ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 22, выпуск 3 2020

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

ЮМИ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 22, Issue 3

2020

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: В. В. БОЗРОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Managing Editor: VICTORIA V. BOZROVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22, выпуск 3 июль–сентябрь, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Абанин А. В., Кораблина Ю. В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций 5

Bang H. H. and Huy V. N. A Bernstein–Nikol'skii Inequality for Weighted Lebesgue Spaces 18

Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Оценки индикаторов целой функции с отрицательными корнями 30

Гайсин А. М., Гайсина Г. А. Теоремы типа Ритта — Сугимуры 47

Гайсин Р. А. Критерий квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для выпуклых областей 58

Иванова О. А., Мелихов С. Н. Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля 72

Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С. Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах 85

Мусин И. Х. О пространстве функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области и гладких вплоть до границы, и его сопряженном 100

Hua S., Khoi L. H. and Tien P. T. Bounded Composition Operators on Weighted Function Spaces in the Unit Disk 112

Шишкин А. Б. Односторонние схемы двойственности 124

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Юрий Фёдорович Коробейник (к 90-летию со дня рождения) 151

Владикавказ
2020

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 22, issue 3 — July–September, 2020

CONTENT

Abanin, A. V. and Korablina, Yu. V. Boundedness of Classical Operators in Weighted Spaces of Holomorphic Functions 5

Bang, H. H. and Huy, V. N. A Bernstein–Nikol'skii Inequality for Weighted Lebesgue Spaces 18

Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B. Automorphisms of a Distance Regular Graph with Intersection Array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ 30

Gaisin, A. M. and Gaisina, G. A. Ritt–Sugimura Type Theorems 47

Gaysin, R. A. Quasianalyticity Criterion of Salinas-Korenblyum Type for Convex Domains 58

Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N. Algebras of Analytic Functionals and the Generalized Duhamel Product 72

Isaev, K. P. and Yulmukhametov, R. S. Unconditional Bases in Radial Hilbert Spaces 85

Musin, I. Kh. Pħn a Space of Holomorphic Functions on a Bounded Convex Domain of $\mathbb{C}^n$ and Smooth Up to the Boundary and its Dual Space 100

Hua, S., Khoi, L. H. and Tien, P. T. Bounded Composition Operators on Weighted Function Spaces in the Unit Disk 112

Shishkin, A. B. One-Sided Dual Schemes 124

MATHEMATICAL LIFE

Yuri Fedorovich Korobeinik (on his 90's anniversary) 151

Vladikavkaz
2020

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 5–17

УДК 517.9
DOI 10.46698/u5398-4279-7225-c

ОГРАНИЧЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин[1,2], Ю. В. Кораблина[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: avabanin@sfedu.ru, anaconda210150@mail.ru

Посвящается 90-летию профессора
Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. В работе устанавливаются критерии ограниченности классических операторов, действующих из абстрактных банаховых пространств голоморфных в области функций в весовые пространства тех же функций с равномерной нормой. Представлено дальнейшее развитие идеи Н. Зорбоска, в соответствии с которой условия ограниченности операторов весовой композиции, включая операторы умножения и обычной композиции, и интегрального оператора Вольтерра могут быть сформулированы в терминах норм δ-функций в соответствующих сопряженных пространствах. В качестве приложений получены критерии ограниченности упомянутых операторов в обобщенных пространствах Бергмана и Фока. В конкретных пространствах эти критерии удается сформулировать в терминах весов, определяющих пространства, и функций, задающих композицию. По сравнению с предшествующими результатами существенно расширен класс весовых пространств голоморфных в единичном круге функций с равномерными нормами, для которых удается реализовать метод Н. Зорбоска. Кроме того, разработано распространение этого подхода на весовые пространства целых функций. На этом пути введен класс почти гармонических весов и получены оценки норм δ-функций в пространствах, сопряженных с обобщенными пространствами Фока, определяемыми почти гармоническими весами.

Ключевые слова: весовые пространства голоморфных функций, оператор весовой композиции, оператор Вольтерра, пространства Бергмана, пространства Фока.

Mathematical Subject Classification (2010): 47B38, 46E15, 30H20.

Образец цитирования: *Абанин А. В., Кораблина Ю. В.* Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 5–17. DOI: 10.46698/u5398-4279-7225-c.

Введение

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех голоморфных в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из G. Всюду далее X — банахово пространство голоморфных в G функций с нормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$. Через X^* будем обозначать сопряженное с X банахово пространство всех линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\phi\|^* := \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\phi(f)|$, $\phi \in X^*$. При исследовании свойств классических операторов в пространствах X из классов Бергмана, Харди, Фока и др. в ряде случаев решающую роль в установлении нужного результата играет непрерывность исследуемого оператора из X в какое-либо вспомогательное весовое пространство $H_v(G)$ с sup-нормой $\|\cdot\|_v$, задаваемой весом v. В частности, это касается динамических свойств операторов сдвига, дифференцирования и интегрирования (см. [1, 2] и библиографию в них).

В статье [3] Н. Зорбоска для случая, когда $G = \mathbb{D}$ — единичный круг и v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, установила критерий непрерывности абстрактного линейного оператора T из X в $H_v(\mathbb{D})$, формулируемый с помощью весовой оценки композиций T с δ-функциями (см. [3, теорема 2.1]). С помощью этого критерия в [3] был получен ряд результатов о непрерывности и компактности операторов Вольтерра и композиции в пространствах Харди, Бергмана и Блоха.

Основная цель настоящей работы — распространить теорему 2.1 из [3] на произвольные области G и веса v, а затем применить полученный критерий не только к случаю круга, но и к пространствам целых функций. Более того, в статье будет разработано развитие некоторых идей из [3], которое позволяет не только осуществить переход от $\mathbb{D}$ к $\mathbb{C}$, но и получить далеко идущее обобщение результатов из [3] для круга.

1. Абстрактный критерий и его приложения

Весом в области G будем называть произвольную непрерывную функцию $v : G \to (0, \infty)$. Каждый вес v в G порождает банахово пространство

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Как известно, $H_v(G) \hookrightarrow H(G)$, где $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения, и δ-функция $\delta_z : f \mapsto f(z)$ является линейным непрерывным функционалом на $H(G)$ при любом $z \in G$. Отсюда, в частности, следует, что $\delta_z \in (H_v(G))^*$ при любом $z \in G$.

Следующий результат обобщает теорему 2.1 (i) из [3] на случай произвольных областей и весов.

Теорема 1. *Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда $\delta_z \circ T \in X^*$ при всех $z \in G$ и*

$$|T|_{X,v} := \sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} < \infty. \qquad (1)$$

В случае ограниченности $T : X \to H_v(G)$ имеем, что $\|T\| = |T|_{X,v}$.

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть $T : X \to H_v(G)$ ограничен. Тогда, так как δ_z является линейным непрерывным функционалом на $H_v(G)$, то $\delta_z \circ T \in X^*$ при любом $z \in G$.

Далее, поскольку $T : X \to H_v(G)$ ограничен, то

$$\|T\| := \sup\{\|Tf\|_v : \|f\| \leqslant 1\} < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$|(Tf)(z)| \leqslant \|T\|\, v(z) \quad (\forall\, z \in G,\ f \in X,\ \|f\| \leqslant 1).$$

Поэтому при каждом $z \in G$

$$\|\delta_z \circ T\|^* = \sup\left\{|(Tf)(z)| : \|f\| \leqslant 1\right\} \leqslant \|T\|\, v(z),$$

откуда заключаем, что верно неравенство

$$|T|_{X,v} \leqslant \|T\| < \infty, \qquad (2)$$

из которого следует (1).

Достаточность. Пусть $\delta_z \circ T \in X^*$ при всех $z \in G$ и выполнено (1). Тогда

$$\|\delta_z \circ T\|^* \leqslant |T|_{X,v}\, v(z) \quad (\forall\, z \in G).$$

Следовательно, при каждом $z \in G$

$$|(Tf)(z)| \leqslant |T|_{X,v} \cdot v(z) \quad (\forall\, f \in X,\ \|f\| \leqslant 1).$$

Поэтому

$$\|T\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|Tf\|_v = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \sup_{z\in G} \frac{|(Tf)(z)|}{v(z)} \leqslant |T|_{X,v} < \infty, \tag{3}$$

и, значит, $T : X \to H_v(G)$ ограничен.

Для завершения доказательства остается заметить, что из (2) и (3) следует равенство $\|T\| = |T|_{X,v}$. $\triangleright$

Применим теорему 1 к классическим операторам весовой композиции, умножения и Вольтерра.

Обозначим через $S(G)$ семейство тех функций $\varphi \in H(G)$, для которых $\varphi(G) \subset G$. Оператор $W_{u,\varphi}$ весовой композиции определяется по фиксированным функциям $u \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$ следующим образом:

$$(W_{u,\varphi} f)(z) = u(z) f(\varphi(z)), \quad f \in H(G),\ z \in G.$$

Этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. Так как

$$(\delta_z \circ W_{u,\varphi})(f) = u(z) \cdot f(\varphi(z)) = u(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}(f),$$

то $\|\delta_z \circ W_{u,\varphi}\|^* = |u(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*$ при каждом $z \in G$. Использовав это равенство и применив теорему 1, получаем такой результат.

Предложение 1. *Пусть v — вес на G, $u \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$. Оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|u(z)|\, \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $W_{u,\varphi} : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|W_{u,\varphi}\| = \sup_{z\in G} \frac{|u(z)|\, \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Заметим, что если $u(z) \equiv 1$ в G, то оператор $W_{u,\varphi}$ является оператором обычной композиции и обозначается через C_φ; таким образом, $C_\varphi : f \to f(\varphi(z))$. Если же $u \in H(G)$ произвольна, а $\varphi(z) \equiv z$ в G, то $W_{u,\varphi}$ превращается в оператор умножения на $u(z)$ и обозначается через M_u, т. е. $M_u : f \mapsto u(z) \cdot f(z)$. Применив предложение 1 к этим частным случаям, приходим к следующим результатам.

Следствие 1. *Пусть v — вес на G, $\varphi \in S(G)$. Оператор композиции $C_\varphi : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $C_\varphi : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|C_\varphi\| = \sup_{z\in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Следствие 2. *Пусть v — вес на G, $u \in H(G)$. Оператор умножения $M_u : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|u(z)|\,\|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $M_u : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|M_u\| = \sup_{z\in G} \frac{|u(z)|\,\|\delta_z\|^*}{v(z)}.$$

Теперь рассмотрим оператор Вольтерра. Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in G$. Для фиксированной функции $g \in H(G)$ оператор Вольтерра определяется по правилу

$$T_g : f \mapsto \int\limits_0^z f(s)g'(s)\,ds, \quad z \in G,$$

где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути, соединяющему начало с точкой z и лежащему в G. Нетрудно видеть, что этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. При $g(z) \equiv z$ он совпадает с оператором интегрирования I.

При некоторых дополнительных предположениях вопрос об ограниченности оператора T_g удается свести к вопросу об ограниченности оператора умножения. Заметим попутно, что T_g отображает $H(G)$ в его замкнутое подпространство $H_0(G) := \{f \in H(G) : f(0) = 0\}$. В связи с этим нам потребуется соответствующее замкнутое подпространство $H_{v,0} := \{f \in H_v(G) : f(0) = 0\}$ в $H_v(G)$.

Предложение 2. *Пусть имеются два веса v и w на G такие, что оператор дифференцирования D является изоморфизмом между $H_{v,0}(G)$ и $H_w(G)$. Тогда ограниченность оператора Вольтерра $T_g : X \to H_{v,0}(G)$ эквивалентна ограниченности оператора умножения $M_{g'} : X \to H_w(G)$.*

$\lhd$ Очевидно, что $D \circ T_g = M_{g'}$ на $H(G)$. Так как по условию $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ ограничен, то отсюда следует, что из ограниченности оператора $T_g : X \to H_{v,0}(G)$ вытекает ограниченность $M_{g'} : X \to H_w(G)$.

Пусть теперь ограничен оператор $M_{g'} : X \to H_w(G)$. Ясно, что обратным к оператору $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ является оператор интегрирования $I : H_w(G) \to H_{v,0}(G)$, который ограничен в силу изоморфности $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$. А поскольку $T_g = I \circ D \circ T_g = I \circ M_{g'}$, то заключаем, что из ограниченности $M_{g'} : X \to H_w(G)$ следует ограниченность $T_g : X \to H_{v,0}(G)$. $\rhd$

Из следствия 2 предложения 1 и предложения 2 непосредственным образом вытекает

Предложение 3. *Пусть веса v и w на G таковы, что оператор $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ — изоморфизм. Тогда оператор Вольтерра $T_g : X \to H_v(G)$ ограничен в том и только в том случае, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{w(z)} < \infty.$$

Замечание. Предложение 1 обобщает следствие 2.1 (i) из [3] на случай произвольных областей и весов. Что касается предложения 3, то оно представляет собой абстрактную версию следствия 2.1 (iii) из той же работы [3], которое касалось случая $G = \mathbb{D}$ и конкретных весов $v(r) = (1 - r^2)^{-\beta}$ и $w(r) = (1 - r^2)^{-\beta-1}$ на $\mathbb{D}$, где $\beta > 0$.

2. Критерии ограниченности классических операторов в конкретных пространствах

Для применения результатов предыдущего раздела к конкретным пространствам $X \subset H(G)$ требуется иметь способ для вычисления норм δ-функций $\|\delta_z\|^*$ или хотя бы для получения равномерных по $z \in G$ оценок $\|\delta_z\|^*$. Кроме того, для использования предложения 3 необходимо установить те пары весов v и w на G, для которых оператор $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ — изоморфизм. В связи с этим отметим, что в статье [3] был приведен ряд известных результатов о величине $\|\delta_z\|^*$ в ряде классических весовых пространств голоморфных в единичном круге функций. Именно, рассматривались пространства Харди H^p и Бергмана A^p_α. Напомним, что

$$H^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p := \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < \infty \right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p := \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) \right\}, \quad \alpha > -1, \;\; 0 < p < \infty,$$

где $dA(z)$ — нормализованная мера Лебега в $\mathbb{D}$, т. е. $dA(z) = \frac{1}{\pi} d\lambda(z)$, где $d\lambda(z)$ — мера Лебега в плоскости. Как отмечено в [3],

$$\|\delta_z\|^* = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}, \quad X = H^p;$$
$$\|\delta_z\|^* = (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha+2}{p}}, \quad X = A^p_\alpha.$$

Этого вполне достаточно, чтобы сформулировать следствия из абстрактного критерия ограниченности оператора весовой композиции, включая его частные случаи обычной композиции умножения, действующих из H^p или A^p_α в $H_v(\mathbb{D})$. Для оператора Вольтерра в [3] аналогичные результаты приведены только для одного специального класса пространств $H_v(\mathbb{D})$, задаваемых весами вида $v(z) = (1-|z|^2)^{-\beta}$, $\beta > 0$, и обозначаемых символом H_β. Это связано в основном с тем, что лишь для этого класса пространств известно, что оператор дифференцирования осуществляет изоморфизм между $H_{\beta,0} = \{f \in H_\beta : f(0) = 0\}$ и $H_{\beta+1}$. Наша ближайшая цель — указать условия общего характера на радиальные веса v в $\mathbb{D}$, при которых удается сформулировать критерии непрерывности операторов Вольтерра из X в $H_v(\mathbb{D})$ при $X = H^p$ или $X = A^p_\alpha$. Затем этот подход будет распространен на неисследовавшийся ранее случай пространств целых функций.

Напомним, что вес v в $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ называется радиальным, если $v(z) = v(|z|)$ при всех $z \in G$, где $v : [0, a) \to (0, \infty)$ — непрерывная возрастающая на $[0, a)$ функция, $a = 1$ для $G = \mathbb{D}$ и $a = \infty$ для $G = \mathbb{C}$. Дополнительно требуем, чтобы $v(r) \to \infty$ при $r \to 1$ для $\mathbb{D}$ и $r^n = o(v(r))$ при $r \to \infty$ для $\mathbb{C}$. Эти условия обеспечивают то, что $H_v(\mathbb{D})$ отлично от хорошо изученного пространства $H^\infty(\mathbb{D})$ всех ограниченных голоморфных в $\mathbb{D}$ функций и $H_v(\mathbb{C})$ содержит все полиномы.

Как известно (см. [4] и [5]), в случае пространств, задаваемых радиальными весами, достаточно ограничиться использованием, так называемых, log-выпуклых весов v, т. е. таких, что функция $\ln v(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$ или $\mathbb{R}$. При этом, из свойств выпуклых функций следует, что log-выпуклые веса дифференцируемы на $(0, a)$ за исключением не более, чем счетного числа точек, и всюду на $(0, a)$ имеют левую и правую производные. В дальнейшем обозначение $v'(r)$ будет использоваться для обозначения правой производной функции v.

Замечание. Пусть r_0 — произвольная фиксированная точка из $(0,a)$. Очевидно, что радиальные веса $v(r)$ и

$$v_0(r) := \begin{cases} v(r_0), & 0 \leqslant r \leqslant r_0; \\ v(r), & r_0 < r < a \end{cases}$$

на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ задают одно и то же весовое пространство $H_v(G)$, а нормы $\|\cdot\|_v$ и $\|\cdot\|_{v_0}$ эквивалентны, т. е. $\frac{1}{C}\|\cdot\|_v \leqslant \|\cdot\|_{v_0} \leqslant C\cdot\|\cdot\|_v$ при некотором $C > 1$. В связи с этим мы будем в дальнейшем относить к классу log-выпуклых весов те радиальные веса v на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$, для которых при некотором $r_0 \in [0,a)$ функция $v(r)$ возрастает на $[r_0,a)$, а функция $\ln v(e^x)$ выпукла на $(\ln r_0, \ln a)$ (при этом считаем, что $\ln 0 = -\infty$ и $\ln(+\infty) = +\infty$).

2.1. Ограниченность операторов в пространствах Харди и Бергмана

Поскольку формулировка следствий из предшествующих результатов об ограниченности операторов (весовой) композиции и умножения не составляет труда, мы ограничимся в данном разделе только изучением оператора Вольтерра. Для этого нам потребуется следующий вспомогательный результат, представляющий собой незначительное уточнение следствия 3.18 из [5].

Лемма 1. *Пусть v — log-выпуклый радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$, $0 \leqslant r < 1$. Оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$0 < \liminf_{r\to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} \leqslant \limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} < \infty. \tag{4}$$

$\lhd$ В силу теоремы Банаха об обратном операторе $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является изоморфным в том и только в том случае, когда он является эпиморфным и инъективным. По следствию 3.18 из [5] условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы эпиморфным был $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$. Теперь заметим, что так как $D(f(z) - f(0)) = D(f)$ для любой $f \in H(\mathbb{D})$, то $D(H_{v,0}(\mathbb{D})) = D(H_v(\mathbb{D}))$. Значит, (4) является также необходимым и достаточным для того, чтобы эпиморфизмом был $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$. Чтобы закончить доказательство, остается воспользоваться очевидным фактом об инъективности D на $H_{v,0}(\mathbb{D})$. $\rhd$

Из предложения 3 и леммы 1 следует такой результат.

Предложение 4. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (4). Оператор Вольтерра $V_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\,|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{v(|z|)} < \infty.$$

Воспользовавшись формулами для $\|\delta_z\|^*$, приведенными выше для пространств Харди H^p и Бергмана A^p_α, получаем отсюда

Следствие 1. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (4). Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Оператор Вольтерра $V_g : H^p \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{1}{p}}|g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

(ii) *Оператор Вольтерра* $V_g : A^p_\alpha \to H_v(\mathbb{D})$ *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2}{p}}|g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

Отметим, что сформулированные в следствии 1 утверждения ранее были известны лишь для конкретного классического пространства Бергмана H_β, задаваемого весом $(1-|z|)^{-\beta}$, $\beta > 0$ (обычно для его задания используют эквивалентный вес $(1-|z|^2)^{-\beta}$; см. [3, следствие 2.1 (iii)]). Покажем, что следствие 1 применимо к достаточно широкому спектру весов, содержащему $(1-|z|)^{-\beta}$ в качестве частного случая.

Пусть $\beta > 0$ и $p \in \mathbb{R}$. Положим

$$v(z) = e^\beta,\ \ 0 \leqslant |z| \leqslant \frac{e-1}{e}, \qquad v(z) = \frac{1}{(1-|z|)^\beta}\ \ln^p \frac{1}{1-|z|},\ \ \frac{e-1}{e} < |z| < 1.$$

Пространство $H_v(\mathbb{D})$, определяемое этим весом, будем обозначать специальным символом $H_{\beta,p}$. Ясно, что при $p = 0$ получаем пространство H_β.

Прямой подсчет показывает, что для функции $\varphi(x) = \ln v(e^x)$ при $\ln\frac{e}{e+1} < x < 0$ имеем

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\left(\beta + p\,\frac{e^x - \ln(1-e^x)}{\ln^2(1-e^x)}\right).$$

Поскольку $\beta > 0$ и $\frac{e^x-\ln(1-e^x)}{\ln^2(1-e^x)} \to 0$ при $x \to -0$, то функция φ выпукла на $(x_0, 0)$ при некотором $x_0 < 0$. Следовательно, v является log-выпуклым весом на $\mathbb{D}$. Кроме того, легко видеть, что

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} = \lim_{r\to 1-0}\left(\beta - \frac{p}{\ln(1-r)}\right) = \beta.$$

Значит, для v выполнено условие (4).

Таким образом, рассматриваемый вес удовлетворяет всем условиям предложения 4, в соответствии с которым верно

Следствие 2. *Оператор Вольтерра* $V_g : X \to H_{\beta,p}$ *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1}\,|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{\ln^p\frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

В качестве частного случая при $p = 0$ следствие 2 содержит следствие 2.1 (iii) из [3]. Применив к рассматриваемому весу следствие 1, получаем обобщение на произвольное $p \in \mathbb{R}$ следствия 2.2 (i) и (iii) из [3] для пространств Харди и Бергмана.

Следствие 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $V_g : H^p \to H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1-\frac{1}{p}}\,|g'(z)|}{\ln^p\frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

(ii) Оператор Вольтерра $V_g : A^p_\alpha \to H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1-\frac{\alpha+2}{p}}\,|g'(z)|}{\ln^p\frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

2.2. Ограниченность операторов в пространствах Фока

Покажем теперь, что наши общие результаты применимы и к ранее не исследовавшемуся случаю пространств целых функций.

Пусть непрерывная функция $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ такова, что

$$A_\psi := \int\limits_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)}\, dA(z) < \infty, \quad \lambda_\psi := \frac{1}{A_\psi}.$$

При каждом $0 < p < \infty$ она задает обобщенное пространство Фока:

$$F_p^\psi := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\, \|f\|_{p,\psi} := \left(\lambda_\psi \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p\, e^{-\psi(z)}\, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

В случае $p = \infty$ полагаем $F_\infty^\psi = H_{e^\psi}(\mathbb{C})$. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство F_p^ψ является банаховым. Весу $\psi(z) = \frac{\alpha p}{2}|z|^2$, где $\alpha > 0$ (при этом $\lambda_\psi = \frac{p\alpha}{2\pi}$), соответствует классическое пространство Фока, которое обозначается символом F_α^2. Из [6, теорема 2.7] следует, что

$$\|\delta_z\|^* = e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}, \quad X = F_\alpha^2. \tag{5}$$

Подобно тому, как это было сделано выше для пространств Харди и Бергмана, с помощью (5) можно легко сформулировать ряд следствий об ограниченности операторов весовой композиции, действующих из F_α^2 в весовые пространства $H_v(\mathbb{C})$ с равномерной весовой нормой. Мы на этом останавливаться не будем, а сосредоточимся для этих операторов на исследовании пространств Фока F_p^ψ общего вида и приложениях полученных результатов к пространствам $F_\alpha^{p,q}$, задаваемых весами $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q}|z|^q$ при $q \neq 2$. Кроме того, будет рассмотрен и вопрос об ограниченности оператора Вольтерра.

Назовем вес ψ *слабо растущим в среднем*, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$B_\psi(z) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta| \leqslant 1} \psi(z + \zeta)\, dA(\zeta) \leqslant \psi(z) + C \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}). \tag{6}$$

Обозначим через Ψ_0 класс весов, удовлетворяющих (6).

Замечание. Наибольший интерес представляют те веса, которые являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями. Для них всегда

$$\psi(z) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta| \leqslant 1} \psi(z + \zeta)\, dA(\zeta) \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Поэтому субгармонические веса из Ψ_0 естественно называть *почти гармоническими.*

В силу того, что для субгармонических функций ψ интегральное среднее по кругу не превосходит интегрального среднего по границе круга, принадлежность ψ к Ψ_0 следует из условия

$$(\exists\, C > 0) \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi\big(z + e^{i\theta}\big)\, d\theta \leqslant \psi(z) + C \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}), \tag{7}$$

которое иногда проще проверять, чем (6).

Лемма 2. *Для любого веса $\psi \in \Psi_0$ и пространства $X = F_p^\psi$ существует $A > 0$ такое, что*

$$\|\delta_z\|^* \leqslant A e^{\frac{\psi(z)}{p}} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

$\lhd$ В силу теоремы 1 из работы [7] для любой функции $f \in F_p^\psi$ при каждом $z \in \mathbb{C}$

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{1}{p}\,B_\psi(z) + \ln\|f\|_{p,\psi} + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi}.$$

Учитывая, что $\psi \in \Psi_0$, получаем отсюда, что

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{1}{p}\,\psi(z) + \ln\|f\|_{p,\psi} + \frac{C}{p} + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}),$$

где C — постоянная из условия (6). Тогда для f с $\|f\|_{p,\psi} \leqslant 1$ имеем $|f(z)| \leqslant Ae^{\frac{\psi(z)}{p}}$, где $A = \frac{1}{\pi^p}\,e^{C/p}$, откуда следует требуемое. $\rhd$

Из предложения 1 и леммы 2 непосредственным образом следует

Предложение 5. *Пусть ψ — вес из Ψ_0, v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, u и φ — фиксированные целые функции. Если*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|u(z)|\,e^{\frac{\psi(\varphi(z))}{p}}}{v(z)} < \infty,$$

то оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_p^\psi \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен.

Рассмотрим радиальные веса вида $\psi(z) = \gamma|z|^q$, где $\gamma > 0$, $q > 0$. Заметим, что они являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями. Для них справедлива

Лемма 3. *Веса $\psi(z) = \gamma|z|^q$ при всех $\gamma > 0$ и $0 < q \leqslant 2$ являются почти гармоническими.*

$\lhd$ Ясно, что достаточно рассмотреть веса $\psi(z) = |z|^q$, $0 < q \leqslant 2$, и в силу их радиальности проверить условие (7) для $z = x \geqslant 0$.

После несложных преобразований имеем при $x > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta = \int_0^{\pi} \left(\left|x + e^{i\theta}\right|^q + \left|x + e^{-i\theta}\right|^q\right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|x + e^{i\theta}\right|^q + \left|x - e^{i\theta}\right|^q\right) d\theta$$

$$= 2|x|^q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q\right) d\theta.$$

Теперь заметим, что так как $0 < q \leqslant 2$, то для всех $x > 0$

$$\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q = \left(1 + \frac{2x\cos\theta + 1}{x^2}\right)^{\frac{q}{2}} \leqslant 1 + \frac{q}{2}\,\frac{2x\cos\theta + 1}{x^2}$$

и

$$\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q = \left(1 - \frac{2x\cos\theta - 1}{x^2}\right)^{\frac{q}{2}} \leqslant 1 - \frac{q}{2}\,\frac{2x\cos\theta - 1}{x^2}.$$

Поэтому для всех $x > 0$

$$\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q \leqslant 2 + \frac{q}{x^2}.$$

Применив эту оценку, получим при всех $x > 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta \leqslant \pi x^q \left(2 + \frac{q}{x^2}\right).$$

Отсюда следует, что при $x \geqslant 1$

$$B_\psi(x) \leqslant \frac{x^q}{2}\left(2 + \frac{q}{x^2}\right) = x^q + \frac{q}{2}x^{q-2} \leqslant \psi(x) + \frac{q}{2}.$$

Заметив еще, что $B_\psi(x) \leqslant 2^q$ при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, получим окончательно, что при всех $x > 0$

$$B_\psi(x) \leqslant \psi(x) + 2^q. \ \rhd$$

Из лемм 2 и 3 следует такой результат.

Лемма 4. *Для любого пространства* $X = F_\alpha^{p,q}$ *с* $0 < q \leqslant 2$ *имеем*

$$\|\delta_z\|^* \leqslant Ae^{\frac{\alpha|z|^q}{q}} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}), \tag{8}$$

где A — некоторая постоянная.

Как уже отмечалось выше, при $q = 2$ в (8) при $A = 1$ имеет место знак равенства. Нам неизвестно, выполняется ли оценка вида $\|\delta_z\|^* \geqslant ae^{\frac{\alpha|z|^q}{q}}$ при некотором $a > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$ для каких-либо $0 < q < 2$. Поэтому при $0 < q < 2$ лемма 4 позволяет нам сформулировать лишь достаточные условия непрерывности классических операторов в $F_\alpha^{p,q}$, вытекающие из предложения 5 и леммы 4.

Предложение 6. *Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, u и φ — целые функции, $\alpha > 0$, $p \in [1, \infty)$ и $0 < q \leqslant 2$. Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_\alpha^{p,q} \to H_v(\mathbb{C})$ был ограничен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|u(z)|\, e^{\alpha\frac{|\varphi(z)|^q}{p}}}{v(z)} < \infty.$$

Теперь мы займемся вопросом о непрерывности оператора Вольтерра в пространствах Фока и покажем, что для достаточно широкого класса весов ψ, введенного в работе [8], для соответствующих пространств F_p^ψ имеют место аналоги результатов, установленных в п. 2.1 в случае круга.

Условимся о следующем обозначении. Пусть E, F — две вещественнозначные функции, заданные на множестве D произвольной природы. Будем писать, что $E(x) \simeq F(x)$, $x \in D$, если существуют такие положительные постоянные c и C, что $cE(x) \leqslant F(x) \leqslant CE(x)$ для всех $x \in D$.

Обозначим через T семейство всех дифференцируемых функций $\tau : [0, \infty) \to (0, \infty)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\lim\limits_{r\to\infty} \tau(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) = 0$;

(b) либо при некотором $C > 0$ функция $\tau(r)\, r^C$ возрастает, либо $\lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) \ln \frac{1}{\tau(r)} = 0$.

Пусть, далее, $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — возрастающая функция класса C^2 на $[0, \infty)$. Продолжим ее на всю комплексную плоскость, положив $\psi(z) := \psi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, и предположим, что лапласиан $\Delta\psi$ положителен в $\mathbb{C}$ и, более того, что существует такая функция

$\tau \in T$, что $(\Delta\psi(z))^{-\frac{1}{2}} \simeq \tau(|z|)$, $|z| \geqslant 1$. Следуя [8], обозначим символом $\mathscr{I}$ класс всех функций ψ, обладающих указанными свойствами. В [8] отмечено, что в этот класс входят следующие функции: r^α, $\alpha > 2$; $e^{\beta r}$, $\beta > 0$; e^{e^r}.

Следующая лемма вытекает из [9, следствие 3.3] (см. также [10, лемма 2.1]).

Лемма 5. *Предположим, что $\psi \in \mathscr{I}$, и положим $\phi(r) := \psi(r)+\ln(1+\psi'(r))$, $r \in [0,\infty)$. Целая функция f принадлежит пространству F^ψ_∞ в том и только в том случае, когда f' принадлежит пространству F^ϕ_∞. При этом*

$$\|f\|_{F^\psi_\infty} \simeq |f(0)| + \|f'\|_{F^\phi_\infty}, \quad f \in F^\psi_\infty.$$

С помощью этой леммы аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 6. *Пусть ψ и ϕ — те же весовые функции, что и в лемме 5. Тогда оператор дифференцирования $D : f \mapsto f'$ является изоморфизмом из $F^\psi_{\infty,0}$ на F^ϕ_∞, где $F^\psi_{\infty,0} := \{f \in F^\psi_\infty : \ f(0) = 0\}$.*

Из предложения 3 и леммы 6 следует непосредственно

Предложение 7. *Пусть $\psi \in \mathscr{I}$. Оператор Вольтерра $T_g : X \to F^\psi_\infty$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)|\,\|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))\,e^{\psi(z)}} < \infty.$$

Заметим, что предложение 7 в качестве частных случаев содержит результаты работы [10] об ограниченности оператора Вольтерра $V_g : F^\psi_p \to F^\psi_\infty$ для $\psi \in \mathscr{I}$ и $0 < p \leqslant \infty$. Из него также можно легко получить аналогичные критерии ограниченности для $V_g : F^{\psi_1}_p \to F^{\psi_2}_\infty$ в случае двух весов ψ_1 и ψ_2 из $\mathscr{I}$. Более того, полученные в данном разделе результаты позволяют исследовать и ситуацию, когда ψ_1 не обязательно содержится в $\mathscr{I}$. Именно, легко убедиться, что при $0 < q \leqslant 2$ вес $\frac{\alpha p}{q}|z|^q$ не входит в класс $\mathscr{I}$ и к нему неприменимы результаты из [8, 10]. Однако, предложение 7 и лемма 4 влекут такой результат.

Предложение 8. *Пусть $\psi \in \mathscr{I}$, $\alpha > 0$, $p \in [1,\infty)$ и $0 < q \leqslant 2$. Для того чтобы оператор Вольтерра $V_g : F^{p,q}_\alpha \to F^\psi_\infty$ был ограничен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)|\,e^{\frac{\alpha}{q}|z|^q-\psi(z)}}{1+\psi'(|z|)} < \infty.$$

Благодарность. Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Г. Г. Брайчеву за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Литература

1. *Tien P. T.* Translation operators on weighted spaces of entire functions // Proc. Am. Math. Soc.—2017.—Vol. 145, № 2.—P. 805–815. DOI: 10.1090/proc/13254.
2. *Abanin A. V., Tien P. T.* Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 89, № 3.—P. 409–438. DOI: 10.1007/s00020-017-2401-y.
3. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 87, № 4.—P. 581–600. DOI: 10.1007/s00020-017-2361-2.
4. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math.—1998.—Vol. 127, № 2.—P. 137–168. DOI: 10.4064/sm-127-2-137-168.
5. *Abanin A. V., Tien P. T.* Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162. DOI: 10.1002/mana.201500405.

6. *Zhu K.* Analysis on Fock Spaces. Graduate Texts in Mathematics, 263.—New York: Springer, 2012.—346 p.
7. *Баладай Р. А., Хабибуллин Б. Н.* От интегральных оценок функций к равномерным и локально усредненным // Изв. вузов. Матем.—2017.—№ 10.—С. 15–25.
8. *Constantin O., Peláez J. A.* Integral operators, embedding theorems and a Littlewood–Paley formula on weighted Fock spaces // J. Geom. Anal.—2016.—Vol. 26, № 2.—P. 1109–1154. DOI: 10.1007/s12220-015-9585-7.
9. *Bonet J., Taskinen J.* A note about Volterra operators on weighted Banach spaces of entire functions // Math. Nachr.—2015.—Vol. 288, № 11–12.—P. 1216–1225. DOI: 10.1002/mana.201400099.
10. *Mengestie T., Ueki S.-I.* Integral, differential and multiplication operators on generalized Fock spaces // Complex Anal. Oper. Theory.—2019.—Vol. 13, № 3.—P. 935–953. DOI: 10.1007/s11785-018-0820-7.

Статья поступила 25 мая 2020 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
заведующий отделом математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: avabanin@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4507-4508;

Кораблина Юлия Викторовна
Южный федеральный университет, *магистрант*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: anaconda210150@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-9252-4765

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 5–17

BOUNDEDNESS OF CLASSICAL OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Abanin, A. V.[1,2] and Korablina, Yu. V.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: avabanin@sfedu.ru, anaconda210150@mail.ru

Abstract. We establish some criteria of the boundedness for some classical operators acting from an abstract Banach space of holomorphic functions in a complex domain to a weighted space of the same functions equipped with sup-norm. It is presented a further development of Zorboska's idea that conditions of the boundedness of weighted composition operators including multiplication and usual composition ones and Volterra operator can be formulated in terms of δ-functions norms in the corresponding dual spaces. As a consequence we obtain criteria of the boundedness of the above mentioned operators on generalized Bergman and Fock spaces. In particular cases it is possible to state these criteria in terms of weights defining spaces and functions giving the composition operator. In comparison with the previous results we essentially extend the class of weighted holomorphic spaces in the unit disc that admits a realization of Zorboska's method.

In addition, we develop an extension of this approach to weighted spaces of entire functions. In this relation we introduce the class of almost harmonic weights and obtain some estimates of δ-functions norms in spaces dual to the generalized Fock spaces giving by almost harmonic weights.

Key words: weighted spaces of holomorphic functions, weighted composition operator, Volterra operator, Bergman spaces, Fock spaces.

Mathematical Subject Classification (2010): 47B38, 46E15, 30H20.

For citation: *Abanin, A. V. and Korablina, Yu. V.* Boundedness of Classical Operators in Weighted Spaces of Holomorphic Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 5–17 (in Russian). DOI: 10.46698/u5398-4279-7225-c.

References

1. *Tien, P. T.* Translation Operators on Weighted Spaces of Entire Functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2017, vol. 145, no. 2, pp. 805–815. DOI: 10.1090/proc/13254.
2. *Abanin, A. V. and Tien, P. T.* Invariant Subspaces for Classical Operators on Weighted Spaces of Holomorphic Functions, *Integral Equations and Operator Theory*, 2017, vol. 89, no. 3, pp. 409–438. DOI: 10.1007/s00020-017-2401-y.
3. *Zorboska, N.* Intrinsic Operators from Holomorphic Function Spaces to Growth Spaces, *Integral Equations and Operator Theory*, 2017, vol. 87, no. 4, pp. 581–600. DOI: 10.1007/s00020-017-2361-2.
4. *Bierstedt, K. D., Bonet, J. and Taskinen, J.* Associated Weights and Spaces of Holomorphic Functions, *Studia Mathematica*, 1998, vol. 127, no. 2, pp. 137–168. DOI: 10.4064/sm-127-2-137-168.
5. *Abanin, A. V. and Tien, P. T.* Differentiation and Integration Operators on Weighted Banach Spaces of Holomorphic Functions, *Mathematische Nachrichten*, 2017, vol. 290, no. 8–9, pp. 1144–1162. DOI: 10.1002/mana.201500405.
6. *Zhu, K. Analysis on Fock Spaces. Graduate Texts in Mathematics*, 263, New York, Springer, 2012, 346 p.
7. *Baladai, R. A. and Khabibullin, B. N.* From Integral Estimates of Functions to Uniform and Locally Averaged Ones, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, pp. 11–20. DOI: 10.3103/S1066369X17100036.
8. *Constantin, O. and Peláez, J. A.* Integral Operators, Embedding Theorems and a Littlewood–Paley Formula on Weighted Fock Spaces, *The Journal of Geometric Analysis*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 1109–1154. DOI: 10.1007/s12220-015-9585-7.
9. *Bonet, J. and Taskinen J.* A Note about Volterra Operators on Weighted Banach Spaces of Entire Functions, *Mathematische Nachrichten*, 2015, vol. 288, no. 11–12, pp. 1216–1225. DOI: 10.1002/mana.201400099.
10. *Mengestie, T. and Ueki, S.-I.* Integral, Differential and Multiplication Operators on Generalized Fock Spaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2019, vol. 13, no. 3, pp. 935–953. DOI: 10.1007/s11785-018-0820-7.

Received May 25, 2020

Alexander V. Abanin
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Geometry;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: avabanin@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4507-4508;

Julia V. Korablina
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Undergraduate;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Junior Researcher in the Department of Mathematical Analysis
E-mail: anaconda210150@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-9252-4765

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 18–29

УДК 517.518
DOI 10.46698/h8083-6917-3687-w

A BERNSTEIN–NIKOL'SKII INEQUALITY FOR WEIGHTED LEBESGUE SPACES#

H. H. Bang[1] and V. N. Huy[2,3]
[1] Vietnamese Academy of Science and Technology,
18 Hoang Quoc Viet St., Cay Giay, Hanoi, Vietnam;
[2] Hanoi University of Science,
334 Nguyen Trai St., Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam;
[3] TIMAS, Thang Long University,
Nghiem Xuan Yem, Hoang Mai, Hanoi, Vietnam
E-mail: hhbang@math.ac.vn; nhat_huy85@yahoo.com

Dedicated to the first author's Teacher
Professor Yurii Fedorovich Korobeinik
on the occasion of his 90th birthday

Abstract. In this paper, we give some results concerning Bernstein–Nikol'skii inequality for weighted Lebesgue spaces. The main result is as follows: Let $1 < u, p < \infty$, $0 < q + 1/p < v + 1/u < 1$, $v - q \geqslant 0$, $\kappa > 0$, $f \in L^u_v(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Then $D^m f \in L^p_q(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \widehat{D^m f} = \operatorname{supp} \widehat{f}$ and there exists a constant C independent of f, m, κ such that $\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u_v}$, for all $m = 1, 2, \dots$, where $\varrho = v + \frac{1}{u} - \frac{1}{p} - q > 0$, and the weighted Lebesgue space L^p_q consists of all measurable functions such that $\|f\|_{L^p_q} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{pq} dx\right)^{1/p} < \infty$. Moreover, $\lim_{m\to\infty} \|D^m f\|^{1/m}_{L^p_q} = \sup\left\{|x| : x \in \operatorname{supp}\widehat{f}\right\}$. The advantage of our result is that $m^{-\varrho}$ appears on the right hand side of the inequality ($\varrho > 0$), which has never appeared in related articles by other authors. The corresponding result for the n-dimensional case is also obtained.

Key words: weighted Lebesgue spaces, Bernstein inequality, Nikol'skii inequality.

Mathematical Subject Classification (2010): 26D10, 46E30.

For citation: *Bang, H. H. and Huy, V. N.* A Bernstein–Nikol'skii Inequality for Weighted Lebesgue Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 18–29. DOI: 10.46698/h8083-6917-3687-w.

1. Introduction

In 1912, S. N. Bernstein proved in [1] the following inequality: Let f be any trigonometric polynomial f of degree κ. Then

$$\|D^m f\|_\infty \leqslant \kappa^m \|f\|_\infty \quad (\forall\, m = 1, 2, \dots),$$

which provides the behavior of the norm of derivatives of f with respect to differential order and its spectrum. The constants κ^m are best possible. This inequality is also true for L^p-norm, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (see [2]), and for entire functions of exponential type $\kappa > 0$ with respect to $L^p(\mathbb{R})$-norm, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (see [3]).

This work was supported by Vietnamese Academy of Science and Technology, grant number NVCC01.05/19-19.

In 1951, S. M. Nilkol'skii gave the following inequality

$$\|f\|_p \leqslant C_{p,q}\kappa^{1/q-1/p}\|f\|_q, \quad 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty,$$

for any entire function f of exponential type κ belonging to $L^q(\mathbb{R})$ [4]. Bernstein inequality was studied also in [5–11]and Nikol'skii inequality was studied in [3, 4, 12, 13]. Note that the inequalities of Bernstein and Nikol'skii play an important role in the Approximation Theory [2, 3, 15, 16]. Combining the above inequalities, we have the following Bernstein-Nikol'skii inequality

$$\|D^m f\|_p \leqslant C_{p,q}\kappa^{m+1/q-1/p}\|f\|_q \tag{1}$$

for $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\kappa,\kappa]$ and $f \in L^q(\mathbb{R})$.

The main purpose of this paper is to derive a new Bernstein-Nikol'skii inequality for weighted Lebesgue spaces, which is a generalization of the corresponding result in [17]. Note that the obtained inequality in [17] is better than (1). We also extend the result in [18] to weighted spaces.

2. Main Results

Given a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in $L^1(\mathbb{R})$, its Fourier transform is defined by

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixz} f(z)\, dz.$$

The Fourier transform of a tempered generalized function f can be defined via the formula

$$\langle \mathscr{F} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathscr{F}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

where $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ is the Schwartz space of rapidly decreasing functions.

Let $1 \leqslant p < \infty$, $q \in \mathbb{R}$. The weighted Lebesgue space $L^p_q := L^p_q(\mathbb{R})$ consists of all measurable functions such that

$$\|f\|_{L^p_q} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{pq}\, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Then $L^p_q(\mathbb{R})$ is a Banach space.

The following Bernstein–Nikol'skii inequality for weighted Lebesgue spaces is our main result:

Theorem 2.1. *Let $1 < u, p < \infty$, $0 < q + (1/p) < v + (1/u) < 1$, $v - q \geqslant 0$, $\kappa > 0$, and $f \in L^u_v(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\kappa,\kappa]$. Then $D^m f \in L^p_q(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\widehat{D^m f} = \operatorname{supp}\widehat{f}$ and there exists a constant C independent of f, m, κ such that*

$$\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho}\kappa^{m+\varrho}\|f\|_{L^u_v} \tag{2}$$

for all $m = 1, 2, \dots$, where $\varrho = v + \frac{1}{u} - \frac{1}{p} - q > 0$. Moreover,

$$\lim_{m\to\infty} \|D^m f\|^{1/m}_{L^p_q} = \sup\{|x| : \ x \in \operatorname{supp}\widehat{f}\}. \tag{3}$$

Note that equality (3) was proved in [18] for the case $q = 0$ and the Bernstein–Nikol'skii inequality for usual Lebesgue spaces was studied in [7, 8, 15–17] by other techniques.

