(R_0,2R)} \Phi|\nabla u|^2\,dx \leqslant \int\limits_{Q(R,2R)} \varphi^2|\nabla u|^2\,dx + c_1R^{-2} \int\limits_{Q(R,2R)} u^2\,dx.$$

Учитывая, что $\Phi = \varphi^2$ в области $Q(R,2R)$, то отсюда сразу получаем утверждение леммы. $\rhd$

**Лемма 2.** *Пусть $u(x)$ — решение (1) в $Q$, $q(x) \geqslant 0$; в $Q$ выполнено условие*

$$|u(x)| \leqslant c_0|x|^\gamma$$

*для некоторых постоянных $\gamma > 0$, $c_0 > 0$. Тогда, если $4^\gamma/(1+\delta) < 1$, $\delta > 0$, то для некоторой последовательности $R_k \to \infty$, $k \to \infty$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta \int\limits_{Q(R_0,R_k)} |\nabla u|^2\,dx.$$

$\lhd$ Предположим противное. Тогда для всех $R > R_0' = \mathrm{const}$ имеем

$$\int\limits_{Q(R_0,2R)} |\nabla u|^2\,dx - \int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx = \int\limits_{Q(R,2R)} |\nabla u|^2\,dx > \delta \int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx,$$

т. е.

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-1} \int\limits_{Q(R_0,2R)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-2} \int\limits_{Q(R_0,4R)} |\nabla u|^2\,dx$$
$$< \dots < (1+\delta)^{-k} \int\limits_{Q(R_0,2^kR)} |\nabla u|^2\,dx.$$

Используя лемму 1, получаем

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant (1+\delta)^{-k}\left(c_1\big(2^kR\big)^{-2}\int\limits_{Q(2^kR,2^{k+1}R)} u^2\,dx + I_0\right)$$
$$\leqslant (1+\delta)^{-k}\Big(c_1\big(2^kR\big)^{-2}\pi\big(2^{k+1}R\big)^2c_0^2(2^{k+1}R)^{2\gamma}+I_0\Big)\to 0,\quad k\to\infty,$$

если $4^\gamma/(1+\delta)<1$ (здесь $I_0$ не зависит от $k$). Таким образом, $\nabla u\equiv 0$, что невозможно. $\rhd$

**Лемма 3.** *Пусть $u(x)$ — решение (1) в $Q$, $|u(x)|\leqslant c_0|x|^\gamma$, $0<c_0=\mathrm{const}$, $0\leqslant q(x)\leqslant c|x|^{-2}$, $\gamma>0$ и $c>0$ — некоторые постоянные, зависящие от $\lambda_1$, $\lambda_2$. Тогда для некоторой последовательности $R_k'\to\infty$, $k\to\infty$, для $x\in S_{R_k'}$ справедлива оценка*

$$\overline{u}(R_k')-\frac{1}{2}|\overline{u}(R_k')|-I_1\leqslant u(x)\leqslant \overline{u}(R_k')+\frac{1}{2}|\overline{u}(R_k')|+I_1,$$

*где $I_1>0$ не зависит от $k$.*

$\lhd$ Пусть для $\delta>0$ выполнено условие $4^\gamma/(1+\delta)<1$. Как и ранее, через $c_1,c_2,\ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $\lambda_1$, $\lambda_2$.

Используя леммы 2 и 1 и неравенство Пуанкаре, получим для некоторой последовательности $R_k\to\infty$ оценку

$$\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx\leqslant \delta\int\limits_{Q(R_0,R_k)}|\nabla u|^2\,dx\leqslant c_1\delta\left(R_k^{-2}\int\limits_{Q(R_k,2R_k)}u^2\,dx+I_0\right)$$
$$\leqslant c_2\delta\left(\int\limits_{Q(R_k,2R_k)}|\nabla u|^2\,dx+\overline{u}^2(3R_k/2)+I_0\right),$$

где $I_0$ не зависит от $k$. Если $c_2\delta\leqslant 1/2$, то

$$\int\limits_{Q(R_k,2R_k)}|\nabla u|^2\,dx\leqslant 2c_2\delta\big(\overline{u}^2(3R_k/2)+I_0\big). \tag{14}$$

Введем обозначение $\tilde{q}_k:=\sup_{Q(R_k,2R_k)}q(x)$. Так как функция $w=u-\overline{u}(3R_k/2)$ является решением уравнения $L_0w=qu$, то, используя оценку Де Джорджи [9, теорема 8.17] и далее дважды неравенство Пуанкаре, получаем

$$\sup_{S_{3R_k/2}} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)\big|^2 \leqslant c_3 \left( R_k^{-2} \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)^2\big|\,dx + R_k^2 \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} q^2u^2\,dx \right)$$

$$\leqslant c_4 \left( \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \tilde q_k^2 R_k^2 \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} u^2\,dx \right)$$

$$\leqslant c_5 \left( \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \tilde q_k^2 R_k^4 \left[ \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(3R_k/2) \right] \right)$$

$$= c_5\big(1+\tilde q_k^2 R_k^4\big) \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + c_5\tilde q_k^2 R_k^4 \overline{u}^2(3R_k/2) \leqslant c_6 \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + c_5c^2\overline{u}^2(3R_k/2).$$

Используя оценку (14) получаем, что при $k > k_0 = \mathrm{const}$

$$\sup_{S_{3R_k/2}} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)\big|^2 \leqslant c_7\delta\big(\overline{u}^2(3R_k/2)+I_0\big) + c_5c^2\overline{u}^2(R_k) \leqslant 2c_7\delta\overline{u}^2(3R_k/2) + I_0',$$

если $c_5c^2 \leqslant c_7\delta$. Здесь $I_0'$ не зависит от $k$.

Пусть $\delta > 0$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ таковы, что $c_2\delta \leqslant 1/2$, $2c_7\delta \leqslant 1/4$, $4^\gamma/(1+\delta) < 1$, $c_5c^2 \leqslant c_7\delta$. Тогда при $k > k_0 = \mathrm{const}$ справедлива оценка

$$\sup_{S_{3R_k/2}} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)\big|^2 \leqslant \frac{1}{4}\overline{u}^2(3R_k/2) + I_0'.$$

Отсюда сразу вытекает утверждение леммы для последовательности $R_k' = 3R_k/2$. $\rhd$

**Лемма 4.** *Пусть для $u(x)$ выполнены условия теоремы 1 и леммы 3. Тогда при $|x| > R_1 = \mathrm{const}$ справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant c_0 \ln|x|,$$

$0 < c_0 = \mathrm{const}$ *не зависит от $x$.*

$\lhd$ Предположим противное, тогда для некоторой последовательности $R_k \to \infty$ имеем $\sup_{R_k} |u|/\ln R_k \to \infty$, $k \to \infty$. Пусть $U(x)$ — положительное решение уравнения (1), удовлетворяющее логарифмической оценке, существование которого доказано в теореме 1. Применяя к функциям $u \pm c_1U$ при достаточно большом $c_1$ принцип максимума, легко получить, что $\sup_{S_R} |u|/\ln R \to \infty$, $R \to \infty$. В противном случае функция $u(x)$ удовлетворяла бы логарифмической оценке в $Q$, что противоречит предположению.

Пусть $R_k'$ — последовательность, для которой справедливо утверждение леммы 3. Без ограничения общности можно считать, что $\sup_{S_{R_k'}} u > 0$. Тогда из леммы 3 получаем, что $\inf_{S_{R_k'}} u/\ln R_k' \to +\infty$, $k \to \infty$. Применяя принцип максимума к функции $U - c_2 - \varepsilon u$ при достаточно большом $c_2$ и устремляя $\varepsilon > 0$ к нулю, получаем, что $U \leqslant c_2$ в $Q(R_1', \infty)$, что невозможно. $\rhd$

**Лемма 5.** *Пусть для $u(x)$ выполнены условия теоремы 1 и леммы 3. Тогда*

$$\int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_0 \ln r,$$

$0 < c_0 = \mathrm{const}$ *не зависит от* $r > R_0$.

$\lhd$ Используем для функции $u(x)$ дифференциальное неравенство вида (8):

$$I(r) \equiv \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_1 r I'(r) + c_2 P(r,u)\overline{u}(r), \tag{15}$$

здесь и далее в доказательстве $c_i > 0$ зависят только от $\lambda_1$, $\lambda_2$. В силу леммы 4 $|u(x)| \leqslant c_3 \ln|x|$, поэтому $\int_Q q|u|\,dx < \infty$. Тогда из (3) следует, что $|P(r,u)| \leqslant c_4$. А из (15) тогда вытекает, что

$$I(r) \leqslant c_1 r I'(r) + c_5 \ln r.$$

Интегрируя как и в доказательстве теоремы 1, при $r^2 < R$ получаем оценку

$$I(r) \leqslant I(R)\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta} + c_6 \ln r \leqslant c_0 \ln r,$$

последнее неравенство следует из того, что в силу леммы 1 выполнена оценка $I(R) \leqslant c_7 \ln^2 R$, здесь $0 < \delta = \mathrm{const}$. $\rhd$

**Лемма 6.** *Пусть для* $u(x)$ *выполнены условия теоремы* 1 *и леммы* 3, *причем для некоторой последовательности* $R_k, R_k \to \infty$, $k \to \infty$, *справедлива оценка* $\inf_{S_{R_k}} |u| = o(\ln R_k)$, $k \to \infty$. *Тогда решение* $u(x)$ *ограничено в* $Q$.

$\lhd$ Согласно лемме 4 $|u(x)| \leqslant c_0 \ln|x|$. В силу оценки Де Джорджи и неравенства Пуанкаре

$$\sup_{S_{R_k}} |u(x) - \overline{u}(R_k)|^2 \leqslant c_1 \left( R_k^{-2} \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} |u - \overline{u}(R_k)|^2\,dx + R_k^2 \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} q^2 u^2\,dx \right)$$

$$\leqslant c_2 \left( \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \sup\nolimits_{Q(R_k/2,2R_k)}(qu^2) R_k^2 \ln^{-1} R_k \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} q \ln|x|\,dx \right)$$

$$\leqslant c_3 \left( \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \ln R_k \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} q \ln|x|\,dx \right).$$

Отсюда, учитывая логарифмическую оценку интеграла Дирихле в силу леммы 5, получаем, что при $x \in S_{R_k}$ выполнена оценка $u(x) - \overline{u}(R_k) = o(\ln R_k)$, откуда следует, что $u(x) = o(\ln R_k)$ на $S_{R_k}$. Применяя принцип максимума к функциям $u \pm c_0 \pm \varepsilon U$ (где, как и выше, $U(x)$ — решение уравнения (1) с логарифмическим ростом) при достаточно большом $c_0$, получим, что $|u| \leqslant c_0 + \varepsilon U$ в $Q(R_1, R_k)$ для $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Устремив $\varepsilon$ к нулю, получим утверждение леммы. $\rhd$

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* $\int_Q q(x) \ln|x|\,dx < \infty$, $0 \leqslant q(x) \leqslant c|x|^{-2}$ *для зависящей от* $\lambda_1$, $\lambda_2$ *постоянной* $c > 0$, *удовлетворяющей условиям на константу* $c$ *в теореме* 1 *и лемме* 3. *Тогда любое решение уравнения* (1) *в* $Q$ *ведет себя одним из трех возможных способов:*

1) $\sup_{S_{R_k}} |u| \geqslant c_0 R_k^{\gamma}$ *для некоторой последовательности* $R_k \to \infty$, $k \to \infty$, *причем* $u(x)$ *меняет знак на любой окружности* $S_R$ *при* $R > R_0' = \mathrm{const}$; *постоянная* $\gamma > 0$ *зависит только от* $\lambda_1$, $\lambda_2$; $0 < c_0 = \mathrm{const}$;

2) $C_1 \ln|x| \leqslant u(x) \leqslant C_2 \ln|x|$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$;

3) $u(x)$ *ограничено в* $Q$.

$\lhd$ Если решение $u(x)$ не удовлетворяет условию 1), то, согласно лемме 4, справедлива оценка $|u(x)| \leqslant c \ln|x|$, $c = \text{const}$. Если при этом не выполнено условие 2), то по лемме 6 решение $u(x)$ ограничено в $Q$.

Покажем, что любое решение, удовлетворяющее 1), является знакопеременным. Предположим противное. Пусть существует решение $u(x)$ из класса 1), неотрицательное при $|x| > R_1 = \text{const}$.

Легко видеть, что для неотрицательных решений уравнения (1) в области $Q(R/2, 3R/2)$ выполнено неравенство Харнака с константой $K$, не зависящей от $R$: $u(A)/u(B) \leqslant K$ для всех $A, B \in Q(R/2, 3R/2)$. Действительно, отобразим $Q(R/2, 3R/2)$ на область $Q(1/2, 3/2)$ преобразованием $x \to y = x/R$. Уравнение (1) перейдет в уравнение $L_R u - q_R(y)u = 0$, где $L_R$ — равномерно эллиптический дивергентный оператор по переменным $y$ с постоянными эллиптичности, не зависящими от $R$; $q_R(y) = R^2 q(x) \leqslant c_2 = \text{const}$, поэтому константа Харнака для решений $u(y)$ в $Q(1/2, 3/2)$ не зависит от $R$. Соответственно не зависит от $R$ константа Харнака для решений $u(x)$ в $Q(R/2, 3R/2)$.

Так как $\sup_{S_{R_k}} u/\ln R_k \to \infty$, $k \to \infty$, то в силу неравенства Харнака получаем $\inf_{S_{R_k}} u/\ln R_k \to \infty$. Применяя принцип максимума, как и в доказательстве леммы 4, получим, что существование решения $u(x)$, растущего на некоторой последовательности окружностей $S_{R_k}$ быстрее, чем $\ln|x|$, противоречит существованию решения $U(x)$ с логарифмическим ростом. Таким образом, решение из класса 1) может быть только знакопеременным в любой области вида $|x| > R_1$. Отсюда следует, что оно должно менять знак на любой окружности $S_R$ для достаточно больших $R$, поскольку, если бы существовала последовательность $R'_k \to \infty$ такая, что $u \geqslant 0$ на $S_{R'_k}$, то в силу принципа максимума $u > 0$ в $Q(R'_1, \infty)$, что невозможно. Таким образом, теорема полностью доказана. $\rhd$

В заключение отметим, что интегральное условие убывания потенциала $\int_Q q(x) \ln|x|\, dx < \infty$ является аналогом условия трихотомии $\int x_1 q(x)\, dx < \infty$ для решений задачи Неймана в бесконечном цилиндре [5] (здесь $x_1$ — переменная, соответствующая оси цилиндра).

## Литература


1. *Ландис Е. М., Панасенко Г. П.* Об одном варианте теоремы типа Фрагмена — Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1979.—Т. 5.—С. 105–136.
2. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Мат. сб.—1980.—№ 4.—С. 588–610.
3. *Ландис Е. М., Ибрагимов А. И.* Задачи Неймана в неограниченных областях // Докл. РАН.—1995.—Т. 343, № 4.—С. 17–18.
4. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Об асимптотике в окрестности бесконечности решений с конечным интегралом Дирихле эллиптических уравнений второго порядка // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1987.—Т. 2.—С. 149–163.
5. *Неклюдов А. В.* О решениях эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Уфимск. мат. журн.—2016.—Т. 8, вып. 4.—С. 135–146.
6. *Неклюдов А. В.* О задаче Робена для эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, вып. 3.—С. 417–436.
7. *Неклюдов А. В.* Асимптотика решений двумерного уравнения Гаусса — Бибербаха — Радемахера с переменными коэффициентами во внешней области // Сиб. электрон. мат. изв.—2018.—Т. 15.—С. 338–354.

8. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular Points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3.—1963.—Vol. 17, № 3.—P. 43–77.
9. *Гилбарг Д., Трудигер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.—М.: Наука, 1989.—464 с.

*Статья поступила 16 мая 2018 г.*

Неклюдов Алексей Владимирович
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана,
*доцент кафедры высшей математики*
РОССИЯ, 105005, Москва, Рубцовская наб., 2/18
E-mail: nekl5@yandex.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 37–50*

# TRICHOTOMY OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH A DECREASING POTENTIAL IN THE PLANE

Neklyudov, A. V.[1]

[1] Bauman Moscow State Technical University,
2/18 Rubtsovskaya nab., Moscow 105005, Russia
E-mail: nekl5@yandex.ru

**Abstract.** We consider a uniformly elliptic second-order divergent equation with measurable coefficients in two-dimensional domain $Q$ external to the circle. An equation contains the lower nonnegative coefficient $q(x) = q(x_1, x_2)$ of potential type in the stationary Schrödinger equation. Weak solutions in the Sobolev space $W_2^1$ in any bounded subdomain are studied. The possible rate of solutions at infinity is considered. It is established that if the lower coefficient decreases with a sufficient rate then the positive solution exists and has the same rate at infinity as the fundamental solution of respective elliptic equation without lower term. The rate is logarithmic. This solution has uniformly bounded "heat flow" on circles of radius $R$. It is established Sen-Venan type inequality for Dirichlet integral of solution of power rate. Sen-Venan inequality leads to the evaluation of Dirichlet integral in a ring domain via average value of solution on the circle. It means that the solution has the same rate on the circle as its average value. Maximum principle implies that any tending to infinity solution has the logarithmic rate. The main result of paper is the trichotomy of solutions: The solution is either bounded, or tends to infinity with a logarithmic rate, preserving the sign, or oscillates and has a power-law rate of the maximum of the modulus. The basic condition for the decrease of the lower coefficient is formulated in integral form $\int_Q q(x) \ln|x|\, dx < \infty$.

**Key words:** elliptic equation, unbounded domain, lower coefficient, asymptotic behaviour of solutions, trichotomy of solutions.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 35J15.

**For citation:** *Neklyudov, A. V.* Trichotomy of Solutions of Second-Order Elliptic Equations with a Decreasing Potential in the Plane, *Vladikavkaz Math. J.*, 2013, vol. 21, no. 4, pp. 37–50 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27733.

## References

1. *Landis, E. M., Panasenko, G. P.* A Variant of a Theorem of Phragmen-Lindelof Type for Elliptic Equations with Coefficients That Are Periodic in All Variables But One, *Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo* [Proceedings of the Petrovskiy Seminar], 1979, vol. 5, pp. 105–136 (in Russian).
2. *Oleinik, O. A., Iosif'yan, G. A.* On the Behavior at Infinity of Solutions of Second Order Elliptic Equations in Domains with Noncompact Boundary, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 4, pp. 527–548. DOI: 10.1070/SM1981v040n04ABEH001849.

3. *Landis, E. M. Ibragimov, A. I.* Neumann Problems in Unbounded Domains, *Doklady Akademii Nauk* [Reports of Akademy of Science], 1995, vol. 343, no. 1, pp. 17–18 (in Russian).
4. *Kondrat'ev, V. A. and Oleinik, O. A.* Asymptotics in a Neighborhood of Infinity of Solutions with Finite Dirichlet Integral of Second-Order Elliptic Equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1989, vol. 47, no. 4, pp. 2596–2607. DOI: 10.1007/BF01105913.
5. *Nekludov, A. V.* On Solutions of Second Order Elliptic Equations in Cylindrical Domains, *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 131–143. DOI: 10.13108/2016-8-4-131.
6. *Nekludov, A. V.* On the Robin Problem for Second-Order Elliptic Equations in Cylindrical Domains, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 3–4, pp. 430–446. DOI: 10.1134/S0001434618030094.
7. *Nekludov, A. V.* Asymptotic of Solutions of Two-Dimesional Gauss–Bierbach–Rademacher Equation with Variable Coefficients in External Area, *Sibirskie Electronnie Matematicheskie Izvestiya* [Syberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 338–354 (in Russian).
8. *Littman, W., Stampacchia, G. and Weinberger, H. F.* Regular Points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3*, 1963, vol. 17, no. 1–2, pp. 43–77.
9. *Gilbarg, D. and Trudinger, N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, N. Y., Springer Verlag, 1977, 401 p.


*Received May 16, 2018*

Aleksey V. Neklyudov
Bauman Moscow State Technical University,
2/18 Rubtsovskaya nab., Moscow 105005, Russia,
*Assosiate Professor of the Department of Higher Mathematics*
E-mail: `nekl5@yandex.ru`

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 51–61*

**УДК** 519.6, 517.926
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27734

# СЦЕНАРИИ КРИТИЧЕСКОЙ ВСПЫШКИ ЧИСЛЕННОСТИ ИНВАЗИОННОГО ВИДА В МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ ГОМПЕРТЦА[#]

**А. Ю. Переварюха**[1]

[1] Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
Россия, 199178, Санкт-Петербург, 14 линия, 39

E-mail: `temp_elf@mail.ru`

**Аннотация.** В работе обсуждается проблема моделирования вариантов развития ситуаций экстремального характера в популяционном процессе, способных возникать из-за активного размножения чужеродных видов. Для математической формализации явлений использованы уравнения с отклоняющимся аргументом. В данном экологическом контексте интересно рассмотреть не возникновение циклов или свойств устойчивых колебательных режимов в решениях уравнений, а проведение поиска специфических переходных сценариев популяционной динамики. Предлагается последовательно ряд модификаций на основе уравнения Гомпертца, как оказалось, подходящего для совершенствования не менее обоснованно, чем модели Хатчинсона или Николсона. В вариантах с учетом функции сопротивления биотического окружения получены сценарии гибели популяции после вспышки и образования устойчивой малочисленной группы с прохождением предельно допустимой барьерной численности. Полученные вычислительные сценарии имеют практическую интерпретацию при анализе развития событий после вселения опасных новых видов в консервативные экосистемы. Усовершенствована оригинальным дополнением модель для случая существования явного критически низкого $L$-порога численности, гибко корректирующая свойства популяционной динамики при интервально проявляющемся действии эффекта Олли. Полученные модельные сценарии сходны для группы инвазионных и опасных инфекционных процессов, что подтверждает нашу идею о том, что кибернические механизмы регуляции превалируют над видовой экологической специфичностью чужеродных популяций.

**Ключевые слова:** уравнения с запаздыванием, экстремальные состояния популяций, переходные режимы, циклы, моделирование инвазионных процессов, чужеродные виды, кибернетика биологического противоборства.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 37N25, 92C42, 81T80.

**Образец цитирования:** *Переварюха А. Ю.* Сценарии критической вспышки численности инвазионного вида в модификации уравнения Гомпертца // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.— С. 51–61. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27734.

## Введение

В предыдущей работе [1] мы рассмотрели варианты актуальных модификаций биологических моделей на основе известного уравнения популяционной динамики с запаздыванием $N(t-\tau)$ Хатчинсона [2]. В исследованном многими авторами уравнении математической экологии

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) \tag{I}$$

[#] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-07-00125.

происходит бифуркация Андронова — Хопфа и образуется цикл $N_*(t; r\tau)$ релаксационной формы [3], что соответствует экспериментальным данным, однако, колебания при увеличении значения $r\tau$ становятся непригодными для популяционной интерпретации — у каждой модели в предметной области есть параметрический диапазон ее адекватности.

С ростом амплитуды минимумы нереалистично низкие $\min N_*(t; r\tau) \to 0 + \epsilon$. Пики вспышек численности насекомых-вредителей начинаются не от околонулевых состояний, это общий недостаток двух известных уравнений с $N(t-\tau)$. Как отмечено в работе [4]*, если за большим всплеском следует очень глубокий минимум численности, то такое поведение должно приводить к вымиранию, а в модели (I) при большой аплитуде моментально за низким минимумом следует максимум $|\min_{0+\epsilon} N_*(t_{\min}) - \max N_*(t_{\max})| \to \infty$, $\lim_{r\tau\to\infty} |t_{\max} - t_{\min}| = 0$. Данное свойство экологически противоречиво. На графиках сезонных пиков численности (у кукурузного мотылька в Краснодарском крае или инвазионного гребневика в Каспийском море) можно увидеть пики после нулевых значений, но такие графики показывают только особей взрослой стадии развития. Численность личиночной стадии не попадает в учет и на графики, но состояние вида в промежутках между пиками совершенно не близко к нулевому. Аналогично на графиках вспышек вредителей леса показывают размеры пораженных насаждений.

Тем не менее, в реальности существуют специфические сценарии пролонгированного популяционного процесса со значительной амплитудой перепадов численности вида, но такие экологические явления — ограниченные во времени режимы, серийные вспышки самопроизвольно затухают. Ситуации при инвазии стремительно размножающегося вселенца не укладываются в рамки обобщенных представлений моделей с наличием баланса вид — среда обитания, т. е. со всюду положительной траекторией $\lim_{t\to\infty} \sup N(t) < \mathscr{M}$. Сценарий с вымиранием после катастрофической вспышки реалистичен. Как мы покажем далее, сценарий такой деструкции описывается математически в нашей новой модели.

Следующий вариант (1) нашей модификации из [1] был предназначен для преодоления проблемы «глубоких минимумов» у возникшего цикла при значительной амплитуде с ростом репродуктивного потенциала $r$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(\frac{K - N^2(t-\tau)}{(K + cN^3(t-\tau))}\right). \tag{1}$$

Так удается несколько скорректировать свойство у минимумов колебаний:

$$\min_{0<t<T_*} N_*(t, r) \to \epsilon, \quad \epsilon \ll 1.$$

Второй вариант (2) из [1] с предкритическим порогом $H$, резко меняющим эффективность воспроизводства, показывает сценарий стремительного, катастрофического кризиса после разрушения переходного колебательного режима:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{\mathfrak{K}}\right)(H - N(t-\tau)). \tag{2}$$

В модели невынужденной деструкции популяции при переполнении среды величина $\mathfrak{K}$ не тождественна по смыслу параметру $K$ — балансовому равновесию или «емкости экологической ниши» для любого $N(0) > 0$, $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$ из модели (4), с единственным вариантом $N(t) \to K$. Фактически тут мы в непрерывную модель внесли триггерные свойства в виде смены знака у $(H - N(t-\tau))$.

* На примере популярной модели — уравнения «Nicholson's blowflies revisited».

Для любой новой популяционной модели необходимо обосновать биологическую интерпретацию поведения решения, так для объединенной модификации:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) \left( \frac{K - N^2(t-\tau)}{(K + cN^3(t-\tau))} \right) (H - N(t-\tau)), \tag{3}$$

подходящего обоснования поведения траектории плавного перехода к $N(t) \to \infty$ мы не нашли. Перечисленные модификации основаны на расширении уравнения Ферхюльста — Пирла:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad N(t) = \frac{N(0)e^{rt}}{1 + N(0)(e^{rt} - 1)/K}. \tag{4}$$

Помимо данной модели и квадратичного закона имеются альтернативные способы формализации ограничения репродуктивной активности популяции, приводящей к остановке роста. Существуют альтернативные актуальные сценарии развития/завершения популяционных вспышек помимо варианта единичного «треугольного пика» на графике (согласно [5]) или деструкции всей поддерживающей среды обитания. Наша цель — предложить для сценариев математическое описание.

## 1. Модификации модели регуляции на основе функции Гомпертца

В данной работе мы рассмотрим модификации моделей для актуальной группы ситуаций, относящейся не к ограниченно-балансовой, но к экстремальной популяционной динамике, когда после вспышки численности в критическое состояние попадает чрезмерно активный в отношении благополучия среды инвазионный вид.

В модели Хатчинсона можно получить сценарий

$$(\exists\, t_M)(N(0) < K)(\tau > \bar{\tau}) : N(r\tau, t_M) > K, \quad \lim_{t\to\infty} N(r\tau, t) = K,$$

но подобный режим модели (I) оказывается несущественным временным переполнением экологической ниши, он не будет выглядеть угрожающей экосистеме вспышкой, относящейся к интересующей нас экстремальной динамике численности.

Обзор задач моделирования особого характера популяционных процессов и экстремальной динамики численности дан в предыдущей работе [1]. Один из методов моделирования подобных нестационарных и переходных режимов — формализация запаздывающей регуляции для вычислительного анализа уравнений с отклоняющимся аргументом. Большие современные обзоры по экологическим моделям с запаздыванием представлена в [6] и ранее в работах Гопалсами [7], предложившего два варианта модели (I). Это направление моделирования стало развиваться экстенсивно с увеличением параметров запаздывания $N(t-\tau_1), \dots, N(t-\tau_2), \dots, N(t-\tau_3)$, часто избыточным. Отечественные авторы рассматривали динамику обобщенного уравнения Хатчинсона для случая возрастных групп [8] и двух запаздываний [9].

Модификации модели Ферхюльста — Пирла отличаются положением точки перегиба на кривой асимптотического роста, так как в реальности она редко попадает на значение $K/2$. Рассмотрим варианты модификации модели с запаздыванием на основе функции Гомпертца из уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = r\ln\left(\frac{K}{N}\right)N, \quad N(t) = K\exp\left(\ln\left(\frac{N(0)}{K}\right)e^{-rt}\right), \quad \lim_{t\to\infty} N(t) = K. \tag{5}$$

Данную модель применяли в онкологическом контексте для феноменологического описания динамики развития некоторых опухолей [10]. Видимое качественное отличие графика функции Гомпертца от модели Ферхюльста — положение точки $\widetilde{N}$ перегиба $F''(\widetilde{N}) = 0$ на кривой решения. Включим в модель запаздывающую регуляцию, но иначе, чем в [11], так как дополнение репродуктивного сомножителя $N(t - \tau_2) \times r$ избыточно:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \frac{K}{N(t-\tau)} \right). \tag{6}$$

В относительно простой модификации мы обнаружили актуальный вариант динамики (точнее, параметрический диапазон поведения) завершения взрывообразного роста. На рис. 1 показано сравнение динамки (I) и (6) при одинаковых значениях $K$, $\tau$, $N(0)$. Для модели Хатчинсона тут видна отмеченная нами проблема границы интерпретации параметрических диапазонов — два резких пика у релаксационного цикла при стремящихся к нулю минимумах.

Уравнение (6), помимо очевидных циклических режимов, способно описать более актуальный для развития инвазии чужеродного вида сценарий — особое развитие ограниченной во времени стремительной однократной вспышки численности при малых $N(0)$. Взрывообразный рост при исчерпании ресурсов приходит к малочисленному состоянию. Далее траектория медленно асимптотически приходит к не воздействующему на среду балансу $K$. В форме полученного решения протекают некоторые вирусные заболевания — из острой фазы инфекции переходят в хроническую (или латентную стадию), если всегда запаздывающий ответ со стороны иммунной системы недостаточен для полного подавления возбудителя. Развитие ВИЧ в организме аналогично приводит после первичной вспышки активности вирионов к длительному относительному балансу в противоборстве, но при нарушении баланса из-за нарастающего запаздывания при поиске ответа на изменчивость вируса следует быстрая повторная вспышка, уже фатальная.

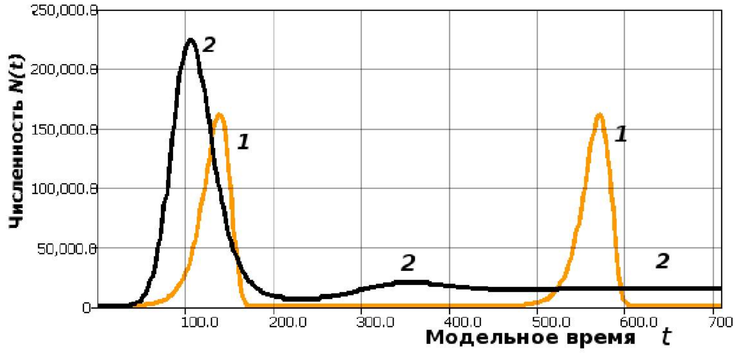



**Рис. 1.** 1 — релаксационный цикл в (I), 2 — единичная завершающаяся вспышка в (6), $K = 15000$, $\tau = 48$, $r = 0{,}017$.

При полном соответствии параметров в сценарии траектория уравнения Хатчинсона $N(0) < K$ монотонно $N(t) \to K$. Параметры $K$, $\tau$, $N(0)$, $H$ можно сохранять при сравнении вычислительных экспериментов, предыстория $N([-\tau, 0)) = \text{const}$. Значение репродуктивного параметра необходимо масштабировать при модификации уравнений для получения экологически объяснимой качественно динамики. В обобщенном виде уравнение с $k > 1$ внешним воздействием:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \left( \frac{K}{N(t-\tau)} \right)^k \right) - \mathscr{Q}[N(t)], \tag{7}$$

где $\mathscr{Q}[N(t)]$ отражает внешнее давление биотической/иммунной среды и может быть нелинейной функцией, даже зависимостью от $\mathscr{Q}_\tau N(t-\mathscr{T})$, $\mathscr{T} \neq \mathrm{const}$, в нетривиальном противоборстве с изменяющимся вирусом.