To prove Theorem 1, we need the following lemmas.

Lemma 2.2 (Young's Inequality for the weighted Lebesgue spaces [19]). *Let $1 < u, p, r < \infty$, $1/p \leqslant 1/u + 1/r$, $1/p = 1/u + 1/r + v + q + \gamma - 1$, $v < 1 - 1/u$, $q < 1/p$, $\gamma < 1 - 1/r$, $\gamma + q \geqslant 0$, $\gamma + v \geqslant 0$, $q + v \geqslant 0$ and $f \in L^u_v(\mathbb{R})$, $g \in L^r_\gamma(\mathbb{R})$. Then $f * g \in L^p_{-q}(\mathbb{R})$ and there exists a constant C independent of f, g such that*

$$\|f * g\|_{L^p_{-q}} \leqslant C\|f\|_{L^u_v}\|g\|_{L^r_\gamma},$$

where

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\, dy.$$

Lemma 2.3 [20]. *If the support of a generalized function $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ consists of a single point $x = 0$, then it is uniquely representable in the form*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j D^j \delta(x)$$

where N is the order of f, and c_j are certain constants.

Clearly, we have the following

Lemma 2.4. *Let $1 < p < \infty, q \in \mathbb{R}, \kappa > 0$ and $f \in L^p_q(\mathbb{R})$. Then ${}_\kappa f \in L^p_q(\mathbb{R})$ and*

$$\|{}_\kappa f\|_{L^p_q} = \kappa^{q+(1/p)}\|f\|_{L^p_q}\ ,$$

where ${}_\kappa f(x) = f(x/\kappa)$.

Lemma 2.5. *Let $1 < u, p < \infty$, $0 < q + (1/p) < v + (1/u) < 1$, $v - q \geqslant 0$, $f \in L^u_v(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-1, 1]$. Then there exists a constant C independent of f, m such that*

$$\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant Cm^{-\varrho}\|f\|_{L^u_v} \tag{4}$$

for all $m = 1, 2, \dots,$ where

$$\varrho = v + \frac{1}{u} - \frac{1}{p} - q > 0.$$

◁ We denote $\Omega := [-1, 1]$ and $\Omega_\epsilon := [-(1 + \epsilon), 1 + \epsilon]$ for each $\epsilon > 0$. The function $\mathscr{G}(z)$ is defined as follows

$$\mathscr{G}(z) = \begin{cases} C_1 e^{1/(z^2-1)}, & |z| < 1; \\ 0, & |z| \geqslant 1, \end{cases}$$

where C_1 is chosen such that $\int_{\mathbb{R}} \mathscr{G}(z)\, dz = 1$. We define the sequence of functions $(\phi_m(z))_{m\geqslant 1}$ via the formula

$$\phi_m(z) = (1_{\Omega_{3/(4m)}} * \mathscr{H}_m)(z),$$

where

$$\mathscr{H}_m(z) = 4m\mathscr{G}(4mz).$$

Then $\mathscr{H}_m(z) = 0$ for all $z \notin [-1/(4m), 1/(4m)]$, $\int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}_m(z)\, dz = 1$. Hence, for any $m \geqslant 1$ we have $\phi_m(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, and $\phi_m(z) = 1$ for all $z \in \Omega_{1/(2m)}$, $\phi_m(z) = 0$ for all $z \notin \Omega_{1/m}$. So, $\widehat{f} = \phi_m(-z)\widehat{f}$ follows from $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \Omega$. Therefore, since

$$\widehat{D^m f} = (iz)^m \widehat{f},$$

$$\widehat{D^m f} = \phi_m(-z)(iz)^m \widehat{f}.$$

Hence,

$$D^m f = (2\pi)^{-1/2} f * \mathscr{F}^{-1}(\phi_m(-z)(iz)^m) = (2\pi)^{-1/2} f * \mathscr{F}(\phi_m(z)(-iz)^m). \tag{5}$$

We consider two numbers r, γ satisfying $1 < r < \infty$, $q + \frac{1}{p} - v - \frac{1}{u} = \frac{1}{r} + \gamma - 1$, $\gamma + v \geqslant 0$, $\gamma - q \geqslant 0$, $v - q + \gamma \leqslant 1$. From the hypothesis, we have $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{u} + \frac{1}{r}$, $\gamma < 1 - \frac{1}{r}$, $v < 1 - 1/u$ and $-q < 1/p$. Therefore, due to (5) and Lemma 2.2, there exists a constant C_2 independent of f, m such that

$$\|D^m f\|_{L^p_q} = (2\pi)^{-1/2} \|f * \mathscr{F}(\phi_m(z)z^m)\|_{L^p_q} \leqslant C_2 \|f\|_{L^u_v} \|\mathscr{F}(\phi_m(z)z^m)\|_{L^r_\gamma}. \tag{6}$$

Define

$$\eta_m := 1 + \frac{1}{m}, \quad \varphi_m(z) = \phi_m\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big), \quad \Phi_m(z) = \phi_m(z) - \varphi_m(z).$$

Then

$$\big(\mathscr{F}(\varphi_m(z)z^m)\big)(x) = (\eta_m)^m \bigg(\mathscr{F}\bigg(\phi_m\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)^m\bigg)\bigg)(x) = (\eta_m)^{m+1}\big(\mathscr{F}\big(\phi_m(z)z^m\big)\big)(\eta_m x).$$

So, by Lemma 2.4, one gets

$$\Big\|\mathscr{F}(\varphi_m(z)z^m)\Big\|_{L^r_\gamma} = (\eta_m)^{m+1-\gamma-\frac{1}{r}} \Big\|\mathscr{F}(\phi_m(z)z^m)\Big\|_{L^r_\gamma}.$$

Then it follows from $(\eta_m)^{m+1-\gamma-\frac{1}{r}} \geqslant (\eta_m)^m = \Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^m \geqslant 2$ that

$$\Big\|\mathscr{F}\big(\varphi_m(z)z^m\big)\Big\|_{L^r_\gamma} \geqslant 2\Big\|\mathscr{F}\big(\phi_m(z)z^m\big)\Big\|_{L^r_\gamma}.$$

Therefore, since $\Phi_m(z) = \phi_m(z) - \varphi_m(z)$,

$$\Big\|\mathscr{F}\big(\Phi_m(z)z^m\big)\Big\|_{L^r_\gamma} \geqslant \Big\|\mathscr{F}\big(\varphi_m(z)z^m\big)\Big\|_{L^r_\gamma} - \Big\|\mathscr{F}\big(\phi_m(z)z^m\big)\Big\|_{L^r_\gamma} \geqslant \Big\|\mathscr{F}\big(\phi_m(z)z^m\big)\Big\|_{L^r_\gamma}. \tag{7}$$

From (6)–(7) we obtain

$$\big\|D^m f\big\|_{L^p_q} \leqslant C_2 \|f\|_{L^u_v} \big\|\mathscr{F}(\Phi_m(z)z^m)\big\|_{L^r_\gamma}. \tag{8}$$

Next, we estimate $\|\mathscr{F}(\Phi_m(z)z^m)\|_{L^r_\gamma}$. To do that, we put $C_3 = \max\big\{\big\|\mathscr{G}^{(j)}\big\|_{L^1} : j \leqslant 3\big\}$. Since $\mathscr{H}_m(x) = 4m\mathscr{G}(4mx)$, $\mathscr{H}_m^{(j)}(x) = (4m)^{j+1}\mathscr{G}^{(j)}(4mx)$ and then we obtain

$$\big\|\mathscr{H}_m^{(j)}\big\|_{L^1} = (4m)^j \big\|\mathscr{G}^{(j)}\big\|_{L^1} \leqslant C_3(4m)^j \quad (\forall\, j \leqslant 3).$$

Therefore,

$$\big\|\phi_m^{(j)}\big\|_{L^\infty} = \big\|(1_{\Omega_{3/(4m)}} \mathscr{H}_m^{(j)})\big\|_{L^\infty} \leqslant \big\|\mathscr{H}_m^{(j)}\big\|_{L^1} \leqslant (4m)^j C_3 \quad (\forall\, j \leqslant 3). \tag{9}$$

Note that $\phi_m(z) = 1$ for all $z \in (-1 - (1/2m), 1 + (1/2m))$, and $\phi_m(z) = 0$ for all $z \in (-\infty, -1 - (1/m)) \cup (1 + (1/m), +\infty)$. So, if $|z| < 1$ then $|z/\eta_m| < |z| < 1$ and $\phi_m(z) = \phi_m(z/\eta_m) = 1$, i. e., $\Phi_m(z) = 0$.

Further, if $|z| > 1+(3/m)$ then $|z| > |z/\eta_m| > 1+(1/m)$ and then $\phi_m(z) = \phi_m(z/\eta_m) = 0$, i. e., $\Phi_m(z) = 0$.

So, we have

$$\operatorname{supp}\Phi_m \subset [1, 1 + (3/m)] \cup [-1 - (3/m), -1]. \tag{10}$$

Now, if $z \in [1, 1 + (3/m)] \cup [-1 - (3/m), -1]$ then

$$\Big|z - \frac{z}{\eta_m}\Big| = \Big|\frac{(\eta_m - 1)z}{\eta_m}\Big| = \Big|\frac{z}{m\eta_m}\Big| \leqslant \frac{4}{m}. \tag{11}$$

From (9) and (11) we get the following estimates for $z \in [1, 1 + (3/m)] \cup [-1 - (3/m), -1]$

$$\begin{aligned} \Big|\Phi_m(z)\Big| &= \Big|\phi_m(z) - \varphi_m(z)\Big| = \Big|\phi_m(z) - \phi\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)\Big| \\ &\leqslant \Big|z - \frac{z}{\eta_m}\Big|\Big\|\phi'_m\Big\|_{L^\infty} \leqslant \frac{4}{m}4mC_3 = 16C_3 \end{aligned} \tag{12}$$

and

$$\begin{aligned} \Big|\Phi'_m(z)\Big| &= \Big|\phi'_m(z) - \varphi'_m(z)\Big| = \Big|\phi'_m(z) - \Big(\phi_m\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)\Big)'\Big| \\ &= \Big|\phi'_m(z) - \frac{1}{\eta_m}\phi'_m\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)\Big| \leqslant \Big|\phi'_m(z) - \phi'_m\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)\Big| + \Big|\Big(1 - \frac{1}{\eta_m}\Big)\phi'_m\Big(\frac{z}{\eta_m}\Big)\Big| \\ &\leqslant \Big|z - \frac{z}{\eta_m}\Big|\Big\|\phi''_m\Big\|_{L^\infty} + \Big|1 - \frac{1}{\eta_m}\Big|\Big\|\phi'_m\Big\|_{L^\infty} \leqslant \frac{4}{m}(4m)^2C_3 + \Big|1 - \frac{1}{\eta_m}\Big|4mC_3 \leqslant 68mC_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Put $\Upsilon(x) = (\mathscr{F}(\Phi_m(z)z^m))(x)$. Then

$$\Upsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixz}\Phi_m(z)z^m\,dz.$$

Therefore, using (10), we obtain

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\Upsilon(x)\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|\Phi_m(z)z^m\Big|\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant 1+\frac{3}{m}}\Big|\Phi_m(z)z^m\Big|\,dz$$

and it follows from (9) that

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\Upsilon(x)\big| \leqslant \frac{6}{m\sqrt{2\pi}}\sup_{z\in\mathbb{R}}\big|\Phi_m(z)\big|\Big(1 + \frac{3}{m}\Big)^m \leqslant \frac{96e^3C_3}{m\sqrt{2\pi}}. \tag{14}$$

We also see that

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|x\Upsilon(x)\big| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixz}\big(\Phi_m(z)mz^{m-1} + \Phi'_m(z)z^m\big)\,dz\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|\Phi_m(z)mz^{m-1} + \Phi'_m(z)z^m\Big|\,dz. \end{aligned}$$

Therefore, using (9)–(10), we have

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|x\Upsilon(x)\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant 1+\frac{3}{m}}\Big|\Phi_m(z)mz^{m-1} + \Phi'_m(z)z^m\Big|dz \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{6}{m\sqrt{2\pi}} \sup_{1\leqslant|z|\leqslant 1+\frac{3}{m}} \Big|\Phi_m(z)mz^{m-1}+\Phi_m'(z)z^m\Big|\\
&\leqslant \frac{6}{m\sqrt{2\pi}}\left[\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\Phi_m(z)\Big|m\Big(1+\frac{3}{m}\Big)^{m-1}+\sup_{z\in\mathbb{R}}\Big|\Phi_m'(z)\Big|\Big(1+\frac{3}{m}\Big)^{m}\right]\\
&\leqslant \frac{6}{m\sqrt{2\pi}}\Big[16C_3me^3+68C_3me^3\Big]=\frac{504e^3C_3}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}
$$

From $0<\gamma+1/r<1$ we have $r-r\gamma>1$ and $\gamma r>-1$. Hence, we get the following estimate

$$
\begin{aligned}
\|\Upsilon\|_{L^r_\gamma}^r &= \int\limits_{|x|\leqslant m}\big|x^\gamma\Upsilon(x)\big|^r\,dx+\int\limits_{|x|\geqslant m}\big|x^\gamma\Upsilon(x)\big|^r\,dx \qquad (16)\\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\Upsilon(x)\big|^r\int\limits_{|x|\leqslant m}|x|^{\gamma r}\,dx+\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|x\Upsilon(x)\big|^r\int\limits_{|x|\geqslant m}\frac{1}{|x|^{r-\gamma r}}\,dx\\
&=\frac{2m^{\gamma r+1}}{\gamma r+1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\Upsilon(x)\big|^r+\frac{2m^{\gamma r+1-r}}{r-\gamma r-1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|x\Upsilon(x)\big|^r.
\end{aligned}
$$

From (14)–(16), we obtain

$$
\begin{aligned}
\Big\|\Upsilon\Big\|_{L^r_\gamma}^r &\leqslant \frac{2m^{\gamma r+1}}{\gamma r+1}\left(\frac{96e^3C_3}{m\sqrt{2\pi}}\right)^r+\frac{2m^{\gamma r+1-r}}{r-\gamma r-1}\left(\frac{504e^3C_3}{\sqrt{2\pi}}\right)^r\\
&=2m^{\gamma r+1-r}\left(\frac{e^3C_3}{\sqrt{2\pi}}\right)^r\left(\frac{504^r}{r-\gamma r-1}+\frac{96^r}{\gamma r+1}\right),
\end{aligned}
$$

and then

$$
\Big\|\Upsilon\Big\|_{L^r_\gamma}\leqslant\frac{e^3C_3}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{504^r2}{r-\gamma r-1}+\frac{96^r2}{\gamma r+1}\right)^{\frac{1}{r}}m^{-1+\gamma+\frac{1}{r}}=C_3m^{-\varrho}, \tag{17}
$$

where $C_3=e^3C_3(\frac{504^r2}{r-\gamma r-1}+\frac{96^r2}{\gamma r+1})^{\frac{1}{r}}/\sqrt{2\pi}$.
From (8), (17), we can choose a constant C such that

$$
\|D^mf\|_{L^p_q}\leqslant Cm^{-\varrho}\|f\|_{L^u_v}.
$$

The proof is complete. $\rhd$

Lemma 2.6. *Let $1<p<\infty$, $0<q+1/p<1$, and $f\in L^p_q(\mathbb{R})$. Then*

$$
\liminf_{m\to\infty}\|D^mf\|_{L^p_q}^{1/m}\geqslant\sup\big\{|x|:\,x\in\operatorname{supp}\widehat{f}\,\big\}. \tag{18}
$$

$\lhd$ Denote $\sigma:=\sup\big\{|x|:\,x\in\operatorname{supp}\widehat{f}\big\}$. If $\sigma=0$ then (18) is obvious. Now, we assume that $\sigma>0$. Without loss of generality we may assume that $\sigma\in\operatorname{supp}\widehat{f}$. For each $\epsilon\in(0,\sigma)$, there exists a function $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi\subset[\sigma-\epsilon,\sigma+\epsilon]$ such that $\langle\widehat{f},\varphi\rangle\neq 0$. Put

$$
\mathscr{Q}_m=\mathscr{F}(\varphi(x)/x^m).
$$

Hence, $D^m\mathscr{Q}_m=(-i)^m\mathscr{F}\varphi$ and then

$$
\begin{aligned}
0&<\big|\langle\widehat{f},\varphi\rangle\big|=\big|\langle f,\mathscr{F}\varphi\rangle\big|=\big|\langle f,D^m\mathscr{Q}_m\rangle\big|=\big|\langle D^mf,\mathscr{Q}_m\rangle\big|\\
&=\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}}D^mf(x)\mathscr{Q}_m(x)\,dx\Bigg|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}|x^qD^mf(x)||x^{-q}\mathscr{Q}_m(x)|\,dx.
\end{aligned}
$$

Using Hölder inequality, we have

$$0 < \left|\langle \widehat{f}, \varphi\rangle\right| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x^q D^m f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x^{-q} \mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} \, dx\right)^{1/\overline{p}} = \|D^m f\|_{L^p_q} \|\mathscr{Q}_m\|_{L^{\overline{p}}_{-q}},$$

where

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\overline{p}} = 1.$$

So,

$$\liminf_{m\to\infty} \|D^m f\|^{1/m}_{L^p_q} \geqslant 1/\limsup_{m\to\infty} \|\mathscr{Q}_m\|^{1/m}_{L^{\overline{p}}_{-q}}. \tag{19}$$

We consider an integer N satisfying $(N+q)\overline{p} > 1$. From $0 < q + \frac{1}{p} < 1$, we deduce that $q\overline{p} < 1$, which together with $(N+q)\overline{p} > 1$ and

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x^{-q}\mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} dx \leqslant \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x^{-q}\mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} dx + \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x^{-q}\mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} dx$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-q\overline{p}} dx + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^N \mathscr{Q}_m(x)\right|^{\overline{p}} \int\limits_{|x|\geqslant 1} \left|x^{-q-N}\right|^{\overline{p}} dx$$

imply

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x^{-q}\mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} dx \leqslant \frac{2}{1 - q\overline{p}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}} + \frac{2}{(N+q)\overline{p} - 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^N \mathscr{Q}_m(x)|^{\overline{p}}. \tag{20}$$

Note that

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(1 + |x|^N\right)\mathscr{Q}_m(x)\right| \leqslant \int\limits_{[\sigma-\epsilon,\sigma+\epsilon]} \left(\left|\varphi(x)/x^m\right| + \left|D^N(\varphi(x)/x^m)\right|\right) dx \leqslant c m^N (\sigma - \epsilon)^{-m},$$

where c is independent of m. Then, by (20), we obtain

$$\limsup_{m\to\infty} \left\|\mathscr{Q}_m\right\|^{1/m}_{L^{\overline{p}}_{-q}} \leqslant 1/(\sigma - \epsilon).$$

So, it follows from (19) that

$$\liminf_{m\to\infty} \left\|D^m f\right\|^{1/m}_{L^p_q} \geqslant \sigma - \epsilon.$$

Letting $\epsilon \to 0$, we confirm (18). The proof is complete. $\rhd$

Lemma 2.7. *Let $1 < p < \infty$ and $0 < q + 1/p$. Then $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p_q(\mathbb{R})$.*

$\lhd$ Let $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ and an integer N be satisfying $(N-q)p > 1$. From $0 < q + \frac{1}{p}$, we deduce $qp > -1$, which together with $(N-q)p > 1$ and

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x^q\varphi(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x^q\varphi(x)|^p \, dx + \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x^q\varphi(x)|^p \, dx$$
$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{qp} \, dx + \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^N\varphi(x)|^p \int\limits_{|x|\geqslant 1} |x^{q-N}|^p \, dx$$

imply that

$$\int_{\mathbb{R}} |x^q \varphi(x)|^p \, dx \leqslant \frac{2}{qp+1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p + \frac{2}{(N-q)p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^N \varphi(x)|^p < \infty.$$

Hence, $\varphi \in L^p_q(\mathbb{R})$. $\rhd$

$\lhd$ Proof of Theorem 2.1. We define

$$_\kappa f(x) = f\left(\frac{x}{\kappa}\right).$$

Since $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$, $\operatorname{supp} \widehat{_\kappa f} \subset [-1,1]$. Then, using Lemma 2.5, we obtain

$$\|D^m {_\kappa f}\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \|_\kappa f\|_{L^u_v} . \tag{21}$$

Since $_\kappa f(x) = f\left(\frac{x}{\kappa}\right)$ and Lemma 2.4,

$$\|_\kappa f\|_{L^u_v} = \kappa^{v+\frac{1}{u}} \|f\|_{L^u_v}, \|D^m {_\kappa f}\|_{L^p_q} = \kappa^{-m+q+\frac{1}{p}} \|D^m f\|_{L^p_q} .$$

Hence, it follows from (21) that

$$\kappa^{-m+q+\frac{1}{p}} \|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{v+\frac{1}{u}} \|f\|_{L^u_v} .$$

So,

$$\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+v+\frac{1}{u}-\frac{1}{p}-q} \|f\|_{L^u_v} = C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u_v} ,$$

which confirms (4), and also (3) by using Lemma 2.6.

To complete the proof, it remains to prove that $\operatorname{supp} \widehat{D^m f} = \operatorname{supp} \widehat{f}$ for all $m \in \mathbb{N}$. It is enough to prove this for $m = 1$. Assume the contrary that $\operatorname{supp} \widehat{Df} \neq \operatorname{supp} \widehat{f}$. Since $\widehat{Df} = (ix)\widehat{f}$,

$$\operatorname{supp} \widehat{Df} \subset \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \operatorname{supp} \widehat{Df} \cup \{0\}.$$

Hence, by $\operatorname{supp} \widehat{Df} \neq \operatorname{supp} \widehat{f}$, we obtain

$$\operatorname{supp} \widehat{f} = \operatorname{supp} \widehat{Df} \cup \{0\}, \quad 0 \notin \operatorname{supp} \widehat{Df}. \tag{22}$$

Then, it follows from that $\operatorname{supp} \widehat{Df}$ is a compact set, there exists a positive number ϵ such that $B[0,\epsilon] \cap \operatorname{supp} \widehat{f} = \{0\}$. We choose a function $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \psi \subset [-\epsilon, \epsilon]$ satisfying $\psi(x) = 1$ in $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$. Then

$$\operatorname{supp} \psi \widehat{f} \subset \{0\},$$

which together with Lemma 2.3 imply

$$\psi \widehat{f} = \sum_{j=0}^{N} c_j D^j \delta,$$

where N is the order of $\psi \widehat{f}$ and δ is the Dirac function ($\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ for all $\varphi \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$). Therefore, $(\mathscr{F}^{-1}\psi) * f(x)$ is a polynomial and

$$(2\pi)^{-1/2} (\mathscr{F}^{-1}\psi) * f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha \mathscr{F}^{-1}(D^\alpha \delta). \tag{23}$$

Using $\gamma + 1/r > 0$ and Lemma 2.7, we deduce $\mathscr{F}^{-1}\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^r_\gamma(\mathbb{R})$. Combining this, $f \in L^u_v(\mathbb{R})$ and Lemma 2.2, we get $(\mathscr{F}^{-1}\psi) * f \in L^p_q(\mathbb{R})$. This and (23) imply

$$(\mathscr{F}^{-1}\psi) * f(x) = 0.$$

So, $\psi\widehat{f} = 0$. By $0 \in \operatorname{supp}\widehat{f}$, there is a function $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\phi \subset [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ such that $\langle \widehat{f}, \phi\rangle \neq 0$. So, it follows from $\psi(x) = 1$ in $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ that

$$0 \neq \langle \widehat{f}, \phi\rangle = \langle \widehat{f}, \psi\phi\rangle = \langle \psi\widehat{f}, \phi\rangle = 0,$$

which is impossible. The proof is complete. $\rhd$

For $\kappa > 0$ we denote

$$L^u_{v,\kappa} = \big\{f \in L^u_v(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]\big\}.$$

The norm of the derivative operator D^m is given by

$$\|D^m\|_{L^u_{v,\kappa} \to L^p_q} = \sup_{\|f\|_{L^u_{v,\kappa}} \leqslant 1} \|D^m f\|_{L^p_q}.$$

From Theorem 2.1, we have the following corollary about the norm of derivative operators.

Corollary 2.8. *Let $1 < u, p < \infty$, $0 < q + 1/p < v + 1/u < 1$, $v - q \geqslant 0$, $\kappa > 0$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of m, κ such that*

$$\|D^m\|_{L^u_{v,\kappa} \to L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho},$$

where

$$\varrho = v + \frac{1}{u} - q - \frac{1}{p} > 0.$$

If $p = u$, using Theorem 2.1, we get

Corollary 2.9. *Let $1 < p < \infty, -1/p < q < v < 1 - 1/p$, $\kappa > 0$, $f \in L^p_v(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Then $D^m f \in L^p_q(\mathbb{R})$ and there exists a constant $C > 0$ independent of f, m, κ such that*

$$\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^p_v},$$

where

$$\varrho = v - q > 0.$$

If $q = v$, it follows from Theorem 2.1 that

Corollary 2.10. *Let $1 < u < p < \infty$, $-1/p < q < 1 - 1/u$, $\kappa > 0$, $f \in L^u_q(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of f, m, κ such that*

$$\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u_q},$$

where

$$\varrho = \frac{1}{u} - \frac{1}{p} > 0.$$

Using Theorem 2.1 in the case $q = 0$, we have the following:

Corollary 2.11. *Let $1 < u, p < \infty$, $1/p < v + 1/u < 1$, $v \geqslant 0$, $\kappa > 0$, $f \in L^u_v(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of f, m, κ such that*

$$\|D^m f\|_{L^p} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u_v}, \quad \left(\varrho = v + \frac{1}{u} - \frac{1}{p}\right).$$

In particular,

$$\lim_{m\to\infty} \|D^m f\|_{L^u_v} / \kappa^m = 0, \quad \limsup_{m\to\infty} \|D^m f\|_{L^u_v}^{1/m} \leqslant \kappa.$$

Further, if $v = 0$, we have

Corollary 2.12. *Let $1 < u, p < \infty$, $0 < q + 1/p < 1/u$, $q \leqslant 0$, $\kappa > 0$, $f \in L^u(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Then there exists a constant $C > 0$ independent of f, m, κ such that*

$$\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u},$$

where

$$\varrho = \frac{1}{u} - q - \frac{1}{p} > 0.$$

In particular,

$$\lim_{m\to\infty} \|D^m f\|_{L^u} / \kappa^m = 0, \quad \limsup_{m\to\infty} \|D^m f\|_{L^u}^{1/m} \leqslant \kappa.$$

Moreover, if $v = q = 0$ then the following result holds:

Corollary 2.13. *Let $1 < u < p < \infty$, $\kappa > 0$, $f \in L^u(\mathbb{R})$ and $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Then $D^m f \in L^p(\mathbb{R})$ and there exists a constant $C > 0$ independent of f, m, κ such that*

$$\|D^m f\|_{L^p} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u} ,$$

where

$$\varrho = \frac{1}{u} - \frac{1}{p} > 0.$$

Using Theorem 2.1 and Bernstein inequality, we can prove the following result.

Corollary 2.14. *Let $1 < u < p < \infty$, $\kappa > 0$. Denote*

$$N_{\kappa,u} := \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa],\ f \in L^u(\mathbb{R}) \right\}$$

and

$$\gamma_m := \inf_{f \in N_{\kappa,u}} \frac{\|D^m f\|_{L^p}}{\kappa^m \|f\|_{L^u}}.$$

Then $\gamma_{m+1} \leqslant \gamma_m$ and

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m = 0.$$

Let $1 \leqslant p < \infty$ and $q \in \mathbb{R}$. The weighted Lebesgue space $L^p_q := L^p_q(\mathbb{R}^n)$ consists of all measurable functions such that

$$\|f\|_{L^p_q} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p \prod_{j=1}^n |x_j|^{pq} \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \infty,$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Consecutively applying Theorem 2.1 to each variable, we get the following result for the n-dimensional case.

Theorem 2.15. *Let $1 < u, p < \infty$, $0 < q + 1/p < v + 1/u < 1$, $v - q \geqslant 0$, $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $f \in L^u_v(\mathbb{R}^n)$ and $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\kappa_1, \kappa_1] \times \ldots \times [-\kappa_n, \kappa_n]$. Then $D^\alpha f \in L^p_q(\mathbb{R}^n)$ and there exists a constant $C > 0$ independent of f, α, κ such that*

$$\|D^\alpha f\|_{L^p_q} \leqslant C\|f\|_{L^u_v} \prod_{\substack{j=1,\\ \alpha_j \neq 0}}^{n} {\alpha_j}^{-\varrho} \kappa_j^{\alpha_j + \varrho}, \tag{24}$$

where

$$\varrho = v + \frac{1}{u} - q - \frac{1}{p} > 0.$$

References

1. *Bernstein, S. N. Sur l'Ordre de la Meilleure Approximation des Functions Continues par les Polyomes de Degré Donné*, Extrait des Mémoires de l'Académie royale de Belgque, ser. 2, vol. 4, Bruxelles, Hayez, 1912, 103 p.
2. *DeVore, R. and Lorentz, G. G. Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
3. *Nikol'skii, S. M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Grundl. Math. Wissensch, vol. 205, Berlin, Springer-Verlag, 1975. DOI: 10.1007/978-3-642-65711-5.
4. *Nikol'skii, S. M.* Inequalities for Entire Functions of Finite Degree and their Application to the Theory of Differentiable Functions of Several Variables, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], vol. 38, Moscow, Acad. Sci. USSR, 1951, pp. 244–278 (in Russian).
5. *Frappier, C. and Rahman, Q. I.* On an Inequality of S. Bernstein, *Canadian Journal of Mathematics*, 1982, vol. 34, pp. 932–944. DOI: 10.4153/CJM-1982-066-7.
6. *Ganzburg, M. I.* Sharp constants in V. A. Markov–Bernstein Type Inequalities Of Different Metrics, *Journal of Approximation Theory*, 2017, vol. 215, pp. 92–105. DOI: 10.1016/j.jat.2016.11.007.
7. *Ganzburg, M. I.* Sharp Constants of Approximation Theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii Type Inequalities, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2020, vol. 26, article 11. DOI: 10.1007/s00041-019-09720-x.
8. *Ganzburg, M. I. and Tikhonov, S. Yu.* On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities, *Constructive Approximation*, 2017, vol. 45, pp. 449–466. DOI: 10.1007/s00365-016-9363-1.
9. *Platonov, S. S.* Bessel Harmonic Analysis and the Approximation of Functions on a Half-Line, *Izvestiya: Mathematics*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048.
10. *Rahman, Q. I. and Schmeisser, G.* L^p Inequalities for Entire Functions of Exponential Type, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1990, vol. 320, pp. 91–103. DOI: 10.1090/S0002-9947-1990-0974526-4.
11. *Rahman, Q. I. and Tariq, Q. M.* On Bernstein's Inequality for Entire Functions of Exponential Type, *Computational Methods and Function Theory*, 2007, vol. 7, pp. 167–184. DOI: 10.1007/BF03321639.
12. *Nessel, R. J. and Wilmes, G.* Nikol'skii-Type Inequalities in Connection with Regular Spectral Measures, *Acta Mathematica*, 1979, vol. 33, pp. 169–182.
13. *Nessel, R. J. and Wilmes, G.* Nikol'skii-Type Inequalities for Trigonometric Polynomials and Entire Functions of Exponential Type, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1978, vol. 25, pp. 7–18. DOI: 10.1017/S1446788700038878.
14. *Nikol'skii, S. M.* Some Inequalities for Entire Functions of Finite Degree and their Application, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1951, vol. 76, pp. 785–788 (in Russian).
15. *Triebel, H.* General Function Spaces, II: Inequalities of Plancherel-Polya Nikolskii-type, L^p-Space of Analytic Functions: $0 < p \leqslant \infty$, *Journal of Approximation Theory*, 1977, vol. 19, pp. 154–175. DOI: 10.1016/0021-9045(77)90038-7.
16. *Triebel, H. Theory of Function Spaces*, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhauser, 1983.
17. *Bang, H. H. and Huy, V. N.* New Results Concerning the Bernstein–Nikol'skii Inequality, *Advances in Mathematics Reseach*, 2011, vol. 16, pp. 177–191.
18. *Bang, H. H.* A Property of Infinitely Differentiable Functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1990, vol. 108, pp. 73–76. DOI: 10.1090/S0002-9939-1990-1024259-9.

19. *Kerman, R. A.* Convolution Theorems with Weights, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 280, no. 1, pp. 207–219. DOI: 10.1090/S0002-9947-1983-0712256-0.
20. *Vladimirov, V. S. Methods of the Theory of Generalized Functions*, Taylor & Francis, London, New York, 2002.

Received March 5, 2020

Ha Huy Bang
Vietnamese Academy of Science and Technology,
18 Hoang Quoc Viet St., Cay Giay, Hanoi, Vietnam,
Professor
E-mail: `hhbang@math.ac.vn`
https://orcid.org/0000-0002-2219-8260;

Vu Nhat Huy
Hanoi University of Science,
334 Nguyen Trai St., Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam,
Associate Professor;
TIMAS, Thang Long University,
Nghiem Xuan Yem, Hoang Mai, Hanoi, Vietnam,
E-mail: `nhat_huy85@yahoo.com`
https://orcid.org/0000-0002-4293-5440

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 18–29

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — НИКОЛЬСКОГО В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Банг Х. З.[1], Зуй В. Н.[2,3]

[1] Вьетнамская академия наук и технологий, Ханой, Вьетнам;
[2] Ханойский университет естественных наук, Ханой, Вьетнам;
[3] Тханг Лонг университет, Ханой, Вьетнам
E-mail: `hhbang@math.ac.vn`;

Аннотация. В работе устанавливаются результаты, касающиеся неравенства Бернштейна — Никольского в весовых пространствах Лебега. Основной результат содержится в следующем утверждении. Пусть $1 < u, p < \infty$, $0 < q + 1/p < v + 1/u < 1$, $v - q \geqslant 0$, $\kappa > 0$, $f \in L^u_v(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\kappa, \kappa]$. Тогда $D^m f \in L^p_q(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\widehat{D^m f} = \operatorname{supp}\widehat{f}$ и существует такая постоянная C, независящая от f, m и κ, что $\|D^m f\|_{L^p_q} \leqslant C m^{-\varrho} \kappa^{m+\varrho} \|f\|_{L^u_v}$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, где $\varrho = v + \frac{1}{u} - \frac{1}{p} - q > 0$ и весовое пространство Лебега L^p_q состоит из всех измеримых функций, для которых $\|f\|_{L^p_q} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{pq}\, dx \Big)^{1/p} < \infty$. Более того, $\lim_{m\to\infty} \|D^m f\|^{1/m}_{L^p_q} = \sup\{|x| : x \in \operatorname{supp}\widehat{f}\}$. Главным достижением нашего результата является то, что в правой части неравенства содержится множитель $m^{-\varrho}$ ($\varrho > 0$), который ранее никогда не появлялся в аналогичных исследованиях других авторов. Соответствующий результат получен также для n-мерного случая.

Ключевые слова: весовые пространства Лебега, неравенство Бернштейна, неравенство Никольского.

Mathematical Subject Classification (2010): 26D10, 46E30.

Образец цитирования: *Bang, H. H. and Huy, V. N.* A Bernstein–Nikol'skii Inequality for Weighted Lebesgue Spaces // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 3.—С. 18–29 (in English). DOI: 10.46698/h8083-6917-3687-w.

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 30–46

УДК 517.547.22
DOI 10.46698/g8758-9884-5440-f

ОЦЕНКИ ИНДИКАТОРОВ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОРНЯМИ#

Г. Г. Брайчев[1], **В. Б. Шерстюков**[2]

[1]Московский педагогический государственный университет,
Россия, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14;
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: braichev@mail.ru, shervb73@gmail.com

Посвящается 90-летию профессора Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Статья является продолжением серии работ авторов, посвященной изучению связи между закономерностями роста целой функции и характером распределения ее корней. Исследуется асимптотическое поведение целой функции конечного нецелого порядка с последовательностью отрицательных корней, имеющей предписанные нижнюю и верхнюю плотности. Особое внимание уделено случаю нулевой нижней плотности корней. Даны точные оценки для индикатора и нижнего индикатора такой функции. Описаны углы на комплексной плоскости, в которых эти характеристики тождественно равны нулю. В некоторых специальных ситуациях указаны явные формулы для вычисления индикаторов. Используемые термины — обычные плотности последовательности корней — просты и наглядны в отличие от многих типичных для теории роста целых функций сложных интегральных конструкций, содержащих считающую функцию корней. Результаты применяются к известной задаче о наименьшем типе целой функции порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с корнями на луче. Эта задача достаточно полно изучена лишь в случае $\rho \in (0, 1)$. При $\rho > 1$ не известен точный закон, выражающий наименьший возможный тип такой целой функции через плотности ее корней. Для упомянутой экстремальной величины найдена новая двусторонняя оценка, действующая на всем множестве нецелых положительных значений параметра ρ и усиливающая известные ранее оценки А. Ю. Попова (2009 г.). Сформулирована гипотеза относительно поведения экстремального типа вблизи целых значений ρ. Изложение дополнено кратким обзором классических результатов Ж. Валирона, Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга и недавних продвижений из работ А. Ю. Попова и авторов, напрямую связанных с заданным направлением исследования. Очерчен круг перспективных задач по затронутой тематике.

Ключевые слова: целая функция, индикатор, нижний индикатор, тип целой функции, верхняя и нижняя плотности корней.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D15, 30D20.

Образец цитирования: *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Оценки индикаторов целой функции с отрицательными корнями // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 30–46. DOI: 10.46698/g8758-9884-5440-f.

Введение

Так случилось, что будучи воспитанниками ростовской школы комплексного анализа, многие годы возглавляемой профессором Ю. Ф. Коробейником, авторы этой заметки, в разное время переехав в Москву, около пятнадцати лет назад объединили свои усилия

#Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00236.

для изучения цикла новых, специальных задач теории роста целых функций. Аппарат целых функций является неотъемлемым инструментом при исследовании уравнений типа свертки, операторных уравнений бесконечного порядка, полных и представляющих систем, интерполяционных задач и многих других областей анализа, в которых важные и широко известные результаты принадлежат Ю. Ф. Коробейнику и его научной школе (см. [1]). Статья посвящена юбилею Юрия Федоровича Коробейника — Учителя, «заразившего» нас любовью к целым функциям.

Поздравляем Юрия Федоровича со славной датой, желаем крепкого здоровья и долгих лет творческой жизни!

1. Предварительные сведения и известные результаты

В классической теории роста целых функций давно изучается вопрос о том, как зависит скорость возрастания максимума модуля функции от закона распределения на плоскости последовательности ее корней (см., например, мемуар Э. Линделефа [2]).

Пусть f — целая функция, отличная от тождественного нуля. Будем предполагать, что f имеет бесконечно много корней и записывать их с учетом кратностей по неубыванию модулей в виде последовательности $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Обозначим

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r > 0. \tag{1}$$

Одной из основных асимптотических характеристик логарифма максимума модуля (1) целой функции f порядка $\rho \in (0, +\infty)$ является ее *тип*, который определяется по формуле

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \tag{2}$$

При том же порядке ρ вводят *верхнюю* и *нижнюю плотности* последовательности корней $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ обычным образом:

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}. \tag{3}$$

Важной проблемой теории целых функций является задача о нахождении соотношений между характеристиками (2) и (3). Так, еще Ж. Валирон [3; ч. 2, II] показал, что в общем случае $\Lambda \subset \mathbb{C}$ при заданном значении верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$ справедлива оценка

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta}{\rho e}. \tag{4}$$

Известно, что для любого $\rho > 0$ оценка (4) достигается [4; гл. 4, § 1], т. е. существует целая функция f, для которой в (4) имеет место равенство. При дополнительной информации о нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$, где $\alpha \in [0, \beta]$, оценка может быть усилена:

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta}{\rho} \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta} - 1\right\}. \tag{5}$$

По поводу результата (5) см. монографию [5; с. 16] и обзор [6; § 2]. В то же время, благодаря исследованиям Ж. Валирона, А. Данжуа, а затем А. А. Гольдберга, была найдена точная оценка сверху для величины (2) через верхнюю плотность $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$

множества корней $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Эта оценка довольно сложна, но в случае $\rho \in (0,\,1)$ она упрощается к виду

$$\sigma_\rho(f) \leqslant \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}. \tag{6}$$

Укажем, что (6) достигается на целых функциях с последовательностью отрицательных (или лежащих на фиксированном луче $\arg z = \theta$) корней, имеющей *плотность*

$$\Delta_\rho(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \beta, \tag{7}$$

хотя наличие плотности не является строго обязательным для справедливости равенства в (6) (подробности см. в [6]). Уже здесь начинает проявляться существенное влияние «геометрии» расположения Λ в $\mathbb{C}$ на характер подобных задач.

Переход к целым функциям f с нулями на луче (для определенности считаем, что $\Lambda = \Lambda_f \subset (-\infty,\,0)$) приводит к существенному уточнению результатов (4), (5). Дадим формулировку соответствующего утверждения, полученного в работе [7].

Теорема А. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$. Тогда для любой целой функции f порядка ρ с последовательностью отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f$ верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$ выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau. \tag{8}$$

Равенство в (8) достигается на некоторой целой функции f с последовательностью отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f$ такой, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Только два «предельных» случая теоремы А были известны на момент ее появления: $\alpha = \beta$ и $\alpha = 0$. В первом случае, с учетом оценки Валирона (6), получаем формулу

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho},$$

позволяющую вычислять тип целой функции с *измеримой* последовательностью отрицательных корней. Во втором случае из неравенства (8) извлекается принадлежащая А. Ю. Попову [8] точная оценка снизу для типа целой функции

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \beta \max_{a>0} \frac{\ln(a+1)}{a^\rho} \tag{9}$$

при ограничениях $\rho \in (0,1)$, $\Lambda = \Lambda_f \subset (-\infty,\,0)$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$.

Еще более сложным образом локализация корней функции сказывается в задаче о наименьшем типе при переходе от луча к углу фиксированного раствора. Такое развитие теорема А получила в работе [9], основной результат которой состоит в следующем.

Теорема B. *Пусть заданы числа $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. Тогда для любой целой функции f порядка ρ с последовательностью корней $\Lambda = \Lambda_f$, расположенной в каком-либо замкнутом угле Γ_θ раствора 2θ, при ограничениях $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha$, выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{(\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho})(\tau+\cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\,d\tau. \tag{10}$$

Равенство в (10) достигается на некоторой целой функции f с последовательностью корней $\Lambda = \Lambda_f$, расположенной на сторонах угла Γ_θ так, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha$.

Очевидно, что теорема A следует из теоремы B при $\theta = 0$. Подставляя в оценку (10) значение $\alpha = 0$ и вычисляя интеграл, получим доказанное в [10] незадолго до теоремы B точное неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho}. \tag{11}$$

Здесь $\Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_\theta$ с фиксированным раствором $2\theta \in [0, \pi]$, а $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ с заданными параметрами $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$. Кроме того [6; заключительная часть § 7], если целая функция f является экстремальной в оценке (11) (см. также (9)), то нижняя плотность (при показателе ρ) множества корней Λ_f необходимо равна нулю. Дополнительную информацию, связанную с результатами этого раздела, см. в обзорах [6, 10].

Несмотря на прозрачность постановок, задачи указанного направления, учитывающие расположение корней целой функции, весьма трудны. В частности, распространение теорем A, B на нецелые значения $\rho > 1$ является на данный момент нерешенной проблемой даже при $\alpha = 0$. В следующем разделе мы дадим возможный подход к решению этой проблемы, основанный на изучении индикатора целой функции. Наряду с новыми утверждениями, для полноты картины будут представлены также недавние результаты о нижнем индикаторе из статьи [11]. Насколько нам известно, обсуждаемые задачи не охвачены этапными исследованиями А. А. Гольдберга 60-х годов прошлого века, мощной теорией предельных множеств В. С. Азарина (см. [12; гл. 1–3]), а также недавними совместными работами К. Г. Малютина, М. В. Кабанко, Т. И. Малютиной [13, 14].

2. Индикаторы целой функции с отрицательными корнями

Напомним определения двух стандартных характеристик роста целой функции, учет которых дает в простых терминах «границы» ее асимптотического поведения на лучах комплексной плоскости.

Для целой функции $f \not\equiv 0$ *индикатор* и *нижний индикатор* при порядке $\rho > 0$ задаются соответственно формулами

$$h_\rho(f, \theta) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \tag{12}$$

$$\underline{h}_\rho(f, \theta) = \sup_{E_0} \varliminf_{r\to+\infty,\, r\notin E_0} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho},$$

в которых аргумент $\theta \in (-\pi, \pi]$. Супремум во второй формуле берется по всем множествам $E_0 \subset (0, +\infty)$ *нулевой относительной меры* (подробную информацию об индикаторах целой функции см. в [4; гл. I, § 15; гл. II, § 1], [15, 16]).