### 3. Моделирование противоборства с инвазией

В большинстве случаев новый вид с высоким репродуктивным потенциалом встречает сопротивление. От эффективности ответной реакции зависит и форма переходного режима и итоговое состояние. Без активного противодействия грозит сценарий демографической катастрофы для среды, описываемый моделью из предыдущей работы. Добавим в правую часть базового уравнения в параметрическом диапазоне флуктуаций простую составляющую независимой убыли $\mathscr{Q} = \sigma N(t)$, $0 < \sigma = \mathrm{const}$ — так отражается целенаправленное регулируемое изъятие, например, в целях промысловой эксплуатации вида:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) - \sigma N(t), \tag{8}$$

В модели после первой вспышки при старте инвазии/заражения следует следующая, действительно катастрофическая. Второй глубокий минимум не становится причиной пика, но вычислительный эксперимент завершается, так как $N(t) < 0$ недопустимо. Данную модель перспективно использовать в системах уравнений прямого межвидового противоборства с $\mathscr{Q} = qP(t)$, учитывая прямое действие вида-конкурента $P$.

Для моделей развития инфекций крайне трудно описать динамику очень разнотипных клеток иммунитета, потому феноменологическое описание сценариев лаконичной моделью актуально. Количественный ответ иммунной системы не полностью определяет эффективность подавления, иногда антитела или клетки «Т-киллеры» не способны распознать вирионы.

Проведем сравнение в вычислительном эксперименте с модификацией модели Хатчинсона с аналогичным дополнением внешнего воздействия при тех же параметрах на рис. 2 при $\sigma = \bar{\sigma} = 0{,}007$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) - \sigma N(t). \tag{I*}$$

Остановка расчетов для нашего варианта модели: $N(t) < 0$. Дополнения «репродуктивного показателя» запаздыванием $rN(t-\tau)f[N(t), N(t-\tau)]$ не несут экологического смысла. Популяционное объяснение сценария содержится в графиках экспериментов Г. Гаузе [12] с двумя видами инфузорий, хищником и добычей. Из-за активности хищника там не удавалось получить ни продолжительных колебаний, ни равновесий. Вселенный хищный вид быстро уничтожал полностью свой ресурс после первого либо второго максимума и сам погибал. При наблюдении экстремальной динамики в экспериментах биологами была подвергнута сомнениям известная модель Лотки — Вольтерра с ее теорией возникновения циклов. На самом деле эксперименты не могли опровергать выводы из модели Вольтерра, которая рассматривает ординарный балансируемый случай межвидового противоборства, тогда как Гаузе наблюдал вариант экстремального популяционного взаимодействия — иной по типу процесс, самый наглядный пример которого — инфекция с летальным завершением. К подобному характеру динамики относится поведение без ограниченного положительного (не нулевого) предельного множества траектории системы.

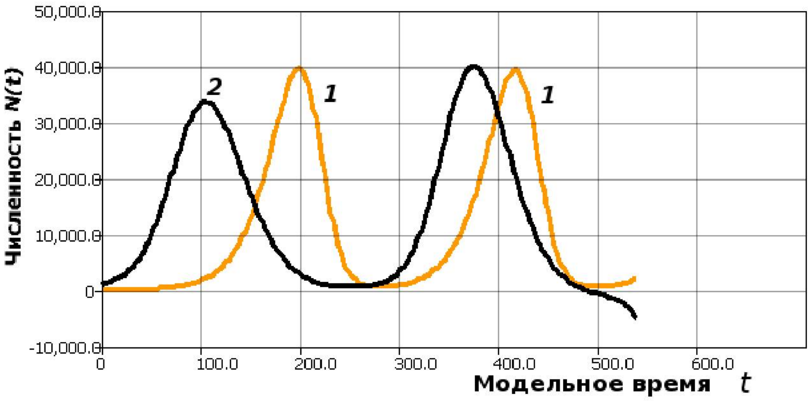



**Рис. 2.** 1 — релаксационный цикл (I*), 2 — повторная катастрофическая вспышка и гибель популяции по (8) $K = 15000$, $\tau = 48$, $r = 0{,}017$, $\sigma = 0{,}007$.

Итоговый результат противоборства инвазии разумеется зависим от уровня сопротивления. При $\sigma < \bar{\sigma}$ мы получим второй пик меньше первого и обычные затухающие колебания. Сценарий (рис. 3) подсказывает для практики, что эффективно включение борьбы с чужеродным видом именно в период минимумов после первой вспышки, а не в момент нарастания самой вспышки, что только продлит фазу взрывообразного роста.

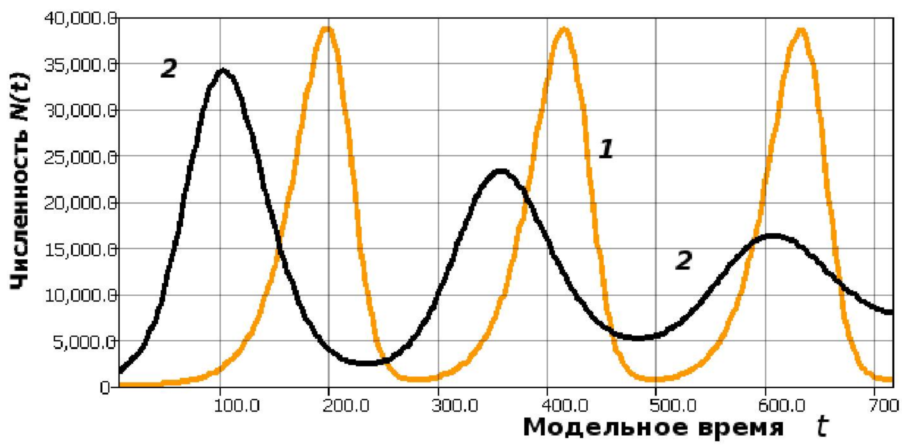



**Рис. 3.** 1 — релаксационный цикл (I), 2 — затухающие колебания (8) $K = 15000$, $\tau = 48$, $r = 0{,}017$, $\sigma = 0{,}006$.

В случае инвазии агрессивного вида, когда авторегуляция при повышении плотности слабая, биотическое сопротивление не оказывается, не включается фактор каннибализма — мы увидим сценарий разрушения среды. Например, в настоящее время проходит гибель самшитовых рощ после вселения опасного вредителя *Cydalima perspectalis* на Черноморском побережье.

## 4. Модель инвазии с нелинейным сопротивлением среды

Реакция среды не всегда пропорциональна и выражается фиксированной долей изъятия $\sigma$, но может отражаться сложной зависимостью. Так, численность паразитических перепончатокрылых, подавляющих размножение насекомых-вредителей, регулируется факторами миграционной активности. Линейное представление внешней регуляции $-\sigma N$

скорее свойственно антропогенному изъятию, биотическое противодействие отражается нетривиально, у любого хищника есть предел насыщения и внутривидовая конкуренция за территорию.

Соединим предложенные нами модификации в итоговой обобщенной модели, которая будет учитывать нелинейно действующий фактор сопротивления биотического окружения вторгающемуся виду:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right)(\mathscr{U} - N(t-\tau)) - \gamma\frac{N^m(t)}{B+N^2(t)}. \tag{9}$$

Так мы получим сценарий прохождения предкритического популяционного минимума — эффект «bottleneck», после которого популяция уравновешивается на уровне $\Gamma$ — в вычислительном эксперименте рис. 4 (при тех же значениях что и ранее: $\gamma = 0{,}4$, $\mathscr{U} < B < K$, $B = 10000$, $m = 3$). Относящийся к другому типу экстремальной динамики сценарий описывает более сильную независимую реакцию среды на увеличение численности вселенца. Выражение формы биотического давления $N^m/(B + N^2(t))$ отражает фактор, что сопротивление при $N(0) > \min N(t; r\tau)$ не может резко повышаться сразу за увеличением численности вселенца. Так может проявляться адаптация насекомых-паразитов, атакующего определенные стадии онтогенеза нового в среде вида насекомого-вредителя.

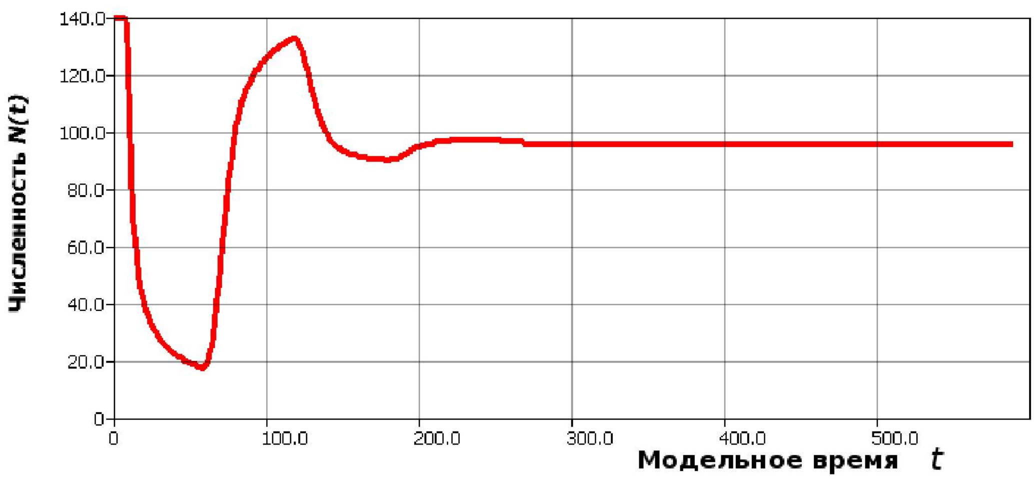



**Рис. 4.** Сценарий предкритического минимума со стабилизацией в (9).

Для обобщенной модификации мы учли опыт известной экстремальной модели для описания возникновения вспышек еловой листовертки в Северной Америке из классической работы по применению теории катастроф [13] — уравнения с альтернативными аттракторами (малым и большим равновесием) на основе квадратичной саморегуляции:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \gamma\frac{N^2(t)}{B+N^2(t)}, \tag{10}$$

но пересмотрели в (9) формализацию внешнего давления из (10) — увеличили степень нелинейности в предложенном слагаемом, так модель Холлинга не описывает спонтанного завершения фазы стремительного роста численности. Таким образом, предложенная модель с запаздыванием на основе функции Гомпертца может являться базовой для дальнейших модификаций с усложнением зависимости $\ln(F(N(t-\tau)))$ формы противодействия со стороны биотического окружения.

## 5. Модификация уравнения Базыкина

В завершении нашей серии модификаций предложим модификацию для известной модели Базыкина $\dot{N} = rF(N(t-\tau)) \times (N-L)^m$ [14], рассмотрению свойств которой мы уделили внимание в предыдущей статье [1]. Модель применима к ситуации с наличием пороговой численности $L > 1$ в явном виде — группы особей, обязательной для недопущения вымирания вида при $N(t_k) < L : \lim_{t\to\infty} N(t) = 0$. Запишем новый вариант таким образом:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\left(\frac{K}{N(t-\tau_2)}\right)^k\right)\sqrt[3]{(N(t-\tau_1)-L)}. \tag{11}$$

Для описания критического размера $N(t) \to L$-группы особей нам представляется интересным из соображений о причинах возникновения экологического эффекта Олли (когда желательно укрупнять группы особей для лучшей выживаемости потомства) именно вариант гибко настраиваемой модели (11). Если виду необходимо создавать крупные скопления, значит эволюционно целесообразно $k < 1$ и успех воспроизводства намного превосходит действие внутривидовой конкуренции. Снижение репродуктивного потенциала начинает наблюдаться, когда состояние популяции далеко не оптимальное. В наилучшем состоянии большой группы особей эффект Олли [15] никак не проявляется на регуляции численности. Потому выбор $v(N) = \ln(K/N)$ и степени $m = 1/3$ более логичен, чем для квадратичной регуляции $f(N) = rN(1 - N/K)$, так вымирание не будет почти мгновенным неотвратимым явлением, как в модели Базыкина. В реальности вымирание биологических таксонов может растянуться во времени на геологические периоды. Вспышка численности малой группы насекомых при попадании в новую среду в описываемой моделью ситуации нереальна.

## 6. Заключение

В работе предложены три модификации модели специфических сценариев популяционной динамики на основе базового уравнения Гомпертца, расширенного для случая запаздывающей регуляции. Модели актуальны при описании инвазионных процессов. Из главного результата работы — модификации уравнения с нелинейностью внешнего воздействия (9) — следует практический вывод для выработки мер противодействия вселенцу (но не вирусной инфекции). Нет смысла включать противодействие на этапе нарастания вспышки численности, так только продлится интервал вспышки. После фазы стремительного роста инвазионный вид через некоторое время оказывается в промежуточном уязвимом состоянии малой группы, но данный интервал без дополнительного воздействия вид может успешно преодолеть. Человеческая популяция аналогично проходила сквозь подобное состояние, называемое в популяционной биологии «бутылочным горлом». Далеко не все популяции способны преодолеть кризис, как показывают наши модельные сценарии, ведь иначе стремительные вселения были бы ординарным, но не эпизодическими событиями.

Модификации качественно отличаются от хорошо изученных аналогов, так в (I) допустимо

$$(\exists\, t_M)(N(0) < K)(\tau > \bar{\tau}) : N(r\tau, t_M) > K, \quad \lim_{t\to\infty} N(r\tau, t) = K,$$

но только в виде незначительного переполнения экологической ниши, не влекущего критических последствий. Добавление независимой убыли в (I*) улучшает свойства цикла в части смещения $\min N_*(r\tau, t)$, но в таком случае уже нет промежутка прохождения минимально возможных значений численности после фазы вспышки.

Наиболее наглядны из встречающихся в реальности ситуаций биологического противоборства с запаздывающей регуляцией — сценарии протекания инфекций, способных оказывать разрушительное воздействие на организм. Уровень накопления возбудителя, соотносящийся с «емкостью ниши» практически достижим, но в таком состоянии организм существовать долго не способен и переходный режим острой фазы завершается. Вариант завершения зависит от функции иммунного сопротивления, где важнейший фактор время выработки ответа. Соответствует полученному модельному сценарию переход к хроническому течению — на рис. 5 показан типичный вариант динамики вирусного гепатита $C$. На схеме пунктиром показано нарастание иммунного ответа, специфиче-

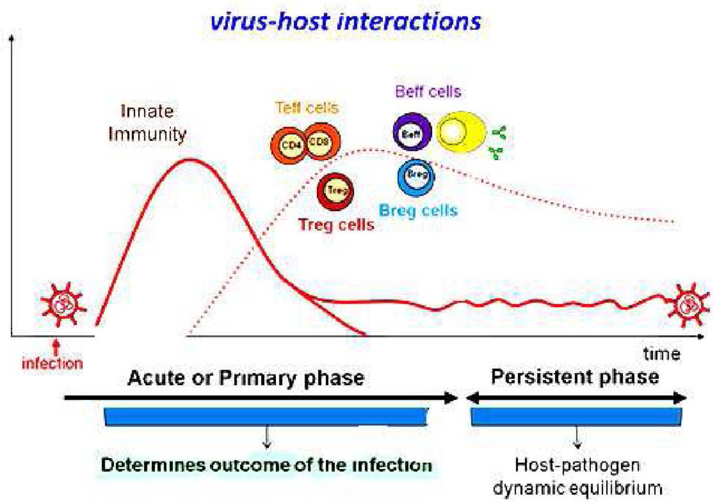



**Рис. 5.** Динамика инфекции гепатита и иммунного ответа [16].

ских клеток в крови. Становится очевидна важность рассмотрения запаздывания в экстремальных процессах, тут от скорости проявления иммунного ответа зависит тяжесть последствий заболевания. Иммунная система представляет собой сложный конгломерат разнотипных клеток с взаимной активацией, дифференцировкой и главное индивидуальной памятью, потому это наиболее сложная для математического описания физиологическая структура, для проявления результативности которой мы можем подобрать феноменологическое сценарное описание.

Перспективным средством борьбы с нежелательными инвазиями считается целенаправленная акклиматизация естественных конкурентов, но в настоящее время имеется только несколько успешных примеров биологического подавления. Дальнейшей актуальной задачей представляется моделирование сценариев явного противоборства инвазионных видов. В экологии достаточное количество кратковременных, но важных явлений, которые трудно рассматривать в рамках традиционной асимптотической динамики.

## Литература

1. *Переварюха А. Ю.* Сценарий невынужденной деструкции популяции в модификации уравнения Хатчинсона // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 4.—С. 58–69. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.9168.
2. *Hutchinson G.* An Introduction to Population Ecology.—New Haven: Yale Univ. Press, 1978.—234 p.
3. *Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* A modification of Hutchinson's equation // Comp. Math. and Math. Phys.—2010.—Vol. 50, № 12.—P. 1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.