В этом разделе рассматриваем целую функцию f положительного нецелого порядка ρ и нормального типа с последовательностью отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, где

$$0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = -\infty. \tag{13}$$

Для такой функции f имеем

$$\begin{cases} \underline{h}_\rho(f, \theta) = \varliminf\limits_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, & \theta \in (-\pi, \pi), \\ \underline{h}_\rho(f, \pi) = \sup\limits_{E_0} \varliminf\limits_{r\to+\infty,\, r\notin E_0} \frac{\ln|f(-r)|}{r^\rho}, \end{cases} \tag{14}$$

что при $\theta \in (-\pi, \pi)$ приводит к полному единообразию записи в определении пары «индикатор — нижний индикатор», характеризующей «радиальное» поведение $|f|$ в плоскости с разрезом по отрицательному лучу.

Если последовательность (13) является измеримой, т. е. подчинена (7), то индикатор и нижний индикатор функции f совпадают и однозначно вычисляются по формуле

$$h_\rho(f,\theta) = \underline{h}_\rho(f,\theta) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\,\theta, \quad \theta \in (-\pi,\pi] \tag{15}$$

(см., например, [4; гл. I, § 17, теорема 25; гл. II, § 2], [17; гл. 7]). Если же последовательность корней *неизмерима*, т. е. $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) < \overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, то подобные формулы неизвестны, так как индикаторы функции, вообще говоря, не могут быть вычислены через плотности множества ее корней. Возникает вопрос о границах изменения индикатора и нижнего индикатора функции, если зафиксированы верхняя и нижняя плотности (3) последовательности (13).

Изучаем самую «нерегулярную» ситуацию, когда верхняя и нижняя плотности максимально различаются:

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0. \tag{16}$$

Без ограничения общности можно считать, что функция f задана *каноническим произведением рода* $p = [\rho]$, т. е.

$$\begin{cases} f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), & z \in \mathbb{C} \quad (p = 0), \\ f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{\lambda_n} + \ldots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p}\right\}, & z \in \mathbb{C} \quad (p \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{17}$$

Используя для (17) интегральное представление [17; теорема 7.2.1], запишем

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho}\, K_\rho(\tau,\theta)\, d\tau, \quad r > 0,\ \theta \in (-\pi,\pi), \tag{18}$$

где

$$n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant t} 1 = \max\left\{n : |\lambda_n| \leqslant t\right\} \tag{19}$$

— *считающая функция* корней f,

$$K_\rho(\tau,\theta) = (-1)^p\,\frac{\tau^{\gamma-1}\big(\tau\cos\big((p+1)\,\theta\big) + \cos p\,\theta\big)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}, \quad \theta \in (-\pi,\pi). \tag{20}$$

Здесь и ниже приняты обозначения $p = [\rho]$, $\gamma = \{\rho\} = \rho - p$ соответственно для целой и дробной частей числа ρ. Функцию (20) называем *ядром* интегрального представления (18). Четность ядра по переменной θ влечет равенства

$$h_\rho(f,-\theta) = h_\rho(f,\theta), \quad \underline{h}_\rho(f,-\theta) = \underline{h}_\rho(f,\theta), \quad \theta \in (-\pi,\pi),$$

и позволяет ограничиться значениями $\theta \in [0,\pi)$. (Укажем, что не входящее в формулы (18), (20) значение $\theta = \pi$ соответствует отрицательному лучу, на котором расположены корни функции f, а там ее поведение нуждается в отдельном рассмотрении.) При фиксированных p, θ и возрастании τ от 0 до $+\infty$ возможны две ситуации: ядро *сохраняет* постоянный знак; ядро *меняет* знак при переходе через точку $\tau_* > 0$, где

$$\tau_* = \tau_*(p,\theta) = -\frac{\cos p\,\theta}{\cos((p+1)\theta)}. \tag{21}$$

В этой связи вводим следующие множества, по факту зависящие только от $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, которые для удобства ссылок назовем *индикаторными множествами*:

$$\Gamma_p^{(+)} = \bigl\{\theta \in [0,\pi) : \, K_\rho(\tau,\theta) > 0 \text{ при всех } \tau \in (0,+\infty)\bigr\},$$

$$\Gamma_p^{(-)} = \bigl\{\theta \in [0,\pi) : \, K_\rho(\tau,\theta) < 0 \text{ при всех } \tau \in (0,+\infty)\bigr\},$$

$$\Gamma_p^{(\pm)} = \bigl\{\theta \in [0,\pi) : \, \tau_* > 0;\, K_\rho(\tau,\theta) > 0 \text{ при } \tau \in (0,\tau_*),\, K_\rho(\tau,\theta) < 0 \text{ при } \tau \in (\tau_*,+\infty)\bigr\},$$

$$\Gamma_p^{(\mp)} = \bigl\{\theta \in [0,\pi) : \, \tau_* > 0;\, K_\rho(\tau,\theta) < 0 \text{ при } \tau \in (0,\tau_*),\, K_\rho(\tau,\theta) > 0 \text{ при } \tau \in (\tau_*,+\infty)\bigr\}.$$

Для любого целого неотрицательного p эти множества не пересекаются и таковы, что

$$[0,\pi) = \Gamma_p^{(+)} \cup \Gamma_p^{(-)} \cup \Gamma_p^{(\pm)} \cup \Gamma_p^{(\mp)}.$$

Например, если $\rho \in (0,1)$, то $p = 0$, $\gamma = \rho$, и по формулам (20), (21) имеем

$$K_\rho(\tau,\theta) = \frac{\tau^{\rho-1}(\tau\cos\theta + 1)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}, \quad \tau_* = \tau_*(0,\theta) = -\frac{1}{\cos\theta},$$

откуда

$$\Gamma_0^{(+)} = \Bigl[0,\frac{\pi}{2}\Bigr], \quad \Gamma_0^{(-)} = \varnothing, \quad \Gamma_0^{(\pm)} = \Bigl(\frac{\pi}{2},\pi\Bigr), \quad \Gamma_0^{(\mp)} = \varnothing. \tag{22}$$

Формулы (22) отвечают «начальному» значению $p = 0$, которое в определенном смысле является особым. Как выглядит результат в общем случае? Из определения (20) следует, что для ответа на вопрос достаточно при заданном $p \in \mathbb{N}$ выяснить поведение на положительной полуоси $\tau > 0$ величины $(-1)^p(\tau\cos((p+1)\theta) + \cos p\,\theta)$ с параметром $\theta \in [0,\pi)$. Кропотливые вычисления позволяют дать полное описание индикаторных множеств, которое выглядит по-разному для четного и нечетного (относительно индекса p) случаев. Не приводя здесь общего, весьма объемного утверждения, отметим только, что для $p = 1$ и $p = 2$ имеем соответственно

$$\Gamma_1^{(+)} = \Bigl[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\Bigr], \quad \Gamma_1^{(-)} = \Bigl[0,\frac{\pi}{4}\Bigr], \quad \Gamma_1^{(\pm)} = \Bigl(\frac{3\pi}{4},\pi\Bigr), \quad \Gamma_1^{(\mp)} = \Bigl(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Bigr), \tag{23}$$

$$\begin{cases} \Gamma_2^{(+)} = \bigl[0,\frac{\pi}{6}\bigr] \cup \bigl[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\bigr], & \Gamma_2^{(-)} = \bigl[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\bigr], \\ \Gamma_2^{(\pm)} = \bigl(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\bigr) \cup \bigl(\frac{5\pi}{6},\pi\bigr), & \Gamma_2^{(\mp)} = \bigl(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\bigr), \end{cases} \tag{24}$$

с заметным усложнением структуры по сравнению с (22). Пользуясь моментом, укажем, что при записи формул (22)–(24) исправлены неточности, допущенные в [11; п. 2].

Перейдем теперь к основным результатам работы.

Теорема 1. *Пусть f — целая функция порядка $\rho \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$ с последовательностью Λ отрицательных корней, подчиненной требованию* (16), *т. е. такой, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$, и $p = [\rho]$. Тогда индикатор* (12) *функции f удовлетворяет неравенству*

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant 0, \quad \theta \in (-\pi,\,\pi], \tag{25}$$

причем

$$h_\rho(f,\theta)\equiv 0,\quad \theta\in\Gamma_p^{(-)}. \tag{26}$$

Нижний индикатор (14) *функции* f *удовлетворяет неравенству*

$$\underline{h}_{\,\rho}(f,\theta)\leqslant 0,\quad \theta\in(-\pi,\pi], \tag{27}$$

причем

$$\underline{h}_{\,\rho}(f,\theta)\equiv 0,\quad \theta\in\Gamma_p^{(+)}. \tag{28}$$

$\lhd$ Тождество (28) получено в статье [11; теорема 1]. Там же для значений $\theta\in(-\pi,\pi)$ установлено соотношение (27). То, что (27) выполнено и в предельном случае $\theta=\pi$, не рассмотренном в [11], следует из результатов работы [18; доказательство теоремы 1] (см. также [19]), согласно которым существует (возможно, равный $-\infty$) предел

$$\lim_{\theta\to\pi-0}\underline{h}_{\,\rho}(f,\theta)=\underline{h}_{\,\rho}(f,\pi).$$

Добавим еще, что в соответствии с [18; теоремы 1, 3 и замечание 2] справедливы формулы

$$\begin{cases} h_\rho(f,\pi)=\lim\limits_{\xi\to1-0}\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{r^\rho}\int\limits_0^\xi \frac{\tau^{-p-1}\,n_\Lambda(r\tau)-\tau^p\,n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau}\,d\tau,\\ \underline{h}_{\,\rho}(f,\pi)=\lim\limits_{\theta\to\pi-0}\underline{h}_{\,\rho}(f,\theta)=\lim\limits_{\xi\to1-0}\varliminf\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{r^\rho}\int\limits_0^\xi \frac{\tau^{-p-1}\,n_\Lambda(r\tau)-\tau^p\,n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau}\,d\tau, \end{cases} \tag{29}$$

выражающие величины $h_\rho(f,\pi)\geqslant 0$, $\underline{h}_{\,\rho}(f,\pi)\leqslant 0$ непосредственно через считающую функцию (19) последовательности корней (13). (Строго говоря, в [18, 19] изучались целые функции с положительными корнями, но это не имеет принципиального значения.)

Обоснуем теперь новые результаты (25), (26). Опуская технические детали, приведем схему рассуждений, предложенную в [11; доказательство теоремы 1] при исследовании нижнего индикатора (см. также [7]).

Для произвольных положительных чисел a, r справедлива оценка

$$\frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho}\leqslant\frac{\eta_a(r)}{(a\tau)^\rho},\quad 0<\tau\leqslant\frac{1}{a}, \tag{30}$$

в которой величина

$$\eta_a(r)=\frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho}$$

при фиксированном $a>0$ в силу (16) удовлетворяет соотношениям

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\eta_a(r)=\beta>0,\qquad \varliminf_{r\to+\infty}\eta_a(r)=0. \tag{31}$$

Пригодится также «грубая» оценка

$$\frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho}\leqslant D,\quad r,\tau>0, \tag{32}$$

выполненная с некоторой константой $D\geqslant\beta$.

Сначала докажем тождество (26). Пусть $\theta\in\Gamma_p^{(-)}$. Тогда $K_\rho(\tau,\theta)<0$ при всех $\tau>0$, и согласно (12), (18) имеем

$$h_\rho(f,\theta)\leqslant 0,\quad \theta\in\Gamma_p^{(-)}. \tag{33}$$

С другой стороны, зафиксировав $a \in (0, 1)$ и применив в (18) оценки (30), (32), при тех же $\theta \in \Gamma_p^{(-)}$ получим, что

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \geqslant \eta_a(r)\, a^{-\rho} \int\limits_a^{1/a} \tau^{-\rho} K_\rho(\tau,\theta)\, d\tau + D\left(\int\limits_0^a K_\rho(\tau,\theta)\, d\tau + \int\limits_{1/a}^{+\infty} K_\rho(\tau,\theta)\, d\tau \right).$$

Последующий переход к верхнему пределу при $r \to +\infty$ с учетом второго соотношения в (31) дает неравенство

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant D\left(\int\limits_0^a K_\rho(\tau,\theta)\, d\tau + \int\limits_{1/a}^{+\infty} K_\rho(\tau,\theta)\, d\tau \right).$$

Устремляя теперь параметр a к нулю, имеем

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant 0, \quad \theta \in \Gamma_p^{(-)}. \tag{34}$$

Для получения заявленного тождества (26) осталось сопоставить (33) и (34).

Перейдем к доказательству неравенства (25). Рассуждения достаточно провести для $\theta \in \Gamma_p^{(\pm)} \cup \Gamma_p^{(\mp)}$. Пусть $\theta \in \Gamma_p^{(\pm)}$. Зафиксируем $a \in (0, \tau_*^{-1})$, где точка τ_* определена в (21). Тогда $K_\rho(\tau,\theta) > 0$ при $\tau \in (0, \tau_*)$ и $K_\rho(\tau,\, \theta) < 0$ при $\tau \in (\tau_*, +\infty)$. Поэтому

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \geqslant \int\limits_{\tau_*}^{+\infty} \frac{n_\Lambda(r\tau)}{(r\tau)^\rho}\, K_\rho(\tau,\, \theta)\, d\tau.$$

На отрезке $\tau \in [\tau_*, 1/a]$ подынтегральную функцию оценим с помощью (30), а на луче $\tau \in [1/a, +\infty)$ — с помощью (32). Последующий переход к верхнему пределу при $r \to +\infty$ с учетом второго соотношения в (31), а затем переход к пределу при $a \to 0$ дают неотрицательность индикатора при $\theta \in \Gamma_p^{(\pm)}$. Оставшийся случай $\theta \in \Gamma_p^{(\mp)}$ разбирается схожим образом. $\rhd$

Общие результаты теоремы 1 органично связаны с предположением $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$, действуют при любом фиксированном $\beta > 0$ из условия (16), но не раскрывают зависимости индикаторов от конкретного значения β верхней плотности корней функции. Это хорошо видно из приведенного краткого доказательства, где вместо точного первого предельного соотношения в (31) применялся его ослабленный вариант в форме (32).

Следующее точное утверждение — теорема 2 — получено благодаря учету информации (31) в полном объеме. Доказательство, ввиду его громоздкости, не приводим — оно будет дано в отдельной работе (часть теоремы 2, относящаяся к нижнему индикатору, уже опубликована в [11; теорема 2]). Как оказалось, результат допускает запись в той же форме, что и в (11), указывая на связь двух экстремальных задач: о наименьшем типе целой функции с корнями в угле; о наименьшем индикаторе целой функции с корнями на луче.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с последовательностью Λ отрицательных корней, подчиненной требованию (16), и $p = [\rho]$. Тогда для индикаторов функции f верны точные оценки*

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant \beta \sup_{a>0} \bigl\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \bigr\}, \quad \theta \in \Gamma_p^{(+)}, \tag{35}$$

$$\underline{h}_\rho(f,\theta) \leqslant \beta \inf_{a>0} \bigl\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \bigr\}, \quad \theta \in \Gamma_p^{(-)}, \tag{36}$$

где величина $I_p(a,\theta)$ вычисляется по правилу

$$\begin{cases} I_0(a,\theta) = \frac{1}{2}\,\ln\bigl(a^2+2a\cos\theta+1\bigr), \\ I_p(a,\theta) = \frac{1}{2}\,\ln\bigl(a^2+2a\cos\theta+1\bigr) + \sum\limits_{m=1}^{p} (-1)^m \frac{a^m}{m}\,\cos m\theta, \quad p\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{37}$$

Для произвольно заданных $\rho \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ и $\beta>0$ существует целая функция, которая оценки (35), (36) *одновременно превращает в тождества на указанных там промежутках.*

Упомянутой экстремальной функцией в теореме 2 будет каноническое произведение рода p (см. (17)), если последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ его корней выбрать так, чтобы

$$\begin{cases} 0 > \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n_1} > \lambda_{n_1+1} = \ldots = \lambda_{n_2} > \ldots > \lambda_{n_k+1} = \ldots = \lambda_{n_{k+1}} > \ldots, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = -\infty; \\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} = \beta > 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}}} = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Для любых $\rho \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ и $\beta>0$ построить последовательность Λ, удовлетворяющую (39), можно следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n_1} = -2, & n_1 = [2^\rho\beta]\,; \\ \lambda_{n_1+1} = \ldots = \lambda_{n_2} = -2^2, & n_2 = [2^\rho\beta] + \bigl[2^{2\rho}\beta\bigr]\,; \\ \ldots, & \ldots, \\ \lambda_{n_{k-1}+1} = \ldots = \lambda_{n_k} = -2^{2^{k-1}}, & n_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \bigl[2^{2^{j-1}\rho}\beta\bigr]; \\ \lambda_{n_k+1} = \ldots = \lambda_{n_{k+1}} = -2^{2^k}, & n_{k+1} = \sum\limits_{j=1}^{k+1} \bigl[2^{2^{j-1}\rho}\beta\bigr]; \\ \ldots, & \ldots \end{cases}$$

В приведенной конструкции кратность каждой точки $\lambda_{n_k} = -2^{2^{k-1}}$ в последовательности Λ равна $[2^{2^{k-1}\rho}\beta]$, а длина лакуны между соседними (различными) членами $\lambda_{n_{k+1}}$ и λ_{n_k} составляет $2^{2^{k-1}}\,(2^{2^{k-1}}-1)$. Класс подобных примеров (39) образует специальный случай последовательностей (13) со свойствами (16). Специфика последовательности (39) приводит к тому, что индикаторы функции (17) вычисляются по формулам

$$h_\rho(f,\theta) = \beta \sup_{a>0} \bigl\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \bigr\}, \quad \underline{h}_\rho(f,\theta) = \beta \inf_{a>0} \bigl\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \bigr\}, \quad \theta \in (-\pi,\pi), \tag{40}$$

с величиной $I_p(a,\theta)$, определенной в (37). Тем самым, оценки (35), (36) из теоремы 2 точны, а фигурирующие в них выражения, распространенные с промежутков $\Gamma_p^{(+)}$, $\Gamma_p^{(-)}$ соответственно на весь интервал $(-\pi,\pi)$, задают закон вычисления индикаторов целой функции порядка $\rho \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ с «быстрорастущей» (без учета кратностей) последовательностью модулей корней (см. также [11]).

Конкретизируем наши результаты в наиболее простом из исследуемых в работе случае, когда целая функция f с отрицательными корнями удовлетворяет ограничениям (16) при порядке $\rho\in(0,1)$. Можно показать (см. также [19]), что индикатор и нижний индикатор f будут непрерывными функциями аргумента $\theta\in(-\pi,\pi)$, возрастающими при $\theta \in (-\pi, 0]$ и убывающими при $\theta \in [0, \pi)$ в нестрогом смысле. Индикатор $h_\rho(f,\theta)$ непрерывен также в точке $\theta = \pi$. В случае нижнего индикатора в точке $\theta = \pi$ имеем обобщенную непрерывность: $\underline{h}_\rho(f,\theta)$ будет непрерывен в этой точке, если $\underline{h}_\rho(f,\pi) > -\infty$; в противном случае $\lim\limits_{\theta\to\pi-0} \underline{h}_\rho(f,\theta) = \underline{h}_\rho(f,\pi) = -\infty$. С учетом сказанного при всех $\rho \in (0,1)$ выполнены равенства

$$\begin{cases} \max\limits_{\theta\in(-\pi,\pi]} h_\rho(f,\theta) = h_\rho(f,0), & \max\limits_{\theta\in(-\pi,\pi]} \underline{h}_\rho(f,\theta) = \underline{h}_\rho(f,0); \\ \min\limits_{\theta\in(-\pi,\pi]} h_\rho(f,\theta) = h_\rho(f,\pi), & \min\limits_{\theta\in(-\pi,\pi]} \underline{h}_\rho(f,\theta) = \underline{h}_\rho(f,\pi) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}, \end{cases} \tag{41}$$

не зависящие от ограничений (16). Но для выделенного случая эти сведения можно существенно расширить, если собрать утверждения, заложенные в теоремах 1, 2. Учтем вид индикаторных множеств (22), а также предельные соотношения (29) при $p = 0$. В итоге для выбранного класса целых функций дополнительная к (41) сводная информация об индикаторе выглядит так:

$$\begin{cases} h_\rho(f,\theta) \geqslant 0, \quad \theta \in \Big(-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big); \\ h_\rho(f,\theta) \geqslant \frac{\beta}{2} \sup\limits_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a\cos\theta+1)}{a^\rho}, \quad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]; \\ h_\rho(f,\pi) = \lim\limits_{\xi\to1-0} \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{1}{r^\rho} \int\limits_0^\xi \frac{\tau^{-1} n_\Lambda(r\tau) - n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau}\, d\tau \in [0, +\infty), \end{cases} \tag{42}$$

а о нижнем индикаторе — соответственно так:

$$\begin{cases} \underline{h}_\rho(f,\theta) \leqslant 0, \quad \theta \in \Big(-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big); \\ \underline{h}_\rho(f,\theta) \equiv 0, \quad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]; \\ \underline{h}_\rho(f,\pi) = \lim\limits_{\xi\to1-0} \varliminf\limits_{r\to+\infty} \frac{1}{r^\rho} \int\limits_0^\xi \frac{\tau^{-1} n_\Lambda(r\tau) - n_\Lambda(r/\tau)}{1-\tau}\, d\tau \in [-\infty, 0]. \end{cases} \tag{43}$$

Отдельный интерес представляет следующая задача: при тех же ограничениях (16) найти в терминах параметров $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$ точный диапазон изменения величин $h_\rho(f,\pi)$, $\underline{h}_\rho(f,\pi)$ из формул (42), (43). Для подкласса функций с корнями (39) новые формулы (40) дают ответ

$$\begin{cases} h_\rho(f,\pi) = \frac{\beta}{2} \lim\limits_{\theta\to\pi-0} \sup\limits_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a\cos\theta+1)}{a^\rho}; \\ \underline{h}_\rho(f,\pi) = \frac{\beta}{2} \lim\limits_{\theta\to\pi-0} \inf\limits_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a\cos\theta+1)}{a^\rho}, \end{cases}$$

который после некоторой обработки приводится к окончательному результату

$$h_\rho(f,\pi) = \beta \max_{a>2} \frac{\ln(a-1)}{a^\rho}, \quad \underline{h}_\rho(f,\pi) = -\infty. \tag{44}$$

(Совсем не очевидно, что соотношения (44) можно получить, применив известные по работе [19] заключительные части формул (42), (43). Было бы полезно с помощью (40) доказать аналоги (44) для порядков $\rho > 1$.)

Вернемся к общему классу целых функций f порядка $\rho \in (0,1)$ с последовательностью отрицательных корней, подчиненной (16). На основании соответствующих свойств индикатора из (41), (42) запишем для типа $\sigma_\rho(f)$ (см. (2)) точную, достижимую оценку снизу

$$\sigma_\rho(f) = \max_{\theta\in(-\pi,\pi]} h_\rho(f,\theta) = h_\rho(f,0) \geqslant \beta \max_{a>0} \frac{\ln(a+1)}{a^\rho}.$$

Этот результат, полученный нами в предположении $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$, справедлив при любом значении $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, совпадая с цитированной оценкой Попова (9).

Пусть $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Обозначим через $C(\rho)$ точную нижнюю грань величин $\sigma_\rho(f)$, взятую по всевозможным целым функциям порядка ρ с множеством отрицательных корней $\Lambda = \Lambda_f$ верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 1$ и нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$. Тогда

$$C(\rho) = \max_{a>0} \frac{\ln(a+1)}{a^\rho}, \quad \rho \in (0,1). \tag{45}$$

К настоящему времени формула (45) — единственный точный результат в экстремальной задаче о вычислении величины $C(\rho)$. Мы посвятим этой задаче следующий раздел.

3. Задача о наименьшем типе

В работе Попова [20] для значений функции $C(\rho)$ найдены следующие границы:

$$2^{-\rho/2} \leqslant C(\rho) \leqslant 2^{1-\rho}\left(1 + \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln(a-1)}{a}\right) < 1.28\cdot 2^{1-\rho}, \quad \rho\in(1,2), \tag{46}$$

$$C(\rho) < \frac{2^{2-\rho}}{\rho}, \quad \rho \in \left(\frac{3}{2}, 2\right), \tag{47}$$

$$0.47 < -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt < C(\rho) < 1, \quad \rho \in (2,+\infty)\setminus\mathbb{N}. \tag{48}$$

Используя утверждения предыдущего раздела, можно дать новые оценки экстремальной величины $C(\rho)$ при $\rho > 1$, усиливающие (46)–(48). Сейчас ограничимся простейшими приложениями полученных результатов, оставляя более глубокий анализ для отдельной публикации. Будем опираться на общую двустороннюю оценку

$$\max_{\theta\in\Gamma_p^{(+)}} \sup_{a>0}\left\{a^{-\rho} I_p(a,\theta)\right\} \leqslant C(\rho) \leqslant \max_{\theta\in\Gamma_p^{(+)}\cup\left[\frac{2p+1}{2p+2}\pi,\pi\right]} \sup_{a>0}\left\{a^{-\rho} I_p(a,\theta)\right\}, \tag{49}$$

действующую при всех $\rho \in (1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. По-прежнему, $p = [\rho] \in \mathbb{N}$. Величина $I_p(a,\theta)$ определена в (37). Основу соотношения (49) составляет известное свойство индикатора

$$\max_{\theta\in(-\pi,\pi]} h_\rho(f,\theta) = \sigma_\rho(f),$$

которое ввиду специфики расположения корней f можно переписать так:

$$\max_{\theta\in[0,\pi]} h_\rho(f,\theta) = \sigma_\rho(f).$$

Неравенство (35) из теоремы 2 влечет оценку снизу в (49). Оценка сверху возникает благодаря примеру (39) с точным правилом (40) для вычисления индикатора, поскольку $C(\rho)$ по определению не превосходит типа любой целой функции из заданного класса. При этом дополнительно учитывается соотношение (26), доказанное в теореме 1. Оно вкупе с характеристическим свойством индикатора — тригонометрической выпуклостью (см. [4; гл. I, § 15, лемма 6]) — позволяет при нахождении максимума $h_\rho(f,\theta)$ на $[0,\pi]$ сразу исключить из рассмотрения индикаторные множества $\Gamma_p^{(-)}$, $\Gamma_p^{(\mp)}$, а также все промежутки, входящие в $\Gamma_p^{(\pm)}$, кроме одного — отрезка $\bigl[\frac{2p+1}{2p+2}\,\pi,\,\pi\bigr]$, который при $p\to+\infty$ стягивается в точку $\theta=\pi$. Дальнейшее упрощение (49) естественно связать с исследованием на монотонность (по θ) индикатора из формулы (40). Впрочем, целесообразно отложить подробности для развернутой работы и перейти к конкретным применениям общей оценки (49), демонстрирующим близость ее границ.

Схематично разберем случаи $\rho\in(1,2)$ и $\rho\in(2,3)$.

Случай $\rho\in(1,2)$. Здесь $p=1$, и поэтому (см. (37)) работаем с представлением

$$I_1(a,\theta)=\frac{1}{2}\,\ln\bigl(a^2+2a\cos\theta+1\bigr)-a\cos\theta,\quad a>0,\ \theta\in(-\pi,\pi).$$

Согласно (23) имеем $\Gamma_1^{(+)}=[\pi/2,3\pi/4]$. Записав (49) для текущего случая, получим

$$\begin{cases} C(\rho)\geqslant \max\limits_{\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]}\ \sup\limits_{a>0}\frac{\frac{1}{2}\ \ln(a^2+2a\cos\theta+1)-a\cos\theta}{a^\rho};\\ C(\rho)\leqslant \max\limits_{\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}\ \sup\limits_{a>0}\frac{\frac{1}{2}\ \ln(a^2+2a\cos\theta+1)-a\cos\theta}{a^\rho}. \end{cases}\tag{50}$$

Отдельные рутинные вычисления позволяют осуществить в (50) оптимальный выбор значений $\theta=3\pi/4$ и $\theta=\pi$ соответственно и одновременно сузить промежуток изменения параметра $a>0$. В итоге, удается придать форме записи соотношений (50) более компактный вид:

$$2^{\rho/2-1}\max_{a\geqslant 2}\frac{\ln\bigl(\frac{a^2}{2}-a+1\bigr)+a}{a^\rho}\leqslant C(\rho)\leqslant\max_{a\geqslant 2}\frac{\ln(a-1)+a}{a^\rho},\quad \rho\in(1,2).\tag{51}$$

Нетрудно убедиться в том, что двойное неравенство (51) усиливает прежний результат (46). Действительно, огрубляя оценку снизу в (51), при всех $\rho\in(1,2)$ имеем

$$C(\rho)\geqslant 2^{\rho/2-1}\max_{a\geqslant 2}\frac{\ln\bigl(\frac{a^2}{2}-a+1\bigr)+a}{a^\rho}\geqslant 2^{\rho/2-1}\frac{\ln\bigl(\frac{a^2}{2}-a+1\bigr)+a}{a^\rho}\bigg|_{a=2}=2^{-\rho/2},$$

что дает оценку снизу в (46). Далее, огрубляя оценку сверху в (51), при всех $\rho\in(1,2)$ имеем

$$C(\rho)\leqslant\max_{a\geqslant 2}\frac{\ln(a-1)+a}{a^\rho}=\max_{a\geqslant 2}a^{1-\rho}\,\frac{\ln(a-1)+a}{a}\leqslant 2^{1-\rho}\left(1+\max_{a\geqslant 2}\frac{\ln(a-1)}{a}\right),$$

что дает оценку сверху в (46). Если же для огрубления левой части (51) привлечь неравенство

$$\ln(x+1)\geqslant x-\frac{x^2}{2},\quad x\in[0,+\infty),$$

то простые подсчеты дадут возможность заменить нижнюю границу в (46) на бóльшую элементарную миноранту:

$$C(\rho)\geqslant 2^{4-3\rho/2}\,\frac{(3-\rho)^{3-\rho}}{(4-\rho)^{4-\rho}}>2^{-\rho/2},\quad \rho\in(1,2).$$

Наконец, неравенство

$$\ln(x+1) \leqslant x, \quad x \in (-1, +\infty),$$

позволяет при тех же $\rho \in (1,2)$ провести в правой части (51) выкладку

$$C(\rho) \leqslant \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln(a-1)+a}{a^\rho} \leqslant \max_{a\geqslant 2} \frac{2(a-1)}{a^\rho} = \frac{2(a-1)}{a^\rho}\bigg|_{a=\rho/(\rho-1)} = \frac{2(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho}.$$

Полученная оценка усиливает (47), поскольку для любого значения $\rho \in (1,2)$ справедливо неравенство

$$\frac{2(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho} < \frac{2^{2-\rho}}{\rho},$$

сводящееся к очевидному неравенству

$$\left(\frac{2(\rho-1)}{\rho}\right)^{\rho-1} < 1, \quad \rho \in (1,2).$$

Коснемся вопроса о предельном поведении экстремальной функции $C(\rho)$ в целых точках. Из «явной» формулы (45) можно получить (см. [8]) соотношения

$$\lim_{\rho\to 0+} C(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho\to 1-0} C(\rho) = 1. \tag{54}$$

Как указано в [20], неравенства (46), (47) влекут наличие предела

$$\lim_{\rho\to 2-0} C(\rho) = \frac{1}{2}. \tag{55}$$

Не ясно, однако, существует ли $\lim_{\rho\to 1+0} C(\rho)$. Новое двойное неравенство (51) позволяет оценить границы возможной неопределенности величины $C(\rho)$ при $\rho \to 1+0$ и показывает, что если односторонний предел $\lim_{\rho\to 1+0} C(\rho)$ существует, то он чуть больше единицы и не совпадает с $\lim_{\rho\to 1-0} C(\rho) = 1$ (см. теорему 3 ниже).

Полученную информацию о функции $C(\rho)$ при $\rho \in (1,2)$ соберем в одно утверждение.

Теорема 3. *Пусть $C(\rho)$ — точная нижняя грань типов $\sigma_\rho(f)$ целых функций порядка ρ, все корни которых отрицательны и образуют последовательность $\Lambda = \Lambda_f$ верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 1$ и нижней плотности $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$. Тогда при всех $\rho \in (1,2)$ справедлива двусторонняя оценка*

$$2^{\rho/2-1} \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{2} - a + 1\right) + a}{a^\rho} \leqslant C(\rho) \leqslant \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln(a-1)+a}{a^\rho},$$

влекущая оценку через элементарные функции

$$2^{4-3\rho/2} \frac{(3-\rho)^{3-\rho}}{(4-\rho)^{4-\rho}} \leqslant C(\rho) \leqslant \frac{2(\rho-1)^{\rho-1}}{\rho^\rho}, \quad \rho \in (1,2),$$

а также соотношения

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{\rho\to 1+0} C(\rho) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{2}-a+1\right)}{a}\right) = 1.0109\ldots; \\ \overline{\lim}_{\rho\to 1+0} C(\rho) \leqslant 1 + \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln(a-1)}{a} = 1.2784\ldots, \end{cases}$$

первое из которых ввиду (54) показывает, что при $\rho \to 1$ функция $C(\rho)$ не имеет предела.

Далее изложение ведем совсем тезисно.

Случай $\rho \in (2,3)$. Здесь $p=2$. Согласно (24), (37), (49) для указанных ρ получим

$$\begin{cases} C(\rho) \geqslant \max\limits_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right]} \sup\limits_{a>0} \frac{\frac{1}{2}\ln(a^2+2a\cos\theta+1)-a\cos\theta+\frac{a^2}{2}\cos 2\theta}{a^\rho}; \\ C(\rho) \leqslant \max\limits_{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]} \sup\limits_{a>0} \frac{\frac{1}{2}\ln(a^2+2a\cos\theta+1)-a\cos\theta+\frac{a^2}{2}\cos 2\theta}{a^\rho}. \end{cases}$$

Отсюда, например, следует, что при всех значениях $\rho \in (2,3)$ верны цепочки неравенств

$$C(\rho) \geqslant \frac{3^{\rho/2}}{2} \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{3}-a+1\right)+a+\frac{a^2}{6}}{a^\rho} \geqslant \frac{1}{4}\,3^{(4-\rho)/2},$$

$$C(\rho) \leqslant \max_{a\geqslant\frac{3}{2}} \frac{\ln(a-1)+a+\frac{a^2}{2}}{a^\rho} = \max_{a\geqslant\frac{3}{2}} a^{2-\rho}\,\frac{\ln(a-1)+a+\frac{a^2}{2}}{a^2} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{2-\rho},$$

а также оценки

$$\varliminf_{\rho\to 2+0} C(\rho) \geqslant \frac{3}{2} \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{3}-a+1\right)+a+\frac{a^2}{6}}{a^2} = \frac{3}{4},$$

$$\varlimsup_{\rho\to 2+0} C(\rho) \leqslant \max_{a\geqslant\frac{3}{2}} \frac{\ln(a-1)+a+\frac{a^2}{2}}{a^2} = 1,$$

указывающие (см. (55)) на отсутствие у функции $C(\rho)$ предела при $\rho\to 2$, и оценки

$$\varliminf_{\rho\to 3-0} C(\rho) \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \max_{a\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{a^2}{3}-a+1\right)+a+\frac{a^2}{6}}{a^3} = 0.5181\ldots,$$

$$\varlimsup_{\rho\to 3-0} C(\rho) \leqslant \max_{a\geqslant\frac{3}{2}} \frac{\ln(a-1)+a+\frac{a^2}{2}}{a^3} = 0.5789\ldots$$

Наконец, численная оценка $C(\rho) > 0.51$, $\rho\in(2,3)$, подкрепляет прежний результат (48).

На этом закончим разбор случаев, поскольку, как видно, дальнейшее увеличение значений ρ сопряжено с вычислительными сложностями. Анализ проведенных расчетов придает правдоподобность следующей гипотезе: *для любого* $p\in\mathbb{N}$ *существуют односторонние пределы* $\lim_{\rho\to p-0} C(\rho)$, $\lim_{\rho\to p+0} C(\rho)$, *причем* $\lim_{\rho\to p-0} C(\rho) < \lim_{\rho\to p+0} C(\rho)$. Было бы интересно также (в свете нетривиальной оценки (48)) выявить точный закон асимптотического поведения $C(\rho)$ при $\rho\to+\infty$, $\rho\notin\mathbb{N}$.

Полученные результаты о наименьшем типе хотя и улучшают предыдущие, но все же носят не вполне законченный характер ввиду определенного «зазора», имеющегося в опорной формуле (49). По-видимому, для любых $p\in\mathbb{N}$ и $\rho\in(p,\,p+1)$ максимум в левой части (49) достигается при $\theta=\frac{2p+1}{2p+2}\,\pi$, а в правой части — при $\theta=\pi$. Как бы то ни было, для устранения означенного зазора нужно дополнить теорему 2 точной информацией об индикаторе $h_\rho(f,\theta)$ на отрезке $\theta\in\left[\frac{2p+1}{2p+2}\,\pi,\,\pi\right]$, что позволит в явном виде, подобном (45), выписать экстремальную функцию $C(\rho)$ и в полном объеме изучить ее свойства при всех нецелых значениях $\rho>0$. После этого логичен переход к целым функциям с отрицательными корнями ненулевой нижней плотности. Как представляется, реализация намеченных перспектив требует масштабного исследования, развивающего аналитические разработки А. Данжуа [21], А. Ю. Попова [20] и авторов [7].

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* Избранные труды (в 4-х томах).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011–2014.
2. *Lindelöf E.* Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini // Acta Soc. Sci. Fennicae.—1902.—Vol 31, № 1.—P. 1–79.
3. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondence régulièr // Annales de la Faculté des Scinces de Toulouse: Mathématiques, Sér. 3.—1913.—Vol. 5.—P. 117–257.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.
5. *Boas R. P.* Entire Functions.—N.Y.: Acad. Press, 1954.
6. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундам. и прикл. матем.—2018.—Т. 22, № 1.—С. 51–97.
7. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. Мат.—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28. DOI: 10.4213/im4104.
8. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мантемематика. Механика.—2005.—№ 1.—С. 31–36.
9. *Шерстюков В. Б.* Минимальное значение типа целой функции порядка $\rho \in (0,1)$, все нули которой лежат в угле и имеют заданные плотности // Уфим. мат. журн.—2016.—Т. 8, № 1.—С. 113–126.
10. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона — Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью // Соврем. математика. Фундам. направления.—2013.—Т. 49.—С. 132–164.
11. *Брайчев Г. Г.* О нижнем индикаторе целой функции с корнями нулевой нижней плотности, лежащими на луче // Мат. заметки—2020.—Т. 107, № 6.—С. 817–832. DOI: 10.4213/mzm12504.
12. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.—Т. 85.—М.: ВИНИТИ, 1991.—С. 5–186.
13. *Малютин К. Г., Кабанко М. В., Малютина Т. И.* Интегралы и индикаторы субгармонических функций. I // Чебышевский сб.—2018.—Т. 19, № 2.—С. 272–303. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-272-303.
14. *Малютин К. Г., Кабанко М. В., Малютина Т. И.* Интегралы и индикаторы субгармонических функций. II // Чебышевский сб.—2019.—Т. 20, № 4.—С. 236–269. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-269.
15. *Азарин В. С.* Пример целой функции с заданными индикатором и нижним индикатором // Мат. сб.—1972.—Т. 89 (131), № 4 (12).—С. 541–557.
16. *Азарин В. С.* Об индикаторах целой функции и регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма ее модуля // Функц. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 1.—С. 47–48.
17. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.—(Encyclopedia Math. Appl. Vol. 27).
18. *Кондратюк А. А., Фридман А. Н.* Предельное значение нижнего индикатора и оценки снизу для целых функций с положительными нулями // Укр. мат. журн.—1972.—Т. 24, № 4.—С. 488–494.
19. *Кондратюк А. А., Фридман А. Н.* О нижнем индикаторе целой функции нулевого рода с положительными нулями // Укр. мат. журн.—1972.—Т. 24.—№ 1.—С. 106–109.
20. *Попов А. Ю.* О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче // Мат. заметки.—2009.—Т. 85, № 2.—С. 246–260. DOI: 10.4213/mzm4645.
21. *Denjoy A.* Sur les produits canoniques d'ordre infini // J. Math. Pures Appl. 6e ser.—1910.—Vol. 6.—P. 1–136.

Статья поступила 11 мая 2020 г.

Брайчев Георгий Генрихович
Московский педагогический государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 107140, Москва, ул. Краснопрудная, 14
E-mail: braichev@mail.ru

Шерстюков Владимир Борисович
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
профессор кафедры высшей математики
РОССИЯ, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: shervb73@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 30–46

ESTIMATES OF INDICATORS OF AN ENTIRE FUNCTION WITH NEGATIVE ROOTS

Braichev, G. G.[1] and Sherstyukov, V. B.[2]

[1]Moscow Pedagogical State University,
14 Krasnoprudnaya St., Moscow 107140, Russia;
[2]National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoye Highway, Moscow 115409, Russia
E-mail: braichev@mail.ru, shervb73@gmail.com

Abstract. The article continues the series of works by the authors devoted to the study of the relationship between the laws growth of an entire function and the features of the distribution of its roots. The asymptotic behavior of an entire function of finite non-integer order with a sequence of negative roots having the prescribed lower and upper densities is investigated. Particular attention is paid to the case when the sequence of roots has zero lower density. Accurate estimates for the indicator and lower indicator of such a function are given. The angles on the complex plane in which these characteristics are identically equal to zero are described. In some special cases explicit formulas for indicators are proved. Terms used, usual root sequence densities, are simple and illustrative, in contrast to many complicated integral constructions including root counting function that are typical for the growth theory of entire functions. The results are applied to the well-known problem of the extremal type of an entire function of order $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ with zeros on a ray. This problem has been studied in detail only in the case of $\rho \in (0, 1)$. For $\rho > 1$, the exact formula for calculating the smallest possible type of such a function in terms of the densities of its roots is still unknown. For the mentioned extreme value, a new two-sided estimate is found that strengthens Popov's results (2009). The conjecture regarding the behavior of the extremal type for $\rho \to p \in \mathbb{N}$ is formulated.The presentation is supplemented with a brief survey of classical results of Valiron, Levin, Goldberg and recent advances from the works of Popov and of the authors. Some problems on the topic under discussion are outlined.

Key words: entire function, indicator and lower indicator, type of entire function, upper and lower densities of roots.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D15, 30D20.

For citation: *Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B.* Estimates of Indicators of an Entire Function with Negative Roots, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 30–46 (in Russian). DOI: 10.46698/g8758-9884-5440-f.

References

1. *Korobeinik, Yu. F. Izbrannye trudy (v 4-kh tomakh)* [Selected Works], Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2011–2014 (in Russian).
2. *Lindelöf, E.* Mémoire sur la Théorie des Fonctions Entières de Genre Fini, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 1902, vol 31, no. 1, pp. 1–79.
3. *Valiron, G.* Sur les Fonctions Entières D'ordre Nul et D'ordre Fini et en Particulier les Fonctions à Correspondence Régulièr, *Annales de la Faculté des Scinces de Toulouse: Mathématiques, Séres* 3, 1913, vol. 5, pp. 117–257.
4. *Levin, B. Ya. Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Zeros of Entire Functions], Moscow, Gostekhizdat, 1956 (in Russian).
5. *Boas, R. P. Entire Functions*, New York, Academic Press, 1954.

6. *Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B.* Sharp Bounds for Asymptotic Characteristics of Growth of Entire Functions with Zeros on Given Set, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 51–97 (in Russian).
7. *Braichev, G. G. and Sherstyukov, V. B.* On the Least Possible Type of Entire Functions of Order $\rho \in (0, 1)$ with Positive Zeros, *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 1–27. DOI: 10.1070/IM2011v075n01ABEH002525.
8. *Popov, A. Yu.* The Least Possible Type under the Order $\rho < 1$ of Canonical Products with Positive Zeros of a Given Upper ρ-density, *Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 1. Matematika. Mekhanika.*, 2005, no. 1, pp. 31–36 (in Russian).
9. *Sherstyukov, V. B.* Minimal Value for the Type of an Entire Function of Order $\rho \in (0, 1)$, whose Zeros Lie in an Angle and Have a Prescribed Density, *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 108–120. DOI: 10.13108/2016-8-1-108.
10. *Popov, A. Yu.* Development of the Valiron–Levin Theorem on the Least Possible Type of Entire Functions with a Given Upper ρ-Density of Roots, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 211, no. 4, pp. 579–616. DOI: 10.1007/s10958-015-2618-8.
11. *Braichev, G. G.* On the Lower Indicator of an Entire Function with Roots of Zero Lower Density Lying on a Ray, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, no. 6, pp. 907–919. DOI: 10.1134/S0001434620050211.
12. *Gol'dberg, A. A., Levin, B. Ya. and Ostrovskiy, I. V.* Entire and Meromorphic Functions, *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya «Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya»*, 1991, Moscow, VINITI, vol. 85, pp. 5–185 (in Russian).
13. *Malyutin, K. G., Kabanko, M. V. and Malyutina, T. I.* Integrals and Indicators of Subharmonic Functions. I, *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 272–303. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-272-303 (in Russian).
14. *Malyutin, K. G., Kabanko, M. V. and Malyutina, T. I.* Integrals and Indicators of Subharmonic Functions. II, *Chebyshevskii Sbornik*, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 236–269. DOI: 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-269 (in Russian).
15. *Azarin, V. S.* Example of an Entire Function with Given Indicator and Lower Indicator, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 18, no. 4, pp. 541–558. DOI: 10.1070/SM1972v018n04ABEH001847.
16. *Azarin, V. S.* Indicators of an Entire Function and the Regularity of the Growth of the Fourier Coefficients of the Logarithm of its Modulus, *Functional Analysis and its Applications*, 1975, vol. 9, no. 1, pp. 41–42. DOI: 10.1007/BF01078174.
17. *Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L.* *Regular Variation* (*Encyclopedia Math. Appl. Vol. 27*), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987.
18. *Kondratyuk, A. A. and Fridman, A. N.* Predel'noe Znachenie Nizhnego Indikatora i Otsenki Snizu dlya Tselykh Funktsiy s Polozhitel'nymi Nulyami, *Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 1972, vol. 24, no. 4, pp. 488–494 (in Russian).
19. *Kondratyuk, A. A. and Fridman, A. N.* O Nizhnem Indikatore Tseloy Funktsii Nulevogo Roda s Polozhitel'nymi Nulyami, *Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 1972, vol. 24, no. 1, pp. 106–109 (in Russian).
20. *Popov, A. Yu.* On the Least Type of an Entire Function of Order ρ with Roots of a Given Upper ρ-density Lying on One Ray, *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, no. 2, pp. 226–239. DOI: 10.1134/S000143460901026X.
21. *Denjoy, A.* Sur les Produits Canoniques D'ordre Infini, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6e ser.*, 1910, vol. 6, pp. 1–136.

Received May 11, 2020

Georgi G. Braichev
Moscow Pedagogical State University,
14 Krasnoprudnaya St., Moscow 107140, Russia,
Professor
E-mail: braichev@mail.ru

Vladimir B. Sherstyukov
National Research Nuclear University MEPhI,
31 Kashirskoye Highway, Moscow 115409, Russia,
Professor
E-mail: shervb73@gmail.com

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 47–57

УДК 517.53
DOI 10.46698/n7823-2870-5444-g

ТЕОРЕМЫ ТИПА РИТТА — СУГИМУРЫ[#]

А. М. Гайсин[1, 2], Г. А. Гайсина[2]

[1]Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
[2]Башкирский государственный университет,
Россия, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: `gaisinam@mail.ru`, `gaisinaga@mail.ru`

Посвящается девяностолетию
Юрия Фёдоровича Коробейника

Аннотация. В конце девятнадцатого века Э. Борель естественным образом ввел понятие порядка целой функции, а затем была получена соответствующая формула для вычисления этой величины через коэффициенты тейлоровского разложения данной функции. Позже Дж. Риттом это понятие было распространено и на целые функции, представленные рядами Дирихле с положительными показателями. Им же получена аналогичная формула для этой характеристики (R-порядка), явно зависящая от коэффициентов и показателей ряда Дирихле. В работах А. М. Гайсина этот результат был полностью перенесен на случай полуплоскости, а также для ограниченной выпуклой области. В последнем случае речь идет о рядах Дирихле с комплексными показателями — рядах экспонент. В настоящей статье в терминах порядка по Ритту (R-порядка) изучается связь между ростом ряда Дирихле и коэффициентами разложения. Отдельно рассмотрены случаи, когда ряд сходится равномерно во всей плоскости или лишь в некоторой полуплоскости. В обоих случаях получены необходимые и достаточные условия на показатели, при выполнении которых верны соответствующие формулы, позволяющие вычислить эту величину через коэффициенты ряда. Все ранее известные результаты такого типа носили только достаточный характер. В случае плоскости нами показана точность оценок С. Танаки для R-порядка.

Ключевые слова: ряд Дирихле, R-порядок, формула Ритта — Сугимуры — Танаки.

Mathematical Subject Classification (2010): Primary 30D10.

Образец цитирования: *Гайсин А. М., Гайсина Г. А.* Теоремы типа Ритта — Сугимуры // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 47–57. DOI: 10.46698/n7823-2870-5444-g.

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

— ряд Дирихле, сходящийся абсолютно (или просто равномерно) в некоторой полуплоскости $\Pi_b = \{s = \sigma + it : \sigma > b\}$, $-\infty \leqslant b < \infty$.

В статье обсуждается задача о порядке по Ритту функции F, заданной в Π_b рядом (1), и его связи с коэффициентами разложения этой функции в ряд Дирихле (1).

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00095_а.

Следуя работе Х. Бора [1], через σ_c, σ_a, σ_u будем обозначать абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда (1) соответственно. Как показал Г. Валирон (см. [2, 3]),

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}\leqslant\sigma_c\leqslant\sigma_u\leqslant\sigma_a\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}+L, \tag{2}$$

где

$$L=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}. \tag{3}$$

Вообще говоря (в отличие от степенных рядов), величины σ_c, σ_a, σ_u могут быть различными. Как видно из соотношений (2), при $L=0$ они все совпадут: $\sigma_c=\sigma_a=\sigma_u$. В общем случае может оказаться, что $\sigma_a\neq\sigma_u$. Тогда ряд (1) сходится в соответствующей полуплоскости (или во всей плоскости) только равномерно, но не абсолютно. В этом случае актуальна формула М. Кунияды [4]:

$$\sigma_u=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln T(x)}{x},\quad T(x)=\sup_{|t|<\infty}\left|\sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x}a_n e^{-i\lambda_n t}\right|,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Если $\sigma_u=-\infty$, то сумма ряда Дирихле (1) представляет собой целую функцию F. В этой ситуации наиболее подходящей и удобной характеристикой роста функции F оказалось так называемое понятие R-порядка ρ_R, введенное Дж. Риттом (1928) [5].

По определению

$$\rho_R=\varlimsup_{\sigma\to-\infty}\frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma},$$

где $M_F(\sigma)=\sup_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)|$, $\sigma\in\mathbb{R}$ (функция $\ln M_F(\sigma)$ является выпуклой по переменной σ [6]). В предположении, что $\sigma_a=-\infty$, т. е. когда ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости абсолютно, Дж. Риттом была доказана следующая формула для вычисления порядка ρ_R через коэффициенты разложения:

$$-\frac{1}{\rho_R}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n\ln\lambda_n}. \tag{4}$$

В работе [7] этот результат был перенесен на случай полуплоскости Π_0, а в [8] — на ограниченную выпуклую область $G\subset\mathbb{C}$. В последнем случае речь идет о рядах с комплексными показателями — рядах экспонент, — область абсолютной сходимости которых, как известно, всегда выпукла [9]. В обоих случаях были указаны достаточные условия, при выполнении которых имеют место соответствующие аналоги формулы Ритта (6), но зависящие и от опорной функции области сходимости ряда.

Цель статьи — указать необходимые и достаточные условия, при выполнении которых верна формула для вычисления порядка по Ритту или его аналога в случае полуплоскости Π_0.

2. Случай плоскости: уточнение теоремы С. Танаки*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, и ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости. При $L < \infty$ этот ряд сходится там и абсолютно.

Дж. Риттом было показано, что если $L < \infty$, то [5]

$$-\frac{1}{\rho_R} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n \ln\lambda_n} \stackrel{\text{def}}{=} -R, \quad R \geqslant 0, \tag{5}$$

где

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to-\infty} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\sigma}$$

— порядок по Ритту, введенный в [5] (R — характеристика Ритта). При $L < \infty$ доказательство формулы (5) приводится также в [6, 10]. Оно основано на неравенствах типа Коши

$$|a_n| \leqslant M_F(\sigma)\, e^{\lambda_n\sigma}, \quad n \geqslant 1, \tag{6}$$

непосредственно вытекающих из формул для коэффициентов

$$a_n e^{-\lambda_n\sigma} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int\limits_{y_0}^{y} F(\sigma+it)\, e^{i\lambda_n t}\, dt, \quad n \geqslant 1, \tag{7}$$

где y_0 — любое фиксированное число из $\mathbb{R}$.

Из доказательства усматривается, что формулы (7) на самом деле верны и в том случае, когда ряд (1) сходится в плоскости (или в какой-то полуплоскости) равномерно (см. [10]). Но даже при абсолютной сходимости ряда условие $L < \infty$ слишком сильное. Действительно, при доказательстве оценки $\rho_R \leqslant R^{-1}$ все сводится к сходимости при любом $\varepsilon > 0$ ряда (см. [6, 10])

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n \ln\lambda_n}, \tag{8}$$

которая при $L < \infty$ выводится из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-c(\ln n)\ln\lambda_n}, \quad c > L.$$

На самом деле можно только предположить, что $\sigma_u = -\infty$ и воспользоваться следующим простым утверждением.

Лемма 1. *Ряд* (8) *сходится при любом* $\varepsilon > 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln n(x)}{x\ln x} = 0, \quad n(x) = \sum_{\lambda_n\leqslant x} 1$$

(C — *характеристика Сугимуры* [11]).

$\lhd$ Действительно, если $C = 0$, то для любого $\delta > 0$ при $n \geqslant n_0(\delta)$ имеем

$$\frac{1}{\delta}\ln n < \lambda_n \ln\lambda_n.$$

*Результаты этого пункта получены Г. А. Гайсиной.

Если взять $\delta = \varepsilon/2$, то ряд (8), очевидно, сходится. Обратно, если при любом $\varepsilon > 0$ ряд (8) сходится, то из монотонности членов ряда будем иметь, что

$$ne^{-\varepsilon\lambda_n \ln \lambda_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда при $n \geqslant n_1(\varepsilon)$

$$ne^{-\varepsilon\lambda_n \ln \lambda_n} \leqslant 1,$$

или

$$\frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} \leqslant \varepsilon.$$

Из-за произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем, что $C = 0$. $\triangleright$

К. Сугимура в [11] доказал следующее утверждение: если ряд (1) сходится во всей плоскости и $0 < R \leqslant \infty$, то при $C = 0$ верна формула (5) Ритта.

Как показано в [12], в предположениях, сделанных в [11], ряд Дирихле (1) сходится во всей плоскости равномерно ($\sigma_u = -\infty$). Поэтому результат К. Сугимуры есть следствие следующей более общей теоремы С. Танаки из [12].

Теорема 1. *Пусть ряд Дирихле* (1) *сходится равномерно во всей плоскости. Тогда для порядка ρ_R по Ритту верны оценки*

$$-R \leqslant -\frac{1}{\rho_R} \leqslant -R + T, \tag{9}$$

где R — характеристика Ритта,

$$T = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln N(x)}{x \ln x}, \quad N(x) = \sum_{[x]\leqslant \lambda_n < x} 1,$$

$[x]$ — целая часть числа x (T — характеристика Танаки).

Следствие 1. *Если $T = 0$, то верна формула $\rho_R = 1/R$.*

Отметим, что нижняя оценка в (9) получается так же, как и в [6, 10], если учесть, что неравенства типа Коши (6) справедливы и в случае равномерной сходимости ряда (1).

Далее, так как $N(x) \leqslant n(x)$, то при $C = 0$ и $T = 0$. Обратно, пусть $T = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x \geqslant x_0(\varepsilon) > \lambda_1$

$$N(x) < e^{\varepsilon x \ln x}.$$

Следовательно, учитывая монотонность мажоранты $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon x \ln x$, отсюда получаем

$$n(x) \leqslant n(x_0) + ([x] + 1)e^{\varepsilon x \ln x}, \quad x \geqslant x_0(\varepsilon).$$

Но

$$\ln^+(a + b) \leqslant \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2, \quad a > 0,\ b > 0,\ c^+ = \max(c, 0).$$

Поэтому при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$

$$\frac{\ln n(x)}{x \ln x} \leqslant \frac{\ln 2 + \ln n(x_0)}{x \ln x} + \frac{\ln([x] + 1)}{x \ln x} + \varepsilon.$$

Отсюда из произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $C = 0$.

Таким образом, $C = 0$ тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Отметим, что теорема 1 содержательна лишь в случае, когда $T < \infty$. При этом она охватывает и случай $R = 0$ (при $R = 0$ порядок $\rho_R = \infty$).

Наша цель — доказать точность правой оценки в (9).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любой последовательности* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$, *существует ряд Дирихле вида* (1), *равномерно сходящийся во всей плоскости, для которого*

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R + T.$$

Следствие 2. *Для того чтобы порядок* ρ_R *любого ряда Дирихле, равномерно сходящегося во всей плоскости, вычислялся по формуле* (5), *необходимо и достаточно, чтобы* $T = 0$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Пусть $T > 0$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, $1 < x_n \uparrow \infty$, такая, что при $x \to \infty$

$$\frac{\ln N(x_n)}{x_n \ln x_n} = (1 + \mathrm{o}(1))T. \tag{10}$$

Обозначая

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n, \quad \omega_n = \big[[x_n], x_n\big),$$

(при подходящем выборе последовательности $\{x_n\}$ из (10) следует, что $\omega_n \cap \Lambda \neq \varnothing$, $n \geqslant 1$), рассмотрим ряд Дирихле вида (1), коэффициенты которого определим следующим образом: для любого $A > T$ положим

$$a_k = \begin{cases} 0, & \lambda_k \notin \omega; \\ e^{-Ax_n \ln x_n}, & \lambda_k \in \omega_n. \end{cases}$$

Можем считать, что $x_n > n$ $(n \geqslant 1)$. Тогда ряд (1) будет сходиться во всей плоскости абсолютно. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k e^{-\lambda_k s} \right| = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{\lambda_k \in \omega_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma}, \quad s = \sigma + it.$$

Но

$$A_n = \sum_{\lambda_k \in \omega_n} a_k e^{-\lambda_k \sigma} = e^{-Ax_n \ln x_n} \sum_{\lambda_k \in \omega_n} e^{-\lambda_k \sigma} \leqslant e^{-Ax_n \ln x_n} N(x_n) e^{[x_n]|\sigma|}.$$

Поскольку $A > T$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $n \geqslant n_0$

$$A_n \leqslant e^{-(x_n \ln x_n)[A - (1 + \mathrm{o}(1))T]} e^{[x_n]|\sigma|} \leqslant e^{-\varepsilon_0 [x_n] \ln [x_n] + [x_n]|\sigma|}.$$

Так как $x_n > n$, то отсюда видно, что действительно для любого $s \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k e^{-\lambda_k s} \right| < \infty.$$

Далее, так как $\lambda_k \sim \lambda_n$ при $\lambda_k \in \omega_n$ и $n \to \infty$, то $R = A$, а поскольку $a_k \geqslant 0$, то имеет место равенство

$$M_F(\sigma) = \sum_{\lambda_k \in \omega} a_k e^{-\lambda_k \sigma}.$$

Отсюда для любого $n \geqslant 1$

$$M_F(\sigma) \geqslant \sum_{[x_n]\leqslant\lambda_k<x_n} a_k e^{-\lambda_k\sigma} = e^{-Ax_n\ln x_n} \sum_{[x_n]\leqslant\lambda_k<x_n} e^{-\lambda_k\sigma}.$$

Следовательно, при $\sigma < 0$

$$M_F(\sigma) \geqslant e^{-Ax_n\ln x_n} N(x_n)\, e^{-(x_n-1)\sigma}.$$

Отсюда, если учесть (10), при $\sigma < 0$ и $n \to \infty$ имеем

$$\ln M_F(\sigma) \geqslant x_n\bigl[-\bigl(A-(1+\mathrm{o}(1))\,T\ln x_n + (1+\mathrm{o}(1))\bigr)|\sigma|\bigr]. \tag{11}$$

Возьмем

$$\sigma = \sigma_n = -(A-T+\varepsilon)\ln x_n, \quad \varepsilon > 0. \tag{12}$$

Тогда из (11) будем иметь: при $n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) \geqslant \varepsilon(1+\mathrm{o}(1))x_n\ln x_n.$$

Отсюда, если учесть (12), получим: при $n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) \geqslant \varepsilon(1+\mathrm{o}(1))\,\frac{|\sigma_n|}{A-T+\varepsilon}\,e^{(A-T+\varepsilon)^{-1}|\sigma_n|}.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln\ln M_F(\sigma_n) > \frac{|\sigma_n|}{A-T+2\varepsilon}.$$

Значит,

$$\rho_R \geqslant \frac{1}{A-T+2\varepsilon},$$

а поскольку $\varepsilon > 0$ — любое, то

$$\rho_R \geqslant \frac{1}{A-T}.$$

Таким образом,

$$-\frac{1}{\rho_R} \geqslant -A+T = -R+T.$$

Тогда с учетом правой оценки из (9) отсюда окончательно заключаем, что

$$-\frac{1}{\rho_R} = -R+T.$$

Теорема 2 доказана полностью. $\triangleright$

2. Случай полуплоскости**

Пусть ряд Дирихле (1) сходится абсолютно в полуплоскости Π_0. В [7] введено понятие R-порядка ρ_R (или порядка по Ритту) для суммы F этого ряда следующим образом:

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\downarrow 0} \frac{\ln^+\ln M_F(\sigma)}{\sigma^{-1}}.$$

**Результаты этого пункта получены А. М. Гайсиным.

В [7] доказано, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln n = 0, \tag{13}$$

то R-порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|. \tag{14}$$

Здесь и далее через $D_0(\Lambda)$ обозначен класс всех функций F, представимых в полуплоскости Π_0 рядами Дирихле, сходящимися лишь в этой полуплоскости.

Покажем, что в действительности верна следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы для R-порядка ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ была верна формула* (14)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (13).

$\lhd$ *Достаточность*, как было отмечено, установлена в [7].

Необходимость. Покажем теперь, что условие (13) является и необходимым для того, чтобы для R-порядка любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ была справедлива формула (14). Действительно, пусть условие (13) не выполнено, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln n > 0.$$

Тогда найдется подпоследовательность n_m такая, что для любого $m \geqslant 1$

$$\frac{\ln n_m \ln \lambda_{n_m}}{\lambda_{n_m}} \geqslant \nu > 0. \tag{15}$$

Теперь положим $a_n = e$ $(n \geqslant 1)$ и оценим R-порядок функции F, определенной рядом

$$F(s) = e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it. \tag{16}$$

Мы предполагаем, что выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0.$$

Тогда ряд (16) сходится абсолютно в полуплоскости Π_0. Значит, $F \in D_0(\Lambda)$. Вычисляя R-порядок по формуле (14), имеем $\rho_R = 0$. Убедимся, что на самом деле $\rho_R > 0$. Действительно, поскольку коэффициенты $a_n > 0$, то $M_F(\sigma) = F(\sigma)$ $(\sigma > 0)$. Следовательно, для любого натурального N имеем

$$M_F(\sigma) \geqslant e \sum_{k=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N} e^{-\lambda_k \sigma} \geqslant e \,\frac{N}{2}\, e^{-\lambda_N \sigma} \geqslant N e^{-\lambda_N \sigma} = \exp(\ln N - \lambda_N \sigma). \tag{17}$$

Запишем условие (15) в виде

$$\lambda_{n_m} \leqslant \frac{1}{\nu} \ln n_m \ln \lambda_{n_m}, \quad \nu > 0 \tag{18}$$

и положим в (17) $N = n_m$. Тогда для любого $m \geqslant 1$ имеем

$$M_F(\sigma) \geqslant \exp(\ln n_m - \lambda_{n_m} \sigma) \geqslant \exp\left(\ln n_m - \frac{\sigma}{\nu} \ln n_m \ln \lambda_{n_m}\right). \tag{19}$$

Далее, из (18) видно, что $\ln\lambda_{n_m} \leqslant 2\ln\ln n_m$ при $m \geqslant m_0$. Учитывая это, из (19) получаем оценку

$$M_F(\sigma) \geqslant \exp\left(\ln n_m - \frac{2\sigma}{\nu}\,\ln n_m \ln\ln n_m\right), \quad m \geqslant m_0. \tag{20}$$

В оценках (17) $\sigma > 0$ — любое. Имея это в виду, положим $\sigma = \sigma_m$, где σ_m — решение уравнения

$$\ln\ln n_m = \frac{\nu}{4\sigma}, \quad m \geqslant m_0.$$

Тогда из (20) получаем

$$\ln M_F(\sigma) \geqslant \frac{1}{2}\,\exp\frac{\nu}{4\sigma}, \quad \sigma = \sigma_m,\ m \geqslant m_0.$$

Отсюда

$$\ln\ln M_F(\sigma) \geqslant \ln\left(\frac{1}{2}\,\exp\frac{\nu}{4\sigma}\right) \geqslant \frac{\nu}{8\sigma}, \quad \sigma = \sigma_m,\ m \geqslant m_1 > m_0.$$

Это означает, что $\rho_R \geqslant \nu/8$. Необходимость доказана. $\rhd$

Для полноты изложения приведем соответствующий результат и для класса аналитических функций, представимых рядами экспонент в ограниченной выпуклой области с некоторой фиксированной последовательностью показателей.

3. Случай ограниченной выпуклой области

Здесь мы ограничимся лишь формулировкой результата, поскольку он опубликован в статье [8]. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}| \to \infty$, — последовательность комплексных чисел, G — ограниченная выпуклая область, $0 \in G$. Для любой функции f, аналитической в области G, в [8] введено понятие R-порядка ρ_G. По определению

$$\rho_G = \varlimsup_{z\to\partial G} d(z)\ln^+\ln^+|f(z)|,$$

где $d(z) = \inf_{\xi\in\partial G}|z-\xi|$.

Через $H_R(G,\Lambda)$ обозначим класс всех аналитических в области G функций f, имеющих конечный порядок ρ_G и представимых в G рядом экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

Всегда существует последовательность Λ, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H_R(G,\Lambda) \neq \varnothing$ (см. в [8]).

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей, $0 \in G$. Если $q = 0$ и выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln|\lambda_n|}{|\lambda_n|} = 0,$$

то порядок ρ_G любой функции $f \in H_R(G,\Lambda)$ вычисляется по формуле

$$\rho_G = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|\lambda_n|}{|\lambda_n|}\,\ln^+\left[|a_n|e^{K(-\varphi_n)|\lambda_n|}\right], \tag{21}$$

где $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ — *опорная функция области* G, *а*

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\lambda_n|}{|\lambda_n|} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right|, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad \lambda_n^2 \neq \lambda_m^2,\ n \neq m.$$

В [8] приводится пример функции $f \in H_R(G, \Lambda)$, порядок ρ_G которой не равен правой части (21), если $q \neq 0$.

Рядам Дирихле посвящена и целая серия работ Юрия Фёдоровича Коробейника, которыми он занимается с начала 1990-х годов (см. в [13]), а за последние 20 лет — и теорией дзета-функции Римана (правда, как сам утверждает, «упорно, но не слишком успешно» [14]). Однако он надеется, что его работы привлекут «внимание уфимских математиков к этой, по-видимому, свежей для них тематике» (см. [14]). В работе [13] им было высказано также пожелание о том, чтобы эта его «небольшая книга послужила бы отправной точкой для создания подобной [но более подробной] монографии по рядам Дирихле». Настоящая заметка подготовлена в какой-то степени под влиянием этого пожелания.

В заключение считаю своим долгом выразить профессору Ю. Ф. Коробейнику глубокую признательность за то, что он выступал в качестве моего официального оппонента по кандидатской и докторской диссертациям, причем в первом случае — в Ростове-на-Дону в 1983 году. Его глубокие по содержанию замечания и рекомендации, высказанные в отзывах, во многом отразились в моих дальнейших исследованиях (примечание А. М. Гайсина).

Литература

1. *Bohr H.* Collected Mathematical Works.—Copenhagen, 1952.—992 p.
2. *Valiron G.* Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet // Bull. Soc. Math. France.—1924.—Vol. 52.—P. 166–174. DOI: 10.24033/bsmf.1051.
3. *Valiron G.* Entire functions and Borel's directions // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1934.—Vol. 20.—P. 211–215. DOI: 10.1073/pnas.20.3.211.
4. *Kuniyeda M.* Uniform convergence — abscissa of general Dirichlet series // Tôhoku Math. J.—1916.—Vol. 9.—P. 7–27.
5. *Ritt J.* On certain points in the theory of Dirichlet series // Amer. J. Math.—1928.—Vol. 50, № 1.—P. 73–86. DOI: 10.2307/2370849.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
7. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Мат. сб.—1982.—Т. 117, № 3.—С. 412–424.
8. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности // Мат. заметки.—1990.—Т. 48, № 3.—С. 45–53.
9. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.—М.: Наука, 1983.—176 с.
10. *Мандельбройт С.* Ряды Дирихле. Принципы и методы.—М.: Мир, 1973.—171 с.
11. *Sugimura K.* Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen // Math. Z.—1929.—Vol. 29.—P. 264–277. DOI: 10.1007/BF01180529.
12. *Tanaka C.* Note on Dirichlet series, V. On the integral functions defined by Dirichlet series, I // Tôhoku Math. J.—1953.—Vol. 2, № 3.—P. 67–78. DOI: 10.2748/tmj/1178245352.
13. *Коробейник Ю. Ф.* Ряды экспонент с вещественными показателями.—Ростов н/Д.: ЮФУ, 2009.—84 с.
14. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых вопросах теории дзета-функции Римана // Уфим. мат. журн.—2015.—Т. 7, № 4.—С. 93–98.

Статья поступила 13 мая 2020 г.

Гайсин Ахтяр Магазович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
заведующий отделом
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;
Башкирский государственный университет,
профессор
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: gaisinam@mail.ru

Гайсина Галия Ахтяровна
Башкирский государственный университет,
аспирант
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. З. Валиди, 32
E-mail: gaisinaga@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 47–57

RITT–SUGIMURA TYPE THEOREMS

Gaisin, A. M.[1,2] and Gaisina, G. A.[2]
[1]Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia;
[2]Bashkir State University,
32 Zaki Validy St., Ufa 450076, Russia
E-mail: gaisinam@mail.ru, gaisinaga@mail.ru

Abstract. At the end of the nineteenth century, E. Borel introduced the concept of the order of an entire function, and then a corresponding formula was obtained for calculating this quantity in terms of the coefficients of the Taylor expansion of this function. Later, J. Ritt extended this notion to entire functions represented by Dirichlet series with positive exponents. He also obtained a similar formula for this characteristic (R-order), which clearly depends on the coefficients and exponents of the Dirichlet series. In the works of A. M. Gaisin, this result was completely carried over to the case of a halfplane and also a bounded convex domain. In the latter case, the author deals with Dirichlet series with complex exponents, exponential series. In this article the relationship between the growth of the Dirichlet series and the expansion coefficients in terms of Ritt order (R-order) is studied. Cases when the series converges uniformly in the entire plane or only in a halfplane are considered separately. In both cases the necessary and sufficient conditions for the exponents are obtained, the fulfillment of which the corresponding formulas are correct, allowing to calculate this value through the series coefficients. All previously known results of this type were only of a sufficient character. In the case of a plane, we have shown accuracy of S. Tanaka's estimates for the R-order.

Key words: Dirichlet series, R-order, Ritt–Sugimura–Tanaka formula.

Mathematical Subject Classification (2010): Primary 30D10.

For citation: *Gaisin, A. M. and Gaisina, G. A.* Ritt–Sugimura Type Theorems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 47–57 (in Russian). DOI: 10.46698/n7823-2870-5444-g.

References

1. *Bohr, H. Collected Mathematical Works*, Copenhagen, 1952, 992 p.
2. *Valiron, G.* Sur l'Abscisse de Convergence des Séries de Dirichlet, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1924, vol. 52, pp. 166–174. DOI: 10.24033/bsmf.1051.

3. *Valiron, G.* Entire Functions and Borel's directions, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 1934, vol. 20, pp. 211–215. DOI: 10.1073/pnas.20.3.211.
4. *Kuniyeda, M.* Uniform Convergence — Abscissa of General Dirichlet Series, *Tôhoku Mathematical Journal*, 1916, vol. 9, pp. 7–27.
5. *Ritt, J.* On Certain Points in the Theory of Dirichlet Series, *American Journal of Mathematics*, 1928, vol. 50, no. 1, pp. 73–86. DOI: 10.2307/2370849.
6. *Leont'ev, A. F. Ryady eksponent* [Exponential Series], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
7. *Gaisin, A. M.* A Bound for the Growth in a Half-Strip of a Function Represented by a Dirichlet Series, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 3, pp. 411–422. DOI: 10.1070/SM1983v045n03ABEH001015.
8. *Gaisin, A. M.* Behavior of the Sum of a Series of Exponentials Near the Boundary of the Domain of Regularity, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1990, vol. 48, no. 3, pp. 904–910. DOI: 10.1007/BF01157432.
9. *Leont'ev, A. F. Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire Functions. Exponential Series], Moscow, Nauka, 1983, 176 p. (in Russian).
10. *Mandelbrojt, S. Séries Adhérentes. Régularisation des Suites. Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952, xiv+277 p.
11. *Sugimura, K.* Übertragung Einiger Sätze aus der Theorie der Ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen, *Mathematische Zeitschrift*, 1929, vol. 29, pp. 264–277. DOI: 10.1007/BF01180529.
12. *Tanaka C.* Note on Dirichlet Series, V. On the Integral Functions Defined by Dirichlet Series, I, *Tôhoku Mathematical Journal*, 1953, vol. 2, no. 3, pp. 67–78. DOI: 10.2748/tmj/1178245352.
13. *Korobeynik Yu. F. Ryady eksponent s veshchestvennymi pokazatelyami* [Exponential Series with Real Exponents], Rostov-on-Don, SFU, 2009, 84 p. (in Russian).
14. *Korobeynik Yu. F.* On Some Problems in the Theory of the Riemann's Zeta-Function, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 88–93. DOI: 10.13108/2015-7-4-88.

Received May 13, 2020

Ahtyar M. Gaisin
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Head of Department;
Bashkir State University,
32 Zaki Validy St., Ufa 450076 Russia,
Professor
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

Galiya A. Gaisina
Bashkir State University,
32 Zaki Validy St., Ufa 450076, Russia,
Graduate Student
E-mail: `gaisinaga@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 58–71

УДК 517.53
DOI 10.46698/g8728-5783-4755-h

КРИТЕРИЙ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ТИПА САЛИНАСА-КОРЕНБЛЮМА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ#

Р. А. Гайсин[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`

Девяностолетию Юрия Фёдоровича Коробейника посвящается

Аннотация. Как известно, проблема квазианалитичности класса $C_I(M_n)$ для отрезка I решается теоремой Данжуа-Карлемана. Как следует из хорошо известного примера Д. Е. Меньшова, не только эта теорема, но и сама постановка задачи квазианалитичности класса $C_K(M_n)$ не распространяется на случай произвольного континуума K комплексной плоскости. Рядом авторов проблема квазианалитичности изучалась для жордановых областей и спрямляемых (в частности, квазигладких) дуг. В настоящей статье обсуждаются теоремы типа Данжуа-Карлемана в выпуклых областях комплексной плоскости, а именно связь между критериями квазианалитичности Р. С. Юлмухаметова класса Карлемана $H(D, M_n)$ для произвольной выпуклой области D и Р. Салинаса класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ для угла $\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1\}$. Проблема квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять последовательность $\{M_n\}$ и точка $z_0 \in \partial D$ для того, чтобы класс $H(D, M_n)$ был квазианалитическим в данной точке. В терминах специального интегрального условия, характеризующего степень близости границ области D и угла Δ_α в окрестности начала координат получен ответ на вопрос об одновременной квазианалитичности или неквазианалитичности этих классов Карлемана в точке $z = 0$. Приводятся геометрическая интерпретация данного интегрального условия и конкретные примеры, показывающие существенность этого условия.

Ключевые слова: класс Карлемана, выпуклая область, критерий Салинаса, интегральное условие локальной близости границ.

Mathematical Subject Classification (2000): 30D60.

Образец цитирования: *Гайсин Р. А.* Критерий квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для выпуклых областей // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 58–71. DOI: 10.46698/g8728-5783-4755-h.

Пусть D — произвольная выпуклая область комплексной плоскости $\mathbb{C}$,

$$H(D, M_n) = \left\{ f:\ f \in H(D),\ \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)| \leqslant a_f A_f^n M_n,\ n \geqslant 0 \right\}$$

— класс Карлемана. Предполагаем, что $M_0 > 0$. Тогда функции $f(z) \equiv \mathrm{const}$ принадлежат любому классу $H(D, M_n)$. Если кроме них данный класс не содержит ни одной функции, он называется тривиальным. Например, если D — вся конечная плоскость $\mathbb{C}$, то любой класс $H(D, M_n)$, очевидно, тривиален (теорема Лиувилля). В другом крайнем случае, когда D — ограниченное множество, необходимым и достаточным условием нетривиальности класса $H(D, M_n)$ является требование $M_1 > 0$.

#Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00095 А.

Всякая выпуклая область D обладает следующим важным свойством: все производные $f^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ функции $f \in H(D, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы ∂D. Исходя из этого, класс Карлемана $H(D, M_n)$ называют *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если в данном классе нет отличной от тождественного нуля функции f такой, что $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \geqslant 0)$, где $f^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ — производные, непрерывно продолженные до границы ∂D. Это определение распространяется на любую жорданову область, а также на континуумы, в том числе и без внутренних точек, например, на спрямляемые жордановы дуги.

Проблема квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять последовательность $\{M_n\}$ и точка $z_0 \in \partial D$ для того, чтобы класс $H(D, M_n)$ был квазианалитическим в данной точке.

Как известно, проблема квазианалитичности класса

$$C_I(M_n) = \left\{ f : \ f \in C^\infty(I), \ \max_{x \in I} |f^{(n)}(x)| \leqslant a_f A_f^n M_n, \ n \geqslant 0 \right\}$$

для отрезка $I = [0, 1]$ решается теоремой Данжуа-Карлемана [1]. Однако следует заметить, что с отрезка I на случай произвольного континуума $K \subset \mathbb{C}$ не распространяется не только теорема Данжуа-Карлемана, но и сама постановка задачи о квазианалитичности класса $C_K(M_n)$. Это следует, например, из построенного Д. Е. Меньшовым примера жордановой неспрямляемой дуги $\gamma \subset \mathbb{C}$ и функции f, непрерывной и строго возрастающей на этой дуге и имеющей всюду на ней производную $f'(z) \equiv 0$. Этот пример указывает на то, что на неспрямляемой жордановой кривой, вообще говоря, невозможно восстановить функцию по ее производной. Этот же пример показывает, что квазианалитические классы Данжуа-Карлемана на таких кривых, вообще говоря, невозможны (см. [2]).

Проблема квазианалитичности в жордановых областях и спрямляемых дугах, в частности, квазигладких, изучалась в [3]. Случай выпуклых и жордановых областей ранее рассматривался в работах [4–6]. Так, Р. С. Юлмухаметовым в [5] был установлен критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ для произвольной выпуклой области D.

Цель настоящей работы — указать связь этого результата с теоремой Р. Салинаса о квазианалитичности класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ в точке $z = 0$ для угла

$$\Delta_\alpha = \left\{ z : \ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha, \ 0 < \alpha \leqslant 1 \right\}.$$

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, лежащая в правой полуплоскости $\Pi_0 = \{z = x+iy : x > 0\}$, $0 \in \partial D$, а Δ_α — наименьший угол, в котором содержится эта область.

Введем на ∂D натуральную параметризацию $z = z(s)$, $0 \leqslant s < S_0$, где $S_0 = |\partial D|$ — общая длина границы области D (за положительное направление считается обход границы против часовой стрелки). Таким образом, длина дуги границы от точки $z = 0$ до точки $z(s)$ в положительном направлении равна s. Через $\beta(s)$ обозначим величину угла между касательными в точках границы, равноудаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s (при $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$ вершина этого угла либо совпадает с точкой $z = 0$, либо лежит в левой полуплоскости). Касательные существуют всюду, кроме не более чем счетного множества угловых точек. В угловых точках рассматриваем правосторонние касательные в указанных точках, понимаемые соответствующим образом. Тогда функция $\beta(s)$ — неубывающая, $\lim_{s \to 0} \beta(s) = \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая, необязательно ограниченная область, $z_0 \in \partial D$,*

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$, $0 < M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе ∂D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Положим*

$$R(z_0, s) = \exp\left[\int_s^{\varepsilon} \frac{\pi + \beta(z_0, x)}{\beta(z_0, x)} \frac{dx}{x}\right], \quad 0 < s \leqslant \varepsilon.$$

Тогда условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2 R^{-1}(z_0, r)}\, dr = \infty \tag{1}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы класс $H(D, M_n)$ был квазианалитическим в точке z_0.

Здесь $s = R^{-1}(z_0, r)$ — функция, обратная к $r = R(z_0, s)$.

Наша задача — выяснить, в каком случае условие (1) равносильно критерию квазианалитичности Р. Салинаса класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ в точке $z = 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}\, dr = \infty. \tag{2}$$

1. Предварительные сведения. Постановка задачи

Введем необходимые обозначения. В рассматриваемом здесь случае $z_0 = 0$, поэтому обозначим, для простоты, $R(s) = R(0, s)$, $R^{-1}(r) = R^{-1}(0, r)$, $\beta(s) = \beta(0, s)$. Тогда для угла Δ_α имеем

$$\frac{\pi + \beta(s)}{\beta(s)} = \frac{1+\alpha}{\alpha} + \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\alpha\beta(s)} = \frac{1+\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} a(s),$$

где

$$a(s) = \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\beta(s)}.$$

Ясно, что функция $a(s)$ невозрастающая, $a(s) \to 0$ при $s \to 0$. Тогда

$$R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \exp\left(\frac{1}{\alpha} A(s)\right),$$

где

$$A(s) = \int_s^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx$$

* Односторонними, где обычные касательные не существуют.

— величина, характеризующая асимптотическую близость границы ∂D к $\partial\Delta_\alpha$ при $s \to 0$. Полагая

$$R_0(s) = e^{\frac{1}{\alpha}A(s)},$$

имеем

$$R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} R_0(s), \quad 0 < s \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Функция $R_0(s)$ монотонно возрастающая. Она обладает следующими свойствами:

1) $R_0(s)$ — медленно меняющаяся (в смысле Караматы) в нуле функция (см. [7, с. 10]), т. е.

$$\lim_{s\to 0} \frac{R_0(s)}{R_0(2s)} = 1; \tag{4}$$

2) если функция $R_0(s)$ дифференцируемая, то справедливо равенство*

$$\lim_{s\to 0} \frac{sR_0'(s)}{R_0(s)} = 0;$$

3) верно соотношение

$$\lim_{s\to 0} \frac{\ln R_0(s)}{\ln \frac{1}{s}} = 0. \tag{5}$$

Докажем свойство 1). Очевидно,

$$\frac{R_0(s)}{R_0(2s)} > 1.$$

Так как функция $a(x)$ монотонна, $a(x) \to 0$ при $x \to 0$, то для всякого $\delta > 0$ существует $s_0(\delta)$ такое, что при $s < s_0(\delta)$ будет выполняться оценка

$$a(2s) < \frac{\alpha}{\ln 2}\delta.$$

Следовательно,

$$1 < \frac{R_0(s)}{R_0(2s)} \leqslant \exp\left[\frac{1}{\alpha}\int_s^{2s} \frac{a(x)}{x}\,dx\right] < e^\delta.$$

Поскольку $\delta > 0$ — любое, то равенство (4) действительно имеет место.

Для доказательства свойства 2) рассмотрим равенство

$$\ln R_0(s) = \frac{1}{\alpha}\int_s^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\,dx.$$

Отсюда имеем

$$\frac{R_0'(s)}{R_0(s)} = -\frac{1}{\alpha}\frac{a(s)}{s}.$$

Поскольку $a(s) \to 0$ при $s \to 0$, то и

$$\lim_{s\to 0} \frac{sR_0'(s)}{R_0(s)} = 0.$$

---

* Условия 1) и 2) для дифференцируемых функций равносильны (см. [7, с. 15]).

Равенство (5) есть простое следствие свойства 2), если функция $R_0(s)$ дифференцируема, а $\lim_{s\to 0} A(s) = \infty$. В противном случае, поскольку $a(s) \to 0$ при $s \to 0$, для всякого $\delta > 0$ существует $s_0(\delta)$ такое, что $a(s) < \frac{\delta}{2}\alpha$ при $s < s_0(\delta)$. Тогда

$$\ln R_0(s) < \frac{\delta}{2} \ln \frac{s_0}{s} + \frac{1}{\alpha} \int\limits_{s_0}^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx < \delta \ln \frac{1}{s}$$

при $s < s_1 < s_0(\delta)$, т. е. выполняется равенство (5).

Пусть $r = R(s)$, где функция $R(s)$ имеет вид (3). Поскольку функция $r = R(s)$ непрерывная и возрастающая, то существует обратная функция

$$s = s(r) = R^{-1}(r) = \varepsilon r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha} A(s)}. \tag{6}$$

Обозначим

$$K(r) = e^{\frac{1}{1+\alpha} A(s(r))} = \exp\left(\frac{1}{1+\alpha} \int\limits_{s(r)}^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx \right),$$

где

$$A(s) = \int\limits_{s}^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx.$$

Учитывая это, интеграл (1) перепишем в виде

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2 R^{-1}(r)}\, dr = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr.$$

Таким образом, учитывая теорему 1, заключаем, что класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr = \infty, \tag{7}$$

где

$$K(r) = \exp\left(\frac{1}{1+\alpha} A(s(r)) \right),$$

$s = s(r)$ — функция, определенная формулой (6), $A(s)$ — интегральная характеристика асимптотической близости границ $\partial\Delta_\alpha$ и ∂D при $s \to 0$.

Если $D = \Delta_\alpha$, то $\beta(s) \equiv \pi\alpha$ и $K(r) \equiv 1$. Если часть границы ∂D есть отрезок $[-\tau i, \tau i]$, то опять $K(r) \equiv 1$, а $\alpha = 1$. В этом случае критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z = 0$ совпадает с критерием Б. И. Коренблюма для круга (или Р. Салинаса для полуплоскости $\Delta_1 = \Pi_0$):

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}}\, dr = \infty.$$

Таким образом, классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или неквазианалитичны в точке $z = 0$ одновременно в том и только в том случае, когда расходятся или сходятся одновременно интегралы (2) и (7).

Далее имеем $1 \leqslant K(r) = e^{\frac{1}{1+\alpha} A(s(r))}$. Если $\sup_{0<s\leqslant\varepsilon} A(s) = \lim_{s\to 0} A(s) = A < \infty$, то интегралы (2) и (7) равносходятся. Значит, как показано в [3], классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или неквазианалитичны в точке $z = 0$ одновременно.

В случае, когда интеграл (2) расходится, а интеграл (7) сходится (т. е. когда класс $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичен, а $H(D, M_n)$ — нет), необходимо

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x}\,dx = \infty. \tag{8}$$

В этой ситуации $1 \leqslant K(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$. Возникает следующий вопрос: что можно утверждать о квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z = 0$, если интегралы (2) и (8) расходятся?

Покажем, что интеграл (7) при этом может как сходиться, так и расходиться — все зависит от конкретной функции $K(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$, от последовательности $\{M_n\}$ и от области D.

2. Существенность интегрального условия $A < \infty$

Приведем конкретные примеры. Для этого рассмотрим функцию $M(r) = e^{m(r)}$, где

$$m(r) = \frac{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}{r \ln^\nu r}, \quad r > 1,\ 0 < \nu < 1,$$

причем $\nu + \frac{\alpha}{1+\alpha} > 1$ (например, можно взять $\nu = \frac{1}{\frac{\alpha}{2}+1}$). Легко проверяется, что функция $y = \ln M(e^x) = m(e^x)$ выпукла и возрастает при $x \geqslant x_0$ (это проверяется дифференцированием: $0 < y'(x) \uparrow \infty$ при $x \geqslant x_0$). Положим

$$T_0(e^x) = e^{m_0(e^x)},$$

где

$$m_0(e^x) = \begin{cases} m(e^x), & \text{если } x \geqslant x_0; \\ \frac{m(e^{x_0})}{e^{x_0}} e^x, & \text{если } 0 \leqslant x < x_0. \end{cases}$$

Выберем x_0 достаточно большим. Тогда функция $\ln T_0(e^x) = m_0(e^x)$ будет выпуклой и возрастающей при $x > 0$. Положим теперь

$$M_n^c = \sup_{r \geqslant 1} \frac{r^n}{T_0(r)}, \quad n \geqslant 0, \qquad T_c(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{M_n^c}.$$

Непосредственно проверяется, что последовательность $\{M_n^c\}$ логарифмически выпукла. Напомним также, что функция $T_c(r)$ называется функцией следа для последовательности $\{M_n^c\}$, причем $T_c(r) = T(r)$. Здесь $T(r)$ — функция следа любой последовательности $\{M_n\}$, для которой $\{M_n^c\}$ является ее выпуклой регуляризацией посредством логарифмов.

Далее нам понадобятся следующие леммы о свойствах преобразования Юнга — Фенхеля (см. [8]).