4. *Глызин С. Д.* Математическая модель эксперимента Николсона // Модел. и анализ информ. систем.—2017.—Т. 24, № 3.—С. 365–386. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-365-386.
5. *Odum H. T.* Systems Ecology.—N. Y.: Wiley, 1983.—644 p.
6. *Ruan S.* Delay differential equations in single species dynamics // Delay Differential Equations and Appl.—Berlin: Springer, 2006.—P. 477–517. DOI: 10.1007/1-4020-3647-7_11.
7. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Time lags in a «food-limited» population model // Applicable Analysis.—1988.—Vol. 31, № 3.—P. 225–237. DOI: 10.1080/00036818808839826.
8. *Глызин С. Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Модел. и анализ информ. систем.—2007.—Т. 14, № 3.—С. 29–42.
9. *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation // Comp. Math. and Math. Phys.—2009.—Vol. 49, № 1.—P. 71–83. DOI: 10.1134/S0965542509010059.
10. *Laird A. K.* Dynamics of tumor growth // British J. of Cancer.—1964.—Vol. 18, № 3.—P. 490–502. DOI: 10.1038/bjc.1964.55.
11. *Piotrowska J., Forysz U.* The nature of Hopf bifurcation for the Gompertz model with delays // Mathematical and Computer Modelling.—2011.—Vol. 54, № 9–10.—P. 2183–2198. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.05.027.
12. *Gause G. F.* The Struggle for Existence.—Baltimore: Williams & Wilkins, 1934.—163 p.
13. *Ludwig D., Jones D., Holling S.* Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest // The Journal of Animal Ecology.—1978.—Vol. 47, № 1.—P. 315–332.
14. *Bazykin A. D.* Nonlinear Dynamics of Interacting Populations.—London: WSP, 1998.—198 p.
15. *Hutchings J. A.* Renaissance of a caveat: Allee effects in marine fish // ICES J. of Marine Science.—2014.—Vol. 71, № 8.—P. 2152–2157. DOI: 10.1093/icesjms/fst179.
16. URL: https://www.upf.edu/web/virology-unit/virus-host.

*Статья поступила 11 мая 2018 г.*

Переварюха Андрей Юрьевич
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
*старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики*
РОССИЯ, 199178, Санкт-Петербург, 14-линия, 39
E-mail: temp_elf@mail.ru
http://orcid.org/0000-0002-1049-0096

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 51–61*

# SCENARIOS OF CRITICAL OUTBREAK OF INVASIVE SPECIES IN NEW MODIFICATION OF GOMPERTZ EQUATION

Perevarukha, A. Yu.[1]

[1] Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation
of the Russian Academy of Sciences,
14-th Liniya, V.I., 39, Saint Petersburg 199178, Russia
E-mail: temp_elf@mail.ru

**Abstract.** The paper discusses the problem of modeling the variants of the development of situations of extreme type in the population process that can arise due to the propagation of alien species. For mathematical formalization of phenomena, equations with a delay argument are used. In the above-mentioned environmental context, it is interesting to consider not the occurrence of cycles or the properties of stable oscillation modes in the solution of such equations. We urgently need to search for specific transitional scenarios of population dynamics. A series of modifications based on the Gompertz equation is proposed successively, as proved to be more suitable for improvement than the Hutchinson or Nicholson models. In models involving the function of the resistance of the biotic environment, scenarios of the death of the population after the outbreak were obtained. An alternative variant of the numerical scenario is the formation of a stable small group with the passage of the permissible barrier number of adults in the population. The resulting computational scenarios have a practical interpretation in the analysis of the possible development of events after the introduction of dangerous new species into conservative ecosystems. Improved by the original complement and model for an explicitly critical low $L$-quantity, flexible correction of the properties of the population dynamics under the action of the Allee effect, than the function $\dot{N} = F(N^2) \times (N(t) - L)$ from the well-known Bazykin model. The resulting model scenarios are similar for a group of invasive and dangerous infectious processes, which undermine our idea that cybernetic regulatory mechanisms take precedence over ecological species specificity of alien populations.

**Key words:** delayed equations, extreme states of populations, transitional regimes, cycles, modeling of invasive processes, alien species, cybernetics of biological warfare.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 37N25, 92C42, 81T80.

**For citation:** *Perevarukha, A. Yu.* Scenarios of Critical Outbreak of Invasive Species in New Modification of Gompertz Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 51–61 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27734.

## References

1. *Perevarukha, A. Yu.* Scenario of Involuntary Destruction of a Population in a Modified Hutchinson Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 58–69 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.9168.
2. *Hutchinson, G. An Introduction to Population Ecology*, New Haven, Yale Univ. Press, 1978, 234 p.
3. *Kolesov, A. Yu., Mishchenko, E. F. and Rozov, N. Kh.* A Modification of Hutchinson's Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 12, pp. 1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
4. *Glyzin, S. D.* Mathematical Model of Nicholson's Experiment, *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 365–386 (in Russian). DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-365-386.
5. *Odum, H. T. Systems Ecology*, N. Y., Wiley, 1983, 644 p.
6. *Ruan, S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics, Delay Differential Equations and Appl., Berlin, Springer, 2006, pp. 477–517. DOI: 10.1007/1-4020-3647-7_11.
7. *Gopalsamy, K., Kulenovic, M. and Ladas, G.* Time Lags in a «Food-Limited» Population Model, *Applicable Analysis*, 1988, vol. 31, no. 3, pp. 225–237. DOI: 10.1080/00036818808839826.
8. *Glyzin, S. D.* A Registration of Age Groups for the Hutchinson's Equation, *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2007, vol. 14, no. 3, pp. 29–42 (in Russian).
9. *Glyzin, S. D., Kolesov, A. Yu. and Rozov, N. Kh.* Extremal Dynamics of the Generalized Hutchinson Equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 1, pp. 71–83. DOI: 10.1134/S0965542509010059.
10. *Laird, A. K.* Dynamics of Tumor Growth, *British Journal of Cancer*, 1964, vol. 18, no. 3, pp. 490—502. DOI: 10.1038/bjc.1964.55.
11. *Piotrowska, J. and Forysz, U.* The Nature of Hopf Bifurcation for the Gompertz Model with Delays, *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, vol. 54, no. 9–10, pp. 2183–2198. DOI: 10.1016/j.mcm.2011.05.027.
12. *Gause, G. F. The Struggle for Existence*, Baltimore, Williams & Wilkins, 1934, 163 p.
13. *Ludwig, D., Jones, D. and Holling, S.* Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest, *The Journal of Animal Ecology*, 1978, vol. 47, no. 1, pp. 315–332.
14. *Bazykin, A. D. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, London, WSP, 1998, 198 p.
15. *Hutchings, J. A.* Renaissance of a Caveat: Allee Effects in Marine Fish, *ICES Journal of Marine Science*, 2014, vol. 71, no. 8, pp. 2152–2157. DOI: 10.1093/icesjms/fst179.
16. URL: https://www.upf.edu/web/virology-unit/virus-host.

*Received May 11, 2018*

Andrey Yu. Perevaryukha
Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation
of the Russian Academy of Sciences,
14-th Liniya, V.I., 39, Saint Petersburg 199178, Russia,
*Senior Researcher of the Laboratory of Applied Informatics*
E-mail: `temp_elf@mail.ru`
http://orcid.org/0000-0002-1049-0096

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 62–73*

**УДК** 517.53
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27735

# РАЗЛОЖЕНИЕ УИТНИ, ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ВОПРОСЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[#]

**Ф. А. Шамоян[1], Е. В. Тасоева[2]**

[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83;
[2] Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского, Россия, 241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14

E-mail: `shamoyanfa@yandex.ru`, `eka3543628@yandex.ru`

**Аннотация.** По классической теореме Уитни каждое открытое множество на плоскости можно представить в виде объединения специальных квадратов, внутренности которых не пересекаются. В статье, используя эти свойства квадратов Уитни, вводится новое понятие: для каждого центра $a_k$ квадрата Уитни существует точка $a_k^* \in C/G$ такая, что расстояние до границы открытого множества $G$ заключается между двумя константами независимо от $k$. Используя свойства Уитни в статье, в частности, устанавливается необходимое и достаточное условие на $z_{k1}^{\infty} \subset G$, при котором оператор $R(f) = (f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n), \dots)$ отображает обобщенные плоские классы Неванлинны по множеству $G$ в $l^p$.

**Ключевые слова:** классы Неванлинны, интерполяция, разложение Уитни, пространство Бергмана.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 30H15, 32A35.

**Образец цитирования:** *Шамоян Ф. А., Тасоева Е. В.* Разложение Уитни, теоремы вложения и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 62–73. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27735.

## 1. Введение

Пусть $G$ — область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, обозначим множество всех аналитических функций в $G$ через $H(G)$, плоскую меру Лебега на $\mathbb{C}$ обозначим через $m_2$. В дальнейшем для вещественнозначных функций $f$ и $g$ с общей областью определения $E$ запишем $g(\zeta) \lesssim f(\zeta)$, $\zeta \in E$, если существует положительное число $c$ такое, что $g(\zeta) \leqslant cf(\zeta)$, $\zeta \in E$. Определим класс $S_\alpha^p$:

$$S_\alpha^p(G) = \left\{ f \in H(G) : \int\limits_G \left(\ln^+ |f(z)|\right)^p \rho^\alpha(z, \partial G)\, dm_2(z) < +\infty \right\}.$$

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-51-15005-НЦНИ.

Обозначим через $A^p_\alpha(G)$ соответствующее весовое пространство Бергмана [1], т. е.

$$A^p_\alpha(G) = \left\{ f \in H(G) : \int\limits_G |f(z)|^p \rho^\alpha(z, \partial G)\, dm_2(z) < +\infty \right\}.$$

Здесь и в дальнейшем $\rho(F, E)$ — расстояние между двумя множествами $F$ и $E$.

Пусть $Q$ — некоторое замкнутое множество на $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathring{Q}$ — внутренность множества $Q$. Если $Q$ — квадрат, то через $Q(s)$, $s \in R_+$, обозначим квадрат, имеющий тот же центр, что и $Q$, но растянутый в $s$ раз. Если $Q$ — некоторое множество в $\mathbb{C}$, то через $d(Q)$ обозначим диаметр множества $Q$. Теперь сформулируем известную теорему Уитни о разложении открытых множеств.

**Теорема Уитни** [2, с. 199]. *Пусть $G$ — открытое множество в $\mathbb{C}$. Тогда существует такой набор квадратов $F = \{Q_k\}_{k=1}^\infty$, что $G = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$,*

*а) $\mathring{Q}_k \cap \mathring{Q}_m = \varnothing$, $k \neq m$;*

*б) $d(Q_k) \leqslant \rho(Q_k, \partial G) \leqslant 4d(Q_k)$;*

*в) для произвольного $s \in R_+$, $0 \leqslant s < 5/4$, квадраты $\{Q_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$ покрывают множество $G$ конечнократно, т. е. существует число $P = P(s) \in N$ такое, что каждая точка $z$ множества $G$ принадлежит не более чем $P(s)$ квадратам из системы $\{Q_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$.*

Определение 1. Пусть $G$ — некоторое открытое множество на комплексной плоскости. Скажем, что $G$ удовлетворяет условию (У), если существует такое разложение Уитни $\{Q_k\}$ и точки $a_k^* \in \mathbb{C}\backslash G$ такие, что $q_1\rho(a_k^*, \partial G) \geqslant q\rho(a_k, \partial G)$, где $a_k$ — центр квадрата $Q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, а $q$ и $q_1$ — достаточно большие положительные числа, не зависящие от $k$.

Замечание 1. Отметим, что произвольное ограниченное множество на комплексной плоскости удовлетворяет условию (У), при этом подходят любые разбиения Уитни. В случае неограниченных множеств это уже не так. Например, если $G$ совпадает с полуплоскостью $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ или $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, то условие (У) очевидно для $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$, а для области $G = \mathbb{C}\backslash\Pi_h^+$, где $\Pi_h^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < h/2\}$, очевидно, что условие (У) не выполняется. В дальнейшем будем предполагать, что множество $G$ удовлетворяет условию (У).

Замечание 2. Оценка числа $q$ снизу возникает при изучении вышеуказанных классов и существенно зависит от $p$ и $\alpha$ (см. (5), (6)).

Основным результатом работы является доказательство теорем 1 и 2.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — открытое множество в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию (У), $\{z_k\}_1^\infty \subset G$, $\{Q_k\}_1^\infty$ — разложение Уитни множества $G$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $$\sum_{k=1}^\infty \rho\big(z_k, \partial G\big)^{\alpha+2}\big(\ln^+|f(z_k)|\big)^p \lesssim \int\limits_G \big(\ln^+|f(\zeta)|\big)^p \big(\rho(\zeta, \partial G)\big)^\alpha dm_2(\zeta),\ \ f \in S^p_\alpha(D); \qquad (1)$$

2. $$\sup_{m\geqslant 1} n_m < +\infty,\ \text{где } n_m := \operatorname{card}\{z_k : z_k \in Q_m\}. \qquad (2)$$

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — открытое множество в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, $\{z_k\}_1^\infty \subset G$, $\{Q_k\}_1^\infty$ — разложение Уитни множества $G$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho(z_k, \partial G)^{\alpha+2}|f(z_k)|^p \lesssim \int\limits_G |f(\zeta)|^p \rho(\zeta, \partial G)^\alpha\, dm_2(\zeta),\ \ f \in A^p_\alpha(G);$$

2. *выполняется условие* (2).

Для формулировки следующего утверждения введем еще несколько обозначений.

Пусть область $G$ совпадает с единичным кругом $D$:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad k \in Z_+, \ l \in Z, \ -2^k \leqslant l \leqslant 2^k - 1,$$

положим

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \ \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Очевидно, что $D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \big( \bigcup_{l=-2^k}^{2^k-1} \Delta_{k,l} \big)$, система $\{\Delta_{k,l}\}$ является аналогом разложения Уитни для единичного круга $D$.

Из теорем 1 и 2 следуют теоремы $1'$ и $2'$.

**Теорема $1'$.** *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из единичного круга $D$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \big(1 - |z_k|\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |f(z_k)|\big)^p \lesssim \int_D \big(1 - |\zeta|\big)^\alpha \big(\ln^+ |f(\zeta)|\big)^p \, dm_2(\zeta), \ f \in S_\alpha^p(D);$
2. $\displaystyle\sup_{k \in Z_+} \max_{-2^k \leqslant l < 2^k - 1} \operatorname{card}(z_m : z_m \in \Delta_{k,l}) < +\infty. \qquad (3)$

**Теорема $2'$.** *Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\{z_k\}_1^\infty \subset D$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} |f(z_k)|^p \lesssim \int_D (1 - |\zeta|)^\alpha |f(\zeta)|^p \, dm_2(\zeta), \ f \in A_\alpha^p(D);$
2. *выполняется условие* (3).

Замечание 3. Метод, применяемый при доказательстве теорем 1, 2, был разработан еще в 1975 г. в работах первого автора [3, 4]. Аналог теоремы 2, в случае единичного круга в других терминах, ранее был получен в хорошо известных работах К. Сейпа [5, с. 56; 6, с. 43].

Замечание 4. Естественно, в случае неограниченных множеств $G$, мы предполагаем нетривиальность классов $A_\alpha^p(G)$, $S_\alpha^p(G)$. Довольно интересные результаты в этом направлении, при $\alpha = 0$, получены Л. Карлесоном [7, гл. 2].

Из теоремы $1'$ следует, что оператор

$$R(f) = (f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots)$$

при условии (3) отображает $S_\alpha^p(D)$ в пространство

$$\tilde{l}_\alpha^p = \left\{ w = \{w_k\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^{+\infty} \big(1 - |z_k|\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |w_k|\big)^p < +\infty \right\}.$$

Естественно возникает вопрос: при каких дополнительных условиях на $\{z_k\}_1^\infty$ оператор $R$ отображает $S_\alpha^p$ на $\tilde{l}_\alpha^p$? Такие последовательности назовем *интерполяционными* для класса $S_\alpha^p(D)$. Аналогичная задача для весовых пространств Бергмана $A_\alpha^p$ в единичном круге $\mathbb{D}$ решена в хорошо известных работах К. Сейпа [6, с. 56].

Из теорем 1 и 2 непосредственно следуют теоремы 3 и 4.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — некоторая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, удовлетворяет условию (У), $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из $G$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \rho^{\alpha+2}\big(z_k, \partial G\big)\big(\ln^+|f(z_k)|\big)^p < +\infty,\ f \in S_\alpha^p(G);$
2. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \rho^{\alpha+2}\big(z_k, \partial G\big)\big|g(z_k)\big|^p < +\infty,\ g \in A_\alpha^p(G).$

**Теорема 4.** *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность из единичного круга $D$, удовлетворяющая условиям теоремы $1'$. Если $\{z_k\}_1^\infty$ — интерполяционная последовательность для пространства $A_\alpha^p(D)$, $-1 < \alpha < +\infty$, $0 < p < +\infty$, то оператор $R$ отображает $S_\alpha^p$ на $\tilde{l}_\alpha^p$, т. е. $\{z_k\}_1^\infty$ является интерполяционной последовательностью и для класса $S_\alpha^p(D)$.*

## 2. Доказательство вспомогательных утверждений

**Лемма 1.** *Пусть $w \in \mathbb{C}, |w| < \sigma < 2^{1/m} - 1$, $m \in N$. Тогда*

$$\operatorname{Re}(1-w)^m \geqslant \delta > 0, \quad \delta = 2^{\frac{1}{m}} - 1 - \sigma.$$

$\lhd$ Пусть $w = \rho e^{i\theta}$, ясно, что

$$\operatorname{Re}(1-w)^m = \operatorname{Re}\big(1-\rho e^{i\theta}\big)^m = \rho^m \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho} - e^{i\theta}\right)^m = \rho^m \sum_{j=1}^m c_m^j (-1)^j \frac{1}{\rho^{m-j}} \cos\theta$$

$$\geqslant \rho^m\left(\frac{1}{\rho^m} - \sum_{j=1}^m \frac{c_m^j}{\rho^{m-j}}\right) = \left(1 - \sum_{j=1}^m c_m^j \rho^j\right) = \big(2 - (1+\rho)^m\big) = \Big(\big(2^{\frac{1}{m}}\big)^m - (1+\rho)^m\Big)$$

$$= \Big(2^{\frac{1}{m}} - (1+\rho)\Big)\left(\sum_{j=1}^{m-1} 2^{\frac{1}{m}j}(1+\rho)^{m-j-1}\right) \geqslant 2^{\frac{1}{m}} - 1 - \rho.$$

Положим $\delta = 2^{1/m} - 1 - \sigma$. Тогда при $0 \leqslant \rho < \sigma < 2^{1/m} - 1$ получим нужное утверждение. $\rhd$

Следующее утверждение следует из хорошо известных свойств интеграла (см. [2, с. 15]).

Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, $0 < p < +\infty$, $f$ — измеримая функция. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int |f(y)|^p \, d\mu(y) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} g(t)\, dt,$$

где $g(t) = \mu(x : |f(x)| > t)$, $t > 0$.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — произвольная область в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \backslash (G \cup \partial G) = \Omega$, $\beta > \alpha + 2$, $\alpha > 0$. Тогда, если $z \in \Omega$, то справедлива оценка*

$$\int_G \frac{\rho(\zeta, \partial G)^\alpha}{|\zeta - z|^\beta}\, dm_2(\zeta) \lesssim \frac{1}{(\rho(z, \partial G))^{\beta-\alpha-2}}.$$

$\lhd$ Фиксируем точку $z \in \Omega$. Положим $X = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| \geqslant \rho(z, \partial G)\}$, $\varepsilon = \rho(z, \partial G)$,

$$f_z(\zeta) = \begin{cases} 0, & |z-\zeta| < \varepsilon, \\ \frac{1}{\zeta - z}, & |\zeta - z| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

В качестве $\mu$ подберем меру $d\mu_\alpha(\zeta) = \rho(\zeta, \partial G)^\alpha dm_2(\zeta)$. Положив $p = \beta$, будем иметь

$$\int\limits_G \frac{\rho^\alpha(\zeta, \partial G)}{|\zeta - z|^\beta}\, dm_2(\zeta) \leqslant \int\limits_G |f_z(\zeta)|^p \, d\mu_\alpha(\zeta) = \beta \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} g(t)\, dt,$$

где $g(t) = \mu_\alpha(E(\zeta : |f_z(\zeta)| > t))$, $t > 0$. Перейдем к оценке последнего интеграла.

Пусть, как и прежде, $\varepsilon = \rho(z, \partial G)$. Докажем, что если $t > 1/\varepsilon$, то $g(t) = 0$. Действительно, нетрудно заметить, что из условия $t > 1/\varepsilon$ следует, что $|z - \zeta| < \varepsilon$, по определению $f_z(\zeta) = 0$. Следовательно, $E = \varnothing$, поэтому $g(t) = 0$.

Рассмотрим случай $0 < t \leqslant 1/\varepsilon$. Тогда из условия $|f_z(\zeta)| > t$ следует, что $|\zeta - z| < 1/t$, и поэтому $E \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : \varepsilon < |\zeta - z| < 1/t\} \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < 1/t\}$. Следовательно, поскольку $\rho^\alpha(\zeta, \partial G) \leqslant |\zeta - z|^\alpha \leqslant 1/t^\alpha$, то

$$g(t) = \mu_\alpha\big(E(\zeta : |f_z(\zeta)| > t)\big) \leqslant \int\limits_{|\zeta - z| < \frac{1}{t}} |\zeta - z|^\alpha \, dm_2(\zeta) \leqslant \frac{\pi}{t^{\alpha+2}}.$$

Таким образом,

$$\beta \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} g(t)\, dt \leqslant \pi\beta \int\limits_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^{\beta-1}}{t^{\alpha+2}}\, dt = \frac{\pi\beta}{(\beta - \alpha - 2)\varepsilon^{\beta-\alpha-2}},$$

т. е.

$$\int\limits_G \frac{\rho(\zeta, \partial G)^\alpha}{|\zeta - z|^\beta} \lesssim \frac{1}{\rho^{\beta-\alpha-2}(z, \partial G)}, \quad \beta > \alpha + 2. \rhd$$

## 3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. 1) $\Rightarrow$ 2): Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из $G$, для которой выполняется оценка (1). Докажем, что если $\{Q_k\}_1^\infty$ — соответствующее разложение Уитни множества $G$, то

$$\sup_{m \geqslant 1} n_m < +\infty,$$

где

$$n_m = \operatorname{card}\{z_k : z_k \in Q_m\}.$$

Зафиксируем число $s \in N$ и квадрат $Q_s$ в разложении Уитни множества $G$. Пусть $z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_{n_s}^{(s)}$ — точки из последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, принадлежащей квадрату $Q_s$, $s \in N$. Тогда оценку

$$\sum_{k=1}^\infty \rho\big(z_k, \partial G\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |f(z_k)|\big)^p \lesssim \int\limits_G \big(\ln^+ |f(\zeta)|\big)^p \big(\rho(\zeta, \partial G)\big)^\alpha \, dm_2(\zeta)$$

можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\rho^{\alpha+2}(a_m,\partial G)\sum_{l=1}^{n_m}\Big(\ln^+\Big|f\Big(z_l^{(m)}\Big)\Big|\Big)^p\lesssim\int\limits_G\big(\ln^+|f(\zeta)|\big)^p\rho^\alpha(\zeta,\partial G)\,dm_2(\zeta),$$

где $a_m$ — центр квадрата $Q_m$. Из этой оценки следует, что

$$\rho^{\alpha+2}(a_s,\partial G)\sum_{l=1}^{n_s}\Big(\ln^+\Big|f\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|\Big)^p\lesssim\int\limits_G\rho(\zeta,\partial G)^\alpha\big(\ln^+|f(\zeta)|\big)^p\,dm_2(\zeta). \tag{4}$$

Перейдем к построению вспомогательной функции. Пусть $a_s^*$ такая точка из $\mathbb{C}\backslash G:=\Omega$, что $\rho(a_s^*,\partial G)\geqslant q\rho(a_s,\partial G)$. Положим

$$f_{s,k}(z)=\exp\left\{\frac{e^{ik\varphi_s}}{(z-a_s^*)^k}\right\},\quad z\in G,\ k\in N,\ k>\frac{\alpha+2}{p},\ \varphi_s=\arg(a_s-a_s^*), \tag{5}$$

при этом $1/q<2^{2/k}-1$.

Очевидно, что $f_{s,k}\in S_\alpha^p(G)$. Поэтому можно применить оценку (4) к функции $f_{s,k}$. Получим

$$\rho^{\alpha+2}(a_s,\partial G)\sum_{l=1}^{n_s}\Big(\ln^+\Big|f_{s,k}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|\Big)^p\lesssim\int\limits_G\rho^\alpha(\zeta,\partial G)^\alpha\big(\ln^+|f_{s,k}(\zeta)|\big)^p\,dm_2(\zeta).$$

Ясно, что

$$\ln^+\big|f_{s,k}(\zeta)\big|=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ik\varphi_s}}{(\zeta-a_s^*)^k}\right)\leqslant\frac{1}{|\zeta-a_s^*|^k}.$$

Далее по лемме 2

$$\int\limits_G\rho^\alpha(\zeta,\partial G)\big(\ln^+|f_{s,k}(\zeta)|\big)^p\,dm_2(\zeta)\leqslant\int\limits_G\frac{\rho^\alpha(\zeta,\partial G)}{|\zeta-a_s^*|^{kp}}\,dm_2(\zeta)\lesssim\frac{1}{\rho\big(a_s^*,\partial G\big)^{pk-\alpha-2}},$$

поскольку $k>(\alpha+2)/p$. Таким образом, получаем

$$\rho^{\alpha+2}(a_s,\partial G)\sum_{l=1}^{n_s}\Big(\ln^+\Big|f_{s,l}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|\Big)^p\lesssim\frac{1}{\rho(a_s^*,\partial G)^{pk-\alpha-2}}.$$

Теперь перейдем к оценке $\big(\ln^+\big|f\big(z_l^{(s)}\big)\big|\big)^p$ снизу. Учитывая равенство

$$\ln^+\big|f_{s,k}(\zeta)\big|=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ik\varphi_s}}{(\zeta-a_s^*)^k}\right),$$

имеем

$$\ln\Big|f_{s,k}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|=\mathrm{Re}\,\frac{e^{ik\varphi_s}}{\Big(z_l^{(s)}-a_s^*\Big)^k}=\mathrm{Re}\,\frac{\Big(e^{ik\varphi_s}\Big(\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a_s^*}\Big)\Big)^k}{\Big|z_l^{(s)}-a_s^*\Big|^{2k}}$$

$$=\frac{1}{\Big|z_l^{(s)}-a_s^*\Big|^{2k}}\,\mathrm{Re}\,e^{ik\varphi_s}\Big(\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a_s^*}\Big)^k.$$

Преобразуем выражение

$$\operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\Big(\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a_s^*}\Big)^k=\operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\Big(\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s+\overline{a}_s-\overline{a_s^*}\Big)^k$$
$$=\operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\big(\overline{a}_s-\overline{a_s^*}\big)^k\left(1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k=\big|a_s-a_s^*\big|^k\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k.$$

В последнем равенстве мы пользовались определением $\varphi_s$.

Таким образом, из последнего равенства окончательно получим

$$\ln\Big|f_{s,k}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|=\frac{|a_s-a_s^*|^k}{\big|z_l^{(s)}-a_s^*\big|^{2k}}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k.$$

Следовательно,

$$\ln\Big|f_{s,k}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|=\frac{|a_s-a_s^*|^k}{\big|z_l^{(s)}-a_s+a_s-a_s^*\big|^{2k}}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_k^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k$$
$$=\frac{|a_s-a_s^*|^k}{|a_s-a_s^*|^{2k}\left(\left|1+\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|^{2k}\right)}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_k^{(s)}}-\overline{a}_s}{a_s-a_s^*}\right)^k$$
$$=\frac{1}{|a_s-a_s^*|^k\left|1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right|^{2k}}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_k^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k.$$

Положим $w_s=\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}$. Учитывая, что точки $z_l^{(s)}$ и $a_s$ принадлежат прямоугольнику $Q_s$, а также теорему Уитни, получаем

$$\big|z_l^{(s)}-a_s\big|\leqslant d(Q_k)\leqslant\rho(Q_k,\partial G).$$

В то же время, по выбору $a_s^*$, можно предположить, что

$$\frac{\rho(a_s,\partial G)}{\rho(a_s^*,\partial G)}\leqslant\frac{1}{q}<2^{\frac{2}{k}}-1,\tag{6}$$

поэтому, применяя лемму 1, положим $\sigma=1/q$ к выражению $(1+w_s)^k$, получаем

$$\ln\Big|f_{s,k}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|\geqslant\frac{\delta}{|a_s-a_s^*|^k}\,\frac{1}{2^{2k}}.$$

Здесь мы применяли оценки:

$$\left|1+\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|\leqslant1+\left|\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|;\quad\left|\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|\leqslant\frac{\rho(a_s,\partial G)}{\rho(a_s,\partial G)}=1,$$

т. е.

$$\Big(\ln^+\Big|f_{s,k}\Big(z_l^{(s)}\Big)\Big|\Big)^p\geqslant\frac{\delta^p}{|a_s-a_s^*|^{kp}}\,\frac{1}{2^{2kp}}$$

при всех $1 \leqslant l \leqslant n_s$.

Теперь применяя полученные выше оценки, приходим к неравенству

$$\rho^{\alpha+2}(Q_s, \partial G)\delta^p \frac{n_s}{|a_s - a_s^*|}^{kp} 2^{2kp} \lesssim \frac{1}{\rho(a_s^*, \partial G)^{pk-\alpha-2}}.$$

Но поскольку

$$|a_s - a_s^*| \leqslant \rho(a_s, \partial G) + \rho(a_s^*, \partial G),$$

$$\rho(a_s, \partial G) + \rho(a_s^*, \partial G) \leqslant \rho(a_s, \partial G)(1 + q_1),$$

то используя условие (У), получаем

$$n_s \leqslant \frac{(1 + q_1)^{kp}}{\delta^p},$$

т. е.

$$\sup_{s \geqslant 1} n_s < +\infty.$$

Импликация 1)⇒2) в теореме 1 установлена.

2)⇒ 1): Доказательство импликации 2)⇒1) фактически установлено в работах [3, 4]. Докажем более сильное утверждение. Для этого введем следующий класс функций. Через $H(S, G)$ обозначим класс непрерывных, неотрицательных функций $U$ на $G$, удовлетворяющих следующему условию:

Существует положительное число $A$, зависящее только от $U$, такое, что для произвольной точки $z \in G$ и $\rho > 0$, удовлетворяющим соотношению

$$K_\rho(z) = \big\{\zeta : |\zeta - z| < \rho\big\},$$

выполняется оценка

$$U(z) \leqslant \frac{A}{\pi\rho^2} \int\limits_{K_\rho(z)} U(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Ясно, что если $p \geqslant 1$, $\alpha > -1$, то классы $S^p_\alpha(G)$ и $A^p_\alpha(G)$ входят в $H(S, G)$, поскольку функции $|f|^p$ и $(\ln^+|f|)^p$ являются субгармоническими, а при $0 < p < 1$ такое включение также справедливо и следует из хорошо известной теоремы Стейна — Феффермана (см. [1, 6]).

Перейдем к импликации 2)⇒1) для функции $U \in H(S, G)$. Пусть

$$I(U) = \sum_{m=1}^{+\infty} \rho(z_m, \partial G)^{\alpha+2} U(z_m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{l=1}^{n_k} \rho\Big(z_l^{(k)}, \partial G\Big)^{\alpha+2} U\Big(z_l^{(k)}\Big) \right).$$

Напомним, что $z_l^{(k)}$, $1 \leqslant l \leqslant n_k$, — точки из последовательности $\{z_m\}_1^\infty$, принадлежащие квадрату $Q_k$, $1 \leqslant k < +\infty$.

Пусть

$$I_k = \sum_{l=1}^{n_k} \rho\Big(z_l^{(k)}, \partial G\Big)^{\alpha+2} U\Big(z_l^{(k)}\Big),$$

$z_l^{(k)}$ — фиксированная точка из квадрата $Q_k$, $1 \leqslant l \leqslant n_k$. Подбирая достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и положив

$$\rho_k = \frac{\rho(Q_k, \partial G)}{2},$$

можем утверждать, что круг $K_{\rho_k}\Big(z_l^{(k)}\Big) \subset Q_k^*(1+\varepsilon)$.