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(x)$ определена при $x > 0$ и $\frac{\varphi(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Тогда двойственная по Юнгу функция*

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \sup_{x > 0}(x\xi - \varphi(x))$$

выпукла вниз при $\xi > 0$ и $\frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{\xi} \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Лемма 2. *Функция $\tilde{\widetilde{\varphi}}(x)$ совпадает с функцией $\varphi^*(x)$ — наибольшей выпуклой функцией, не превосходящей $\varphi(x)$. В частности, если $\varphi(x)$ выпукла вниз, то $\tilde{\widetilde{\varphi}}(x) \equiv \varphi(x)$.*

Отметим, что логарифмическая выпуклость последовательности $\{M_n^c\}$ вытекает и из леммы 1. Действительно, имеем

$$M_n^c = \exp\left[\sup_{r\geqslant 1}(n\ln r - \ln T_0(r))\right] = \exp\left[\sup_{x>0}(nx - \ln T_0(e^x))\right],$$

где $\varphi(x) = \ln T_0(e^x)$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 1. Значит, по этой лемме, $\widetilde{\varphi}(y)$ — выпуклая функция, в частности, $\ln M_n^c = \widetilde{\varphi}(n)$ — выпуклая последовательность чисел, т. е.

$$(M_n^c)^2 \leqslant M_{n-1}^c M_{n+1}^c, \quad n \geqslant 1.$$

С другой стороны, поскольку функция $\varphi(x) = \ln T_0(e^x)$ выпукла, то, по лемме 2,

$$\ln T_0(e^\xi) = \sup_{x>0}\big[x\xi - \widetilde{\varphi}(x)\big].$$

Следовательно,

$$\ln T_0(e^\xi) = \sup_{n\geqslant 0}\sup_{n\leqslant x<n+1}[x\xi - \widetilde{\varphi}(x)] \leqslant \xi + \sup_{n\geqslant 0}[n\xi - \widetilde{\varphi}(n)] = \xi + \ln T_c(e^\xi).$$

Далее, очевидно, что $\ln T_0(e^\xi) \geqslant \ln T_c(e^\xi)$. Так что

$$T_c(r) \leqslant T_0(r) \leqslant rT_c(r).$$

Этими соотношениями мы воспользуемся в рассматриваемых ниже примерах.

Приведем теперь соответствующие примеры.

Пример 1. Возьмем

$$a(x) = \frac{\pi\alpha - \beta(x)}{\beta(x)} = \alpha\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\alpha}A(s) = \frac{1}{\alpha}\int_s^\varepsilon \frac{a(x)}{x}\,dx = \int_s^\varepsilon \frac{dx}{x\ln\frac{1}{x}} = -\int_s^\varepsilon \frac{d\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{1}{x}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\alpha}A(s) = \ln\ln\frac{1}{s} - \ln\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$r = R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\exp\left(\frac{1}{\alpha}A(s)\right) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\frac{\ln\frac{1}{s}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Далее, так как $K(r) = \exp\left(\frac{1}{1+\alpha}A(s(r))\right)$, то

$$r^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\varepsilon}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\varepsilon}{s(r)}K(r). \tag{9}$$

Но

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\ln r = \ln\frac{\varepsilon}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} + \ln\frac{1}{s} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\ln\ln\frac{1}{s},$$

т. е. при $s \to 0$

$$\ln\frac{1}{s} = (1+o(1))\frac{\alpha}{1+\alpha}\ln r. \tag{10}$$

Так что из (9), (10) при $r \to \infty$ получаем

$$s = s(r) = \frac{\varepsilon}{(\ln \frac{1}{\varepsilon})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + o(1)) \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда при $r \to \infty$

$$s(r) = C_{\varepsilon,\alpha}(1 + o(1)) r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} (\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Таким образом, так как $0 < \nu < 1$,

$$\int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}\, dr = \int_2^\infty \frac{dr}{r \ln^\nu r} = \infty.$$

С другой стороны, поскольку $\nu + \frac{\alpha}{1+\alpha} > 1$, то как видно из (9) и асимптотики $s(r)$,

$$\int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^2 R^{-1}(r)}\, dr = \int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr \leqslant A_{\varepsilon,\alpha} \int_2^\infty \frac{dr}{r (\ln r)^{\nu + \frac{\alpha}{1+\alpha}}} < \infty.$$

Так как $T(r) = T_c(r) \leqslant T_0(r)$, то и интеграл (1) сходится.

Пример 2. Возьмем

$$a(x) = \alpha \frac{1}{\ln \frac{1}{x} \ln \ln \frac{1}{x}}, \quad 0 < x \leqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$\frac{1}{\alpha} A(s) = \int_s^\varepsilon \frac{dx}{x \ln \frac{1}{x} \ln \ln \frac{1}{x}} = -\int_s^\varepsilon \frac{d \ln \frac{1}{x}}{\ln \frac{1}{x} \ln \ln \frac{1}{x}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{\alpha} A(s) = \ln \ln \ln \frac{1}{s} - \ln \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит,

$$R_0(s) = e^{\frac{1}{\alpha} A(s)} = \frac{\ln \ln \frac{1}{s}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

а поскольку $R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} R_0(s)$, $0 < s \leqslant \varepsilon$, то

$$r = R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \frac{\ln \ln \frac{1}{s}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{11}$$

Но

$$\ln r = \ln \frac{\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1+\alpha}{\alpha} \ln \frac{1}{s} + \ln \ln \ln \frac{1}{s},$$

или при $s \to 0$

$$\ln r = (1 + o(1)) \frac{1+\alpha}{\alpha} \ln \frac{1}{s}.$$

Далее, при $s \to 0$

$$\ln \ln r = \ln \frac{1+\alpha}{\alpha} + \ln \ln \frac{1}{s} + o(1).$$

Это означает, что при $r \to \infty$

$$\ln \ln \frac{1}{s} = (1 + o(1)) \ln \ln r.$$

Таким образом, из (11) при $r \to \infty$ будем иметь

$$r = \frac{\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}(1+o(1))\ln\ln r,$$

т. е. при $r \to \infty$

$$s(r) = B_{\varepsilon,\alpha}(1+o(1))r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\ln\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Поскольку $K(r) = \frac{s(r)}{\varepsilon}r^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, то

$$\int\limits_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}K(r)}\,dr = \frac{\varepsilon}{B_{\varepsilon,\alpha}}\int\limits_2^\infty \frac{dr}{(1+o(1))r\ln^\nu r(\ln\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} = \infty,$$

так как $0 < \nu < 1$. Значит, интеграл (1) тоже расходится, ибо $T_0(r) \leqslant rT_c(r)$, а $T_c(r) = T(r)$.

Примеры построены.

Полученное сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть*

$$A = \int\limits_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x}\,dx, \quad a(s) = \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\beta(s)}, \quad \pi\alpha = \lim_{s\to 0}\beta(s), \quad \beta(s) = \beta(0,s).$$

Тогда

1°. *если $A < \infty$, то классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или неквазианалитичны в точке $z = 0$ одновременно;*

2°. *если интеграл (2) расходится, а интеграл (7) сходится, то $A = \infty$; из расходимости интеграла (7) вытекает расходимость интеграла (2);*

3°. *если $A = \infty$, интеграл (2) расходится, то интеграл (7) может как сходиться, так и расходиться, а именно: для выбранной специальным образом последовательности $\{M_n\}$ существуют выпуклые области D_1 и D_2, для которых интеграл (7) сходится и, соответственно, расходится.*

На Межвузовском научно-исследовательском семинаре по математике «Анализ и его приложения» (16 апреля 2019 г., г. Москва, МПГУ) В. Б. Шерстюковым был задан вопрос о точности интегрального условия $A < \infty$. Из п. 3° теоремы 2 видно, что это интегральное условие существенно: если $A = \infty$, то квазианалитичность класса $H(D, M_n)$ не равносильна квазианалитичности класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$.

3. Геометрическая интерпретация интегрального условия $A < \infty$

Приведем теперь геометрическую трактовку интегрального условия $A < \infty$.

Предположим, что граница выпуклой области D (расположенной в верхней полуплоскости) локально описывается некоторой функцией $y = f(x)$, причем $f(0) = 0$, и функция f дифференцируема в окрестности точки 0 ($|x| < \delta$) за исключением, быть может, точки 0. Тогда на интервалах $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$ производная функции f будет непрерывной (см. [9]). Пусть $\beta(s)$ — величина угла между касательными к границе области D, проведенными в точках, удаленных от точки O на длину дуги границы, равной s, а $x = x(s)$ и $\widetilde{x} = \widetilde{x}(s)$ — абсциссы этих точек. В этом случае $\lim_{s\to 0}\beta(s) = \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Пусть, далее, γ_1 и γ_2 — острые углы, которые образуют указанные касательные с осью Ox, а γ_0' и γ_0'' — предельные значения этих углов при $x \uparrow 0$ и $x \downarrow 0$ соответственно.

Длина дуги s и x, как известно, связаны соотношением

$$s(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt. \tag{12}$$

Так как функция $s(x)$ строго монотонна и непрерывна, то обратная функция $x(s)$ существует и непрерывна.

Имеем $\beta + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi$, $\pi\alpha = \pi\alpha_1 + \pi\alpha_2$. Отсюда $\pi\alpha - \beta = \pi\alpha - \pi + \gamma_1 + \gamma_2 = \left(\pi\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\pi\alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_0' + \gamma_2 - \gamma_0''$. Тогда

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds = \int\limits_0^\varepsilon \frac{\gamma_1(\widetilde{x}(s)) - \gamma_0'}{s}\, ds + \int\limits_0^\varepsilon \frac{\gamma_2(x(s)) - \gamma_0''}{s}\, ds = I_1 + I_2.$$

По теореме о среднем значении при $x > 0$

$$\gamma_2(x) - \gamma_0'' = \operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'_+(0) = \frac{1}{1 + c^2}\left[f'(x) - f'_+(0)\right],$$

где $f'_+(0) \leqslant c \leqslant f'(x)$. Так как $0 \leqslant f'(x) \leqslant M < \infty$ при $0 < x \leqslant \delta_0 < \delta$, то для таких x $\frac{1}{1+M^2} \leqslant \frac{1}{1+c^2(x)} \leqslant 1$. Интеграл I_2 сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f'(x(s)) - f'_+(0)}{s}\, ds. \tag{13}$$

Но из формулы (12) следует, что

$$x \leqslant s(x) \leqslant \sqrt{1 + M^2}x, \tag{14}$$

где $0 \leqslant f'(x) \leqslant M$ при $0 < x \leqslant \delta_0$, $\delta_0 < \delta$. Полагая $s = s(x)$ и пользуясь соотношением $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, оценками (14) и ограниченностью производной $f'(x)$, заключаем, что интеграл (13) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_0^{x_0''} \frac{f'(x) - f'_+(0)}{x}\, dx.$$

Аналогично интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^{x_0'} \frac{f'_-(0) - f'(x)}{x}\, dx.$$

Здесь $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ — правая и левая производные функции f в точке 0 соответственно (для выпуклой функции f они существуют в каждой точке интервала $(-\delta, \delta)$).

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть граница выпуклой области D в окрестности $(-\delta, \delta)$ задается некоторой функцией $y = f(x)$, причем f дифференцируема в данной окрестности, за исключением, быть может, точки $x = 0$, причем $f(0) = 0$. Пусть, далее, $\lim_{s\to 0} \beta(s) = \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда интеграл A сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы*

$$\int\limits_0^{x_0''} \frac{f'(x) - f'_+(0)}{x}\, dx, \quad \int\limits_0^{x_0'} \frac{f'_-(0) - f'(x)}{x}\, dx. \tag{15}$$

Следствие. *Если функция f (при сделанных предположениях), описывающая границу выпуклой области D, является четной, то условие $A < \infty$ равносильно сходимости любого из интегралов в* (15), *поскольку в этом случае* $\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'_+(0) = \operatorname{arctg} f'_-(0) - \operatorname{arctg} f'(x)$, $0 < |x| < \delta$. *Если, кроме того, функция f дифференцируема и в точке $x = 0$, то условие $A < \infty$ эквивалентно каждому из условий:*

$$\text{а)} \int_0^{x_0} \frac{f'(x)}{x}\,dx < \infty, \qquad \text{б)} \int_0^{x_0} \frac{f(x)}{x^2}\,dx < \infty.$$

Действительно, если четная функция f дифференцируема в точке 0, то $f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, и мы получаем условие а). Так как $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$, то $f(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Интегрирование по частям, очевидно, дает условие б):

$$\int_0^{x_0} \frac{f'(x)}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0+} \frac{f(x)}{x}\bigg|_{\delta}^{x_0} + \lim_{\delta\to 0+} \int_{\delta}^{x_0} \frac{f(x)}{x^2}\,dx = c + \int_0^{x_0} \frac{f(x)}{x^2}\,dx,$$

где $c = \frac{f(x_0)}{x_0}$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \ln(x+1)$. Функция φ является вогнутой, $\varphi(0) = 0$. Симметрично отражая график функции $y = \varphi(x)$ относительно оси Ox, получим выпуклую область D. Проверяется, что $x(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}s$ при $s \to 0$. Так как $\beta(s) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x(s)+1}$, то $\lim_{s\to 0}\beta(s) = \frac{\pi}{2}$. Но поскольку $\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} t \sim 1 - t$ при $t \nearrow 1$, то $\frac{\pi}{2} - \beta(s) \sim 1 - \frac{1}{x(s)+1} \sim x(s)$ при $s \to 0$. Значит, интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\frac{\pi}{2} - \beta(s)}{s}\,ds$$

сходится, поскольку в силу эквивалентности $x(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}s$ при $s \to 0$, сходится интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{x(s)}{s}\,ds.$$

Таким образом, для данной области D условие $A < \infty$ выполняется. Отметим, что для данного примера точка $O \in \partial D$ не является точкой гладкости, так как угол между односторонними касательными в этой точке отличен от π.

Пример 4. Укажем другие классы выпуклых областей, для которых выполняется (или не выполняется) интегральное условие $A < \infty$.

Требуемые выпуклые области будут строиться как пересечение бесконечного числа полуплоскостей. Для этого возьмем последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ на вещественной оси, $x_k \downarrow 0$ (считаем, что $x_1 = 1$). Пусть $y = \varphi(x)$ — функция, заданная на отрезке $[0,1]$, линейная на $(x_{k+1}, x_k]$, $\varphi(x_k) = y_k$ $(k \geqslant 1)$, $y_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$, причем $\varphi(0) = 0$. Симметрично отразив построенную ломаную относительно оси Ox, получим выпуклую область, обозначим ее через D.

Через l_k обозначим длину границы ∂D, заключенной в полосе $\{z : x_{k+1} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_k\}$. Тогда

$$s_k = \sum_{n=k}^{\infty} l_n \tag{16}$$

— длина границы области, отсекаемой полосой $\{z : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_k\}$. Тогда при $s_{k+1} < s < s_k$ величина угла $\beta(s)$ (определение величины $\beta(s)$ см. выше) будет постоянной: $\frac{1}{2}\beta(s) \equiv \beta_k$, где β_k — угол наклона звена γ_k границы ∂D. Пусть $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \frac{\pi\alpha}{2}$, $0 < \alpha < 1$. Положим теперь $x_k = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$. Тогда, обозначая $\varepsilon_k = \frac{\pi\alpha}{2} - \beta_k$, имеем

$$y_k - y_{k+1} = (x_k - x_{k+1}) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon_k\right). \tag{17}$$

Так как $x_k - x_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, $l_k^2 = (x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2$, то, учитывая (16), (17), получаем

$$s_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon_n\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим для удобства $\left[1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon_n)\right]^{\frac{1}{2}} = \alpha_n$. Тогда $\alpha_n \to C$ при $n \to \infty$, где $C = \frac{1}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$. Так как $|\alpha_n - C| < \delta$ для любого заданного $\delta > 0$ при $n > n_0(\delta)$, то, очевидно,

$$(C - \delta) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \alpha_n < (C + \delta) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

если $k > n_0(\delta)$ (нас интересует поведение суммы s_k при достаточно больших k). Видим, что при $k \to \infty$

$$s_k \sim \frac{1}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{18}$$

Имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{s_1} \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{s_{k+1}}^{s_k} \frac{\varepsilon_k}{s}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \ln \frac{s_k}{s_{k+1}}.$$

Интеграл

$$\int_0^1 \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds \tag{19}$$

сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_0^{s_1} \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds$, а значит, с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \ln \frac{s_k}{s_{k+1}}. \tag{20}$$

Но в силу (18), ряд (20) равносходится с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \ln \frac{T_k}{T_{k+1}},$$

где $T_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Так как, очевидно, $T_k = \frac{1}{k}$, $\ln \frac{T_k}{T_{k+1}} = \ln \frac{k+1}{k} \sim \frac{1}{k}$ при $k \to \infty$, то интеграл A сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}. \tag{21}$$

Выбирая, например, $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$, мы придем к сходящемуся ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, и условие $A < \infty$ в этом случае будет выполняться. Если положить $\varepsilon_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, то ряд (21) расходится, тем самым и интеграл (19) тоже будет расходиться.

Благодарность. Автор признателен профессору Р. С. Юлмухаметову за постановку задач и рекомендации. Я также благодарен профессору А. М. Гайсину за указание на литературу и наводящие соображения, благодаря которым удалось осуществить новый, несколько иной подход к проблеме квазианалитичности для выпуклых областей.

Литература

1. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.—268 с.
2. *Меньшов Д. Е.* Избранные труды: Математика.—М.: Факториал, 1997.—480 с.
3. *Гайсин Р. А.* Квазианалитичность классов Карлемена на континуумах комплексной плоскости. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Уфа, 2019.—114 с.
4. *Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы функций в выпуклых областях // Мат. сб.—1986.—Т. 130, № 4.—С. 500–519. DOI: 10.1070/SM1987v058n02ABEH003117.
5. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций и применения. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.—Уфа, 1986.—197 с.
6. *Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20, № 2.—С. 178–217. DOI: 10.1090/S1061-0022-09-01048-6.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции.—М.: Наука, 1985.—144 с.
8. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции.—М.: Наука, 1979.—320 с.
9. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.—М.: Прометей, 2005.—232 с.

Статья поступила 9 мая 2020 г.

Гайсин Рашит Ахтярович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 58–71

QUASIANALYTICITY CRITERION OF SALINAS-KORENBLYUM TYPE FOR CONVEX DOMAINS

Gaysin, R. A.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450077, Russia

E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

Abstract. The quasianalyticity problem of the class $C_I(M_n)$ for interval I is known to be solved by the Denjoy-Carleman theorem. It follows from well-known Men'shov example that not only this theorem but the very statement of the quasianalyticity problem of the class $C_K(M_n)$ doesn't expand on the case of arbitrary continuum K of the complex plain. The quasianalyticity problem was studied for Jordan domains and rectifiable arcs including quasismooth arcs by a number of authors. We discuss in this article theorems of Denjoy-Carleman type in the convex domains of the complex plane, more precisely, connection between R. S. Yulmukhametov criterion of quasianalyticity of the Carleman class $H(D, M_n)$ for arbitrary convex domain D and R. Salinas criterion for the class $H(\Delta_\alpha, M_n)$ with angle $\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha,\ \ 0 < \alpha \leqslant 1\}$. The problem of quasianalyticity of the class $H(D, M_n)$ is to find necessary and sufficient conditions for sequence

M_n and point $z_0 \in \partial D$ for quasianalyticity of the class $H(D, M_n)$ at this point. The answer to question of simultaneous quasianalyticity or nonquasianalyticity these Carleman classes at a point $z = 0$ has been obtained in therms of special integral condition which characterizes the degree of proximity of the domain boundaries D and the angle Δ_α in the neighbourhood of origin. Geometric interpretation of this integral condition and explicit examples illustrating essentiality of this condition are given.

Key words: Carleman class, convex domain, Salinas criterion, integral condition of local aboutness of the boundaries.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D60.

For citation: *Gaysin, R. A.* Quasianalyticity Criterion of Salinas-Korenblyum Type for Convex Domains, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 58–71 (in Russian). DOI: 10.46698/g8728-5783-4755-h.

References

1. *Mandelbrojt, S. Séries Adhérentes. Régularisation des Suites. Applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1952, 277 p.
2. *Men'shov, D. E. Izbrannye trudy: Matematika* [Selected Works: Mathematics], Moscow, Faktorial, 1997, 480 p.(in Russian).
3. *Gaysin, R. A. Kvazianalitichnost' klassov Karlemana na kontinuumakh kompleksnoy ploskosti. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* [Quasianalyticity of Carleman Classes on Continua of the Complex Plane. Dissertation in Support of Candidature for a Physico-mathematical Degree], Ufa, 2019, 114 p. (in Russian).
4. *Yulmukhametov, R. S.* Quasianalytical Classes of Functions in Convex Domains, *Math. USSR-Sb.*, 1987, vol. 58, no. 2, pp. 505–523. DOI: 10.1070/SM1987v058n02ABEH003117.
5. *Yulmukhametov, R. S. Approksimatsiya subgarmonicheskikh funktsiy i primeneniya. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk* [Approximation of Subharmonic Functions and Applications. Dissertation for a Doctor's of Physico-mathematical Degree], Ufa, 1986, 197 p. (in Russian).
6. *Trunov, K. V. and Yulmukhametov, R. S.* Quasianalytic Carleman Classes on Bounded Domains, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2009, vol. 20, no. 2, pp. 289–317. DOI: 10.1090/S1061-0022-09-01048-6.
7. *Seneta, E. Regularly Varying Functions*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1976, 113 p.
8. *Evgrafov, M. A. Asymptotic Estimates and Entire Functions*, Abingdon-on-Thames, Gordon and Breach Science Pub, 1962, 192 p.
9. *Braychev, G. G. Vvedenie v teoriyu rosta vypuklykh i tselykh funktsiy* [Introduction in Theory of Convex and Entire Functions], Moscow, Prometey, 2005, 232 p. (in Russian).

Received May 9, 2020

Rashit A. Gaysin
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Scientific Researcher
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 72–84

УДК 517.982.3+517.983.2
DOI 10.46698/o8118-4952-7412-y

АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОБОБЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЮАМЕЛЯ

О. А. Иванова[1], **С. Н. Мелихов**[1,2]
[1] Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@sfedu.ru

Посвящается 90-летию Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости, содержащая начало координат; $H(\Omega)$ — пространство Фреше всех голоморфных в Ω функций. Голоморфная в Ω функция g_0 такая, что $g_0(0) = 1$, задает линейный непрерывный в $H(\Omega)$ оператор Поммье. Он является одномерным возмущением оператора обратного сдвига и совпадает с ним, если g_0 является тождественной единицей. Его коммутант в кольце всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$ изоморфен алгебре, образованной сопряженным $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$ с умножением, определяемым операторами сдвига для оператора Поммье по правилу свертки. Показано, что эта алгебра является унитальной ассоциативной, коммутативной и топологической. Исследуются ее реализации, полученные с помощью преобразований Лапласа и Коши. Основное внимание уделено реализации посредством преобразования Лапласа. Оно приводит к изоморфной алгебре, образованной некоторым пространством P_Ω целых функций экспоненциального типа. Умножение $*$ в ней является обобщенным произведения Дюамеля. Если g_0 является тождественной единицей, то это умножение является обычным произведением Дюамеля. Обобщенное произведение Дюамеля задается операторами свертки, определяемыми посредством исходной функции g_0. В случае преобразования Коши (для функции g_0, равной тождественной единице) реализацией $H(\Omega)'$ является пространство ростков всех функций, голоморфных на дополнении Ω до расширенной комплексной плоскости и равных нулю в бесконечности, с умножением, противоположным обычному произведению функций и независимой переменной. Получено описание всех собственных замкнутых идеалов $(P_\Omega, *)$. Оно основывается на данном ранее авторами описании всех собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$. Множество всех собственных замкнутых идеалов $(P_\Omega, *)$ состоит из двух семейств. Одно содержит конечномерные идеалы, задаваемые подмножествами нулевого многообразия функции g_0. Другое содержит бесконечномерные идеалы, определяемые, в частности, конечным числом точек вне Ω. Ранее аналогичная задача была решена авторами в двойственной ситуации, именно, для алгебры ростков всех функций, голоморфных на выпуклом локально замкнутом множестве в комплексной плоскости. При этом рассматривалась функция g_0, являющаяся произведением многочлена и экспоненты.

Ключевые слова: алгебра аналитических функционалов, произведение Дюамеля, идеал.

Mathematical Subject Classification (2000): 46F15, 46E25, 46H10.

Образец цитирования: *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 72–84. DOI: 10.46698/o8118-4952-7412-y.

Введение

Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией компактной сходимости. Функция $g_0 \in H(\Omega)$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает линейный непрерывный в $H(\Omega)$ оператор $D_{0,g_0}(f) := (f(t) - g_0(t)f(0))/t$. Если $g_0 \equiv 1$, то D_{0,g_0} является оператором обратного сдвига, в общем случае D_{0,g_0} — его одномерное возмущение. В пространстве $H(\Omega)$ он был введен в рассмотрение Ю. С. Линчуком [1], описавшим его коммутант в кольце $\mathscr{L}(H(\Omega))$ всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов. С D_{0,g_0} ассоциируется семейство сдвигов T_z, $z \in \Omega$, с помощью которых (по правилу свертки) в сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$ вводится умножение. Из результатов [1] следует, что представлением $(H(\Omega), \otimes)$ в $\mathscr{L}(H(\Omega))$ (или в $H(\Omega)$) (образом соответствующего гомоморфизма) является $\mathscr{K}(H(\Omega))$ — коммутант D_{0,g_0} в $\mathscr{L}(H(\Omega))$. В статье показано, что $(H(\Omega)', \otimes)$ — унитальная ассоциативная и коммутативная топологическая алгебра. Основное внимание в работе уделено реализации $(H(\Omega)', \otimes)$, изоморфизмом для которой является преобразование Лапласа. Оно отображает $(H(\Omega)', \otimes)$ на некоторое пространство P_Ω целых функций экспоненциального типа, умножением $*$ в котором является обобщенное произведение Дюамеля. В случае $g_0 \equiv 1$ оно совпадает с обычным произведением Дюамеля. Последнее в пространстве $H(G)$ для звездной относительно начала координат области $G \subset \mathbb{C}$ введено и изучено Н. Уигли [2]. Отметим также, что различные банаховы пространства с произведением Дюамеля (алгебры Дюамеля) подробно изучены М. Т. Караевым (см. [3]). Ранее обобщенное произведение Дюамеля рассматривалось в работе [4] (см. также [5, § 4]) для функции g_0, являющейся произведением экспоненты и многочлена. При этом оно задавалось с помощью дифференциальных операторов конечного порядка. В данной статье изучается двойственная ситуация. В рассмотренном новом случае произведение Дюамеля вводится уже посредством операторов свертки в пространстве P_Ω. Операторы свертки в пространстве P_Ω исследованы Д. Диксоном [6] и В. М. Трутневым [7] (в многомерной ситуации). В завершающей части работы описываются все собственные замкнутые идеалы $(P_\Omega, *)$. Соответствующий результат основывается на полученном в [8] описании собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$ и применении принципа двойственности.

В заключение отметим, что одним из главных побудительных мотивов настоящего исследования послужили многочисленные работы Ю. Ф. Коробейника, посвященные различным свойствам операторов сдвига, коммутационным соотношениям, в частности, описанию линейных непрерывных операторов, перестановочных с операторами сдвига влево и вправо или со сводящимися к ним. Результаты в этом направлении для пространств числовых семейств и голоморфных функций, исчерпывающий обзор соответствующих работ, опубликованных к началу 80-х годов прошлого века, содержатся в монографии [9].

1. Умножение в $H(\Omega)'$ и его реализации

1.1. Умножение в пространствах аналитических функционалов. Далее Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат; $H(\Omega)$ — пространство Фреше всех голоморфных в Ω функций. Пусть $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность компактов в Ω такая, что $\Omega_n \subset \operatorname{int}\Omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ ($\operatorname{int}\Omega_{n+1}$ обозначает внутренность Ω_{n+1} в $\mathbb{C}$). Последовательность преднорм $\|f\|_n := \max_{z\in\Omega_n} |f(z)|$, $n \in \mathbb{N}$, задает топологию $H(\Omega)$. Символы $H(\Omega)'$, $\mathscr{L}(H(\Omega))$ обозначают топологическое сопряженное к $H(\Omega)$ и кольцо (алгебра) всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов соответственно. Умножение в $\mathscr{L}(H(\Omega))$ — композиция операторов. Далее под алгеброй понимается комплексное линейное пространство $\mathscr{A}$ с умножением, т. е. билинейным отображением $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A}$ — локально выпуклое пространство, то алгебра $\mathscr{A}$ является топологической, если умножение $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ непрерывно (иногда в определениии топологической алгебры требуется только раздельная непрерывность умножения).

Зафиксируем функцию $g_0\in H(\Omega)$ такую, что $g_0(0)=1$. Оператор обобщенного обратного сдвига (оператор Поммье) определяется следующим образом: для $f\in H(\Omega)$, $t\in\Omega$

$$D_{0,g_0}(f)(t):=\begin{cases}\frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t\neq 0;\\ f'(0)-g_0'(0)f(0), & t=0.\end{cases}$$

Следуя [10–12], введем операторы T_z, $z\in\Omega$: для $f\in H(\Omega)$, $t\in\Omega$

$$T_z(f)(t):=\begin{cases}\frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t\neq z;\\ zg_0(z)f'(z)-zf(z)g_0'(z)+f(z)g_0(z), & t=z.\end{cases}$$

Их называют операторами сдвига для D_{0,g_0}. Согласно [1, 13, 14] $D_{0,g_0}, T_z\in\mathscr{L}(H(\Omega))$, $z\in\Omega$.

Пусть $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — множество всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$, перестановочных с D_{0,g_0} в $H(\Omega)$. Согласно [1, лемма 1] справедлива

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $B\in\mathscr{K}(D_{0,g_0})$.

(ii) *Существует функционал $\varphi\in H(\Omega)'$, для которого $B(f)(z)=\varphi(T_z(f))$, $z\in\Omega$, $f\in H(\Omega)$.*

Заметим, что функционал φ такой, как в (ii), единственен.

Для $\varphi\in H(\Omega)'$ положим $B_\varphi(f)(z)=\varphi(T_z(f))$, $z\in\Omega$, $f\in H(\Omega)$. Отметим, что для любых $z\in\Omega$, $\varphi\in H(\Omega)'$ выполняется коммутационное равенство $B_\varphi T_z=T_zB_\varphi$.

Определим бинарную операцию $\otimes$ в $H(\Omega)'$:

$$(\varphi\otimes\psi)(f):=\varphi_z(\psi(T_z(f)),\quad \varphi,\psi\in H(\Omega)',\ f\in H(\Omega)$$

(нижний индекс у функционала указывает, по какой переменной он действует). Поскольку $\varphi\otimes\psi=\varphi B_\psi$ и $B_\psi\in\mathscr{L}(H(\Omega))$, то $\varphi\otimes\psi\in H(\Omega)'$ для любых $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$. С бинарной операцией $\otimes$ пространство $H(\Omega)'$ является алгеброй. Если $A_\varphi(\psi):=\varphi\otimes\psi$, $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$, то $A_\varphi: H(\Omega)'\to H(\Omega)'$ — оператор, сопряженный к $B_\varphi: H(\Omega)\to H(\Omega)$.

Ниже $H(\Omega\times\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в области $\Omega\times\Omega\subset\mathbb{C}^2$ с топологией компактной сходимости. Для изучения свойств введенной алгебры понадобится следующее простое «фольклерное» утверждение (докажем его без привлечения контурных интегралов). Полагаем $\|\varphi\|_n^*:=\sup_{\|f\|_n\leqslant 1}|\varphi(f)|$, $\varphi\in H(\Omega)'$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Лемма 1. (i) *Для любой функции $F\in H(\Omega\times\Omega)$, любого $\psi\in H(\Omega)'$ функция $\psi_t(F(t,z))$ голоморфна в Ω (по z).*

(ii) *Если $F_n, F\in H(\Omega\times\Omega)$, $n\in\mathbb{N}$, и $F_n\to F$, $n\to\infty$, в $H(\Omega\times\Omega)$, то $\psi_t(F_n(t,\cdot))\to\psi_t(F(t,\cdot))$, $n\to\infty$, в $H(\Omega)$.*

(iii) *Для любых $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$, $F\in H(\Omega\times\Omega)$ выполняется равенство $\varphi_z(\psi_t(F(t,z)))=\psi_t(\varphi_z(F(t,z)))$.*

◁ (i): Используя интегральную формулу Коши, получаем, что

$$\lim_{u\to 0}\sup_{t\in Q}\left|\frac{F(t,z+u)-F(t,z)}{u}-\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right|=0$$

для любого $z\in\Omega$ и любого компакта $Q\subset\Omega$. Отсюда следует, что для $z\in\Omega$ существует предел

$$\lim_{u\to 0}\frac{\psi_t(F(t,z+u))-\psi_t(F(t,z))}{u},$$

равный $\psi_t\left(\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right)$.

(ii): Согласно (i) функции $\psi_t(F_n(t,z))$, $n\in\mathbb{N}$, и $\psi_t(F(t,z))$ голоморфны в Ω по z. Поскольку $\psi\in H(\Omega)'$, то найдется $k\in\mathbb{N}$ такое, что $\|\psi\|_k^*<+\infty$. При этом $|\psi(f)|\leqslant\|\psi\|_k^*\|f\|_k$ для любой функции $f\in H(\Omega)$. Поэтому для произвольного компакта $G\subset\Omega$, любого $n\in\mathbb{N}$

$$\max_{z\in G}|\psi_t(F_n(t,z))-\psi_t(F(t,z))|\leqslant\|\psi\|_k^*\max_{(t,z)\in\Omega_k\times G}|F_n(t,z)-F(t,z)|.$$

Значит, $\psi_t(F_n(t,\cdot))\to\psi_t(F(t,\cdot))$ в $H(\Omega)$.

(iii): Зафиксируем $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$. Вследствие (ii) линейные функционалы $F\mapsto\varphi_z(\psi_t(F(t,z)))$ и $F\mapsto\psi_t(\varphi_z(F(t,z)))$ непрерывны на $H(\Omega\times\Omega)$. Поскольку $\Omega\times\Omega$ — область Рунге, то множество многочленов двух комплексных переменных плотно в $H(\Omega\times\Omega)$. Поэтому равенство этих функционалов достаточно проверить на мономах. Действительно, $\varphi_z(\psi_t(t^kz^m))=\varphi_z(z^m)\psi_t(t^k)=\psi_t(\varphi_z(t^kz^m))$ для любых $k,m\in\mathbb{N}_0$. ▷

Для $n\in\mathbb{N}$ введем пространство $H_n':=\{\varphi\in H(\Omega)':\ \|\varphi\|_n^*:=\sup_{\|f\|_n\leqslant 1}|\varphi(f)|<+\infty\}$. Оно банахово с нормой $\|\cdot\|_n^*$. Кроме того, выполняется равенство $H(\Omega)'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n'$.

Приведем результат об оценке $\|B_\psi(f)\|_k$. Ее доказательство стандартно: оно использует то, что для $f\in H(\Omega)$ функция $\frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}$ голоморфна в $\Omega\times\Omega$ (по (t,z)), и принцип максимума модуля голоморфной функции.

Лемма 2. *Для любого $k\in\mathbb{N}$ существуют $m\geqslant k$ и постоянная C_k такие, что $\|B_\psi(f)\|_k\leqslant C_k\|\psi\|_k^*\|f\|_m$ для любых $\psi\in H_k'$ и $f\in H(\Omega)$.*

Далее $\mathbb{C}[D_{0,g_0}]$ — множество всех многочленов от D_{0,g_0}, т. е. операторов вида $\sum_{j=0}^n c_jD_{0,g_0}^j$ $(c_j\in\mathbb{C})$.

Предложение 1. (i) *Отображение $\varrho:(H(\Omega)',\otimes)\to\mathscr{K}(D_{0,g_0})$, $\varrho(\varphi):=B_\varphi$, — изоморфизм алгебр.*

(ii) *Алгебра $(H(\Omega)',\otimes)$ является унитальной ассоциативной и коммутативной.*

(iii) *$(H(\Omega)',\otimes)$ — топологическая алгебра, если $H(\Omega)'$ наделить сильной топологией $\beta(H(\Omega)',H(\Omega))$.*

(iv) *$\mathbb{C}[D_{0,g_0}]$ плотно в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$, наделенном топологией поточечной сходимости.*

◁ (i): По теореме 1 отображение $\varrho:H(\Omega)'\to\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ биективно. Для любых $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$, $z\in\Omega$, учитывая перестановочность B_ψ и T_z, получим:

$$\begin{aligned}\varrho(\varphi\otimes\psi)(f)(z)&=B_{\varphi\otimes\psi}(f)(z)=(\varphi\otimes\psi)(T_z(f))\\&=\varphi_u(\psi(T_u(T_z(f))))=\varphi(T_z(B_\psi(f)))=B_\varphi B_\psi(f)(z).\end{aligned}$$

Значит, $\varrho(\varphi\otimes\psi)=\varrho(\varphi)\varrho(\psi)$.

(ii): Ассоциативность умножения $\otimes$ вытекает из (i) и ассоциативности композиции операторов. Поскольку для любой функции $f\in H(\Omega)$ функция $T_z(f)(t)$ голоморфна в $\Omega\times\Omega$ по (t,z), коммутативность $\otimes$ следует из леммы 1 (iii).

Единицей в $(H(\Omega)',\otimes)$ является функционал $f\mapsto f(0)$.

(iii): Нужно доказать, что отображение $\Delta : H(\Omega)' \times H(\Omega)' \to H(\Omega)'$, $\Delta(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$, непрерывно. Так как пространство Фреше $H(\Omega)$ рефлексивно, то $(H(\Omega)', \beta(H(\Omega)', H(\Omega))) = \mathrm{ind}_{n\to} H_n'$, где индуктивный предел берется относительно вложений H_n' в $H(\Omega)'$ [15, предложение 8.4.18]. Отсюда следует, что $H(\Omega)' \times H(\Omega)' = \mathrm{ind}_{n\to}(H_n' \times H_n')$ (индуктивный предел берется относительно вложений $H_n' \times H_n'$ в $H(\Omega)' \times H(\Omega)'$). Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и выберем $m \in \mathbb{N}$ и C_k по лемме 2. Тогда для любых $\varphi, \psi \in H_k'$

$$\|\varphi \otimes \psi\|_m^* = \sup_{\|f\|_m \leqslant 1} |\varphi(B_\psi(f))| \leqslant \sup_{\|f\|_m \leqslant 1} (\|\varphi\|_k^* \|B_\psi(f)\|_k) \leqslant C_k \|\varphi\|_k^* \|\psi\|_k^*.$$

Отсюда следует, что Δ непрерывно из $H_k' \times H_k'$ в H_m'. Значит, $\Delta : H(\Omega)' \times H(\Omega)' \to H(\Omega)'$ непрерывно.

(iv): Через $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ обозначим пространство $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной (простой) сходимости, если в $H(\Omega)$ введена слабая топология $\sigma(H(\Omega), H(\Omega)')$ (см. [16, гл. III, § 3, пример 4 (a)]. Непосредственная проверка показывает, что отображение $\varrho : (H(\Omega)', \sigma(H(\Omega)', H(\Omega))) \to \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ — топологический изоморфизм (см., например, [17, теорема 1]). Согласно [1] последовательность функционалов $\varphi_n \in H(\Omega)'$, $n \in \mathbb{N}_0$, такая, что $D_{0,g_0}^n = B_{\varphi_n}$, имеет следующий вид:

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} f^{(k)}(0), \quad c_{k,n} \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1,\ \varphi_0(f) = f(0),\ f \in H(\Omega).$$

Значит, последовательность $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ полна в $(H(\Omega)', \sigma(H(\Omega)', H(\Omega)))$. Следовательно, последовательность $D_{0,g_0}^n = \varrho(\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, полна в $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$. Поскольку $H(\Omega)$ бочечно, то $\left(D_{0,g_0}^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ полна и в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной сходимости для $H(\Omega)$, наделенного своей естественной топологией пространства Фреше. $\rhd$

Выясним, как реализуется операция $\otimes$ посредством преобразований Лапласа и Коши.

1.2. Случай преобразования Лапласа. Обобщенное произведение Дюамеля. Далее понадобится преобразование Лапласа как функционалов из $H(\Omega)'$, так и из $H(\Omega \times \Omega)'$. Поэтому приведем соответствующие определения для областей из $\mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Для $\nu \in \mathbb{C}^N$ положим $e_\nu(t) := e^{\langle \nu, t\rangle}$, $t \in \mathbb{C}^N$. При этом $\langle \nu, t\rangle := \sum_{j=1}^N \nu_j t_j$. Пусть Q — область Рунге в $\mathbb{C}^N$; $H(Q)$ — пространство всех голоморфных в Q функций с топологией компактной сходимости. Преобразование Лапласа

$$\mathscr{F} : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}(\nu) := \varphi(e_\nu), \quad \nu \in \mathbb{C}^N,\ \varphi \in H(Q)',$$

биективно отображает топологическое сопряженное $H(Q)'$ к $H(Q)$ на некоторое пространство P_Q целых в $\mathbb{C}^N$ функций экспоненциального типа (см. [18, § 2], [6, § 2], [7, § 1]). Билинейная форма

$$\langle h, f\rangle := \mathscr{F}^{-1}(f)(h), \quad h \in H(Q),\ f \in P_Q,$$

задает двойственность между $H(Q)$ и P_Q. В P_Q вводится локально выпуклая топология, для которой $\mathscr{F} : H(Q)' \to P_Q$ — топологический изоморфизм, если $H(Q)'$ наделить сильной топологией $\beta(H(Q)', H(Q))$. Положим $e_{\nu,\alpha}(t) := t^\alpha e^{\langle \nu, t\rangle}$, $\nu, t \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in N_0^N$ (в этих обозначениях $e_\nu = e_{\nu,0}$). Здесь $t^\alpha := t_1^{\alpha_1} \dots t_N^{\alpha_N}$. Пусть $\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_N^{\alpha_N}}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in P_Q$, где $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$. Выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle e_{\nu,\alpha}, f\rangle &= \partial^\alpha f(\nu), \quad \nu \in \mathbb{C}^N,\ f \in P_Q, \\ \langle h, e_{z,\alpha}\rangle &= \partial^\alpha h(z), \quad z \in Q,\ h \in H(Q),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N \end{aligned} \tag{1}$$

(см. [7, § 1], [19, § 3]).

Приведем определение оператора свертки в P_Q [6, § 2], [7, § 1]. Пусть $H(Q)''$ — второе сопряженное к $H(Q)$; $\mathscr{F}' : P'_Q \to H(Q)''$ — сопряженное отображение к $\mathscr{F} : H(Q)' \to P_Q$; θ — канонический изоморфизм $H(Q)$ на $H(Q)''$. Тогда $\chi = \theta^{-1}\mathscr{F}'$ — алгебраический изоморфизм P'_Q на $H(Q)$. Для функции $a \in H(Q)$ оператор свертки $a(D)$, линейно и непрерывно действующий в P_Q, задается равенством $a(D)(f)(z) = \chi^{-1}(a)(f(\cdot + z))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in P_Q$. Отметим, что $a(D)$ — сопряженный (относительно дуальной пары $(H(Q), P_Q)$) к линейному непрерывному в $H(Q)$ оператору $w \mapsto aw$ умножения на a, т. е.

$$\langle aw, f\rangle = \langle w, a(D)(f)\rangle, \quad w \in H(Q),\ f \in P_Q.$$

Далее по-прежнему Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало. Наша цель в этом пункте — получить аналитическое выражение для бинарной операции $*$ в P_Ω такой, что $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$.

Для функции $F \in H(\Omega\times\Omega)$, для $z \in \Omega$ символом $F(D_1, z)$ обозначим оператор свертки в P_Ω, заданный функцией $F(\cdot, z)$. Для $f, h \in P_\Omega$ определим функцию двух переменных $(f \odot h)(t, z) := f(t)h(z)$, $t, z \in \mathbb{C}$. Покажем, что $f \odot h \in P_{\Omega\times\Omega}$. Действительно, пусть $f = \widehat{\varphi}$, $h = \widehat{\psi}$, где $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, и $\alpha(F) := \varphi_t(\psi_z(F(t, z)))$ для $F \in H(\Omega\times\Omega)$. Тогда $\alpha \in H(\Omega\times\Omega)'$ по лемме 1 и $\widehat{\alpha} = f \odot h$. Значит, $f \odot h \in P_{\Omega\times\Omega}$.

Из (1) вытекает следующее. Для многочлена $a(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$, $z \in \mathbb{C}$, оператор свертки $a(D)$ в P_Ω является обычным дифференциальным оператором: $a(D)(f) = \sum_{j=0}^{k} a_j f^{(j)}$, $f \in P_\Omega$. Для многочлена $F(t, z) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{j,k} t^j z^k$, $t, z \in \mathbb{C}$, для $f, h \in P_\Omega$ справедливо равенство $F(D)(f \odot h)(t, z) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{j,k} f^{(j)}(t) h^{(k)}(z)$, $t, z \in \mathbb{C}$.