Поэтому

$$U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant \frac{A}{\pi\rho_k^2} \int\limits_{K_{\rho_k}\left(z_l^{(k)}\right)} U(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Таким же образом

$$\rho_k^{\alpha+2} U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant C(A) \int\limits_{K_{\rho_k}\left(z_l^{(k)}\right)} U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^{\alpha}\, dm_2(\zeta).$$

Суммируя последние оценки по $l$, $1 \leqslant l \leqslant n_k$, получаем

$$I_k \lesssim {\rho_k}^{\alpha+2} \sum_{l=1}^{n_k} U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant C(A) \int\limits_{Q_k^*(1+\varepsilon)} U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^{\alpha}\, dm_2(\zeta).$$

Если $z_{l_1}^{(k)}, z_{l_2}^{(k)} \in Q_k$, то из теоремы Уитни следует, что

$$\rho\Big(z_{l_1}^{(k)}, \partial G\Big) \leqslant 2\rho\Big(z_{l_2}^{(k)}, \partial G\Big).$$

Из оценки

$$I_k \leqslant C(A) \int\limits_{Q_k^*(1+\varepsilon)} U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^{\alpha}\, dm_2(\zeta)$$

получаем

$$I_k \lesssim \sum_{l=1}^{n_k} \rho\Big(z_l^{(k)}, \partial G\Big)\, U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant C_1(A) \int\limits_{Q_k^*(1+\varepsilon)} U(\zeta)\, (\zeta, \partial G)\, \rho^{\alpha}\, dm_2(\zeta).$$

Теперь, учитывая, что $\{Q_k(1+\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ при $0 < \varepsilon < 1/4$ (см. [2]) покрывает $G$ конечно-кратно, непосредственно получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho(z_m, \partial G)^{\alpha+2}\, U(z_m) \lesssim \int\limits_G U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^{\alpha}\, dm_2(\zeta). \ \rhd$$

Ясно, что из теоремы 1 следуют теорема 2, $1'$, $2'$ и 3.

Доказательство теоремы 4. Как отмечено выше, из теоремы $1'$ следует, что если оператор $R$ отображает $S_\alpha^p$ в $\widetilde{l}_\alpha^p$, где

$$\widetilde{l}_\alpha^p = \left\{ w = \{w_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln^+ |w_k|\big)^p \big(1 - |z_k|\big)^{\alpha+2} < +\infty \right\},$$

то количество точек в каждом прямоугольнике

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

$$n_{k,l} = \operatorname{card}\big\{z_m : z_m \in \Delta_{k,l}\big\},$$

удовлетворяет условию
$$\sup_{k\in Z_+}\max_{-2^k\leqslant l<2^k-1}\{n_{k,l}\}<+\infty.$$

Докажем, что если $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — интерполяционная последовательность для $A^p_\alpha$, то $R$ отображает $S^p_\alpha$ на $\tilde{l}^p_\alpha$. Действительно, из теоремы $2'$ следует, что выполняется условие (2), а из теоремы $1'$ следует, что
$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(1-|z_k|\bigr)^{\alpha+2}\bigl(\ln^+|f(z_k)|\bigr)^p<+\infty$$
для произвольного $f\in S^p_\alpha$, $0<p<+\infty$, $\alpha>-1$.

Докажем, что если $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — интерполяционная последовательность для $A^p_\alpha$, то для произвольной последовательности $w=\{w_k\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{l}^p_\alpha$ существует функция $f\in S^p_\alpha$ такая, что $R(f)=w$, т. е. $f(z_k)=w_k$, $k=1,2,\ldots$

Итак, пусть
$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(1-|z_k|\bigr)^{\alpha+2}\bigl(\ln^+|w_k|\ \bigr)^p<+\infty.$$
Последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ разобьем на две части:

1. $\{w_{k_n}\}_1^{\infty}$: $|w_{k_n}|>1$;
2. $\{w_{m_n}\}_1^{\infty}$: $|w_{m_n}|\leqslant 1$.

Не ограничивая общности можно предполагать, что количество таких чисел бесконечно.

Поскольку $\{z_n\}_1^{\infty}$ — интерполяционная последовательность для $A^p_\alpha$, то существует функция $g_1\in A^p_\alpha$ такая, что
$$g_1(z_{m_n})=0,\quad n=1,2,\ldots,$$
$$g_1(z_{k_n})=\ln w_{k_n},\quad n=1,2,\ldots,$$
где выбрана главная ветвь логарифма. Аналогично построим функцию $g_2\in A^p_\alpha$ такую, что
$$g_2(z_{k_n})=1,\quad n=1,2,\ldots,$$
$$g_2(z_{m_n})=w_{m_n},\quad n=1,2,\ldots$$

Положим
$$f(z)=e^{g_1(z)}g_2(z),\quad z\in\mathbb{D}.$$
Докажем, что функция $f$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, т. е.
$$f\in S^p_\alpha,\quad f(z_k)=w_k,\quad k=1,2,\ldots$$
Пусть $k=k_n$ при некотором $n$, тогда
$$f(z_k)=e^{g_1(z_{k_n})}g_2(z_{k_n})=w_{k_n}=w_k.$$
Пусть теперь $k=m_n$ при некотором $n$, тогда
$$f(z_k)=e^{g_1(z_{m_n})}g_2(z_{m_n})=g_2(z_{m_n})=w_{m_n}=w_k.$$
Из последних равенств следует, что $f(z_k)=w_k, k=1,2,\ldots$ $\triangleright$

Авторы статьи выражают благодарность рецензенту статьи за внимательное ознакомление с рукописью и конструктивные замечания.

## Литература

1. *Djrbashyan A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the Theory of $A^p_\alpha$ Spaces.—Leipzig: B. G. Teubner, 1988.—200 p.—(Teubner-Texte zur Math. Bd. 105).
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.
3. *Шамоян Ф. А.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах $H^p$, $0 < p < +\infty$ // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Математика.—1976.—Т. 11, № 2.—С. 124–131.
4. *Шамоян Ф. А.* Теорема вложения в пространствах $n$-гармонических функций и некоторые приложения // Докл. АН Арм. ССР.—1976.—Т. 62, № 1.—С. 10–14.
5. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman Spaces.—N. Y.: Springer, 2000.—199 p.—(Grad. Texts in Math.).
6. *Seip K.* Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions.—Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2004.—139 p.—(Univ. Lect. Ser. Vol. 33).
7. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств.—М.: Мир, 1971.—125 с.

*Статья поступила 28 февраля 2018 г.*

Шамоян Файзо Агитович
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
*профессор кафедры математического анализа*
РОССИЯ, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru

Тасоева Екатерина Владимировна
Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского,
*аспирант, преподаватель кафедры АИСиТ*
РОССИЯ, 241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14
E-mail: eka3543628@yandex.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 62–73*

# WHITNEY DECOMPOSITION, EMBEDDING THEOREMS, AND INTERPOLATION IN WEIGHTED SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Shamoyan, F. A.[1] and Tasoeva, E. V.[2]

[1] Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia;
[2] Bryansk State University, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru, eka3543628@yandex.ru

**Abstract.** According to the classical Whitney theorem, each open set on the plane can be decomposed as a union of special squares whose interiors do not intersect. In the paper, using the properties of Whitney squares, a new concept is introduced. For each center $a_k$ of the Whitney square, there is a point $a_k^* \in \mathbb{C} \setminus G$ such that the distance to the boundary of the open set $G$ is between two constants, regardless of $k$. In particular, a necessary and sufficient condition for a sequence $(z_k)_1^\infty \subset G$ under which the operator $R(f) = (f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots)$ maps generalized Nevanlinna's flat classes in a domain $G$ of a complex plane in $l^p$.

**Key words:** Nevanlinna class, interpolation, Witny decomposition, Berman space.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 30H15, 32A35.

**For citation:** *Shamoyan, F. A. and Tasoeva, E. V.* Whitney Decomposition, Embedding Theorems and Interpolation Questions in Weight Spaces of Analytic Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 62–73 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27735.

## References

1. *Djrbashyan, A. E. and Shamoyan, F. A. Topics in the Theory of $A^p_\alpha$ Spaces. Teubner-Texte zur Math. Bd.* 105, Leipzig, B. G. Teubner, 1988, 200 p.
2. *Stein, E. M. Singular Integrals Differentiability Properties of Functions*, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1970, xiv+287 p.
3. *Shamoyan, F. A.* Imbedding Theorems Connected With Problem of Multiple Interpolation in Spaces $H^p$, $0 < p < +\infty$, *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1976, vol. 11, no. 2, pp. 124–131 (in Russian).
4. *Shamoyan, F. A.* The Embending Theorem in Space of $n$-Harmonic Functions and Some Applications, *Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1976, vol. 62, no. 1, pp. 10–14 (in Russian).
5. *Hedenmalm, H., Korenblum, B. and Zhu, K. Theory of Bergman Spaces. Grad. Texts in Math.*, N. Y., Springer, 2000, 199 p.
6. *Seip, K. Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions. Univ. Lect. Ser. Vol.* 33, Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 2004, 139 p.
7. *Carleson, L. Selected Problems on Exceptional Sets*, Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand, 1967, vi+151 p.

*Received February 28, 2018*

Faizo A. Shamoyan
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia,
*Professor of the Mathematical Analysis Department*
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru

Ekaterina V. Tasoeva
Bryansk State University,
14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia,
*Post-Graduate Student*
E-mail: eka3543628@yandex.ru

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 74–78*

# ЗАМЕТКИ

**УДК** 519.17
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27736

## BLOCK GRAPH OF A GRAPH

**A. Kelkar**[1], **K. Jaysurya**[1], **H. M. Nagesh**[1]

[1] Department of Computer Science and Engineering,
P.E.S. Institute of Technology, Bangalore South Campus,
Bangalore, Karnataka 560100, India
E-mail: `ashwinikelkar23@gmail.com`,
`reddyjaysurya@gmail.com`, `nageshhm@pes.edu`

**Abstract.** The *block graph* of a graph $G$, written $B(G)$, is the graph whose vertices are the blocks of $G$ and in which two vertices are adjacent whenever the corresponding blocks have a cut-vertex in common. We study the properties of $B(G)$ and present the characterization of graphs whose $B(G)$ are planar, outerplanar, maximal outerplanar, minimally non-outerplanar, Eulerian, and Hamiltonian. A necessary and sufficient condition for $B(G)$ to have crossing number one is also presented.

**Key words:** crossing number, inner vertex number, dutch windmill graph, complete graph.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 05C05, 05C45.

**For citation:** *Kelkar, A., Jaysurya, K. and Nagesh, H. M.* Block Graph of a Graph, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 74–78. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27736.

### 1. Introduction

Notations and definitions not introduced here can be found in [1]. There are many graph operators (or graph valued functions) with which one can construct a new graph from a given graph, such as the line graph, the total graph, and their generalizations. One such generalization is the block graph concept whose properties and characterizations were considered in [2]. It is the object of this paper to study some of the structural properties of the block graph such as the planarity, outer planarity, etc.

We need some concepts and notations on graphs. A graph $G = (V, E)$ is a pair, consisting of some set $V$, the so-called *vertex set*, and some subset $E$ of the set of all 2-element subsets of $V$, the *edge set*. We write $x = (p, q)$ and say that $p$ and $q$ are *adjacent vertices* (sometimes denoted $p$ *adj* $q$).

A graph $G$ is *connected* if between any two distinct vertices there is a path. A *maximal connected subgraph* of $G$ is called a *component* of $G$. A *cut-vertex* of a graph is one whose removal increases the number of components. A *non-separable* graph is connected, nontrivial, and has no cut-vertices. A *block* of a graph is a maximal non-separable subgraph. If two distinct blocks $B_1$ and $B_2$ are incident with a common cut-vertex, then they are called *adjacent blocks*.

A graph $G$ is *planar* if it has a drawing without crossings. For a planar graph $G$, the *inner vertex number* $i(G)$ is the minimum number of vertices not belonging to the boundary of the exterior region in any embedding of $G$ in the plane.

If a planar graph $G$ is embeddable in the plane so that all the vertices are on the boundary of the exterior region, then $G$ is said to be *outerplanar*. An outerplanar graph $G$ is *maximal outerplanar* if no edge can be added without losing outerplanarity. A *grap* $G$ is said to be *minimally non-outerplanar* if $i(G) = 1$ [3]. The least number of edge crossings of a graph $G$, among all planar embeddings of $G$, is called the *crossing number* of $G$ and is denoted by $cr(G)$.

A *star graph* $K_{1,n}$ $(n \geqslant 3)$, is the complete bipartite graph. The *dutch windmill graph* $D_3^{(m)}$, also called a *friendship graph*, is the graph obtained by taking $m$ copies of the cycle graph $C_3$ with a vertex in common and therefore corresponds to the usual windmill graph $D_3^{(m)}$. It is therefore natural to extend the definition to $D_n^{(m)}$, consisting of $m$ copies of $C_n$.

Definition 1.1. The *line graph* of a graph $G$, written $L(G)$, is the graph whose vertices are the edges of $G$, with two vertices of $L(G)$ adjacent whenever the corresponding edges of $G$ have a common vertex.

Definition 1.2. The *block graph* of a graph $G$, written $B(G)$, is the graph whose vertices are the blocks of $G$ and in which two vertices are adjacent whenever the corresponding blocks have a cut-vertex in common.

Note that $B(G)$ is defined only for graphs which have at least one cut-vertex or (at least two blocks). In Fig. 1, a graph $G$ and its $B(G)$ are shown.

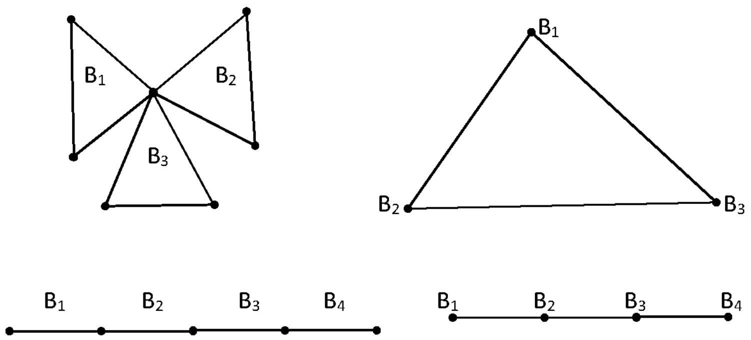



**Fig. 1.**

## 2. Properties of Block Graphs

In this section we present some of the basic properties of $B(G)$.

**Property 2.1.** If $G$ is a tree of order $n$ $(n \geqslant 3)$, then $L(G) \cong B(G)$.

**Property 2.2.** There is no non-trivial graph $G$ which is isomorphic to its $B(G)$.

**Property 2.3.** The block graph $B(G)$ of a graph $G$ is a block if $G$ contains exactly one cut-vertex.

**Property 2.4.** If the number of cut-vertices of a path $P_n$ $(n \geqslant 3)$ is $\alpha$, then number of cut-vertices of the corresponding $B(P_n)$ is $\alpha - 1$. Clearly, the number of cut-vertices of $B(K_{1,n})$ is zero.

**Property 2.5.** If $G$ is a path $P_n$ $(n \geqslant 2)$, then the size of $B(P_n)$ equals $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n + 1$, where $d_i$ is the degree of the vertices of $P_n$.

**Property 2.6.** If $G$ is a star graph $K_{1,n}$ $(n \geqslant 3)$, then the size of $B(K_{1,n}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

## 3. Characterization of $B(G)$

We now characterize the graphs whose $B(G)$ are planar.

**Theorem 3.1.** *The block graph $B(G)$ of a graph $G$ is planar if and only if $G$ is either a star graph $K_{1,n}$ $(2 \leqslant n \leqslant 4)$ or a dutch windmill graph $D_n^{(m)}$ $(2 \leqslant m \leqslant 4)$.*

$\lhd$ Suppose that $B(G)$ is planar. Assume that $G = K_{1,n}$ $(n \geqslant 5)$. If $G = K_{1,5}$, then $B(G) = K_5$, which is non-planar, a contradiction. Assume now that $G = D_n^{(m)}$ $(m \geqslant 5)$. If $G = D_n^{(5)}$, then $B(G) = K_5$, again a contradiction.

Conversely, suppose that $G$ is either a star graph $K_{1,n}$ $(2 \leqslant n \leqslant 4)$ or a dutch windmill graph $D_n^{(m)}$ $(2 \leqslant m \leqslant 4)$. We consider the following cases.

**Case 1**: If $G = K_{1,2}$, then $B(G) = K_2$, which is planar.
**Case 2**: If $G = K_{1,3}$, then $B(G) = K_3$, which is planar.
**Case 3**: If $G = K_{1,4}$, then $B(G) = K_4$, which is planar.
**Case 4**: If $G = D_n^{(2)}$, then $B(G) = K_2$, which is planar.
**Case 5**: If $G = D_n^{(3)}$, then $B(G) = K_3$, which is planar.
**Case 6**: If $G = D_n^{(4)}$, then $B(G) = K_4$, which is planar.