Лемма 3. *Пусть $F \in H(\Omega \times \Omega)$.*

(i) *Для любых $f \in H(\Omega)$, $\lambda \in \Omega$ функция $F(D_1, z)(f)(\lambda)$ голоморфна в Ω по z.*

(ii) *Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varphi \in H(\Omega)'$, $f \in P_\Omega$ выполняется равенство*

$$\varphi_z\left(e^{\lambda z} F(D_1, z)(f)(\mu)\right) = F(D)(f \odot \widehat{\varphi})(\mu, \lambda).$$

$\lhd$ (i): Поскольку для $z \in \Omega$

$$F(D_1, z)(f)(\lambda) = \langle e_\lambda, F(D_1, z)(f)\rangle = \langle e_\lambda F(\cdot, z), f\rangle = \mathscr{F}^{-1}(f)(e_\lambda F(\cdot, z)),$$

то функция $F(D_1, z)(f)(\lambda)$ голоморфна в Ω по z по лемме 1.

(ii): Если F — многочлен, то, используя (1), получим, что равенство в (ii) выполняется. Пусть F не является многочленом. Так как $\Omega \times \Omega$ — область Рунге, то существует последовательность многочленов $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к F в $H(\Omega\times\Omega)$. Переходя в равенстве $\varphi_z\left(e^{\lambda z} F_n(D_1, z)(f)(\mu)\right) = F_n(D)(f \odot \widehat{\varphi})(\mu, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, к пределу при $n \to \infty$, учитывая лемму 1 (ii), получим доказываемое равенство. $\rhd$

Введем функцию $G_0(t, z) := \frac{g_0(t) - g_0(z)}{t - z}$, голоморфную в $\Omega \times \Omega$. Если $g_0 \equiv 1$, то $G_0 \equiv 0$. Положим для $z \in \Omega$

$$\widetilde{T}_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)g_0(z) - f(z)g_0(t)}{t - z}, & t \neq z; \\ f'(z)g_0(z) - f(z)g_0'(z), & t = z. \end{cases}$$

Для любого $z \in \Omega$ оператор $\widetilde{T}_z$ линеен и непрерывен в $H(\Omega)$. При этом $T_z = \widetilde{T}_z \mathscr{M}$, $z \in \Omega$, где $\mathscr{M}$ — оператор умножения на независимую переменную. Если $g_0 \equiv 1$, то оператор $\widetilde{T}_z$ обозначим символом S_z. Следующая лемма, по сути, доказывается так же, как и леммы 10 и 11 в [4] (соответствующие равенства проверяются на экспонентах).

Лемма 4. (i) *Для любого $z \in \Omega$ сопряженным к S_z оператором $S'_z : P_\Omega \to P_\Omega$ является*

$$S'_z(f)(t) = \int_0^t e^{z\xi} f(t-\xi)d\xi, \quad t \in \mathbb{C},\ f \in P_\Omega$$

(*интегрирование ведется по отрезку* $[0,t]$).

(ii) *Для любого $z \in \Omega$ сопряженным к $\widetilde{T}_z$ оператором $\widetilde{T}'_z : P_\Omega \to P_\Omega$ является*

$$\widetilde{T}'_z(f)(t) = g_0(z)\int_0^t e^{z\xi} f(t-\xi)d\xi - e^{zt}G_0(D_1,z)(f)(0), \quad f \in P_\Omega.$$

Далее $\mathscr{M}' : P_\Omega \to P_\Omega$ — сопряженный к оператору $\mathscr{M} : H(\Omega) \to H(\Omega)$; $\mathscr{M}'$ совпадает с оператором дифференцирования (см. [14, лемма 21 (ii)]). Для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$\widehat{\varphi \otimes \psi}(t) = (\varphi \otimes \psi)(e_t) = \varphi_z\big(\psi(T_z(e_t))\big) = \varphi_z\big(\psi(\widetilde{T}_z(\mathscr{M}(e_t)))\big) = \varphi_z\big(\mathscr{M}'\widetilde{T}'_z(\widehat{\psi})(t)\big). \tag{2}$$

По лемме 4

$$\begin{aligned}\mathscr{M}'(\widetilde{T}'_z(\widehat{\psi}))(t) &= \frac{d}{dt}\left(g_0(z)\int_0^t e^{z\xi}\widehat{\psi}(t-\xi)d\xi - e^{zt}G_0(D_1,z)(\widehat{\psi})(0)\right)(t)\\ &= g_0(z)\left(\widehat{\psi}(0)e^{zt} + \int_0^t e^{z\xi}(\widehat{\psi})'(t-\xi)d\xi\right) - ze^{zt}G_0(D_1,z)(\widehat{\psi})(0).\end{aligned} \tag{3}$$

Положим $\widetilde{G}_0(t,z) := zG_0(t,z)$. Учитывая (2), (3) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi \otimes \psi}(t) &= \widehat{\psi}(0)g_0(D)(\widehat{\varphi})(t) + \int_0^t g_0(D)(\widehat{\varphi})(\xi)(\widehat{\psi})'(t-\xi)\,d\xi - \varphi_z\Big(e^{zt}\widetilde{G}_0(D_1,z)(\widehat{\psi})(0)\Big)\\ &= \widehat{\psi}(0)g_0(D)(\widehat{\varphi})(t) + \int_0^t g_0(D)(\widehat{\varphi})(\xi)(\widehat{\psi})'(t-\xi)\,d\xi - \widetilde{G}_0(D)(\widehat{\psi}\odot\widehat{\varphi})(0,t), \quad t \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Отметим, что вносить функционал φ под знак интеграла можно в силу леммы 1 (iii).

Итак, реализацией $\otimes$ в P_Ω является следующее обобщенное произведение Дюамеля:

$$(f*h)(t) = h(0)g_0(D)(f)(t) + \int_0^t g_0(D)(f)(\xi)h'(t-\xi)d\xi - \widetilde{G}_0(D)(h\odot f)(0,t), \quad t \in \mathbb{C},\ f,h \in P_\Omega.$$

Если $g_0 \equiv 1$, то $f*h$ — обычное произведение Дюамеля:

$$(f*h)(t) = h(0)f(t) + \int_0^t f(\xi)h'(t-\xi)d\xi, \quad t \in \mathbb{C},\ f,h \in P_\Omega.$$

1.3. Случай преобразования Коши. Пусть $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$ — пространство ростков всех голоморфных в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ функций, равных 0 в ∞. Как обычно, $\overline{\mathbb{C}}$ обозначает расширенную комплексную плоскость. Возьмем $\varphi \in H(\Omega)'$. Функционал φ можно продолжить до линейного непрерывного функционала на банаховом пространстве $C(K)$ непрерывных функций на некотором компакте K в Ω. Преобразование Коши функционала $\varphi \in H(\Omega)'$ определяется равенством

$$\mathscr{C} : H(\Omega)' \to H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega), \quad \varphi \mapsto \varphi_t\left(\frac{1}{t-\lambda}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash K; \quad \mathscr{C}(\varphi)(\infty) := 0.$$

Преобразование $\mathscr{C}$ биективно отображает $H(\Omega)'$ на $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$ [20] (см. также [21, § 2]). В случае $g_0 \equiv 1$ изоморфизм $\mathscr{C}$ приводит к удобной реализации $(H(\Omega)', \otimes)$. Определим бинарную операцию в $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$. Возьмем $u, v \in H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$. Найдется компакт K в Ω, вне которого u и v голоморфны. Положим

$$(u \diamond v)(\lambda) := -\lambda u(\lambda)v(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash K; \quad (u \diamond v)(\infty) := 0.$$

Пространство $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$ является алгеброй с операцией $\diamond$.

Предложение 2. *Пусть* $g_0 \equiv 1$. *Отображение* $\mathscr{C}$ *— изоморфизм алгебр* $(H(\Omega)', \otimes)$ *и* $(H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega), \diamond)$.

$\lhd$ Возьмем $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. Существует компакт K в Ω такой, что φ, ψ, $\varphi\otimes\psi$ линейно и непрерывно продолжаются на $C(K)$, а значит, $\mathscr{C}(\varphi)$, $\mathscr{C}(\psi)$, $\mathscr{C}(\varphi\otimes\psi)$ голоморфны вне K. Для $z, t \in K$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash K$

$$T_z\left(\frac{1}{\cdot-\lambda}\right)(t) = \frac{\frac{t}{t-\lambda} - \frac{z}{z-\lambda}}{t-z} = -\lambda\frac{1}{(t-\lambda)(z-\lambda)}.$$

Поэтому для $\lambda \in \mathbb{C}\backslash K$

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\varphi\otimes\psi)(\lambda) = (\varphi\otimes\psi)\left(\frac{1}{\cdot-\lambda}\right) &= -\lambda\varphi_z\left(\psi_t\left(\frac{1}{(t-\lambda)(z-\lambda)}\right)\right)\\ &= -\lambda\mathscr{C}(\varphi)(\lambda)\mathscr{C}(\psi)(\lambda) = \mathscr{C}(\varphi)(\lambda)\diamond\mathscr{C}(\psi)(\lambda). \quad \rhd\end{aligned}$$

2. Идеалы $(P_\Omega, *)$

Далее существенно будет использоваться описание собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$, полученное в работе [8]. Приведем нужные обозначения и определения.

Для $h \in H(\Omega)$, $U \subset H(\Omega)$ полагаем $hU := \{hf : f \in U\}$. Пусть $\mathbb{C}[z]_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, — множество всех многочленов над $\mathbb{C}$ степени не выше n. *Кратным многообразием* в Ω называется конечная или бесконечная последовательность W пар (λ_k, m_k), где $\{\lambda_k\}$ — дискретное подмножество Ω и $m_k \in \mathbb{N}$ для любого k. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω введем множество

$$S(W) := \big\{f \in H(\Omega) : f^{(j)}(\lambda_k) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m_k - 1 \ (\forall\, k)\big\};$$

$S(W)$ — собственное замкнутое подпространство $H(\Omega)$.

Введем дроби $q_{\lambda,k}(t) := \frac{1}{(t-\lambda)^k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и Υ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, т. е. $\Upsilon = \big\{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\big\}$, где $n_\lambda \in \mathbb{N}$, Λ — конечное подмножество $\mathbb{C}\backslash\Omega$, то положим

$$\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \operatorname{span}\big\{q_{\lambda,k} : \lambda \in \Lambda, \ 1 \leqslant k \leqslant n_\lambda\big\}.$$

При этом $\operatorname{span} U$ обозначает линейную оболочку подмножества U линейного пространства. Если Υ пусто, то полагаем $\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \{0\}$. Ниже символ $\mathscr{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов p таких, что $p(0) = 1$, функция g_0/p голоморфна в Ω и p не имеет корней в $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Если $g_0 \equiv 1$, то $\mathscr{D}(g_0) = \{g_0\}$.

Пусть $W(g_0)$ — нулевое многообразие g_0, т. е. множество всех пар $(\mu, n(\mu))$, $\mu \in Z(g_0)$, где $Z(g_0)$ — множество всех нулей g_0 в Ω, а $n(\mu)$ — кратность нуля $\mu \in Z(g_0)$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω будем писать $W \prec W(g_0)$, если $\{\lambda_k\} \subset Z(g_0)$ и $m_k \leqslant n(\lambda_k)$ для любого k.

Теорема 2 [8]**.** (i) *Для любого непустого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в Ω множество $S(W)$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.*

(ii) *Для любого многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$, любого $n \in \mathbb{N}_0$ такого, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, или $n = -\infty$, конечного или пустого кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ множество $\frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$ является замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.*

При этом оно собственное тогда и только тогда, когда $n \neq -\infty$ или Υ непусто.

(iii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства S пространства $H(\Omega)$ имеет место одна из следующих ситуаций:*

(a) *существует непустое кратное многообразие W в Ω такое, что $W \prec W(g_0)$ и $S = S(W)$;*

(b) *найдутся многочлен $p \in \mathscr{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, для которых $n \geqslant \deg(p) - 1$ и $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n$;*

(c) *найдется конечное многообразие Υ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, для которого $S = g_0\mathbb{C}^-_{\Upsilon(S)}(z)$;*

(d) *существуют многочлен $p \in \mathscr{D}(g_0)$, целое неотрицательное n, для которых $n \geqslant \deg(p) - 1$, и конечное многообразие Υ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ такие, что $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$.*

Используя двойственность между $H(\Omega)$ и P_Ω, предыдущую теорему стандартным образом можно применить к описанию собственных замкнутых идеалов в алгебре P_Ω с умножением $*$. Пусть S^0 обозначает поляру множества $S \subset H(\Omega)$ в P_Ω относительно дуальной пары $(H(\Omega), P_\Omega)$. Будем использовать следующий принцип двойственности:

Предложение 3. *Собственное замкнутое подпространство S пространства $H(\Omega)$ является D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$ тогда и только тогда, когда S^0 является собственным замкнутым идеалом $(P_\Omega, *)$.*

Его доказательство проводится с использованием предложения 1 (iv) и равенства $B'_\varphi = A_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$.

Пусть $\mathscr{S}$, $\mathscr{I}$ — семейства всех собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$, соответственно, идеалов $(P_\Omega, *)$. Из принципа двойственности следует, что отображение $J : \mathscr{S} \to \mathscr{I}$, $S \mapsto S^0$, биективно.

Определим три вида подпространств P_Ω. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω полагаем

$$I(W) := \operatorname{span}\left(\bigcup_k e_{\lambda_k}\mathbb{C}[z]_{m_k-1}\right).$$

(Пространство $I(W)$ замкнуто в P_Ω. В терминологии статьи [6] оно является прямой суммой подпространств $e_{\lambda_k}\mathbb{C}[z]_{m_k-1}$.) Для $n \in \mathbb{N}_0$, многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$

$$I_{n,p} := \left\{ f \in P_\Omega :\ \left(\frac{g_0}{p}(D)(f)\right)^{(m)}(0) = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n \right\}.$$

Если $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, то

$$I_\Upsilon := \left\{ f \in P_\Omega : \left(\mathscr{C}\mathscr{F}^{-1}(g_0(D)(f))\right)^{(j)}(\lambda) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n_\lambda - 1,\ \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Отметим, что $(\mathscr{C}\mathscr{F}^{-1})(f)$ для $f \in P_\Omega$ — это голоморфное продолжение в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ преобразования Бореля функции $f \in P_\Omega$. В случае, когда область Ω выпуклая, имеются удобные формулы для нахождения этого преобразования (см., например, [22, гл. 1, § 1, п. 5]). Выполняются равенства

$$\langle e_{\lambda,k}, f\rangle = \frac{1}{(k-1)!}(\mathscr{C}\mathscr{F}^{-1}(f))^{(k-1)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega,\ k \in \mathbb{N},\ f \in P_\Omega. \tag{4}$$

Теорема 3. (i) *Для любого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в Ω, любых многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$ и целого $n \geqslant 0$ такого, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, всякого конечного кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ множества $I(W)$, $I_{n,p}$, I_Υ, $I_{n,p} \cap I_\Upsilon$ являются собственными замкнутыми идеалами $(P_\Omega, *)$.*

(ii) *Любой собственный замкнутый идеал алгебры $(P_\Omega, *)$ совпадает с одним из множеств $I(W)$, $I_{n,p}$, I_Υ, $I_{n,p} \cap I_\Upsilon$, где $W \prec W(g_0)$, $n \geqslant \max\{0, \deg(p) - 1\}$.*

Теорема 3 — непосредственное следствие теоремы 2 с учетом предложения 3. При этом при описании поляр D_{0,g_0}-инвариантных подпространств нужно учитывать соотношения, связанные с рассматриваемой двойственностью, в частности, равенства (1) и (4), и описание $S(W)^0$ из [6, теоремы 7, 8]:

$$S(W)^0 = I(W), \quad \left(\frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n\right)^0 = I_{n,p}, \quad \left(g_0\mathbb{C}_\Upsilon^-(z)\right)^0 = I_\Upsilon.$$

Литература

1. *Linchuk Yu. S.* Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable // Methods of Functional Analysis and Topology.—2006.—Vol. 12, № 4.—P. 384–388.
2. *Wigley N.* The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J.—1974.—Vol. 41.—P. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
3. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, вып. 1.—С. 3–12. DOI: 10.4213/faa3481.
4. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНИТИ РАН, 2017.—Т. 142.—С. 111–120.
5. *Мелихов С. Н.* Коэффициенты рядов экспонент для аналитических функций и оператор Поммье // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНИТИ РАН, 2019.—Т. 161.—С. 65–103.
6. *Dickson D. G.* Convolution equations and harmonic analysis in spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—Vol. 184.—P. 373–385. DOI: 10.1090/S0002-9947-1973-0374449-8.
7. *Трутнев В. М.* Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНИТИ РАН, 2006.—Т. 108.—С. 158–180.
8. *Ivanova O. A., Melikhov S. N., Melikhov Yu. N.* Invariant subspaces of a generalized backward shift operator and rational functions.—arXiv: 2005.01596v1 [math.FA]; http://arxiv.org/pdf/2005.01596.pdf.
9. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—155 с.
10. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 25, вып. 2.—С. 271–282.
11. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr.—1992.—Vol. 157.—P. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.

12. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Science.—2005.—№ 8.—P. 1239–1251. DOI: 10.1155/IJMMS.2005.1239.
13. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева // Уфимск. матем. журн.—2014.—Т. 6, № 3.—С. 17–27.
14. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
15. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
16. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
17. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 34–40. DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5989.
18. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 4.—С. 459–489.
19. *Шишкин А. Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. научн. сем. ПОМИ.—2016.—Т. 447.—С. 129–170.
20. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math.—1953.—Vol. 191, № 1–2.—P. 30–49. DOI: 10.1515/crll.1953.191.30.
21. *Хавин В. П.* Пространства аналитических функций // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал., 1964.—М.: ВИНИТИ, 1966.—С. 76–164.
22. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.

Статья поступила 17 мая 2020 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 72–84

ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONALS AND THE GENERALIZED DUHAMEL PRODUCT

Ivanova, O. A.[1] and Melikhov, S. N.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@sfedu.ru

Abstract. Let Ω be a simply connected domain in the complex plane containing the origin; $H(\Omega)$ be the Fréchet space of all holomorphic functions on Ω. A holomorphic on Ω function g_0, such that $g_0(0) = 1$, defines a continuous linear Pommiez operator in $H(\Omega)$. It is a one-dimensional perturbation of the backward shift operator and coincides with it if g_0 is the constant function one. Its commutant in the ring of all continuous linear operators in $H(\Omega)$ is isomorphic to the algebra formed by the dual $H(\Omega)'$ of $H(\Omega)$ with the multiplication $\otimes$ defined by the shift operators for the Pommiez operator according to the convolution rule. It is shown that this algebra is unital associative, commutative and topological. Its representations are obtained with the help of Laplace and Cauchy transformations. The focus in the article is the research of the representations with the help of the Laplace transformation. It leads to an isomorphic algebra, formed by some space P_Ω of entire functions of exponential type. The multiplication $*$ in it is the generalized Duhamel product. If g_0 is the identity unit, then this multiplication is the usual Duhamel product. The generalized Duhamel product is given by convolution operators, defined by the function g_0. In the case of the Cauchy transformation (for the function g_0 equal to the constant function one) the realization of $(H(\Omega)', \otimes)$ is the space of germs all holomorphic functions on the complement Ω in the extended complex plane, which are equal to zero at infinity, with multiplication, inverse to the usual product of functions and the independent variable. A description of all proper closed ideals $(P_\Omega, *)$ is obtained. It is based on the description of all proper closed D_{0,g_0}-invariant subspaces of $H(\Omega)$, obtained earlier by the authors. The set of all proper closed ideals $(P_\Omega, *)$ consists of two families. The one contains finite-dimensional ideals defined by subsets of the zero manifold of the function g_0. The other contains infinite ideals, defined, in particular, by a finite number of points outside of Ω. A similar problem was solved earlier by the authors in the dual situation, namely, for the algebra of germs of all functions, holomorphic on a convex locally closed set in the complex plane. In this case, the function g_0 was considered, which is the product of a polynomial and an exponential function.

Key words: algebra of analytic functionals, Duhamel product, ideal.

Mathematical Subject Classification (2010): 46F15, 46E25, 46H10.

For citation: *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* Algebras of Analytic Functionals and the Generalized Duhamel Product, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 72–84 (in Russian). DOI: 10.46698/o8118-4952-7412-y.

References

1. *Linchuk, Yu. S.* Cyclical Elements of Operators which are Left-Inverses to Multiplication by an Independent Variable, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 384–388.
2. *Wigley, N.* The Duhamel Product of Analytic Functions, *Duke Mathematical Journal*, 1974, vol. 41, pp. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
3. *Karaev, M. T.* Duhamel Algebras and Applications, *Functional Analysis and Its Applications*, 2018, vol. 52, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1007/s10688-018-0201-z.
4. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On Invariant Subspaces of the Pommiez Operator in the Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, pp. 760–769. DOI: 10.1007/s10958-019-04461-0.
5. *Melikhov, S. N.* Coefficients of Exponential Series for Analytic Functions and the Pommiez Operator, *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovrem. mat. i eyo pril. Temat. obzory* [Results of Science and Technology. Series Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Reviews], 2019, vol. 161, pp. 65–103 (in Russian).
6. *Dickson, D. G.* Convolution Equations and Harmonic Analysis in Spaces of Entire Functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1973, vol. 184, pp. 373–385. DOI: 10.1090/S0002-9947-1973-0374449-8.
7. *Trutnev, V. M.* Convolution Equations in Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 120, no. 6, pp. 1901–1915. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000020709.31698.80.
8. *Ivanova. O. A., Melikhov. S. N. and Melikhov, Yu. N. Invariant Subspaces of a Generalized Backward Shift Operator and Rational Functions*, arXiv: 2005.01596v1 [math.FA]; http://arxiv.org/pdf/2005.01596.pdf.
9. *Korobeinik, Yu. F. Operatory sdviga na chislovykh semeistvakh* [Shift Operators on the Number Families], Rostov-on-Don, RSU, 1983, 155 p. (in Russian).
10. *Tkachenko, V. A.* Operators that Commute with Generalized Integration in Spaces of Analytic Functionals, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 25, no. 2, pp. 141–146.
11. *Binderman, Z.* Functional Shifts Induced by Right Invertible Operators, *Mathematische Nachrichten*, 1992, vol. 157, pp. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.
12. *Dimovski, I. N. and Hristov, V. Z.* Commutants of the Pommiez Operator, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005, no. 8, pp. 1239–1251. DOI: 10.1155/IJMMS.2005.1239.

13. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On A. F. Leont'ev's Interpolating Function, *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 17–27. DOI:10.13108/2014-6-3-17.
14. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On Operators Commuting with a Pommiez type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 2, pp. 209–224. DOI: 10.1090/spmj/1447.
15. *Edvards, R. E. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965, 791 p.
16. *Schaefer, H. Topological Vector Spaces, Grad. Texts. in Math.*, vol. 3, New York, Springer-Verlag, 1971. 296 p.
17. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On an Algebra of Analytic Functionals Connected with a Pommiez Operator, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 34–40 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5989.
18. *Krasichkov-Ternovskii, I. F.* Invariant Subspaces of Analytic Functions. I. Spectral Analysis on Convex Regions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500. DOI: 10.1070/SM1972v016n04ABEH001436.
19. *Shishkin, A. B.* Exponential Synthesis in the Kernel of a Symmetric Convolution, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 229, no. 5, pp. 572–599. DOI: 10.1007/s10958-018-3700-9.
20. *Köthe, G.* Dualität in der Funktionentheorie, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 1953, vol. 191, no. 1–2, pp. 30–49. DOI: 10.1515/crll.1953.191.30.
21. *Havin, V. P.* Spaces of Analytic Functions, *Itogi nauki. Ser. Matematika. Mat. analiz* [The Results of Science. Series Mathematics. Math. Analysis], 1964, Moscow, VINITI, 1966, pp. 76–164 (in Russian).
22. *Leontiev, A. F. Ryady exponent* [Series of Exponentials], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).

Received May 17, 2020

Olga A. Ivanova
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Associate Professor of Mathematical Analysis and Geometry
E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`

Sergey N. Melikhov
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Discrete Mathematics;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: `snmelihov@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 85–99

УДК 517.53
DOI 10.46698/q8093-7554-9905-q

БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ В РАДИАЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[#]

К. П. Исаев[1], Р. С. Юлмухаметов[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112

E-mail: orbit81@list.ru, yulmukhametov@mail.ru

Посвящается 90-летию Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Рассматривается гильбертово пространство целых функций H, удовлетворяющее условиям: 1) пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$; 2) пространство H устойчиво относительно деления, т. е. если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z-z_0)^{-1} \in H$; 3) пространство H радиальное, т. е. если $F \in H$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, то функция $F(ze^{i\varphi})$ лежит в H, причем $\|F(ze^{i\varphi})\| = \|F\|$; 4) полиномы полны в H и $\|z^n\| \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где последовательность $u(n)$ удовлетворяет условию $u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \succ n^{\delta}$, $n \in \mathbb{N}$, для некоторого $\delta > 0$. Из условия 1) следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H. Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом, если найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

В статье излагается метод конструирования безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в таких пространствах. Эта задача восходит к двум тесно связанным между собой классическим задачам: представление функций посредством рядов экспонент и интерполяция целыми функциями.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, безусловные базисы, воспроизводящие ядра.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E22, 30D10.

Образец цитирования: *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 85–99. DOI: 10.46698/q8093-7554-9905-q.

Введение

Пусть H — гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.

[#] Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421; работа второго автора выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований, проект № 18-01-00095 А.

2. Пространство H устойчиво относительно деления, т. е. если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$. Из этого условия следует, в частности, что точечные функционалы отличны от нуля.

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется *воспроизводящим ядром пространства* H. Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ (см. [1]).

Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ в гильбертовом пространстве называется *безусловным базисом* [2], если найдутся числа $c, C > 0$ такие, что для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

В данной статье мы намерены изложить метод конструирования безусловных базисов в некоторых гильбертовых пространствах целых функций.

Эта задача восходит к двум тесно связанным между собой классическим задачам: представление функций посредством рядов экспонент и интерполяция целыми функциями. Представление функций посредством рядов экспонент активно развивалось А. Ф. Леонтьевым и его учениками, основные результаты и аналитические методы изложены в монографии [3]. Ю. Ф. Коробейником и его учениками развивались функционально аналитические методы, им создана теория абсолютно представляющих систем в локально выпуклых пространствах голоморфных функций, основные результаты этой теории изложены в работе [4]. В теории абсолютно представляющих систем естественным образом важное значение имеет степень тонкости топологии пространства. В работах [5, 6] доказаны теоремы о существовании представляющих систем экспонент в проективных и индуктивных пределах весовых пространств, в которых оператор дифференцирования действует непрерывно.

Дальнейшее продвижение в этой задаче в смысле тонкости топологии предполагает уже изучение нормированных пространств, т. е. конструирование (безусловных) базисов. Как оказалось, базисы из экспонент — явление редкое. Насколько известно авторам — это базисы в классическом пространстве L_2 и в пространствах Соболева L_2^s [7], базисы в пространствах Смирнова [8] и Бергмана [9] на выпуклых многоугольниках. Соответственно, имеется ряд работ об отсутствии базисов из экспонент. Так на пространствах Смирнова и Бергмана на областях с гладкой границей базисов из экспонент не может быть (см. [10, 11]). Базисов из экспонент не бывает также и в весовых пространствах, когда весовая функция растет быстрее степенной функции [12] или сравнима со степенной [13].

В работах [14–16] показано отсутствие безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в классическом пространстве Бергмана и в пространствах Фока

$$\mathscr{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ \|f\|^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} dm(\lambda) < \infty \right\}$$

с радиальными весами φ, растущими быстрее $|\lambda|^2$. В работе [17] доказано отсутствие безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра уже в пространствах с весами, удовлетворяющими условию $(\ln_+ r)^2 = o(\varphi(r))$, $r \to \infty$, и с некоторой регулярностью роста. В этой же работе получен неожиданный результат о существовании безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока $\mathscr{F}_{\varphi_\alpha}$ с весами $\varphi_\alpha(\lambda) = (\ln_+ |\lambda|)^\alpha$ при $\alpha \in (1; 2]$. В дальнейшем в статье [18] доказано существование безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока с весами существенно более общего вида.

Далее будем использовать следующие обозначения. Запись $A(x) \asymp B(x)$, $x \in X$, для положительных функций A, B означает, что для некоторых констант $C, c > 0$ для всех $x \in X$ выполняются оценки $cB(x) \leqslant A(x) \leqslant CB(x)$, символ $A(x) \prec B(x)$, $x \in X$, $(A(x) \succ B(x), x \in X)$; означает существование константы $C > 0$ такой, что $A(x) \leqslant CB(x)$ $(B(x) \leqslant CA(x))$.

Функциональное гильбертово пространство H будем называть *радиальным*, если для любого $F \in H$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ функция $F(ze^{i\varphi})$ лежит в H, причем $\|F(ze^{i\varphi}) = \|F\|$. Очевидно, что в радиальном гильбертовом пространстве $K(ze^{i\varphi}) \equiv K(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

В данной работе мы рассматриваем абстрактные радиальные функциональные гильбертовы пространства, устойчивые относительно деления, и докажем два основных утверждения.

1. Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления и допускающее безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где последовательность $u(n)$ выпуклая, т. е.

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

(см. теорему 1).

2. Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором полиномы полны и

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где последовательность $u(n)$ удовлетворяет условию

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \succ n^\delta, \quad n \in \mathbb{N},$$

для некоторого $\delta > 0$, то в пространстве H существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра (см. теорему 5).

Второе утверждение доказывается по схеме работы [17] — на основе теоремы Бари. Результаты этой работы относительно пространств $\mathscr{F}_{\varphi_\alpha}$ для $\alpha \in (1; 2)$ довольно просто следуют из второго утверждения.

1. Геометрия радиальных гильбертовых пространств, допускающих безусловный базис из значений воспроизводящего ядра

Теорема 1. *Если в радиальном функциональном гильбертовом пространстве H, устойчивом относительно деления и содержащем все мономы, существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то существует гладкая выпуклая функция $u(x)$ на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

При этом

$$\lim_{x\to+\infty} u'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = +\infty.$$

$\lhd$ Пусть система $\{k(\lambda, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в функциональном гильбертовом пространстве H и L_n — биортогональный базис. Поскольку мы предполагаем устойчивость относительно деления, то

$$L_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где L — порождающая целая функция. Как известно,

$$\|L_k\|^2 \asymp \frac{1}{K(z_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и разложение функции $F \in H$ по этому базису имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F(z_k) L_k(z).$$

По определению безусловного базиса

$$\|F\|^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_k)|^2}{K(z_k)}.$$

Значит,

$$\|z^n\|^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{2n} \frac{1}{K(|z_k|)} = \int\limits_0^{\infty} \frac{r^{2n}}{K(r)}\, d\mu(r), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\mu(r) = \sum_{|z_k|<r} 1$ — считающая функция последовательности $r_k = |z_k|$, $k \in \mathbb{N}$, нумерованной по возрастанию. Гладкая выпуклая функция

$$u(x) := \ln \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2xy} \frac{d\mu(e^y)}{K(e^y)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.

Если предположить, что производная $u'(x)$ ограничена числом a, то при больших n имеем $u(n) \leqslant 2an$, т. е. $\|z^n\| \prec e^{2an}$. Тогда для любого ряда Тейлора, сходящегося в круге $B(0; b)$ с $b > e^{3a}$ по неравенству Коши для коэффициентов и неравенству треугольника для норм

$$\left\| \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \right\| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| \|z^n\| \prec \sum_{n=k}^{\infty} e^{-na} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тем самым, ряд сходится в норме пространства H и в силу полноты пространство H содержит все функции, аналитические в круге $B(0; b)$. $\rhd$

Не уменьшая общности, далее будем считать, что последовательность $\ln\|z^n\|$, $n = 0, 1, \ldots,$ — возрастающая, выпуклая и $\ln\|z^0\| = 0$. Соответственно, будем считать, что $u(t)$ $(u(0) = 0)$ — кусочно-линейная неубывающая функция с изломами в целых неотрицательных точках такая, что

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом,

$$u(t) = u(n) + (u(n+1) - u(n))(t-n), \quad t \in [n; n+1],\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

при этом

$$u'_+(n) = u'_-(n+1) = u(n+1) - u(n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x) = \sup_{t\geqslant 0}(xt - u(t)) &= \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sup_{\tau\in[0;1]} (x(n+\tau) - (u(n) + (u(n+1) - u(n))\tau) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} (xn - u(n) + \sup_{\tau\in[0;1]} (x - (u(n+1) - u(n))\tau))\end{aligned}$$

и внутренний супремум достигается на концах отрезка $[0; 1]$, то

$$\widetilde{u}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} (xn - u(n)), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Таким образом, сопряженная по Юнгу $\widetilde{u}(x)$ как верхняя огибающая последовательности линейных функций также будет кусочно линейной с изломами в точках $x_n = u(n) - u(n-1) = u'_+(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, или более подробно

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1 = u(1) - u(0), \\ 1 \cdot x - u(1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = u(2) - u(1), \\ \dots \\ nx - u(n), & x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1} = u(n+1) - u(n), \\ \dots \end{cases}$$

Производная функция $\widetilde{u}'(x)$ будет функцией скачков с единичными скачками в этих точках x_n, $n \in \mathbb{N}$, в частности,

$$\widetilde{u}(x_n) = x_n n - u(n), \quad \widetilde{u}'_+(x_n) = n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Соответственно, $\widetilde{u}'(\ln r)$ — функция скачков с единичными скачками в точках $R_n = e^{x_n}$.

Выпуклость последовательности $u(n)$ означает выполнение условия

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мы будем рассматривать более сильное условие: для некоторого $\sigma > 0$

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant \sigma, \quad n \in \mathbb{N},$$

или

$$u'_+(n+1) - u'_+(n) \geqslant \sigma, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{A}$$

Теорема 2. *Пусть $K(\lambda)$ — функция Бергмана радиального функционального гильбертова пространства H, устойчивого относительно деления, в котором полиномы полны, и $u(t)$ — кусочно линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для которой выполняется условие (A). *Тогда*

$$K(\lambda) \asymp e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$\lhd$ В условиях теоремы $\left\{\frac{z^n}{\|z^n\|},\ n = 0, 1, \dots\right\}$ образует ортонормированный базис. Следовательно,

$$k(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \overline{z}^k}{\|z^k\|^2},$$

$$K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^k|^2}{\|z^k\|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Докажем требуемое соотношение на критических окружностях $|\lambda| = R_n$. Из формулы для $K(z)$ имеем

$$K(R_n)R_n^{-2n}\|z^n\|^2 \asymp \sum_{k=0}^{\infty} R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\ln R_n = x_n = u'_+(n-1)$, то

$$R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)} = e^{2(u(n)-u(k)-u'_+(n-1)(n-k))}.$$

Пусть $k \geqslant n$. Для кусочно линейной функции

$$u'_+(n) = u(n+1) - u(n)$$

и

$$u(k) - u(n) = \sum_{j=0}^{k-n-1} (u(n+j+1) - u(n+j)) = \sum_{j=0}^{k-n-1} u'_+(n+j). \tag{3}$$

По условию (A)

$$u'_+(n+p) \geqslant u'_+(n-1) + (p+1)\sigma, \quad n-1, p = 0, 1, 2, \dots,$$

и, значит,

$$u(k) - u(n) \geqslant (k-n)u'_+(n-1) + \frac{1}{2}(k-n)(k-n+1)\sigma,$$

тем самым,

$$u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k) \leqslant -\frac{1}{2}(k-n)(k-n+1)\sigma, \quad k \geqslant n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=n}^{\infty} R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j(j+1)\sigma} := C(\sigma), \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{R_n^{2k}}{\|z^k\|^2} \leqslant C(\sigma) \frac{|R_n|^{2n}}{\|z^n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Пусть $k < n$. Тогда

$$u(n)-u(k)-u'_+(n-1)(n-k)$$
$$=\sum_{j=1}^{n-k}\big(u(n-j+1)-u(n-j)-u'_+(n-1)\big)=\sum_{j=1}^{n-k}\big(u'_+(n-j)-u'_+(n-1)\big).$$

Поскольку
$$u'_+(n-j)-u'_+(n-1)\leqslant-(j-1)\sigma,$$
то
$$u(n)-u(k)-u'_+(n-1)(n-k)\leqslant-\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)\sigma,\quad k<n.$$
Таким образом,
$$\sum_{k=0}^{n-1}R_n^{2(k-n)}e^{-2u(k)+2u(n)}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}e^{-j(j-1)\sigma}<C(\sigma),\quad n\in\mathbb{N},$$
и
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|R_n|^{2k}}{\|z^k\|^2}\leqslant C(\sigma)\frac{|R_n|^{2n}}{\|z^n\|^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Отсюда и из (4) следует соотношение
$$K(R_n)\asymp\frac{R_n^{2n}}{\|z^n\|^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$
В силу соотношения (2)
$$e^{2\widetilde{u}(\ln R_n)}\asymp\frac{R_n^{2n}}{\|z^n\|^2},\quad n\in\mathbb{N},$$
тем самым,
$$K(R_n)\asymp e^{2\widetilde{u}(\ln R_n)},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Функция $\ln K(e^x)$ — выпуклая и по доказанному
$$\ln K(e^{x_n})\leqslant\mathrm{Const}+2\widetilde{u}(x_n),\quad n\in\mathbb{N}.$$
Поскольку функция $\widetilde{u}(x)$ линейна между точками x_n, то это соотношение верно для всех x:
$$K(\lambda)\prec e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)},\quad \lambda\in\mathbb{C}.\tag{5}$$
С другой стороны, по определению функции Бергмана и по формуле (1)
$$K(\lambda)=\sup_{F\in H}\frac{|F(\lambda)|^2}{\|F\|^2}\geqslant\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\frac{|\lambda^n|^2}{\|\lambda^n\|^2}=\exp\left(2\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(n\ln|\lambda|-u(n))\right)=e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}.$$
Отсюда и из (5) следует утверждение теоремы 2. $\rhd$

2. Конструкция безусловного базиса из значений воспроизводящего ядра

Введем обозначение
$$K(\lambda,z):=\frac{k(\lambda,z)}{\|k(\lambda,z)\|}=\frac{k(\lambda,z)}{\sqrt{K(z)}}.$$

Рассмотрим еще более сильное условие выпуклости: для некоторых $\delta \in (0;1)$, $\sigma > 0$

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant \sigma (n+1)^{\delta}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (B)$$

или

$$u'_+(n+1) - u'_+(n) \geqslant \sigma (n+1)^{\delta}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Выберем число $q \in (0;1)$ таким образом, чтобы последовательности x_n и $x'_n = x_n + \ln \frac{q}{n}$ чередовались:

$$0 < x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 < \ldots \qquad (6)$$

Это возможно, поскольку

$$x_{n+1} - x_n = u'_+(n) - u'_+(n-1) \geqslant \sigma n^{\delta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором многочлены полны, и $u(t)$ — кусочно-линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для которой выполняется условие (B). *Тогда, если $\varphi_n \in [0;2\pi]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q_n = \frac{q}{n}$, где $q \in (0;1)$ выбрано так, что выполняется условие* (6), *и $\lambda_n = q_n e^{u'_+(n-1)} e^{i\varphi_n}$, $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\lambda^n e^{-i\varphi_n}}{\|\lambda^n\|} - K(\lambda, \lambda_{n+1}) \right\|^2 < \infty.$$

$\lhd$ В условиях теоремы система $e_k = \frac{\lambda^k}{\|z^k\|}$, $k = 0,1,2,\ldots$, образует ортонормированный базис и

$$\frac{\lambda^n e^{-i\varphi_n}}{\|\lambda^n\|} - K(\lambda, \lambda_{n+1}) = \left(e^{-i\varphi_n} - \frac{\overline{\lambda}_{n+1}^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|} \right) e_n - \frac{1}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}} \sum_{k \neq n} \frac{\overline{\lambda}_{n+1}^k}{\|z^k\|} e_k.$$

Отсюда по равенству Парсеваля

$$\left\| \frac{\lambda^n e^{-i\varphi_n}}{\|\lambda^n\|} - K(\lambda, \lambda_{n+1}) \right\|^2 = \left| 1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|} \right|^2 + \frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \sum_{k \neq n} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}. \qquad (7)$$

Лемма 1. *Пусть $N = N(\sigma, \delta)$ такое, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $-\ln q_{n+1} \leqslant \frac{\sigma}{2} n^{\delta}$. Тогда для $n \geqslant N$ имеет место оценка*

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \sum_{k \neq n} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \leqslant C(\sigma, \delta) \left(\frac{q^2}{(n+1)^2} + e^{-2\sigma n^{\delta}} \right).$$

$\lhd$ По теореме 2

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \asymp q_{n+1}^{2k} e^{2(k u'_+(n) - u(k) - \widetilde{u}(\ln q_{n+1} + x_{n+1}))}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Поскольку функция $\widetilde{u}$ кусочно линейна, то по формулам (2)

$$\widetilde{u}(\ln q_{n+1} + x_{n+1}) = \widetilde{u}(x_{n+1}) + \widetilde{u}'_-(x_{n+1}) \ln q_{n+1}$$
$$= x_{n+1}(n+1) - u(n+1) + \widetilde{u}'_+(x_n) \ln q_{n+1} = u'_+(n)(n+1) - u(n+1) + n \ln q_{n+1},$$

поэтому

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \asymp q_{n+1}^{2(k-n)} e^{2(u(n+1)-u(k)-u'_+(n)(n+1-k))}, \quad n \geqslant N. \tag{8}$$

Пусть $k \geqslant n+1$. По соотношению (3) при условии (B) имеем

$$u(k)-u(n+1) = \sum_{j=1}^{k-n-1} u'_+(n+j) \geqslant \sum_{j=1}^{k-n-1} (u'_+(n)+\sigma(n+1)^\delta) = (u'_+(n)+\sigma(n+1)^\delta)(k-n-1),$$

следовательно,

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \prec q_{n+1}^{2(k-n)} e^{-2\sigma(n+1)^\delta(k-n-1)}, \quad n \geqslant N,$$

и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \prec \frac{q^2}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-2\sigma(n+1)^\delta(k-n-1)} \leqslant C_1(\sigma) \frac{q^2}{(n+1)^2}. \tag{9}$$

Рассмотрим $k \leqslant n-1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} u(n+1) - u(k) - u'_+(n)(n+1-k) &= \sum_{j=0}^{n-k} (u(n-j+1) - u(n-j) - u'_+(n)) \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} (u'_+(n-j) - u'_+(n)) = -\sum_{s=k}^{n-1} (u'_+(n) - u_+(s)), \end{aligned} \tag{10}$$

и по условию (B)

$$u'_+(n) - u'_+(s) = \sum_{p=s+1}^{n} (u'_+(p) - u'_+(p-1)) \geqslant \sigma \sum_{p=s+1}^{n} p^\delta \geqslant \sigma(s+1)^\delta(n-s).$$

Функция $(s+1)^\delta(n-s)$ — вогнутая, значит минимальное значение на интервале $[0; n-1]$ достигается в концевых точках, поэтому

$$u'_+(n) - u'_+(s) \geqslant \sigma n^\delta, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда и из (10) получим

$$u(n+1) - u(k) - u'_+(n)(n+1-k) \leqslant -\sigma n^\delta (n-k).$$

Таким образом, для $n \geqslant N$ в силу (8) выполняется оценка

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \prec e^{-2(n-k)\sigma n^\delta}, \quad n \geqslant N,$$

значит,

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \prec \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2(n-k)\sigma n^\delta} \leqslant C_2(\sigma, \delta) e^{-2\sigma n^\delta}.$$

Отсюда и из (9) следует утверждение леммы 1. $\triangleright$

Закончим доказательство теоремы 3.