Therefore, by all the cases above, $B(G)$ is planar. This completes the proof. $\rhd$

We now establish a characterization of graphs whose $B(G)$ are outerplanar; maximal outerplanar; and minimally non-outerplanar.

**Theorem 3.2.** *The block graph $B(G)$ of a graph $G$ is outerplanar if and only if $G$ is either $K_{1,3}$ or $D_n^{(3)}$.*

$\lhd$ Suppose that $B(G)$ is outerplanar. Assume that $G$ is either $K_{1,n}$ $(n \geqslant 4)$ or $D_n^{(m)}$ $(m \geqslant 4)$. If $G = K_{1,4}$, then $B(G) = K_4$. Clearly the inner vertex number of $B(G)$ is one, i. e., $i(B(G)) = 1$, a contradiction. Assume now that $G = D_n^{(m)}$ $(m \geqslant 4)$. If $G = D_n^{(4)}$, then $B(G) = K_4$, again a contradiction.

Conversely, suppose that $G$ is either $K_{1,3}$ or $D_n^{(3)}$. If $G = K_{1,3}$, then $B(G) = K_3$. Clearly the inner vertex number of $B(G)$ is zero, i. e., $i(B(G)) = 0$. If $G = D_n^{(3)}$, then $B(G) = K_3$, and thus $i(B(G)) = 0$. Therefore, $B(G)$ is outerplanar. This completes the proof. $\rhd$

**Theorem 3.3.** *The block graph $B(G)$ of a graph $G$ is maximal outerplanar if and only if $G$ is either $K_{1,3}$ or a path $P_3$.*

$\lhd$ Suppose that $B(G)$ is maximal outerplanar. Assume that $G$ is $K_{1,n}$ $(n \geqslant 4)$. If $G = K_{1,4}$, then $B(G) = K_4$, which is non-outerplanar, a contradiction. Assume now that $G$ is a path $P_n$ of order $n$ $(n \geqslant 4)$. By definition, $B(G)$ is a path of order $n - 1$. Clearly, $i(B(G)) = 0$, and the addition of an edge does not change the inner vertex number of $B(G)$. Clearly, $B(G)$ is not maximal outerplanar, again a contradiction.

Conversely, suppose that $G$ is either $K_{1,3}$ or a path $P_3$. If $G = K_{1,3}$, then $B(G) = K_3$, which is maximal outerplanar. If $G = P_3$, then $B(G) = P_2$, which is also maximal outerplanar. This completes the proof. $\rhd$

**Theorem 3.4.** *The block graph $B(G)$ is minimally non-outerplanar if and only if $G$ is either $K_{1,4}$ or $D_n^{(4)}$.*

$\lhd$ Suppose $B(G)$ is minimally non-outerplanar. Assume that $G = K_{1,5}$. By definition, $B(G) = K_5$, which is non-planar, a contradiction. On the other hand, if $G = D_n^{(5)}$, then $B(G) = K_5$, again a contradiction.

Conversely, suppose that $G$ is either $K_{1,4}$ or $D_n^{(4)}$. By definition, $B(G) = K_4$. Clearly, $i(B(G)) = 1$. Hence $B(G)$ is minimally non-outerplanar. This completes the proof. $\triangleright$

**Theorem 3.5.** *The block graph $B(G)$ of a graph $G$ has crossing number one if and only if $G$ is either $K_{1,5}$ or $D_n^{(5)}$.*

$\triangleleft$ Suppose $G$ has crossing number one. Assume that $G = K_{1,n}$ $(n \geqslant 6)$. If $G = K_{1,6}$, then $B(G) = K_6$. Clearly, $cr(B(G)) > 1$, a contradiction. On the other hand, if $G = D_n^{(6)}$, then $B(G) = K_6$, a contradiction.

Conversely, suppose that $G$ is either $K_{1,5}$ or $D_n^{(5)}$. By definition, $B(G) = K_5$. Since the crossing number of $K_5$ is exactly one, $cr(B(G)) = 1$. This completes the proof. $\triangleright$

Definition 3.1. An *Eulerian cycle* in an undirected graph is a cycle that uses each edge exactly once. If such a cycle exists, then the graph is called *Eulerian*.

**Theorem 3.6** (Harary [1]). *A connected graph $G$ is said to be Eulerian if and only if the degree of each vertex of $G$ is even.*

**Theorem 3.7.** *The block graph $B(G)$ of a graph $G$ is Eulerian if and only if $G$ is either $K_{1,2k+1}$ or $D_n^{(2k+1)}$ $(k \geqslant 1)$.*

$\triangleleft$ Suppose $B(G)$ is Eulerian. Assume that $G = K_{1,2k}$ $(k \geqslant 1)$. By definition, $B(G) = K_{2k}$ in which degree of each vertex is $2k-1$, which is odd. Since the degree of each vertex of $B(G)$ is odd, Theorem 3.6 implies that $B(G)$ is non-Eulerian, a contradiction. On the other hand, if $G = D_n^{(2k)}$, then $B(G) = K_{2k}$, again a contradiction.

Conversely, suppose that $G$ is either $K_{1,2k+1}$ or $D_n^{(2k+1)}$ $(k \geqslant 1)$. By definition, $B(G) = K_{2k+1}$, in which the degree of each vertex of $B(G)$ is $2k$, which is even for every $k \geqslant 1$. Since the degree of each vertex of $B(G)$ is even, Theorem 3.6 implies that $B(G)$ is Eulerian. This completes the proof. $\triangleright$

Definition 3.2. A *Hamiltonian path* is a path that visits each vertex of the graph exactly one. A graph is *Hamiltonian* if for every pair of vertices there is a Hamiltonian path between the two vertices.

**Theorem 3.8.** *The block graph $B(G)$ of $K_{1,n}$ $(n \geqslant 3)$ or $D_n^{(m)}$ $(m \geqslant 3)$ is Hamiltonian.*

$\triangleleft$ Suppose that $G$ is either $K_{1,n}$ $(n \geqslant 3)$ or $D_n^{(m)}$ $(m \geqslant 3)$. By definition, $B(G)$ is a complete graph of order $n$ or $m$. Since every complete graph is Hamiltonian, $B(G)$ is Hamiltonian. This completes the proof. $\triangleright$

## 4. Open problems

4.1. One can naturally extend these concepts to the directed graph version. What can one say about the properties of the directed version?

4.2. If the number of cut-vertices of the graph $G$ is $\beta$, then what is the number of cut-vertices of the corresponding $B(G)$?

## References

1. *Harary, F. Graph Theory*, Reading, Addison Wesley, 1969.
2. *Harary, F.* A Characterization of Block-Graphs, *Canadian Mathematical Bulletin*, 1963, vol. 6, issue 1, pp. 1–6. DOI: 10.4153/CMB-1963-001-x.
3. *Kulli, V. R.* On Minimally Nonouterplanar Graphs, *Proceeding of the Indian National Science Academy*, 1975, vol. 40, pp. 276–280.

*Received May 7, 2018*

Ashwini Kelkar
Department of Computer Science and Engineering,
P.E.S. Institute of Technology, Bangalore South Campus,
Bangalore, Karnataka 560100, India
*Student*
E-mail: ashwinikelkar23@gmail.com

K. Jaysurya
Department of Computer Science and Engineering,
P.E.S. Institute of Technology, Bangalore South Campus,
Bangalore, Karnataka 560100, India
*Student*
E-mail: reddyjaysurya@gmail.com

Hadonahalli M. Nagesh
Department of Computer Science and Engineering,
P.E.S. Institute of Technology, Bangalore South Campus,
Bangalore, Karnataka 560100, India
*Assistant Professor*
E-mail: nageshhm@pes.edu

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 74–78*

# ГРАФ БЛОКОВ

Келкар Э.[1], Джейсурья К.[1], Нагеш Х. М.[1]

[1] Кафедра компьютерной науки и техники,
Технологический институт PES, Бангалор, Индия
E-mail: ashwinikelkar23@gmail.com, reddyjaysurya@gmail.com,
nageshhm@pes.edu

**Аннотация.** Граф блоков $B(G)$ графа $G$ — граф, вершинами которого являются блоки графа $G$ и в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им блоки имеют общую точку сочленения. Изучаются различные свойства графа блоков $B(G)$, в частности, даны характеристики графов, у которых графы блоков $B(G)$ являются плоскими (планарными), внешнепланарными, максимальными внешнепланарными, минимальными невнешнепланарными, эйлеровыми и гамильтоновыми. Также представлено необходимое и достаточное условие, чтобы число пересечения графа блоков $B(G)$ равнялось единице.

**Ключевые слова:** число пересечения, число внутренних вершин, граф «голландская мельница», полный граф.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 05C05, 05C45.

**Образец цитирования:** *Kelkar, A., Jaysurya, K. and Nagesh, H. M.* Block Graph of a Graph // *Владикавк. мат. журн.*—2019.—Т. 21, № 1.—С. 74–78 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27736.

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 79–84*

**УДК** 517.518.13, 517.983.23
**DOI** 10.23671/VNC.2019.1.27737

# О КОМБИНАЦИЯХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КОНТУРОВ И ОБЛАСТЕЙ И НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**С. Б. Климентов**[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: sbklimentov@sfedu.ru

**Аннотация.** В работе изучаются суперпозиции диффеоморфизмов регулярных контуров, гомеоморфных окружности, и ограниченных ими областей с одномерными и двумерными интегральными операторами. Установлено свойство таких одномерных суперпозиций, аналогичное свойству бесселевых потенциалов.

**Ключевые слова:** диффеоморфизм контуров и областей, интегральный оператор.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 30E20.

**Образец цитирования:** *Климентов С. Б.* О комбинациях диффеоморфизмов контуров и областей и некоторых интегральных операторов // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 79–84. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27737.

## 1. Введение. Формулировка результатов

Цель настоящей заметки — обобщение и развитие результатов статьи [1], а также установление некоторых свойств двумерных интегральных операторов, необходимых при исследовании эллиптических уравнений и систем.

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной $z$-плоскости $E$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга $D$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $G$ — односвязную ограниченную область комплексной $\zeta$-плоскости с регулярной границей $\mathscr{L}$, $\overline{G} = G \cup \mathscr{L}$; $W$ — односвязную ограниченную область комплексной $\omega$-плоскости с регулярной границей $\mathscr{C}$, $\overline{W} = W \cup \mathscr{C}$.

В работе используется банахово пространство $C^{k,\alpha}(\Gamma)$ комплекснозначных функций, имеющих на $\Gamma$ $k$ производных, где $k \geqslant 1$ — целое число, причем $k$-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. В этом пространстве предполагается заданной стандартная норма (см., например, [2, с. 25]). Как обычно, предполагаем, что $C^{k,0}(\Gamma) = C^k(\Gamma)$, $C^{0,\alpha}(\Gamma) = C^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha < 1$. Вместо контура $\Gamma$ в этих пространствах может фигурировать любой другой контур соответствующей гладкости.

Будем говорить, что контур $\mathscr{L} \in C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, если существует гомеоморфное отображение $\zeta = f(z)$ окружности $\Gamma$ на $\mathscr{L}$ класса $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, такое, что $f'(z) \neq 0$. Отметим, что при этом обратное отображение $z = f^{-1}(\zeta)$ будет класса $C^{k,\alpha}(\mathscr{L})$. В этом случае отображение $\zeta = f(z)$ (как и обратное) называют диффеоморфизмом класса $C^{k,\alpha}$

контуров $\Gamma$ и $\mathscr{L}$. Аналогично определяется диффеоморфизм любых контуров соответствующей гладкости.

Отметим также, что если $s$ — длина дуги на $\Gamma$, а $\sigma$ — длина дуги на $\mathscr{L}$, то при диффеоморфизме имеют место соотношения: $\zeta'_t(t) \neq 0$, где $\zeta'_t = \zeta'_s \cdot s'_t = \zeta'_s \cdot \overline{t'}_s$, $t$ — аффикс точки контура $\Gamma$; и, соответственно, $z'_\tau(\tau) \neq 0$, где $z'_\tau = z'_\sigma \cdot \sigma'_\tau = z'_\sigma \cdot \overline{\tau'}_\sigma$, $\tau$ — аффикс точки контура $\mathscr{L}$.

Также в работе рассматриваются соболевские пространства $W^k_p(\overline{G})$, $k \geqslant 1$, $p > 2$, со стандартной нормой. Замкнутое подпространство голоморфных функций пространства $W^k_p(\overline{G})$ с индуцированной нормой будем обозначать $A^k_p(\overline{G})$.

Обобщая [3, с. 33], для функции $\varphi(\zeta)$, определенной на $\mathscr{L}$, введем оператор $\mathscr{W}_p\varphi(\omega) = \mathscr{W}\varphi(\omega) = \varphi(p(\omega))$, где $\zeta = p(\omega) = \zeta(\omega)$ — диффеоморфное класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, отображение контура $\mathscr{C} \in C^{k,\alpha}$ на контур $\mathscr{L} \in C^{k,\alpha}$. Очевидно, $\mathscr{W} = \mathscr{W}_p$ — линейный, ограниченный, непрерывно обратимый оператор, действующий из $C^{k,\alpha}(\mathscr{L})$ в $C^{k,\alpha}(\mathscr{C})$. Там, где это не может вызвать недоразумений, индекс у $\mathscr{W}$ будем опускать.

Обозначим

$$S_{\mathscr{C}}\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathscr{C}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad t \in \mathscr{C}, \tag{1}$$

одномерный сингулярный (интегральный) оператор. Для других контуров соответствующий оператор определяется аналогично.

Предметом настоящего исследования является суперпозиция

$$\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) = (\mathscr{W}S_{\mathscr{L}}\mathscr{W}^{-1} - S_{\mathscr{C}})\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathscr{C}} k(\tau,t)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$k(\tau,t) = \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau)-\zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t}, \tag{3}$$

а также суперпозиция

$$Nw(z) = \iint\limits_{D} \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)} - \frac{1}{t-z}\right] \partial_{\bar z} w(\zeta(z))\,dx\,dy, \tag{4}$$

где $\zeta = \zeta(z)$ — однолистное конформное отображение $D$ на $G$.

Основными результатами этой работы являются следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\mathscr{C})$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\mu = \alpha + \beta \leqslant 2$, то при $\mu < 1$ $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{\mu}(\mathscr{C})$, причем*

$$\|\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t)\|_{C^{\mu}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\mathscr{C})}, \tag{5}$$

*где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})}$.*

*Если $\mu = 1$, то $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{\mu-\varepsilon}(\mathscr{C})$ для любого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \mu$ с выполнением оценки, аналогичной* (5).

*Если $\mu > 1$, то $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{1,\mu-1}(\mathscr{C})$, причем*

$$\|\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t)\|_{C^{1,\mu-1}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\mathscr{C})}, \tag{6}$$

*где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})}$.*

**Следствие 1.** *Если* $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{1,\beta}(\mathscr{C})$, $0 < \beta \leqslant 1$, *то* $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, *причем*

$$\|\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,1}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{1,\beta}(\mathscr{C})}, \tag{7}$$

*где константа зависит лишь от* $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})}$.

Замечание 1. В [1] доказан частный случай теоремы 1, когда $\mathscr{L}$ и $\mathscr{C}$ — единичные окружности.

Как показывают примеры (см. [1]), при $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$ показатель $\alpha$ в левой части (7) не улучшаем в том смысле, что существуют функции $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, $\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$ такие, что $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, но $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \notin C^{1,\gamma}(\mathscr{C})$ при любом $\gamma$, $1 \geqslant \gamma > \alpha$.

**Теорема 2.** *Пусть* $G \in C^1_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\zeta = \zeta(z)$ — *однолистное конформное отображение* $D$ *на* $G$, $w(\zeta) \in W^1_s(\overline{G})$, $s > 2$. *Тогда при* $\alpha s < 2$ $Nw(z) \in A^1_q(\overline{D})$, *где* $q = \frac{2s}{2-\alpha s}$, *и*

$$\|Nw(z)\|_{W^1_q(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|\partial_{\overline{\zeta}} w\|_{L_s(\overline{G})}, \tag{8}$$

*причем* const *от* $w$ *не зависит.*

## 2. Доказательство теоремы 1

В рассуждениях работы [1] нигде не используется предположение, что $\mathscr{L}$ — единичная окружность, т. е. в [1] теорема доказана для оператора

$$\Psi_{\mathscr{L}\Gamma}\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Сделав в (9) замену переменной интегрирования $\tau = f^{-1}(\eta)$, получим (о замене переменной интегрирования в сингулярном интеграле см., например, [4, с. 31]):

$$\Psi_{\mathscr{L}\Gamma}\varphi(t) = -\Psi_{\Gamma\mathscr{L}}\varphi(f^{-1}(\zeta)) = -\Psi_{\Gamma\mathscr{L}}\mathscr{W}_{f^{-1}}\varphi(\zeta).$$

Так как $\mathscr{W}$ — линейный изоморфизм пространств $C^{k,\alpha}(\mathscr{C})$ и $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, то отсюда получаем справедливость теоремы 1 и для $\Psi_{\Gamma\mathscr{L}}$.