По определению функции Бергмана

$$\frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|} < 1,$$

поэтому

$$\left|1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|}\right|^2 < 1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^{2n}}{K(\lambda_{n+1})\|z^n\|^2} = \frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\sum_{k\neq n}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2},$$

и по утверждению леммы 1 для достаточно больших n

$$\left|1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|}\right|^2 \leqslant C(\sigma,\delta)\left(\frac{q}{(n+1)^2} + e^{-2\sigma n^\delta}\right).$$

По соотношению (7) и из утверждения леммы 1 следует утверждение теоремы 3. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором многочлены полны, и $u(t)$ — кусочно-линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

для которой выполняется условие (B), *тогда, если $\varphi_n \in [0;2\pi]$, $q_n = \frac{q}{n}$, где $q\in(0;1)$ выбрано так, что выполняется условие* (6), *и $\lambda_n = q_n e^{u'_+(n-1)}e^{i\varphi_n}$, $n\in\mathbb{N}$, то система $K(\lambda,\lambda_n)$, $n\in\mathbb{N}$, полна и минимальна в пространстве H.*

$\lhd$ Функция $u_0(\lambda) = u_0(|\lambda|) := \widetilde{u}(\ln|\lambda|)$ — радиальная субгармоническая функция. Ассоциированная по Риссу мера μ этой функции просто считается в полярных координатах:

$$d\mu(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\Delta u_0(re^{i\varphi})\,dm(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi r^2}\left(u_0''(r) + \frac{1}{r}u_0'(\ln r)\right)rdrd\varphi = \frac{1}{2\pi}\,d\widetilde{u}'(\ln r)d\varphi,$$

где $dm(z)$ — мера Лебега. Через $\mu(t)$ обозначим μ-меру круга $B(0,t)$. Тогда

$$\mu(t) = \widetilde{u}'(\ln t) = \sum_{R_n<t} 1, \quad t>0.$$

Формула Йенсена для радиальной функции $\widetilde{u}$ становится очень простой:

$$\widetilde{u}(\ln|\lambda|) = \int\limits_0^{|\lambda|}\frac{\mu(t)\,dt}{t}.$$

Пусть $R_n' = e^{x_n'} = |\lambda_n|$ и $\nu(t) = \sum_{R_n'<t} 1$, $\quad t>0$. Рассмотрим субгармоническую функцию

$$v(\ln|\lambda|) = \int\limits_0^{|\lambda|}\frac{\nu(t)\,dt}{t}.$$

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$v(\ln R_n) - \widetilde{u}(\ln R_n) \to \infty, \quad n \to \infty,$$

причем для любого $\alpha \in \left(\frac{1}{1+\delta}; 1\right)$ *и некоторой константы* $b > 0$

$$v(\ln R_n) - \widetilde{u}(\ln R_n) \leqslant b(\ln R_n)^{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\lhd$ Поскольку последовательности R'_n и R_n чередуются, то

$$\nu(t) - \mu(t) = 1, \quad R'_n \leqslant t < R_n,\ n \in \mathbb{N},$$

и $\nu(t) - \mu(t) = 0$ для остальных $t > 0$. Значит,

$$v(\ln R_n) - \widetilde{u}(\ln R_n) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{R'_k}^{R_k} \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{R_k}{R'_k} = \ln \frac{n!}{q^n}.$$

Отсюда вытекает первое соотношение леммы. Применив формулу Стирлинга, получим, что для некоторой постоянной $a > 0$

$$v(\ln R_n) - \widetilde{u}(\ln R_n) \leqslant an \ln n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

По условию (B)

$$x_n - x_1 = \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \left(u'_+(k-1) - u'_+(k-2)\right) \geqslant \sigma \sum_{k=2}^{n}(k-1)^{\delta} \geqslant 2^{\delta-2}\sigma(n-1)^{\delta+1}.$$

Тем самым, для некоторой константы $a_0 > 0$

$$n \leqslant a_0 x_n^{\frac{1}{1+\delta}} = a_0(\ln R_n)^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

Отсюда и из (11) следует второе утверждение леммы 2. $\rhd$

Продолжим доказательство теоремы 4. Рассмотрим целую функцию

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По теореме 2 и лемме 2 в работе [19] функция L удовлетворяет соотношению

$$|L(\lambda)| \asymp \frac{\operatorname{dist}(\lambda)}{1+|\lambda|} e^{v(\ln|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

где $\operatorname{dist}(\lambda) = \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda - \lambda_n|$. Если система $K(\lambda, \lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, не полна в пространстве H, то найдется целая функция $F = gL \in H$. По теореме 2 должно выполняться соотношение

$$|F(\lambda)| \prec e^{\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

значит, в силу оценки (12)

$$\frac{\operatorname{dist}(\lambda)}{1+|\lambda|} e^{v(\ln|\lambda|)} \prec e^{\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

На окружностях $|\lambda| = R_n$ имеем $\operatorname{dist}(\lambda) \asymp 1 + |\lambda|$, поэтому должно быть

$$e^{v(\ln |R_n|)} \prec e^{\widetilde{u}(\ln R_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

что противоречит первому соотношению леммы 2.

Докажем минимальность. Возьмем некоторое n, и пусть

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По неравенству Коши для k, таких что $R_k \geqslant 2|\lambda_n|$ и по теореме 2

$$|l_k| \prec \frac{1}{R_k^{k+1}} \max_{\varphi \in [0;2\pi]} |L(R_k e^{i\varphi})| \prec \frac{1}{R_k^{k+1}} e^{v(x_k)}.$$

По второму утверждению леммы 2

$$|l_k| \prec \frac{1}{R_k^{k+1}} e^{\widetilde{u}(x_k)+b(\ln R_k)^\alpha},$$

значит, по соотношению (2)

$$|l_k| \prec e^{kx_k - u(k) - (k+1)x_k + bx_k^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left|l_k\right|^2 \left\|z^k\right\|^2 \prec e^{-2x_k + 2bx_k^\alpha} = e^{-2x_k(1 - bx_k^{\alpha-1})}.$$

Поскольку $\alpha < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \|z^k\|^2 < \infty,$$

и функция $L(\lambda)(\lambda - \lambda_n)^{-1}$ принадлежит пространству H. $\rhd$

Теорема 5. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором мономы z^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, полны, и $u(t)$ — кусочно-линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для которой выполняется условие (B). *Положим $R'_n = \frac{q}{n} e^{u'_+(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, где $q \in (0;1)$ выбрано так, что выполняется условие* (6). *Тогда для любого множества $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0;2\pi]$, значения воспроизводящего ядра $K(\lambda, R'_n e^{i\varphi_n})$, $n \in \mathbb{N}$, образуют безусловный базис в пространстве H.*

$\lhd$ Утверждение теоремы следует из теоремы Бари (см. [20], [21, теорема 14, с. 81]) и теорем 3, 4. $\rhd$

Литература

1. *Aronszajn N.* Theory of reproducing kernels // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 68, № 3.—P. 337–404. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. *Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S.* Unconditional bases of exponentials and of reproductional kernels // Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics.—1981.—Vol. 864.—P. 214–335. DOI: 10.1007/BFb0097000.

3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1 (217).—С. 73–126.
5. *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций // Комплексный анализ. Целые функции и их применения. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2019.—Т. 161.—С. 3–64.
6. *Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $H(D)$ // Изв. РАН. Сер. матем.—2019.—Т. 83, № 2.—С. 40–60. DOI: 10.4213/im8728.
7. *Russell D. L.* On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 87, № 2.—P. 528–550. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90142-1.
8. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1975.—Т. 39, № 3.—С. 657–702.
9. *Исаев К. П.* Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках // Уфим. мат. журн.—2010.—Т. 2, № 1.—С. 71–86.
10. *Луценко В. И.* Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова: дисс. ... к.ф.-м.н.—Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 1992.
11. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками // Изв. РАН. Сер. матем.—2007.—Т. 71, № 6.—С. 69–90. DOI: 10.4213/im694.
12. *Башмаков Р. А., Махота А. А., Трунов К. В.* Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент // Уфим. мат. журн.—2015.—Т. 7, № 2.—С. 19–34. DOI: 10.13108/2015-7-2-17.
13. *Isaev K. P.* On unconditional exponential bases in weighted spaces on interval of real axis // Lobachevskii Journal of Mathematics.—2017.—Vol. 38, № 1.—P. 48–61. DOI: 10.1134/s1995080217010097.
14. *Seip K.* Density theorems for sampling and interpolation on the Bargmann–Fock space. I // J. Reine Angew. Math.—1992.—Vol. 429.—P. 91–106. DOI: 10.1515/crll.1992.429.91.
15. *Seip K., Wallsten R.* Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space. II // J. Reine Angew. Math.—1992.—Vol. 429.—P. 107–113. DOI: 10.1515/crll.1992.429.107.
16. *Borichev A., Dhues R., Kellay K.* Sampling and interpolation in the Bergman and Fock spaces // J. Funct. Anal.—2007.—Vol. 242, № 2.—P. 563–606. DOI: 10.1016/j.jfa.2006.09.002.
17. *Borichev A., Lyubarskii Yu.* Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces // J. Inst. Math. Jussieu.—2010.—Vol. 9, № 3.—P. 449–461. DOI: 10.1017/S147474800900019X.
18. *Baranov A., Belov Yu., Borichev A.* Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces // Stud. Math.—2017.—Vol. 236, № 2.—P. 127–142. DOI: 10.4064/sm8504-9-2016.
19. *Исаев К. П., Луценко А. В., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы в слабовесовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2018.—Т. 30, № 2.—С. 145–162.
20. *Nikolski N. K.* Functions, and Systems: an Easy Reading. Vol. 1.—Hardy–Hankel–Toeplitz: Amer. Math. Soc., Providence (R. I.), 2002.
21. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Математика. Т. 4. Уч. записки Моск. гос. ун-та.—1951.—Т. 148.—М.: Изд-во Моск. ун-та.—С. 69–107.

Статья поступила 23 мая 2020 г.

Исаев Константин Петрович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `orbit81@list.ru`
http://orcid.org/0000-0002-3680-0048

Юлмухаметов Ринад Салаватович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 85–99

UNCONDITIONAL BASES IN RADIAL HILBERT SPACES

Isaev, K. P.[1] and Yulmukhametov, R. S.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
E-mail: orbit81@list.ru, yulmukhametov@mail.ru

Abstract. We consider a Hilbert space of entire functions H that satisfies the conditions: 1) H is functional, that is the evaluation functionals $\delta_z : f \to f(z)$ are continuous for every $z \in \mathbb{C}$; 2) H has the division property, that is, if $F \in H$, $F(z_0) = 0$, then $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$; 3) H is radial, that is, if $F \in H$ and $\varphi \in \mathbb{R}$, then the function $F(ze^{i\varphi})$ lies in H, and $\|F(ze^{i\varphi})\| = \|F\|$; 4) polynomials are complete in H and $\|z^n\| \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, where the sequence $u(n)$ satisfies the condition $u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \succ n^\delta$, $n \in \mathbb{N}$, for some $\delta > 0$. It follows from condition 1) that every functional δ_z is generated by an element $k_z(\lambda) \in H$ in the sense of $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. The function $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ is called the reproducing kernel of the space H. A basis $\{e_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ in Hilbert space H is called a unconditional basis if there exist numbers $c, C > 0$ such that for any element $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ the relation

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$$

holds true. The article describes a method for constructing unconditional bases of reproducing kernels in such spaces. This problem goes back to two closely related classical problems: representation of functions by series of exponentials and interpolation by entire functions.

Key words: Hilbert spaces, entire functions, unconditional bases, reproducing kernels.

Mathematical Subject Classification (2010): 46E22, 30D10.

For citation: *Isaev, K. P. and Yulmukhametov, R. S.* Unconditional Bases in Radial Hilbert Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 85–99 (in Russian). DOI: 10.46698/q8093-7554-9905-q.

References

1. *Aronszajn, N.* Theory of Reproducing Kernels, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 68, no. 3, pp. 337–404. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. *Hruščev, S. V., Nikol'skii, N. K. and Pavlov, B. S.* Unconditional Bases of Exponentials and of Reproductional Kernels, *Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics*, 1981, vol. 864, pp. 214–335. DOI: 10.1007/BFb0097000.
3. *Leontev, A. F. Ryady eksponent* [Exponential Series], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
4. *Korobeinik, Yu. F.* Representing Systems, *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
5. *Isaev, K. P.* Representing Exponential Systems in Spaces of Analytical Functions, *Complex Analysis. Entire Functions and Their Applications, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, Moscow, VINITI, 2019, vol. 161, pp. 3–64 (in Russian).
6. *Isaev, K. P., Trounov, K. V. and Yulmukhamtov, R. S.* Representing Systems of Exponentials in Projective Limits of Weighted Subspaces of $H(D)$, *Izvestiya: Mathematics*, 2019, vol. 83, no. 2, pp. 232–250. DOI: 10.1070/IM8728.
7. *Russell, D. L.* On Exponential Bases for the Sobolev Spaces over an Interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1982, vol. 87, no. 2, pp. 528–550. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90142-1.
8. *Levin, B. Ya. and Lyubarskii, Yu. I.* Interpolation by Means of Special Classes of Entire Functions and Related Expansions in Series of Exponentials, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1975, vol. 9, no. 3, pp. 621–662. DOI: 10.1070/IM1975v009n03ABEH001493.
9. *Isaev, K. P. Bazisy Rissa iz eksponent v prostranstvakh Bergmana na vypuklykh mnogougolnikakh* [Riesz Bases of Exponents in Bergman Spaces on Convex Polygons], *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 71–86 (in Russian).

10. *Lutsenko, V. I. Bezuslovnye bazisy iz eksponent v prostranstvakh Smirnova* [Unconditional bases of exponentials in Smirnov spaces], Dis. ... k.f.-m. n., Ufa, Inst. Math. Comp. Centre UFRC RAS, 1992 (in Russian).
11. *Isaev, K. P. and Yulmukhamtov, R. S.* The Absence of Unconditional Bases of Exponentials in Bergman Spaces on Non-Polygonal Domains, *Izvestiya: Mathematics*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 1145–1166. DOI: 10.1070/IM2007v071n06ABEH002385.
12. *Bashmakov, R. A., Makhota, A. A. and Trounov, K. V.* On Absence Conditions of Unconditional Bases of Exponents, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 17–32. DOI: 10.13108/2015-7-2-17.
13. *Isaev, K. P.* On Unconditional Exponential Bases in Weighted Spaces on Interval of Real Axis, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 1, pp. 48–61. DOI: 10.1134/s1995080217010097.
14. *Seip, K.* Density Theorems for Sampling and Interpolation on the Bargmann–Fock Space. I, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1992, vol. 429, pp. 91–106. DOI: 10.1515/crll.1992.429.91.
15. *Seip, K. and Wallsten, R.* Density Theorems for Sampling and Interpolation in the Bargmann–Fock Space. II, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1992, vol. 429, pp. 107–113. DOI: 10.1515/crll.1992.429.107.
16. *Borichev, A., Dhues, R. and Kellay, K.* Sampling and Interpolation in the Bergman and Fock Spaces, *Journal of Functional Analysis*, 2007, vol. 242, no. 2, pp. 563–606. DOI: 10.1016/j.jfa.2006.09.002.
17. *Borichev, A. and Lyubarskii, Yu.* Riesz Bases of Reproducing Kernels in Fock Type Spaces, *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 2010, vol. 9, no. 3, pp. 449–461. DOI: 10.1017/S147474800900019X.
18. *Baranov, A., Belov, Yu. and Borichev, A.* Fock Type Spaces with Riesz Bases of Reproducing Kernels and de Branges Spaces, *Studia Mathematica*, 2017, vol. 236, no. 2, pp. 127–142. DOI: 10.4064/sm8504-9-2016.
19. *Isaev, K. P., Lutsenko, A. V. and Yulmukhamtov, R. S.* Unconditional Bases in Weakly Weighted Spaces of Entire Functions, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019, vol. 30, no. 2, p. 253–265. DOI: 10.1090/spmj/1541.
20. *Nikolski, N. K. Functions, and Systems: an Easy Reading*, vol. 1, Hardy, Hankel, and Toeplitz, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
21. *Bari, N. K.* Biorthogonal Systems and Bases in Hilbert Space, *Mathematics, vol.* 4*, Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1951, vol. 148, pp. 69–107 (in Russian).

Received May 23, 2020

Konstantin P. Isaev
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Senior Researcher
E-mail: `orbit81@list.ru`
http://orcid.org/0000-0002-3680-0048

Rinad S. Yulmukhametov
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Chief Researcher
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 100–111

УДК 517.982.3
DOI 10.46698/t9892-7905-1143-o

О ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ И ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ, И ЕГО СОПРЯЖЕННОМ

И. Х. Мусин[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`

Девяностолетию Юрия Фёдоровича Коробейника посвящается

Аннотация. В работе рассматривается локально выпуклое пространство функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области многомерного комплексного пространства и гладких вплоть до границы, с топологией, определяемой счетным семейством норм, образованных при помощи семейства $\mathfrak{M}$ логарифмически выпуклых последовательностей положительных чисел специального вида. Благодаря условиям на указанные последовательности данное пространство является пространством Фреше — Шварца. Изучается задача описания сильного сопряженного для этого пространства в терминах преобразования Лапласа функционалов. Интерес к ней связан с исследованиями Б. А. Державца классических проблем теории линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, А. В. Абанина, С. В. Петрова и К. П. Исаева современных проблем теории абсолютно представляющих систем в различных пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях комплексного пространства, с заданной граничной гладкостью, при решении которых важную роль сыграли полученные ими теоремы типа Пейли — Винера — Шварца. Основной результат работы, полученный в теореме 1, утверждает, что преобразование Лапласа линейных непрерывных функционалов устанавливает изоморфизм между сильным сопряженным к рассматриваемому функциональному пространству и некоторым пространством целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, представляющим собой внутренний индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций. Отметим, что в рассматриваемом случае удалось получить аналитическую реализацию сопряженного пространства при меньших ограничениях на семейство $\mathfrak{M}$ по сравнению с работой автора 2002 г. Основу доказательства теоремы 1 в настоящей работе составляют схема, предложенная М. Наймарком и Б. А. Тейлором, и ряд предыдущих результатов автора.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, целые функции, логарифмически выпуклая последовательность.

Mathematical Subject Classification (2000): 32A10, 46E10.

Образец цитирования: *Мусин И. Х.* О пространстве функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области и гладких вплоть до границы, и его сопряженном // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 100–111. DOI: 10.46698/t9892-7905-1143-o.

1. Введение

1.1. О задаче. Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $A_c(\Omega)$ — пространство функций, голоморфных в Ω и непрерывных на $\overline{\Omega}$ — замыкании области Ω. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ через $A_c^{(m)}(\Omega)$ обозначим пространство голоморфных в Ω функций f, все частные производные которых $(D^{\alpha}f)(z) := \frac{\partial^{|\alpha|}f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}$ (если $\alpha = (0,0,\dots,0)$, то $(D^{\alpha}f)(z) := f(z)$) до порядка m включительно допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$. Таким образом, $A_c^{(0)}(\Omega) = A_c(\Omega)$. Пространство $A_c^{(m)}(\Omega)$ наделим нормой

$$q_m(f) = \sup_{z\in\Omega,\,|\alpha|\leqslant m} |(D^{\alpha}f)(z)|, \quad f \in A_c^{(m)}(\Omega).$$

Пусть $A^{\infty}(\Omega)$ — проективный предел пространств $A_c^{(m)}(\Omega)$.

Обозначим через $\mathscr{V}$ множество возрастающих числовых последовательностей $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ с $m_0 = 1$, удовлетворяющих условиям:

δ_1) $(m_k^2 \leqslant m_{k-1}m_{k+1})$ $(\forall\, k \in \mathbb{N})$ (логарифмическая выпуклость);

δ_2) $(\exists\, Q_1, Q_2 > 0)$ $(\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$ $(m_k \geqslant Q_1 Q_2^k k!)$.

В работах [1–4] (в [3, 4] при $n = 1$) рассматривалась задача описания сопряженного в терминах преобразования Лапласа функционалов для пространства Фреше $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ функций, голоморфных в выпуклой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и гладких вплоть до ее границы, представляющего собой проективный предел построенных по семейству $\mathfrak{M} = \{M^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ определенных последовательностей $M^{(m)} = (M_k^{(m)})_{k=0}^{\infty} \in \mathscr{V}$ нормированных пространств

$$A_m(\Omega) = \left\{ f \in A^{\infty}(\Omega) :\ p_m(f) = \sup_{z\in\Omega,\,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^{\alpha}f)(z)|}{M_{|\alpha|}^{(m)}} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Решение этой задачи имеет важное значение при исследовании проблем теории дифференциальных операторов [1], теории абсолютно представляющих систем [3–5] в пространстве $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. При условии, что граница области Ω является C^2-гладкой, семейство $\big\{\big(L_k^{(m)}\big)_{k=0}^{\infty}\big\}_{m=0}^{\infty}$ последовательностей $\big(L_k^{(m)}\big)_{k=0}^{\infty}$ чисел $L_k^{(m)} = \frac{M_k^{(m)}}{k!}$ при любом $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условиям:

β_1) последовательность $\big(L_k^{(m)}\big)_{k=0}^{\infty}$ является возрастающей и логарифмически выпуклой;

β_2) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{M_{k+1}^{(m)}}{M_k^{(m)}}\right)^{\frac{1}{k}} < +\infty$;

β_3) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{M_k^{(m)}}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} = +\infty$;

β_4) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{Q^k M_k^{(m+1)}}{M_k^{(m)}} = 0 \quad (\forall\, Q > 0)$;

и функции

$$h_m(x) = \inf_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{L_k^{(m)}}{k!} x^{k-1}, \quad x > 0,\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

удовлетворяют условию

$$\sup_{x>0} \frac{h_{m+1}(x)}{x^2 h_m(x)} < \infty, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Описание сопряженного было получено Б. А. Державцом [1] с помощью метода псевдоаналитического продолжения [6]. Условие C^2-гладкости границы области Ω было снято в [2], при этом не требовалось выполнение условия β_1). В [3, 4] эта задача изучалась с точки зрения возможных применений в теории рядов экспонент, развитой А. Ф. Леонтьевым [7], и теории абсолютно представляющих систем Ю. Ф. Коробейника [8]. В частности, К. П. Исаев в [4] рассматривал последовательность $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ из $\mathscr{V}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k}{M_{k+1}}<\infty$, доопределял ее для отрицательных индексов, полагая $M_{-k}=1$ для $k\in\mathbb{N}$, и решил указанную задачу при $n=1$ для случая, когда семейство $\mathfrak{M}$ состоит из последовательностей $M^{(m)}=\left(M_k^{(m)}\right)_{k=0}^{\infty}$ ($m\in\mathbb{Z}_+$), где $M_k^{(m)}=M_{k-m}$. Отметим, что в этом случае от последовательностей семейства $\mathfrak{M}$ не требуется выполнение условия β_1) и они не обязаны удовлетворять тем или иным из условий β_2)–β_4).

В данной заметке по последовательности $M=(M_k)_{k=0}^{\infty}$ из $\mathscr{V}$, удовлетворяющей условию

δ_3) последовательность $\left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ возрастает и неограниченна,

строится семейство $\mathfrak{M}=\{M^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ последовательностей $M^{(m)}$, определяемых так же, как и в работе [4], и для пространства $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ в разделе 3 описывается сопряженное в терминах преобразования Лапласа функционалов. В разделе 2 приводятся вспомогательные сведения и результаты, используемые при доказательстве теоремы 1.

1.2. Обозначения и определения. Для $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ полагаем

$$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,\quad D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}.$$

Для $u=(u_1,\dots,u_n),\ v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{C}^n$

$$\langle u,v\rangle=u_1v_1+\ldots+u_nv_n,\quad \|u\|=\sqrt{|u_1|^2+\cdots+|u_n|^2},\quad |u|_n=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|u_j|.$$

Пространство голоморфных в области $\mathscr{O}\subseteq\mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathscr{O}$ обозначаем $H(\mathscr{O})$.

Для локально выпуклого пространства X через X' обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов на X, через X^* — сильное сопряженное пространство.

Преобразование Лапласа $\widehat{T}$ функционала $T\in(A^{\infty}(\Omega))^*(A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega))$ определим по формуле $\widehat{T}(z)=T\left(e^{\langle\lambda,z\rangle}\right)$, $z\in\mathbb{C}^n$. Пусть $H_{\Omega}(z)=\sup_{\lambda\in\Omega}\operatorname{Re}\langle\lambda,z\rangle$, $z\in\mathbb{C}^n$.

Всюду далее семейство $\mathfrak{M}$ состоит из последовательностей $M^{(m)}=(M_k^{(m)})_{k=0}^{\infty}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, определяемых по последовательности $M=(M_k)_{k=0}^{\infty}\in\mathscr{V}$, удовлетворяющей условию δ_3), по правилу: $M_k^{(m)}=M_{k-m}$ для $k\geqslant m$, $M_k^{(m)}=1$ для $k<m$.

С каждой последовательностью $M^{(m)}$ ассоциируем корректно определенную в силу δ_2) функцию w_m по правилу:

$$w_m(r)=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\ln\frac{r^k}{M_k^{(m)}},\quad r>0;\quad w_m(0)=0.$$

.

1.3. Основной результат. Пусть

$$P_m=\left\{F\in H(\mathbb{C}^n):\ \|F\|_m=\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\frac{|F(z)|}{\exp(H_{\Omega}(z)+w_m(|z|_n))}<\infty\right\},\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что банахово пространство P_m непрерывно вложено в P_{m+1} для каждого $m\in\mathbb{Z}_+$. Через $P_{\mathfrak{M}}$ обозначим индуктивный предел пространств P_m.

Теорема 1. *Отображение $L: T\in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)\to\widehat{T}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $P_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство теоремы основано на идеях М. Наймарка [9] и Б. А. Тейлора [10] и использует ряд результатов из [2] и [11], приведенных в разделе 2.

2. Вспомогательные сведения

Пусть

$$E_m = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^n) : N_m(F) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{(1+\|z\|)^m \exp(H_\Omega(z))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Через E обозначим индуктивный предел пространств E_m.

Теорема 2. *Отображение $\mathscr{L} : T \in (A^\infty(\Omega))^* \to \widehat{T}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $(A^\infty(\Omega))^*$ и E.*

Теорема 2 получена в [2] (см. теорема 1). В предположении C^2-гладкости границы области Ω теорема 2 доказана Б. А. Державцом [1].

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{O}$ — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$, h — плюрисубгармоническая функция в $\mathscr{O}$ и φ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$*

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leqslant c_\varphi, \quad \text{если} \quad \|z - t\| \leqslant \frac{1}{(1+\|t\|)^\nu}.$$

Пусть функция $S \in H(\mathbb{C}^n \times \mathscr{O})$ удовлетворяет неравенству

$$|S(z,\zeta)| \leqslant e^{\varphi(z)+h(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{C}^n,\ \zeta \in \mathscr{O},$$

и $S(\zeta,\zeta) = 0$ для $\zeta \in \mathscr{O}$. Тогда существуют функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times \mathscr{O})$ такие, что:

a) $S(z,\zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(z,\zeta)(z_j - \zeta_j)$, $(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathscr{O}$;

b) *при некотором $m > 0$, не зависящем от S,*

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n\times\mathscr{O}} \frac{|S_j(z,\zeta)|^2}{e^{2(\varphi(z)+h(\zeta)+m\ln(1+\|(z,\zeta)\|))}}\, d\lambda_{2n}(z,\zeta) < \infty, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Теорема 3 доказана в [11] (см. лемма 11).

Напомним, что пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно линейных непрерывных отображений $g_{mn} : S_n \to S_m$, $m < n$, таких, что $g_{n,n+1}$ вполне непрерывно для каждого n, называется пространством (M^*) [12].

Лемма 1. *Пространство $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ — пространство (M^*).*

Доказательство леммы 1 почти дословно совпадает с доказательством леммы 6 в [2]. Надо лишь в соответствующем месте воспользоваться условием δ_3) вместо условия i_4) из [2]. Таким образом, пространство Фреше $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ является пространством Фреше — Шварца [13, п. 1.5].

Лемма 2. *Пусть числа $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ таковы, что для $T \in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$*

$$|T(f)| \leqslant c p_m(f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega).$$

Тогда функционал T может быть представлен в виде:

$$T(f) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} T_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega),$$

где $T_\alpha \in A_c^*(\Omega)$, причем для норм $\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)}$ функционалов T_α справедливо неравенство $\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)} \leqslant \frac{c}{M_{|\alpha|}^{(m)}}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Доказательство этой леммы проводится по стандартной схеме [10, предложение 2.11, следствие 2.12] с использованием по существу условия δ_3).

Лемма 3. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $w_m(r) = m \ln r + w_0(r)$ для $r \geqslant 1$, $w_m(r) = 0$ для $r \in (0,1)$.*

$\lhd$ Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Вначале отметим, что $w_m(0) = w_0(0)$. Для $r > 0$ имеем

$$w_m(r) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k^{(m)}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_{k-m}} = \sup_{p\in\mathbb{Z},\, p\geqslant -m} \ln \frac{r^{m+p}}{M_p}$$

$$= m\ln r + \max\left\{ \sup_{p\in\mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^p}{M_p}, -\ln r, \dots, -m\ln r \right\}.$$

Отсюда получаем, что $w_m(r) = m\ln r + w_0(r)$ при $r \geqslant 1$. Для $r \in (0,1)$, $w_0(r) = 0$, следовательно, $w_m(r) = 0$. $\rhd$

Замечание. Пользуясь леммой 3 и теоремой Монтеля, легко показать, что для любого $m \in \mathbb{N}$ вложения $\gamma_{m,m+1} : P_m \to P_{m+1}$ вполне непрерывны. Поэтому $P_{\mathfrak{M}}$ — пространство (LN^*) [12] или, придерживаясь более современной терминологии, пространство DFS [13].

Лемма 4. *Для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\lambda) = \exp(\langle \lambda, z\rangle)$ принадлежит $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$, причем для каждого $m \in \mathbb{N}$*

$$p_m(f_z) \leqslant \exp(H_\Omega(z) + w_m(|z|_n)) < \infty.$$

Лемма 5. *Для любого $T \in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ функция $\widehat{T}$ — целая.*

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством леммы 4 в [2] и по существу использует условие δ_2).

Лемма 6. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что $\frac{M_k}{M_{k+1}} \leqslant \frac{C}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.*

$\lhd$ Отметим вначале, что $w_0(r) = 0$ для $r \in [0, M_1]$ и из условия δ_2) следует, что найдется число $A > 0$ такое, что

$$w_0(r) \leqslant Ar, \quad r \geqslant 0. \tag{1}$$

Далее, пусть $N(r) = \min\left\{k \in Z_+ : w_0(r) = \ln \frac{r^k}{M_k}\right\}$, $r > 0$. Проверяется, что $N(r) = k$ для $r \in \left(\frac{M_k}{M_{k-1}}, \frac{M_{k+1}}{M_k}\right]$ $(k \in \mathbb{N})$, $N(r) = 0$ для $r \in (0, M_1]$. Положим $N(0) = 0$. Пользуясь равенством (см. [14, §67])

$$w_0(r) - w_0(1) = \int_1^r \frac{N(t)}{t}\, dt, \quad r > 1,$$

и оценкой (1), имеем $N(r) \leqslant Aer$, $r \geqslant 0$. Таким образом, каково бы ни было $k \in \mathbb{N}$, для $r \in \left(\frac{M_k}{M_{k-1}}, \frac{M_{k+1}}{M_k}\right]$ имеем

$$k = N(r) \leqslant Aer \leqslant Ae\frac{M_{k+1}}{M_k}.$$

Отсюда, полагая $C = Ae$, получаем искомое утверждение. $\rhd$

Следствие 1. *Для натуральных $p \geqslant 2$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+p}}$ сходится.*

Следствие 2. *Для натуральных $p \geqslant n+1$ ряд $\sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|}}{M_{|\alpha|+p}}$ сходится.*

3. Доказательство теоремы 1

$\lhd$ Очевидно, отображение $L : T \in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega) \to \widehat{T}$ линейно.

Прежде чем показать, что отображение L действует из $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ в $P_{\mathfrak{M}}$ непрерывно, заметим, что топология пространства $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ может быть описана следующим образом. Пусть $W_k = \{f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega) :\ p_k(f) \leqslant 1\}$,

$$W_k^0 = \{F \in A'_{\mathfrak{M}}(\Omega) :\ |F(f)| \leqslant 1\ (\forall\, f \in W_k)\}$$

— поляра в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ окрестности W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $V_k = \bigcup_{\alpha>0}(\alpha W_k^0)$ — векторное подпространство в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$, порожденное полярой W_k^0. Наделим V_k топологией, введя в V_k норму $\mathscr{N}_k(F) = \sup_{f\in W_k} |F(f)|$, $F \in V_k$. Отметим, что пространство V_k непрерывно вложено в пространство V_{k+1} и $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega) = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$. Определим в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств V_k. Поскольку $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ — пространство (M^*), то $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ — монтелевское, а значит и рефлексивное пространство. Но тогда сильная топология в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ совпадает с топологией λ [15, с. 699–700]. Пусть теперь $S \in V_m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $|S(f)| \leqslant \mathscr{N}_m(S)$, $f \in W_m$. Отсюда следует, что $|S(f)| \leqslant \mathscr{N}_m(S)p_m(f)$, $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Теперь, воспользовавшись леммой 4, имеем

$$|\hat{S}(z)| \leqslant \mathscr{N}_m(S)\exp(H_\Omega(z) + w_m(|z|_n)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Итак, $\widehat{S} \in P_{\mathfrak{M}}$ и, кроме того, $\|\widehat{S}\|_m \leqslant \mathscr{N}_m(S)$. Таким образом, отображение L действует из $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ в $P_{\mathfrak{M}}$ непрерывно.

Докажем вначале, что отображение L сюръективно. Пусть целая функция $F \in P_{\mathfrak{M}}$, т. е. при некоторых $m \in \mathbb{Z}_+$, $c > 0$

$$|F(z)| \leqslant c\exp(H_\Omega(z) + w_m(|z|_n)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Так как

$$|H_\Omega(z) - H_\Omega(u)| \leqslant \left(\sup_{\eta\in\Omega}\|\eta\|\right)\|z-u\|, \quad z, u \in \mathbb{C}^n, \tag{2}$$

и при некотором $b_m > 0$ для $r_1, r_2 \geqslant 0$ таких, что $|r_2 - r_1| \leqslant 1$ (см. доказательство леммы 1 в [16])

$$|w_m(r_2) - w_m(r_1)| \leqslant b_m, \tag{3}$$

то плюрисубгармоническая функция $H_\Omega(z) + w_m(|\zeta|_n)$, $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяет условиям следствия 15.1.4. из [17]. Поэтому существует функция $U \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такая, что $U(z, z) = F(z)$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$ и для любых $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$

$$|U(z,\zeta)| \leqslant c_1\big(1 + \big(\|z\|^2 + \|\zeta\|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big)^{4n+1}\exp(H_\Omega(z) + w_m(|\zeta|_n)),$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная. Пользуясь леммой 3, имеем

$$|U(z,\zeta)| \leqslant c_2(1 + \|z\|)^{4n+1}\exp(H_\Omega(z) + w_{m+4n+1}(|\zeta|_n)), \quad z, \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{4}$$

где $c_2 > 0$ — некоторая постоянная. Разложим $U(z, \zeta)$ в степенной ряд по степеням ζ: $U(z, \zeta) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} U_\alpha(z)\zeta^\alpha$. Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, неравенством (4), леммой 3, равенством (справедливым ввиду логарифмической выпуклости последовательности M)

$$\inf_{r>0}\frac{\exp(w_0(r))}{r^p} = \frac{1}{M_p}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

получим для целой функции U_α оценку

$$|U_\alpha(z)| \leqslant \frac{c_2(1+\|z\|)^{4n+1}\exp(H_\Omega(z))}{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)}}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

По теореме 2 существуют функционалы $\mathscr{F}_\alpha \in (A^\infty(\Omega))^*$ такие, что $\widehat{\mathscr{F}_\alpha} = U_\alpha$. Так как множество $\{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в E_{4n+1}, а значит, и в E, то в силу теоремы 2 множество $\mathscr{B} = \{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} \mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $(A^\infty(\Omega))^*$. Но тогда существуют числа $l \in \mathbb{Z}_+$ и $c_3 > 0$ такие, что

$$|\mathscr{F}_\alpha(f)| \leqslant \frac{c_3 q_l(f)}{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)}}, \quad f \in A^\infty(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{6}$$

Действительно, в противном случае для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдутся функционал $M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} F_{\alpha_j} \in \mathscr{B}$ и функция $f_j \in A^\infty(\Omega)$ такие, что

$$|\mathscr{F}_{\alpha_j}(f_j)| > \frac{j q_j(f_j)}{M_{|\alpha_j|}^{(m+4n+1)}}\ .$$

Определим функции $\psi_j(z) = \frac{f_j(z)}{\sqrt{j} q_j(f_j)}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Поскольку для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in A^\infty(\Omega)$ имеем $q_m(f) \leqslant q_{m+1}(f)$, то $q_m(\psi_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Таким образом, $\psi_j \to 0$ в $A^\infty(\Omega)$ при $j \to \infty$ и, значит, множество $B = \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ ограничено в $A^\infty(\Omega)$. Так как $\mathscr{B}$ — ограниченное множество в $(A^\infty(\Omega))^*$, то найдется число $\mu > 0$ такое, что $\mathscr{B} \subset \mu B^\circ$, где B° — поляра множества B в $(A^\infty(\Omega))'$. Таким образом, для любых $F \in \mathscr{B}$ и $\psi \in B$ имеем $|F(\psi)| \leqslant \mu$. Между тем, $M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} \mathscr{F}_{\alpha_j}(\psi_j) \to \infty$ при $j \to \infty$, так как

$$\left| M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} \mathscr{F}_{\alpha_j}(\psi_j) \right| = \frac{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} |\mathscr{F}_{\alpha_j}(f_j)|}{\sqrt{j} q_j(f_j)} > \sqrt{j}.$$

Итак, неравенство (6) доказано. Отметим, что согласно ему при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ для всех $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$|\mathscr{F}_\alpha(D^\alpha f)| \leqslant c_3 p_{m+5n+l+2}(f) \frac{M_{|\alpha|+l}^{(m+5n+l+2)}}{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)}}\ . \tag{7}$$

Положим теперь $\mathscr{F}(f) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \mathscr{F}_\alpha(D^\alpha f)$, $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. В силу неравенства (7) и следствия 2 функционал $\mathscr{F}$ является линейным непрерывным на $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Очевидно, $\widehat{\mathscr{F}} = F$. Таким образом, отображение L сюръективно.

Покажем, что отображение L взаимно однозначно. Пусть для $T \in (A_{\mathfrak{M}}(\Omega))'$ имеем $\widehat{T} \equiv 0$. Покажем, что $T(f) = 0$ для любого $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Так как T — линейный непрерывный функционал на $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$, то при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $c_4 > 0$ имеем

$$|T(f)| \leqslant c_4 p_m(f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega).$$

Воспользовавшись леммой 2, представим функционал T в виде:

$$T(f) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} T_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega),$$

где $T_\alpha \in A_c^*(\Omega)$, причем для норм $\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)}$ функционалов T_α имеем

$$\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)} \leqslant \frac{c_4}{M_{|\alpha|}^{(m)}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда получаем, что $\widehat{T}(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \widehat{T}_\alpha(z)z^\alpha$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$, причем, для целых функций $\widehat{T}_\alpha$ справедлива оценка

$$|\widehat{T}_\alpha(z)| \leqslant \frac{c_4 e^{H_\Omega(z)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{8}$$

Рассмотрим целую функцию $S(u,z) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \widehat{T}_\alpha(z)u^\alpha$, $z, u \in \mathbb{C}^n$. Пользуясь неравенством (8) и следствием 2, для $(u,z) \in \mathbb{C}^{2n}$ имеем

$$|S(u,z)| \leqslant c_4 e^{H_\Omega(z)} \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{|u|_n^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}^{(m)}} \leqslant c_4 c_5 e^{H_\Omega(z)+w_{m+n+1}(|u|_n)},$$

где $c_5 = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|}^{(m+n+1)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}$. Отметим, что $S(z,z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$, и функции H_Ω и w_{m+n+1} удовлетворяют условиям теоремы 3 (в силу неравенств (2) и (3)). Поэтому существуют функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такие, что $S(u,z) = \sum_{j=1}^n S_j(u,z)(u_j - z_j)$ ($(u,z) \in \mathbb{C}^{2n}$) и при некотором $p \in \mathbb{N}$, не зависящем от S,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{2n}} \frac{|S_j(u,z)|^2}{e^{2(H_\Omega(z)+w_{m+n+1}(|u|_n)+p\ln(1+\|(u,z)\|))}}\, d\lambda_{2n}(u,z) < \infty, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, пользуясь плюрисубгармоничностью функций $|S_j(u,z)|$ в $\mathbb{C}^{2n}$, неравенствами (2) и (3), получаем, что при некотором $c_6 > 0$

$$|S_j(u,z)| \leqslant c_6(1 + \|(u,z)\|)^p e^{H_\Omega(z)+w_{m+n+1}(|u|_n)}, \quad (u,z) \in \mathbb{C}^{2n},\ j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, при некотором $c_7 > 0$

$$|S_j(u,z)| \leqslant c_7(1 + \|z\|)^p e^{H_\Omega(z)+w_{m+n+p+1}(|u|_n)}, \quad (u,z) \in \mathbb{C}^{2n},\ j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Разложим S_j в степенной ряд по степеням u:

$$S_j(u,z) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} S_{j,\alpha}(z)u^\alpha, \quad (u,z) \in \mathbb{C}^{2n},\ j = 1, \ldots, n.$$

Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, неравенством (9) и равенством (5), получим

$$|S_{j,\alpha}(z)| \leqslant \frac{c_7(1 + \|z\|)^p e^{H_\Omega(z)}}{M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)}}.$$

По теореме 2 существуют функционалы $\Psi_{j,\alpha} \in (A^\infty(\Omega))^*$ такие, что $\widehat{\Psi}_{j,\alpha} = S_{j,\alpha}$. Ввиду последнего неравенства семейство $\left\{S_{j,\alpha} M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\, j=1,\ldots,n}$ ограничено в E. Значит (снова по теореме 2), семейство $\mathscr{B} = \left\{M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)} \Psi_{j,\alpha}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\, j=1,\ldots,n}$ ограничено в $(A^\infty(\Omega))^*$. Но в таком случае (как было показано ранее) найдутся числа $r \in \mathbb{Z}_+$ и $c_8 > 0$ такие, что при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $j = 1, \ldots, n$

$$|\Psi_{j,\alpha}(f)| \leqslant \frac{c_8 q_r(f)}{M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)}}, \quad f \in A^\infty(\Omega). \tag{10}$$

Для $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ с отрицательными компонентами, $j = 1, \ldots, n$ пусть $\Psi_{j,\alpha}$ — нулевой функционал из $(A^\infty(\Omega))^*$, $S_{j,\alpha}(z) = 0$ для $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда для $(u, z) \in \mathbb{C}^{2n}$ имеем

$$S(u,z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \big(S_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)}(z) - S_{j,\alpha}(z) z_j\big) u^\alpha.$$

Отсюда в силу теоремы 2 получаем, что

$$\widehat{T}_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{\Psi}_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)}(z) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\big(e^{\langle\lambda,z\rangle}\big)\right)\right), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Снова пользуясь теоремой 2, имеем

$$T_\alpha(f) = \sum_{j=1}^{n} \left(\Psi_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)}(f) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} f\right)\right), \quad f \in A^\infty(\Omega).$$

Поэтому для $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$

$$T(f) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \sum_{j=1}^{n} \left(\Psi_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)}(D^\alpha f) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(D^\alpha f)\right)\right).$$

Для $N \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \ldots, n$ определим множества

$$B_N = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \ \alpha_1 \leqslant N, \ldots, \alpha_n \leqslant N\},$$

$$R_{N,j} = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \ \alpha_1 \leqslant N, \ldots, \alpha_j = N, \ldots, \alpha_n \leqslant N\},$$

определим функционал T_N на $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ по правилу

$$T_N(f) = \sum_{\alpha \in B_N} \sum_{j=1}^{n} \left(\Psi_{j,(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_n)}(D^\alpha f) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(D^\alpha f)\right)\right).$$

Тогда $T(f) = \lim_{N\to\infty} T_N(f)$, $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Легко видеть (см. доказательство теоремы 2 в [11]), что

$$T_N(f) = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \Psi_{j,\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(D^\beta f)\right), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega).$$

Пользуясь по ходу неравенством (10), для любых $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$|T_N(f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \left|\Psi_{j,\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(D^\beta f)\right)\right|$$

$$\leqslant c_8 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \frac{\sup\limits_{\lambda\in\Omega,\, |\alpha|\leqslant r} \big|\big(D^\alpha\big(\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(D^\beta f)\big)(\lambda)\big|}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}} \leqslant c_8 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \frac{p_s(f) M_{|\beta|+r+1}^{(s)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}}$$

$$\leqslant c_8 n p_s(f) \sum_{|\beta| \geqslant N} \frac{M_{|\beta|+r+1}^{(s)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}} = c_8 n p_s(f) \sum_{|\beta| \geqslant N} \frac{M_{|\beta|}^{(s-r-1)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}}.$$

Положим теперь $s = m + 2n + p + r + 3$. При этом значении s ряд $\sum_{|\beta|\geqslant 0} \frac{M_{|\beta|}^{(s-r-1)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}}$ сходится (согласно следствию 2). Отсюда и из последнего неравенства следует, что для любого $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ $T_N(f) \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, $T(f) = 0$ для любого $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$.