Пусть теперь $\omega = g(t)$ — $C^{1,\alpha}$-диффеоморфизм $\Gamma$ на $\mathscr{C}$, а $\zeta = f(t) = p(g(t))$ — $C^{1,\alpha}$-диффеоморфизм $\Gamma$ на $\mathscr{L}$. Из (2) имеем

$$\mathscr{W}_g\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) = \Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(g(t)) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{g'(\tau)}{g(\tau)-g(t)}\right]\varphi(g(\tau))\,d\tau$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\varphi(g(\tau))\,d\tau.$$

Таким образом,

$$\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) = -\mathscr{W}_{g^{-1}}\Psi_{\mathscr{C}\Gamma}\mathscr{W}_g\varphi(t) + \mathscr{W}_{g^{-1}}\Psi_{\mathscr{L}\Gamma}\mathscr{W}_g\varphi(t)$$

и вопрос сведен к уже рассмотренному частному случаю.

Теорема 1 доказана.

### Доказательство теоремы 2

**Лемма 1.** *Пусть* $G \in C^1_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\mathscr{L} = \partial G$, $D$ *— единичный круг,* $\partial D = \Gamma$, $\zeta = \zeta(z)$ *— однолистное конформное отображение* $D$ *на* $G$, $w(\zeta) \in W^1_s(\overline{G})$, $s > 2$.

*Тогда имеет место формула*

$$Nw(z) = \iint\limits_D \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)} - \frac{1}{t - z}\right] \partial_{\bar z} w(\zeta(z))\, dx\, dy$$
$$= \frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)} - \frac{1}{t - z}\right] w(\zeta(t))\, dt, \quad t = x + iy. \tag{10}$$

$\lhd$ В силу формулы Помпейю [2, с. 57] имеют место соотношения

$$w(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{w_{\bar\tau}(\tau)}{\tau - \zeta}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{L}} \frac{w(\tau)}{\tau - \zeta}\, d\tau, \quad \tau = \xi + i\eta, \tag{11}$$

$$w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t))}{t - z}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t))}{t - z}\, dt, \quad t = x + iy. \tag{12}$$

Отметим, что по теореме Келлога [2, гл. 1, § 2] $\zeta(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$.

Перейдем в интегралах формулы (11) к переменной интегрирования $t$, $\tau = \zeta(t)$, и заменим $\zeta$ на $\zeta(z)$:

$$w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t)) \cdot \zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t)) \cdot \zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)}\, dt.$$

Вычитая из последнего равенства (12), получим (10). $\rhd$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Из формулы (10) очевидно, что $\partial_{\bar z} Nw(z) \equiv 0$, так что достаточно показать, что $\partial_z Nw(z) \in L_q(\overline{D})$.

Продифференцируем (11) и (12) соответственно по $\zeta$ и $z$:

$$\partial_\zeta w(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{w_{\bar\tau}(\tau)}{(\tau - \zeta)^2}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{L}} \frac{w(\tau)}{(\tau - \zeta)^2}\, d\tau, \tag{13}$$

$$\partial_z w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t))}{(t - z)^2}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t))}{(t - z)^2}\, dt. \tag{14}$$

Двойные интегралы в правых частях этих формул понимаются в смысле главного значения, и все слагаемые в правых частях принадлежат соответственно классам $L_s(\overline{G})$ и $L_s(\overline{D})$ [2, гл. 1, §§ 8, 9].

Поскольку $\zeta = \zeta(z)$ — конформное отображение, формула замены переменной в двойном сингулярном интеграле в (13) имеет обычный вид [5, гл. 2, § 5, п.п. 4,5]. Так же, как и выше, перейдем в (13) к переменным $t$, $z$:

$$\partial_z w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t))\zeta'(t)\zeta'(z)}{(\zeta(t) - \zeta(z))^2}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t))\zeta'(t)}{(\zeta(t) - \zeta(z))^2}\, dt. \tag{15}$$

Вычитая (14) из (15), с учетом (10) получим

$$\partial_z Nw(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{\zeta'(t)\zeta'(z)}{(\zeta(t)-\zeta(z))^2} - \frac{1}{(t-z)^2}\right] w_{\bar t}(\zeta(t))\,dx\,dy \in L_s(\overline{D}).$$

Далее имеем [1]

$$\left|\frac{\zeta'(t)\zeta'(z)}{(\zeta(t)-\zeta(z))^2} - \frac{1}{(t-z)^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|t-z|^{2-\alpha}},$$

где const зависит лишь от $\|\zeta(z)\|_{C^1_\alpha(\overline{D})}$.

Отсюда и из $\partial_{\bar z} w(\zeta(z)) \in L_s(\overline{D})$ получаем $\partial_z Nw(z) \in L_q(\overline{D})$ [6, гл. 5, п. 1.2] и

$$\|\partial_z Nw(z)\|_{L_q(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|\partial_{\bar\zeta} w\|_{L_s(\overline{G})}. \tag{16}$$

Также имеем неравенство (см. [2, с. 54]):

$$\|Nw(z)\|_{C(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|\partial_{\bar\zeta} w\|_{L_s(\overline{G})}. \tag{17}$$

Сопоставляя (16) и (17), получим (8). Теорема 2 доказана. $\triangleright$

## Литература

1. *Климентов С. Б.* О комбинациях диффеоморфных сдвигов окружности и некоторых одномерных интегральных операторов // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 1.—С. 30–40. DOI: 10.23671/VNC.2017.1.5819.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
3. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М.: Физматгиз, 1977.—448 с.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.
6. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—342 с.

*Статья поступила 5 апреля 2018 г.*

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
*ведущий научный сотрудник отдела математического анализа*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
*заведующий кафедрой геометрии*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-7406-3667

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2019, Volume 21, Issue 1, P. 79–84*

# ON COMBINATIONS OF DIFFEOMORPHISMS OF CURVES AND DOMAINS AND SOME INTEGRAL OPERATORS

Klimentov, S. B.[1,2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

E-mail: sbklimentov@sfedu.ru

**Abstract.** The superposition of diffeomorphisms of regular curves homeomorphic to the circle and domains bounded by them with the one-dimensional and two-dimensional integral operators are under consideration. A property of one-dimensional superposition similar to that of Bessel potentials is established.

**Key words:** diffeomorphism of paths and domains, integral operator.

**Mathematical Subject Classification (2000):** 30E20.

**For citation:** *Klimentov, S. B.* On the Combinations of the Diffeomorphisms of Curves and Domains and Some Integral Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 79–84. (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27737.

## References

1. *Klimentov, S. B.* On the Combinations of the Circle Shifts and Some One-Dimensional Integral Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 30–40 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2017.1.5819.
2. *Vekua, I. N. Generalized Analytic Functions*, Oxford, etc. Pergamon Press, 1962, 668 p.
3. *Litvinchuk, G. S. Kraevye zadachi i singulyarnye integralnye uravneniya so sdvigom* [Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with a Shift], Moscow, Fizmatgiz, 1977. 448 p. (in Russian).
4. *Gakhov, F. D. Boundary Value Problems*, Oxford, etc., Pergamon Press, 1966, 564 p.
5. *Mikhlin, S. G. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, Oxford, etc., Pergamon Press, 1965, 269 p.
6. *Stein Elias, M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1970, 290 p.

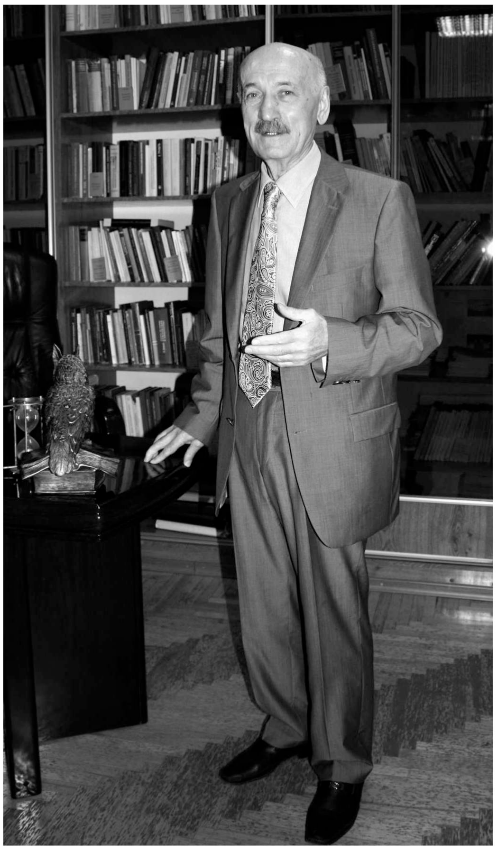
*Received April 5, 2018*

Sergey B. Klimentov
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
*Leading Researcher of the Department of Mathematical Analysis*;
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
*Head of Departament of Geometry*
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-7406-3667

*Владикавказский математический журнал*
*2019, Том 21, Выпуск 1, С. 85–87*

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## ПАМЯТИ АДАМА МАРЕМОВИЧА НАХУШЕВА (1938–2018)



27 декабря 2018 г. скончался заслуженный деятель науки Российской Федерации, Кабардино-Балкарской Республики, Карачаево-Черкесской Респубики и Республики Адыгея, доктор физико-математических наук, профессор Адам Маремович Нахушев.

Ушел из жизни крупный ученый, известный специалист в области прикладной и теоретической математики (математическое моделирование, уравнения математической биологии и уравнения смешанного типа, дробное исчисление).

Результаты первостепенного значения получены А. М. Нахушевым в областях математических проблем трансзвуковой газовой механики и аэродинамики, теории тепловлагообмена, дробного исчисления, лазерного излучения, математической биологии, автоматизированных систем прогнозирования и морской спутниковой системы связи. Выдающимся вкладом А. М. Нахушева в науку являются следующие результаты:

1. Метод постановки и исследования качественно новых краевых и внутреннекраевых задач со смещением, названных в России и за рубежом проблемами Нахушева.

2. Эффект влияния порядка вырождения и младших членов на корректность задачи Дарбу и неравноправие характеристик, как носителей граничных данных.

3. Теорема Нахушева об априорных оценках, учитывающих тип дифференциальных уравнений и ее следствие о том, что проблема получения для операторов смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка априорных оценок со скачком гладкости на две единицы, имеет отрицательное решение и в случае соболевских пространств с негативной формой.

4. Эффект локализации особенности градиента решения задачи Дарбу для уравнения Геллерстедта.

5. Аналог теоремы Ферма в дробном исчислении и принцип экстремума для операторов дробного дифференцирования.

6. Многомерный аналог теоремы о среднем значении для волнового уравнения и доказательство разрешимости проблемы поиска корректных краевых задач для уравнения Лаврентьева — Бицадзе в многомерных смешанных областях.

7. Исследование качественно нового класса дифференциальных уравнений состояния дробного порядка в сплошных средах с памятью.

8. Решение проблемы корректной постановки начальных и смешанных локальных задач для обобщенного уравнения переноса в средах с фрактальной геометрией.

9. Нелинейные обобщения закона Бугера — Ламберта — Бера и теоретический эффект локализации особенности градиента концентрации молекул в поглощающей среде.

10. Аналог уравнения Бернулли в дробном исчислении и обобщенный логистический закон развития непрерывных систем и их приложения при математическом моделировании полимерных систем, социально-исторических и этнических процессов.

А. М. Нахушев впервые ввел широко использующиеся в современной математике и ее приложениях такие понятия, как краевые задачи со смещением; нелокальные задачи; нагруженные дифференциальные уравнения; континуальные дифференциальные операторы и др.

Он является автором около 300 научных работ, в том числе ряда монографий:

1. «Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка». Нальчик: Эльбрус, 1992. 154 с.

2. «Уравнения математической биологии». М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

3. «Математическое моделирование социально-исторических и этнических процессов». Нальчик: Эль-Фа, 1998. 170 с. (в соавт. с Кенетовой Р. О.).

4. «Дробное исчисление и его применение». М.: Физматлит, 2003. 272 с.

5. «Задачи со смещением для уравнений в частных производных». М.: Наука, 2006. 287 с.

6. «Нагруженные уравнения и их применение». М.: Наука, 2012. 232 с.

Как ведущий специалист, А. М. Нахушев написал для всемирно известной Математической энциклопедии (выпущена в 1977–1985 гг. издательством «Советская энциклопедия» в пяти томах) более десяти статей, посвященных важнейшим направлениям современной математики: «Бицадзе уравнение», «Гурса задача», «Дифференциальное уравнение с частными производными», «Дифференциальное уравнение с частными производными с особенностями в коэффициентах», «Запаздывающих потенциалов метод», «Кирхгофа формула», «Коши — Ковалевской теорема», «Римана метод», «Смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем», «Смешанного типа уравнение», «Трикоми задача», «Трикоми уравнение», «Шаудера метод».

Научная школа А. М. Нахушева по нелокальным задачам и уравнениям смешанного типа хорошо известна во всем мире. Его учениками являются более шестидесяти докторов и кандидатов физико-математических наук.

Адам Маремович родился в с. Заюково Эльбрусского района Кабардино-Балкарской АССР. В 1955 г. после окончания Заюковской средней школы он поступил и в 1961 г. с отличием окончил Кабардино-Балкарский государственный университет по специальности «Математика», со второго курса был председателем научно-студенческого общества КБГУ, в те же годы им была решена проблема Риккати.

В начале шестидесятых годов А. М. Нахушев окончил аспирантуру в Институте математики Сибирского отделения Академии наук СССР. В 1966 г. после защиты кандидатской диссертации по приглашению академика М. А. Лаврентьева стал старшим научным сотрудником ИМ СО АН СССР, где в 1971 г. защитил докторскую диссертацию, посвященную математическим проблемам трансзвуковой механики и аэродинамики. Работам

А. М. Нахушева в этом направлении высокую оценку дали академики М. А. Лаврентьев и С. Л. Соболев.

В 1973 г. вернулся на родину, в КБ АССР, где ярко проявились как научные и педагогические, так и организаторские способности А. М. Нахушева. Ему удалось создать не только математическую школу, которая объединяет ведущих ученых, работающих во многих научных центрах России, стран ближнего и дальнего зарубежья, но и научно-исследовательский Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук. Он основатель и первый Президент Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.

А. М. Нахушев награжден орденом Почета и орденом Дружбы, медалями «За освоение целинных и залежных земель», «За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина», «За заслуги перед Республикой Адыгея», «За заслуги в развитии науки Республики Казахстан», наградой Международной Черкесской ассоциации, почетными грамотами Президента Чеченской Республики, Президиума Верховного совета КБ АССР, Президиума народного собрания КЧР, Правительства КБР, Парламента КБР, Правительства КЧР, Российской академии наук и профсоюза работников РАН, Федеральной национально-культурной автономии адыгов России.

Именем А. М. Нахушева назван ряд проблем, результатов и эффектов. В 2007 г. Мировым Артийским комитетом и Мировой ассамблеей общественного признания ему присвоено почетное звание «Человек мира — 2007». 9 ноября 2010 г. указом Президента Российской Федерации за заслуги в области образования и науки и многолетнюю плодотворную работу Адам Маремович Нахушев награжден орденом Почета. В 2013 г. был запущен ракетой «Протон» третий спутник системы ИнмарСат (ИнмарсатКоспасСарсат) — системы связи, навигации и спасения кораблей, математическую модель которой построил А. М. Нахушев. Он создал математическую модель истечения высокоскоростных потоков раскаленного газа из сопла реактивного авиадвигателя, которая в принципе позволила создать управляемое сопло реактивного истребителя, что предоставило нашим военным летчикам возможность делать фигуру «колокол», которая в воздушном бою позволяет достичь тактического превосходства над противником.

Светлая память об Адаме Маремовиче Нахушеве навсегда сохранится в сердцах всех, кто его знал.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

### Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата A4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

### Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

**Примечание:** более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

**Том 21**

**Выпуск 1**

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

---

Подписано в печать 22.03.2019. Дата выхода в свет 29.03.2019.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 10,46. Тираж 100 экз. Цена свободная.

---

**Учредитель:**
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

**Издатель:**
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

**Адрес издателя:**
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380