Итак, L — линейное непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ на $P_{\mathfrak{M}}$. По теореме об открытом отображении [18, теорема 3.2], [19, приложение 1, теорема 2] L осуществляет топологический изоморфизм между $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $P_{\mathfrak{M}}$. $\rhd$

Благодарность. Выражаю искреннюю признательность рецензентам за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Литература

1. *Държавец Б. А.* Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных: Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.—Ростов н/Д: РГУ, 1983.—102 с.
2. *Musin I. Kh.* Spaces of functions holomorphic in convex bounded domains of $\mathbb{C}^n$ and smooth up to the boundary // Advances in Mathematics Research.—New York: Nova Science Publishers, 2002.—P. 63–74.
3. *Петров С. В.* Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2010.—№ 5.—С. 25–31.
4. *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $A^\infty(D)$ // Изв. вузов. Математика.—2019.—№ 1.—С. 29–41. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-1-29-41.
5. *Абанин А. В., Петров С. В.* Минимальные абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 3.—С. 13–30.
6. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl.—1980.—Vol. 115, № 2.—P. 33–58.
7. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
9. *Neymark M.* On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions // Ark. Math.—1969.—Vol. 7, № 6.—P. 577–594. DOI: 10.1007/BF02590896.
10. *Taylor B. A.* Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Commun. on Pure and Appl. Math.—1971.—Vol. 24, № 1.—P. 39–51.
11. *Musin I. Kh., Yakovleva P. V.* On a space of smooth functions on a convex unbounded set in admitting holomorphic extension in $\mathbb{C}^n$ // Central European Journal of Mathematics.—2012.—Vol. 10, № 2.—P. 665–692. DOI: 10.2478/s11533-011-0142-8.
12. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. Сб. переводов.—1957.—Т. 1, № 1.—С. 60–77.
13. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
14. *Валирон Ж.* Аналитические функции.—М.: Гостехиздат, 1957.—235 с.
15. *Эдвардс Р. Е.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1070 с.
16. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 10.—С. 57–86. DOI: 10.4213/sm516.
17. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Мир, 1986.—456 с.
18. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах.—М.: Наука, 1982.—240 с.
19. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—260 с.

Статья поступила 8 мая 2020 г.

Мусин Ильдар Хамитович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: musin_ildar@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 100–111

ON A SPACE OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS ON A BOUNDED CONVEX DOMAIN OF $\mathbb{C}^n$ AND SMOOTH UP TO THE BOUNDARY AND ITS DUAL SPACE

Musin, I. Kh.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: musin_ildar@mail.ru

Abstract. A locally convex space of holomorphic functions in a convex bounded domain of multidimensional complex space and smooth up to the boundary is considered in the article. The topology of this space is defined by a countable family of norms constructed with a help of some special logarithmically convex sequences. Due to conditions on the indicated sequences this space is a Fréchet–Schwartz space. The problem of description of the strong dual for this space in terms of the Laplace transforms of functionals is studied in the article. Interest in the problem is connected with the researches by B. A. Derjavets devoted to classical problems of theory of linear differential operators with constant coefficients and the researches by A. V. Abanin, S. V. Petrov and K. P. Isaev of modern problems of the theory of absolutely representing systems in various spaces of holomorphic functions with given boundary smoothness in convex domains of complex space with a help of obtained by them Paley–Wiener–Schwartz type theorems. The main result of the article is Theorem 1. It states that the Laplace transformation establishes an isomorphism between the strong dual for functional space under consideration and some space of entire functions of exponential type in $\mathbb{C}^n$ which is an inductive limit of weighted Banach spaces of entire functions. Note that in this case an analytic representation of the strong dual space is obtained under the less restrictions on the family $\mathfrak{M}$ than in an article of the author published in 2002. In the proof of Theorem 1 we apply the scheme taken from M. Neymark and B. A. Taylor. Also some previous results of the author are essentially used.

Key words: Laplace transform, entire functions, logarithmically convex sequence.

Mathematical Subject Classification (2000): 32A10, 46E10.

For citation: *Musin, I. Kh.* On a Space of Holomorphic Functions on a Bounded Convex Domain of $\mathbb{C}^n$ and Smooth Up to the Boundary and its Dual Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 100–111 (in Russian). DOI: 10.46698/t9892-7905-1143-o.

References

1. *Derjavets, B. A. Differencial'nye operatory s postoyannymi koefficientami v prostranstvah analiticheskikh funkcij mnogikh kompleksnykh peremennykh: Diss. na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiz.-mat. nauk* [Differential Operators with Constant Coefficients in Spaces of Analytic Functions of Several Complex Variables], Thesis, Rostov-on-Don, RSU, 1983, 102 p. (in Russian).
2. *Musin, I. Kh.* Spaces of Functions Holomorphic in Convex Bounded Domains of $\mathbb{C}^n$ and Smooth up to the Boundary, *Advances in Mathematics Research*, New York, Nova Science Publishers, 2002, pp. 63–74.
3. *Petrov, S. V.* Existence of Absolutely Representing Systems of Exponentials in Spaces of Analytic Functions, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestv. nauki* [*Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*], 2010, no. 5, pp. 25–31 (in Russian).

4. *Isaev, K. P.* Representing Systems of Exponentials in Projective Limits of Weigth Subspaces of $A^\infty(D)$, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*, 2019, no. 1, pp. 29–41 (in Russian). DOI: 10.26907/0021-3446-2019-1-29-41.
5. *Abanin, A. V. and Petrov, S. V.* Minimal Absolutely Representing Systems of Exponential Functions in Spaces of Analytic Functions with Given Boundary Smoothness, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], 2012, vol. 14, no. 3 pp. 13–30 (in Russian).
6. *Dyn'kin, E. M.* Pseudoanalytic Extension of Smooth Functions. The Uniform Scale, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1980, vol. 115, no. 2, pp. 33–58.
7. *Leont'ev, A. F. Ryady eksponent* [Rows of Exhibitors], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
8. *Korobeinik, Yu. F.* Representing Systems, *Russian Math. Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
9. *Neymark, M.* On the Laplace Transform of Functionals on Classes of Infinitely Differentiable Functions, *Ark. Math.*, 1969, vol. 7, no. 6, pp. 577–594. DOI:10.1007/BF02590896.
10. *Taylor, B. A.* Analytically Uniform Spaces of Infinitely Differentiable Functions, *Commun. on Pure and Appl. Mathematics*, 1971, vol. 24, no. 1, pp. 39–51.
11. *Musin, I. Kh. and Yakovleva, P. V.* On a Space of Smooth Functions on a Convex Unbounded Set in Admitting Holomorphic Extension in $\mathbb{C}^n$, *Central European Journal of Mathematics*, 2012, vol. 10, no. 2, pp. 665–692. DOI: 10.2478/s11533-011-0142-8.
12. *Sebashtyan-i-Silva, Zh.* Some Classes of Locally Convex Spaces that are Important in Applications, *Matematika, Sbornik perevodov* [*Maths. Collection of Translations*], 1957, vol. 1, no. 1, pp. 60–77.
13. *Zharinov, V. V.* Compact Families of Locally Convex Topological Vector Spaces, Frechet–Schwartz and Dual Frechet–Schwartz Spaces, *Russian Math. Surveys*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 105–143. DOI: 10.1070/RM1979v034n04ABEH002963.
14. *Valiron, G. Analiticheskie funkcii* [Analytic Functions], Moscow, Gostekhizdat, 1957, 235 p. (in Russian).
15. *Edwards, R. E. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York–Toronto–London, Holt, Pineart and Winston, 1965, 781 p.
16. *Musin, I. Kh.* Fourier–Laplace Transformation of Functionals on a Weighted Space of Infinitely Smooth Functions, *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1477–1506. DOI: 10.4213/sm516.
17. *Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators II. Differential Operators with Constant Coefficients*, Berlin, Springer Verlag, 1983, 389 p.
18. *Napalkov, V. V. Uravneniya svertki v mnogomernykh prostranstvakh* [Convolution Equations in Multidimensional Spaces], Moscow, Nauka, 1982, 240 p. (in Russian).
19. *Robertson, A. P. and Robertson, W. J. Topological Vector Spaces*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1964, 158 p.

Received May 8, 2020

Ildar Kh. Musin
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 112–123

УДК 517.98
DOI 10.46698/p4238-0191-2122-t

BOUNDED COMPOSITION OPERATORS ON WEIGHTED FUNCTION SPACES IN THE UNIT DISK

S. Hua[1], **L. H. Khoi**[1] **and P. T. Tien**[2,3]

[1] School of Physical and Mathematical Sciences, Nanyang Technological University, 21 Nanyang Link, Singapore 637371;
[2] University of Science, Vietnam National University, 334 Nguyen Trai St., Hanoi, Vietnam;
[3] TIMAS, Thang Long University, Nghiem Xuan Yem, Hoang Mai, Hanoi, Vietnam
E-mail: M170129@e.ntu.edu.sg; lhkhoi@ntu.edu.sg, phamtien@vnu.edu.vn

Dedicated to Professor Yu. F. Korobeinik
on the occasion of his 90th birthday

Abstract. We introduce a general class of weighted spaces $\mathscr{H}(\beta)$ of holomorphic functions in the unit disk $\mathbb{D}$, which contains several classical spaces, such as Hardy space, Bergman space, Dirichlet space. We characterize boundedness of composition operators C_φ induced by affine and monomial symbols φ on these spaces $\mathscr{H}(\beta)$. We also establish a sufficient condition under which the operator C_φ induced by the symbol φ with relatively compact image $\varphi(\mathbb{D})$ in $\mathbb{D}$ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$. Note that in the setting of $\mathscr{H}(\beta)$, the characterizations of boundedness of composition operators C_φ depend closely not only on functional properties of the symbols φ but also on the behavior of the weight sequence β.

Key words: composition operator, weighted space, weight sequence, holomorphic function, unit disk.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D15, 47B37.

For citation: *Hua, S., Khoi, L. H. and Tien, P. T.* Bounded Composition Operators on Weighted Function Spaces in the Unit Disk, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 112–123. DOI: 10.46698/p4238-0191-2122-t.

1. Introduction

Let $\mathscr{H}$ be a space of holomorphic functions on some domain G of the complex plane $\mathbb{C}$. For a holomorphic self-map φ of G, the *composition operator* C_φ is defined as

$$C_\varphi f = f \circ \varphi, \quad f \in \mathscr{H}.$$

Researchers are interested in the relation between the operator properties of C_φ and the functional properties of the symbol φ. Questions about boundedness, compactness, compact difference, essential norm, cyclicity, complex symmetry and so on, have been considered. These topics are interesting and have received great attention during the past several decades. We refer the reader to the excellent monographs [1–3] and references therein for more detailed information.

Many studies have been done on composition operators on various different spaces of holomorphic functions on the unit disk or the unit ball, such as Hardy spaces, Bergman spaces, Dirichlet spaces, spaces of bounded holomorphic function and weighted Banach spaces with sup-norm (see, e.g., [4–9]).

Recently, in [10] a general class of weighted Hardy spaces of entire functions, which contains the Fock and Fock-type spaces as well as several other well-known spaces, has been considered and bounded composition operators on these spaces have been studied. It is interesting that the characterization for boundedness of such operators depends closely on the behavior of the weight sequence.

The aim of this paper is to introduce a general class of weighted spaces of holomorphic functions in the unit disk and study two special forms of bounded composition operators on these spaces. This newly introduced class of spaces includes classical Hardy, Bergman and Dirichlet spaces.

So far as we know, this class of spaces has not been treated before. We hope that our approach may inspire the reader to investigate further properties and obtain more general results in the future.

The structure of the paper is as follows. In section 2, the class of weighted spaces $\mathscr{H}(\beta)$ of holomorphic functions in the unit disk is performed and a short but essential comparison with the case $\mathscr{H}(\beta, E)$ of entire functions is discussed. Section 3 deals with boundedness of composition operators C_φ induced by affine symbols φ, while in Section 4, the monomial symbols are of our interest.

2. Preliminaries

In 1974 Shields [11] introduced the following weighted spaces. Let a domain G contain the origin and $\beta = \{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ be a sequence of positive numbers. The weighted space $\mathscr{H}(\beta)$ is defined as follows:

$$\mathscr{H}(\beta) = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in \mathscr{O}(G) : \|f\| = \left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 \beta_n^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

where $\mathscr{O}(G)$ is the space of all holomorphic functions on G. This space $\mathscr{H}(\beta)$ is an inner product space with

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^\infty a_n \overline{b_n} \beta_n^2,$$

for every $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ and $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$. Note that $\mathscr{H}(\beta)$ is not necessarily a complete normed space.

Denote by r the radius of the smallest open disk centered at the origin which contains G. It is well known that $\mathscr{H}(\beta)$ is a Hilbert space if and only if $\liminf_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} \geqslant r$. In particular, in case $\lim_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = \infty$, we have a Hilbert space of entire functions $\mathscr{H}(\beta, E)$. It is, however, worth to note that since the case of entire functions $\mathscr{H}(\beta, E)$ is essentially different from the one of holomorphic functions $\mathscr{H}(\beta)$ and moreover, it is already considered in [10], we eliminate those weights for which $\lim_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} = \infty$.

So throughout this paper, we pay our attention to a model case when G is the open unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and so the condition

$$1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \beta_n^{1/n} < \infty \tag{1}$$

is supposed to hold.

We note that for $\beta_n = 1$, $\beta_n = (n+1)^{-\frac{1}{2}}$, and $\beta_n = (n+1)^{\frac{1}{2}}$, the space $\mathscr{H}(\beta)$ becomes respectively the classical Hardy space $H^2(\mathbb{D})$, Bergman space $A^2(\mathbb{D})$, and Dirichlet space $\mathscr{D}^2(\mathbb{D})$ in the unit disk.

Note also that $h_n(z) = \beta_n^{-1} z^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ form an orthonormal basis for the Hilbert space $\mathscr{H}(\beta)$.

We can easily verify that $\mathscr{H}(\beta)$ is a functional Hilbert space, and hence C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$ if and only if it maps $\mathscr{H}(\beta)$ into itself.

It is important to have a remark that in the case of weighted spaces of entire functions $\mathscr{H}(\beta, E)$, bounded composition operators C_φ can be induced only by affine functions $\varphi(z) = az + b$. However, in the case of weighted spaces $\mathscr{H}(\beta)$ in the unit disk, the situation is much more complicated. It is not true anymore, as we can see in some examples below.

Example 2.1. For the symbol $\varphi(z) = z^2$, the composition operator C_φ is bounded on each of the classical Hardy, Bergman, and Dirichlet spaces; however C_φ is unbounded in $\mathscr{H}(\beta)$ in the case $\beta_n = \lambda^n$ with $\lambda > 1$.

$\lhd$ When $\varphi(z) = z^2$, for every $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{H}(\beta)$, we have

$$\|C_\varphi f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})},$$

$$\|C_\varphi f\|^2_{A^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{n+1} = \|f\|^2_{A^2(\mathbb{D})},$$

$$\|C_\varphi f\|^2_{\mathscr{D}^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (2n+1) \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1) = 2\|f\|^2_{\mathscr{D}^2(\mathbb{D})}.$$

For $\beta_n = \lambda^n$ with $\lambda > 1$, we take a function $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n n} z^n \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$. Then

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n} n^2} \lambda^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

which shows that $f(z) \in \mathscr{H}(\beta)$. However,

$$\|C_\varphi f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_{2n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n} n^2} \lambda^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{n^2},$$

which diverges since $\lambda > 1$. $\rhd$

Remark 2.2. Replacing $\varphi(z) = z^2$ by monomials $\varphi(z) = z^m$ with some integer number $m > 1$, by the same techniques, we can obtain similar results.

3. The Case when $\varphi(z)$ is Affine

In this section, we study boundedness of composition operators on weighted spaces $\mathscr{H}(\beta)$ induced by affine symbols. This study is inspired by the case of entire functions [10].

Let the symbol $\varphi(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$. For C_φ to be well-defined, $\varphi(z)$ needs to be a self-map of $\mathbb{D}$.

We have the following simple result.

Lemma 3.1. *An affine function $\varphi(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ is a self-map of $\mathbb{D}$ if and only if either of the following conditions holds:*

(i) $a = 0$ *and* $|b| < 1$,

(ii) $0 < |a| \leqslant 1$ *and* $|b| \leqslant 1 - |a|$.

◁ Suppose that $\varphi(z) = az + b$ is a self-map of $\mathbb{D}$. If $a = 0$, then $|\varphi(z)| = |b| < 1$ and hence we get (i). If $a \neq 0$, then $\varphi(\mathbb{D})$ is an open disk centered at the point b of radius $|a|$. Since φ is a self map of $\mathbb{D}$, $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. In order for the image disk to be fully contained in the unit disk, we have $|a| \leqslant 1$ and $1 - |b| \geqslant |a|$, which gives (ii).

Conversely, suppose $\varphi(z)$ satisfies (i) or (ii). If (i) holds, then $|\varphi(z)| = |b| < 1$. In case (ii) holds, $|\varphi(z)| = |az + b| \leqslant |az| + |b| < |a| + |b| \leqslant 1$ for all $z \in \mathbb{D}$. In both cases φ is a self-map of $\mathbb{D}$. ▷

From Lemma 3.1, we notice that there are two trivial cases of affine symbols which always induce bounded composition operators. The first case is $\varphi(z) = b$ with $|b| < 1$. The second case is $\varphi(z) = az$ with $0 < |a| \leqslant 1$. In particular, when $|a| = 1$, this is a unitary operator.

As a result, throughout this section, we are interested only in the symbol $\varphi(z) = az + b$ satisfying

$$0 < |a| \leqslant 1 - |b| < 1. \tag{2}$$

With $h_n(z) = \frac{1}{\beta_n} z^n$, we get

$$C_\varphi h_n(z) = \frac{1}{\beta_n}(az + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \frac{z^k}{\beta_n}.$$

Thus,

$$\|C_\varphi h_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} |a|^k |b|^{n-k} \frac{\beta_k}{\beta_n} \right)^2. \tag{3}$$

and

$$\langle C_\varphi h_n, h_k \rangle \quad = \quad \begin{cases} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \frac{\beta_k}{\beta_n}, & n \geqslant k; \\ 0, & k > n. \end{cases} \tag{4}$$

In the sequel, we consider separately necessary conditions and sufficient conditions for boundedness of C_φ on $\mathscr{H}(\beta)$. As it will be seen, several of necessary conditions are "very close" to sufficient ones. We note that some proofs are similar to those of the case of entire functions in [10].

3.1. Necessary conditions. We have following necessary conditions for boundedness of C_φ on $\mathscr{H}(\beta)$, which are similar to those appearing in [10] and proved analogously.

Proposition 3.2. *Let* $\varphi(z) = az + b$ *satisfy* (2). *Consider three statements:*

(i) C_φ *is a bounded composition operator on* $\mathscr{H}(\beta)$.

(ii) $\{\|C_\varphi h_n\|\}_{n \geqslant 0}$ *is a bounded sequence.*

(iii) *The following two inequalities hold:*

$$|a| \limsup_{k \to \infty} \left(\sup_{m \geqslant 0} \left\{ \binom{k+m}{k} |b|^m \frac{\beta_k}{\beta_{k+m}} \right\}^{\frac{1}{k}} \right) \leqslant 1, \tag{5}$$

and

$$|b| \limsup_{m \to \infty} \left(\sup_{k \geqslant 0} \left\{ \binom{k+m}{k} |a|^k \frac{\beta_k}{\beta_{k+m}} \right\}^{\frac{1}{m}} \right) \leqslant 1. \tag{6}$$

Then the implications (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) *hold.*

◁ (i) $\implies$ (ii). Obviously,

$$\|C_\varphi h_n\| \leqslant \|C_\varphi\|_{\mathrm{op}} \quad \text{for all } \ n \geqslant 0,$$

where $\|C_\varphi\|_{\mathrm{op}}$ is the operator norm of C_φ.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). By (4) and the Cauchy–Schwarz inequality,

$$\binom{k+m}{k}|a|^k|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}} = |\langle C_\varphi h_{k+m}, h_k\rangle| \leqslant \|C_\varphi h_{k+m}\|$$

for all $k, m \geqslant 0$. From this inequality and boundedness of $\{\|C_\varphi h_n\|\}_{n\geqslant 0}$, both (5) and (6) follow. $\rhd$

3.2. Sufficient Conditions. The following lemma is adapted from [10, Lemmas 12 and 13] for the case of entire functions. We sketch the proof for the sake of completeness.

Lemma 3.3. *Let $\varphi(z) = az + b$ satisfy* (2). *Suppose that the sequence $\{\|C_\varphi h_n\|\}_{n\geqslant 0}$ is bounded by some $M > 0$. Then there exists an integer $s \in \mathbb{N}$ such that*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=(s+1)k}^{\infty}|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 < \infty.$$

$\lhd$ First, let $n \geqslant k \geqslant 0$. By (3) and (4), we have

$$\begin{aligned}(1+|a|)^{n-k}|a|^k|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle| &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}|a|^\ell|a|^k\binom{n}{k}|a|^k|b|^{n-k}\frac{\beta_k}{\beta_n}\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{k+\ell}{\ell}|a|^k|b|^\ell\frac{\beta_k}{\beta_{k+\ell}}\binom{n}{k+\ell}|a|^{k+\ell}|b|^{n-k-\ell}\frac{\beta_{k+\ell}}{\beta_n}\\ &\leqslant \sum_{\ell=0}^{n-k}\|C_\varphi h_{k+\ell}\|\|C_\varphi h_n\| \leqslant (n-k+1)M^2.\end{aligned}$$

This implies that

$$|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle| \leqslant \frac{(n-k+1)M^2}{(1+|a|)^{n-k}|a|^k} \quad \text{for all } n \geqslant k \geqslant 0.$$

Next, let $s \in \mathbb{N}$ satisfy $(1+|a|)^s|a| > 1$. Then putting $\ell = n-(s+1)k$ and using the above inequality, we get

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=(s+1)k}^{\infty}|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 &\leqslant M^4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(sk+\ell+1)^2}{(1+|a|)^{2(sk+\ell)}|a|^{2k}}\\ &\leqslant M^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(sk+1)^2}{\{(1+|a|)^s|a|\}^{2k}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(\ell+1)^2}{(1+|a|)^{2\ell}},\end{aligned}$$

where the first series converges by the choice of s, while the convergence of the second series is obvious. $\rhd$

Now we are ready to state and prove sufficient conditions for boundedness of C_φ on $\mathscr{H}(\beta)$.

Proposition 3.4. *Let $\varphi(z) = az + b$ satisfy* (2). *Suppose the following condition holds*

$$\sup_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}k|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2\right) < \infty. \tag{7}$$

Then C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$.

◁ By (7), there is a number $M > 0$ such that

$$\sum_{k=1}^{n} k|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 \leqslant M^2 \quad \text{for every } \ n \geqslant 1.$$

Then the sequence $\{\|C_\varphi h_n\|\}_{n\geqslant 0}$ is also bounded by M, because

$$\|C_\varphi h_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2.$$

Hence, by Lemma 3.3, there exists a number $s \in \mathbb{N}$ such that

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 < \infty.$$

Take and fix an arbitrary function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n(z)$ in $\mathscr{H}(\beta)$. First we compute $\langle C_\varphi f, h_k\rangle$ in two cases with respect to k.

If $k \geqslant 1$, then, by (4),

$$\langle C_\varphi f, h_k\rangle = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle = \sum_{n=k}^{(s+1)k-1} c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle + \sum_{n=(s+1)k}^{\infty} c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle,$$

which implies that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\langle C_\varphi f, h_k\rangle|^2 &\leqslant \left(\sum_{n=k}^{(s+1)k-1} |c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|\right)^2 + \left(\sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|\right)^2 \\
&\leqslant sk \sum_{n=k}^{(s+1)k-1} |c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 + \left(\sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |c_n|^2\right) \left(\sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2\right) \\
&\leqslant sk \sum_{n=k}^{(s+1)k-1} |c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 + \|f\|^2 \left(\sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2\right).
\end{aligned}$$

If $k = 0$, then $\langle C_\varphi f, h_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle = \sum_{n=(s+1)k}^{\infty} c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle$, which implies that

$$\frac{1}{2}|\langle C_\varphi f, h_k\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2 \left(\sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2\right).$$

Next taking summation over $k \geqslant 0$ and using the calculations above, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|C_\varphi f\|^2 &\leqslant s\sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=k}^{(s+1)k-1} |c_n \langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 + \|f\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=(s+1)k}^{\infty} |\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2\right) \\
&\leqslant s\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \sum_{k=1}^{n} k|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 + A\|f\|^2 \leqslant sM^2\|f\|^2 + A\|f\|^2.
\end{aligned}$$

From this we conclude that C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$. ▷

We can modify sufficient condition (7) by a slightly stronger condition.

Corollary 3.5. *In Proposition* 3.4, *condition* (7) *can be replaced by the following: There exists a function* $h\colon \{0,1,2,\ldots\} \to \mathbb{R}$ *such that*

$$\sum_{k=1}^{\infty} kh^2(k) < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{m\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|a|^k|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\} \leqslant h(k), \tag{8}$$

for every $k \geqslant 0$.

$\lhd$ For any $n \geqslant 1$, by (4), we have

$$\sum_{k=1}^{n} k|\langle C_\varphi h_n, h_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n} k\left(\binom{n}{k}|a|^k|b|^{n-k}\frac{\beta_k}{\beta_n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} kh^2(k) < \infty,$$

which implies (7). Thus, by Proposition 3.4, C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$. $\rhd$

We can further develop condition (8).

Corollary 3.6. *In Corollary* 3.5, *condition* (8) *can be further replaced by the following inequality*

$$|a|\limsup_{k\to\infty}\left(\sup_{m\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{k}}\right) < 1, \tag{9}$$

which is very closed to necessary condition (5) *in Proposition* 3.2.

$\lhd$ Suppose condition (9) is satisfied. Then there exists $r \in (0,1)$ such that

$$|a|\limsup_{k\to\infty}\left(\sup_{m\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{k}}\right) < r < 1.$$

For this r, by the properties of lim sup, we can find a constant $M > 0$ (depending only on r) so that

$$\sup_{m\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|a|^k|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\} \leqslant Mr^k \quad \text{for all } k \geqslant 0.$$

Taking $h(k) = Mr^k$, we can easily verify that $\sum_{k=1}^{\infty} kh^2(k) < \infty$. Thus we obtain condition (8) and so C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$. $\rhd$

Corollary 3.6 shows that the strict version of (5) is a sufficient condition for boundedness of C_φ on $\mathscr{H}(\beta)$. Using some ideas in the proof of [10, Lemma 18], we prove that the same result is true for the strict version of (6).

Proposition 3.7. *Let* $\varphi(z) = az + b$ *satisfy* (2) *such that*

$$|b|\limsup_{m\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|a|^k\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{m}}\right) < 1. \tag{10}$$

Then C_φ *is bounded on* $\mathscr{H}(\beta)$.

$\lhd$ Similarly to the proof of Corollary 3.6, there exist $M > 0$ and $r \in (0,1)$ such that

$$\sup_{k\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|a|^k|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\} \leqslant Mr^m \quad \text{for all } m \geqslant 0.$$

From this and (4), it follows that

$$|\langle C_\varphi h_{k+m}, h_k\rangle| = \binom{k+m}{k}|a|^k|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}} \leqslant Mr^m \quad \text{for all } m,k \geqslant 0. \tag{11}$$

Take and fix an arbitrary polynomial $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n(z) \in \mathscr{H}(\beta)$, where only finite many c_n are nonzero. By (4), we get

$$C_\varphi f = \sum_{k=0}^{\infty}\langle C_\varphi f, h_k\rangle h_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{k+m}\langle C_\varphi h_{k+m}, h_k\rangle h_k = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\langle C_\varphi h_{k+m}, h_k\rangle h_k.$$

This and (11) imply that

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\| &\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\left\|\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\langle C_\varphi h_{k+m}, h_k\rangle h_k\right\| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_{k+m}|^2|\langle C_\varphi h_{k+m}, h_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M\|f\|\sum_{m=0}^{\infty} r^m = \frac{M}{1-r}\|f\|.\end{aligned}$$

From this and the density of the set of all polynomials in $\mathscr{H}(\beta)$, the assertion follows. ▷

Combining Proposition 3.2, Corollary 3.6 and Proposition 3.7, we have the following important summary for boundedness of C_φ on $\mathscr{H}(\beta)$.

Theorem 3.8. *Let $\varphi(z) = az + b$ satisfy* (2).

(1) *If the operator C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$, then the following two inequalities hold:*

(i) $|a|\limsup\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant 1,$

(ii) $|b|\limsup\limits_{m\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|a|^k\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{m}}\right) \leqslant 1.$

(2) *Conversely, if one of the following conditions hold:*

(iii) $|a|\limsup\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|b|^m\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{k}}\right) < 1,$

(iv) $|b|\limsup\limits_{m\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geqslant 0}\left\{\binom{k+m}{k}|a|^k\frac{\beta_k}{\beta_{k+m}}\right\}^{\frac{1}{m}}\right) < 1,$

then the operator C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$.

4. The Case when $\varphi(z)$ are Monomials

4.1. Monomial symbols. Let the symbol $\varphi(z) = cz^m$ ($c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$). As in the previous section, to define well C_φ the symbol should be a self-map of $\mathbb{D}$. We can easily check that it is so if and only if $0 < |c| \leqslant 1$, i. e. $c \in \overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}$. Thus throughout this section, such a symbol φ is supposed to consider.

We can easily prove the following criterion for boundedness of C_φ on $\mathscr{H}(\beta)$.

Theorem 4.1. *Let $c \in \overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}$ and $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. The operator C_φ induced by the symbol $\varphi(z) = cz^m$ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$ if and only if*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|c|^n\beta_{mn}}{\beta_n} < \infty. \tag{12}$$

Moreover, in this case, the above supremum is equal to $\|C_\varphi\|_{\mathrm{op}}$.

$\lhd$ Suppose that C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$. Then for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\|C_\varphi\|_{\mathrm{op}} \geqslant \|C_\varphi h_n\| = \frac{1}{\beta_n}\|(cz^m)^n\| = \frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n},$$

which gives

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n} \leqslant \|C_\varphi\|_{\mathrm{op}}.$$

Conversely, suppose that (12) holds. Then for every function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{H}(\beta)$, we have

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|^2 =& \|f(cz^m)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |c|^{2n} \beta_{mn}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 \left(\frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n}\right)^2 \|f\|^2.\end{aligned}$$

This shows that C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$ and also

$$\|C_\varphi\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n}.$$

From both necessity and sufficiency it follows that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|c|^n \beta_{mn}}{\beta_n} = \|C_\varphi\|_{\mathrm{op}}. \rhd$$

The following is a consequence of Theorem 4.1.

Corollary 4.2. *Let* $c \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ *and* $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *If*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\beta_{mn}}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|c|},$$

then C_{cz^m} *is unbounded on* $\mathscr{H}(\beta)$. *In particular, if*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\beta_{mn}}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \infty,$$

then C_{cz^m} *is unbounded on* $\mathscr{H}(\beta)$ *for every* $0 < |c| \leqslant 1$.

$\lhd$ By the hypothesis, there exist a sequence $(n_k) \uparrow \infty$ and a number $\alpha > 0$ such that

$$\left(\frac{\beta_{mn_k}}{\beta_{n_k}}\right)^{\frac{1}{n_k}} > \alpha > \frac{1}{|c|} \quad \text{for every } k \in \mathbb{N}.$$

Hence,

$$\frac{|c|^{n_k} \beta_{mn_k}}{\beta_{n_k}} > (\alpha|c|)^{n_k} \to \infty \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

From this and Theorem 4.1 the assertion follows. $\rhd$

4.2. Some Notes on a General Symbol. In view of Corollary 4.2, we see that the situation for composition operators C_φ on general weighted spaces $\mathscr{H}(\beta)$ is much more complicated than on classical Hardy space $H^2(\mathbb{D})$ and Bergman space $A^2(\mathbb{D})$. More precisely, it is well-known that every holomorphic self-map of $\mathbb{D}$ with relatively compact image in $\mathbb{D}$ induces a bounded composition operator on these spaces. However, by Corollary 4.2, this is not valid for general weighted spaces $\mathscr{H}(\beta)$.

We end this section with the following sufficient conditions for boundedness of the operators C_φ induced by such holomorphic self-maps of $\mathbb{D}$.

Theorem 4.3. *Let φ be a holomorphic self-map of $\mathbb{D}$ such that $\overline{\varphi(\mathbb{D})}$ is compact in $\mathbb{D}$. If*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2 < \infty, \tag{13}$$

then C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$.

$\lhd$ Take a number $r \in (0,1)$ so that $\varphi(\mathbb{D}) \subset r\mathbb{D}$. Then, for every $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{H}(\beta)$, we have

$$\sup_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\beta_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_r \|f\|,$$

where

$$C_r := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\beta_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \text{ since, by (1), } \limsup_{n\to\infty} \frac{r^2}{\beta_n^{\frac{2}{n}}} \leqslant r^2 < 1.$$

Now writing $C_\varphi f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ and using the Cauchy integral formula, for every $\delta \in (0,1)$, we get

$$|b_n| = \frac{|(C_\varphi f)^n(0)|}{n!} \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|z|=\delta} \frac{C_\varphi f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leqslant \frac{1}{\delta^n} \max_{|z|=\delta} |C_\varphi f(z)| \leqslant \frac{1}{\delta^n} \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant \frac{C_r}{\delta^n} \|f\|,$$

which implies that $|b_n| \leqslant C_r \|f\|$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Consequently,

$$\|C_\varphi f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_r \|f\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

From this the assertion follows. $\rhd$

Remark 4.4. Condition (13) is essential but not sharp for Theorem 4.3. Indeed, for

$$\beta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1, & n \equiv 1,2,3 \mod 4, \\ n^n, & n \equiv 0 \mod 4,\ n \neq 0, \end{cases}$$

(13) does not hold and, by Corollary 4.2, C_{cz^m} is unbounded on $\mathscr{H}(\beta)$ for every $c \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ and $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

On the other hand, for $\beta_n = 1$, (13) also does not hold, however in this case $\mathscr{H}(\beta)$ is Hardy space $H^2(\mathbb{D})$ and hence C_φ is bounded on $\mathscr{H}(\beta)$ for every holomorphic function φ with $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$.

References

1. *Cowen, C. C. and MacCluer, B. D. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*, Boca Raton, CRC Press, 1995.
2. *Shapiro, J. H. Compositions Operators and Classical Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. *Zhu, K. Operator Theory in Function Spaces*, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2007.
4. *Bonet, J., Domański, P., Lindström, M. and Taskinen, J.* Composition Operators Between Banach Spaces of Analytic Functions, *Journal of the Australian Mathematical Society* (Series A), 1998, vol. 64, pp. 101–118. DOI: 10.1017/S1446788700001336.
5. *Chalendar, I., Gallardo-Gutierrez, E. A. and Partington, J. R.* Weighted Composition Operators on the Dirichlet Space: Boundedness and Spectral Properties, *Mathematische Annalen*, 2015, vol. 363, pp. 1265–1279. DOI: 10.1007/s00208-015-1195-y.
6. *Contreras, M. D. and Hernández-Díaz, A. G.* Weighted Composition Operators in Weighted Banach Spaces of Analytic Functions, *Journal of the Australian Mathematical Society* (Series A), 2000, vol. 69, pp. 41–60. DOI: 10.1017/S144678870000183X.
7. *Izuchi, K. J. and Ohno, S.* Path Connected Components in Weighted Composition Operators on h^∞ and H^∞ with the Operator Norm, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2013, vol. 365, no. 7, pp. 3593–3612. DOI: 10.1090/S0002-9947-2012-05730-8.
8. *MacCluer, B. D. and Shapiro, J. H.* Angular Derivatives and Compact Composition Operators on the Hardy and Bergman Spaces, *Canadian Journal of Mathematics*, 1986, vol. 38, pp. 878–906. DOI: 10.4153/CJM-1986-043-4.
9. *Shapiro, J. H. and Sundberg, C.* Isolation Amongst the Composition Operators, *Pacific Journal of Mathematics*, 1990, vol. 145, no. 1, pp. 117–152. DOI: 10.2140/pjm.1990.145.117.
10. *Tan, P. L. and Khoi, L. H.* Bounded Composition Operators on General Weighted Hardy Spaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2020, vol. 14, article 54. DOI: 10.1007/s11785-020-01009-y.
11. *Shields, A. L. Weighted Shift Operators and Analytic Function Theory, Maths. Topics in Operator Theory*, vol. 128, Math. Surveys, no. 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974, 49 p.

Received June 8, 2020

Shanshan Hua
School of Physical and Mathematical Sciences,
Nanyang Technological University,
21 Nanyang Link, Singapore 637371,
E-mail: M170129@e.ntu.edu.sg;

Le Hai Khoi
School of Physical and Mathematical Sciences,
Nanyang Technological University,
21 Nanyang Link, Singapore 637371,
E-mail: lhkhoi@ntu.edu.sg
https://orcid.org/0000-0002-4282-3449

Pham Trong Tien
University of Science, Vietnam National University,
334 Nguyen Trai St., Hanoi, Vietnam;

TIMAS, Thang Long University,
Nghiem Xuan Yem, Hoang Mai, Hanoi, Vietnam,
E-mail: phamtien@vnu.edu.vn
https://orcid.org/0000-0001-5444-4393

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 112–123

ОГРАНИЧЕННЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Хуа С.[1], Хой Л. Х.[1], Тиен Ф. Ч.[2,3]

[1] Наньянский технологический университет, Сингапур;
[2] Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам;
[3] Тханг Лонг университет, Ханой, Вьетнам
E-mail: M170129@e.ntu.edu.sg; lhkhoi@ntu.edu.sg;
phamtien@vnu.edu.vn

Аннотация. Введен общий класс весовых пространств $\mathscr{H}(\beta)$ голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D}$, содержащий в качестве частных случаев классические пространства Харди, Бергмана и Дирихла. Полностью охарактеризована ограниченность на этих пространствах $\mathscr{H}(\beta)$ композиционных операторов C_φ, порожденных аффинными и мономиальными символами φ. Установлено также достаточное условие, при выполнении которого оператор C_φ, порожденный символом φ с относительно компактным образом $\varphi(\mathbb{D})$ в $\mathbb{D}$, является ограниченным на $\mathscr{H}(\beta)$. Отменим, что в пространствах $\mathscr{H}(\beta)$ описание ограниченности композиционных операторов C_φ зависит не только от функциональных свойств символов φ, но и от поведения весовой последовательности β.

Ключевые слова: композиционный оператор, весовое пространство, весовая последовательность, голоморфные функции, единичный круг.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D15, 47B37.

Образец цитирования: *Hua, S., Khoi L. H. and Tien, P. T.* Bounded Composition Operators on Weighted Function Spaces in the Unit Disk // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, № 3.—С. 112–123 (in English). DOI: 10.46698/p4238-0191-2122-t.

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 124–150

УДК 510.8 + 517.5
DOI 10.46698/i3178-1119-0009-t

ОДНОСТОРОННИЕ СХЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А. Б. Шишкин[1]

[1] Кубанский государственный университет,
Россия, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200
E-mail: `shishkin-home@mail.ru`

Посвящается 90-летию профессора Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Феномен двойственности наблюдается во всех областях математики и тесно связан с феноменом эквивалентности. Эти феномены дополняют друг друга и используются для переноса различных математических высказываний из одной области математики в другую и наоборот (двойственные и эквивалентные переходы). Основное отличие двойственности от эквивалентности состоит в использовании инволюции. Инволюция объекта — это преобразование объекта с подобным ему обратным преобразованием. Прямую и обратную инволюции принято отождествлять и говорить о повторной инволюции. Повторная инволюция объекта восстанавливает объект. Любая инволюция порождает свою двойственность, которая утверждается соответствующей теоремой двойственности. Теоремы двойственности являются двусторонними. Они позволяют осуществлять двойственные переходы в одну и другую стороны. Ослабим условия на инволюцию и будем считать, что ее повторное действие восстанавливает объект лишь наполовину (вместо равенства получаем неравенство). В этом случае для полного восстановления объекта потребуются уже две такие инволюции. Настоящая статья посвящена ослабленным (односторонним) инволюциям. В качестве таковых рассматриваются вполне изотонные отображения (они определены во втором разделе). Свойства этих отображений и их условно обратных отображений позволяют осуществлять половинчатые двойственные переходы — переходы лишь в одну сторону. Теоремы двойственности, утверждающие возможность таких переходов, мы называем односторонними схемами двойственности. Содержание работы представляет собой попытку подвести под все возможные односторонние схемы двойственности единую математическую базу, позволяющую переформулировать каждую из них в соответствии с единым стандартом. Такую возможность представляет возникшая в условиях теории спектрального синтеза в комплексной области трактовка двойственных переходов как переходов от инъективного (внутреннего) описания одних математических объектов к проективному (внешнему) описанию других. Инволюции, используемые в односторонних схемах двойственности, в свою очередь являются односторонними, и налагаемые на них ограничения существенно слабее. Это приводит к существенному расширению области возможного применения двойственных схем в исследовательской практике.

Ключевые слова: двойственность, теорема двойственности, инъективное описание, проективное описание.

Mathematical Subject Classification (2010): 14A15, 22D35, 32C37, 46B10, 47L50.

Образец цитирования: *Шишкин А. Б.* Односторонние схемы двойственности // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 124–150. DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

1. Введение

В разных областях математики возникают отдельные предложения или группы предложений, обычно объединяемые в блоки под общим названием *двойственность* (теория топологических сопряженных к локально выпуклым пространствам в функциональном анализе называется теорией двойственности; такое же название носит теория характеров в теории локально компактных групп и т. д.). Общие наблюдения позволяют сказать, что в основе понятия двойственности лежит понятие *дуальной пары* $\langle X, Y \rangle$ — пары пространств, обладающих зеркальными (двойственными) свойствами. Обнаружение дуальных пар является основной задачей *общей теории двойственности.* При этом теоремы, утверждающие дуальность конкретных пар, называются *теоремами двойственности.* Наличие дуальной пары позволяет осуществлять *двойственные переходы* — переносы конкретных математических высказываний из одной области в другую путем зеркальной (формальной) переформулировки. Эти переформулировки бывают и очень сложными, но сводятся к замене внутренних (инъективных) описаний множеств внешними (проективными) описаниями двойственных им множеств и наоборот. *Инъективное описание* множества — описание множества по какой-либо совокупности его подмножеств. *Проективное описание* множества — описание множества по какой-либо совокупности его надмножеств. Описание множества — композиция из инъективных и проективных описаний. Подобно тому как формула (композиция операций) наследует название последней выполняемой операции, любое описание множества является либо инъективным, либо проективным.

Таким образом, возникает новое понимание двойственных переходов как переходов от инъективных (соотв. проективных) описаний множеств к проективным (соотв. инъективным) описаниям двойственных им множеств. Правила (отображения), используемые при описании множеств, называются *дескрипторами.* Дескрипторы инъективного описания называются *интериоризаторами*, а дескрипторы проективного описания называются *экстериоризаторами.*

В качестве примера рассмотрим произвольные многозначные отображения $F : X \to Y$ и $G : Z \to T$. При заданных F и $y_0 \in Y$ задача описания прообраза $F^{-1}(y_0)$ (если отображение F является однозначным, то эта задача совпадает с классической задачей решения уравнения $F(x) = y_0$) является задачей инъективного описания. Ее решение предполагает переход от проективного описания (экстериоризатор — F) к инъективному описанию (интериоризатор — объединение). С другой стороны, пусть $G^{-1} : T \to Z$ — обратное многозначное отображение. При заданных G^{-1} и $z_0 \in Z$ задача описания образа $G(z_0)$ является задачей проективного описания. Ее решение предполагает переход от инъективного описания (интериоризатор G^{-1}) к проективному описанию (экстериоризатор — пересечение). Если отображения F и G находятся в определенной дуальной зависимости, то и рассмотренные здесь *задача инъективного описания* и *задача проективного описания* находятся в дуальной зависимости. Этот пример показывает, что при новом понимании двойственных переходов центральным объектом выступает уже дуальная пара отображений $\left\langle F, G^{-1} \right\rangle$ — *дуальная пара дескрипторов.* Исследование дуальной пары дескрипторов в классическом понимании равносильно исследованию упорядоченной совокупности из двух дуальных пар $\langle X, Y \rangle$ и $\langle Z, T \rangle$ или одной бипары $\langle \langle X, Y \rangle, \langle Z, T \rangle \rangle$.

Теоремы двойственности являются двусторонними. Они позволяют осуществлять двойственные переходы в одну и другую стороны. Наличие такой теоремы создает идеальные условия для применения взаимно обратных двойственных переходов в конкретной исследовательской практике. В этом состоит основное значение теорем двойственности. Основным недостатком теорем двойственности является их неширокая область применения. Предполагаемая возможность прямого и обратного двойственных переходов вынуждает накладывать на дуальные пары значительные ограничения, и это влияет на область их возможного использования.

В настоящей статье утверждается возможность односторонних теорем двойственности, которые предполагают двойственные переходы только в одну сторону. Такие теоремы мы называем *односторонними схемами двойственности.* Дуальные пары, используемые в односторонних схемах двойственности, в свою очередь являются односторонними, и налагаемые на них ограничения существенно слабее. Это приводит к существенному расширению области возможного применения двойственных схем.

В основе односторонней теории двойственности лежит понятие вполне изотонного отображения и условно обратного к нему отображения. Определение и примеры вполне изотонных отображений приведены в разделе 2. Свойства вполне изотонных отображений исследованы в разделе 3. Раздел 4 посвящен строгому определению дескрипторов и дуальных дескрипторов. Здесь же рассмотрена дуальная взаимозависимость интериоризаторов и экстериоризаторов (предложение 4). В разделе 5 определены задачи инъективного и проективного описаний, показана их дуальная взаимосвязь и доказана основная односторонняя схема двойственности (теорема 1). В разделе 6 рассмотрен частный случай, в котором односторонняя схема двойственности допускает взаимно обратные двойственные переходы (теорема 2). Содержание этого раздела наиболее близко к классическому пониманию общей теории двойственности.

Понимание двойственных переходов как переходов от описания одного характера к описанию другого характера возникло в условиях задачи спектрального синтеза в комплексной области [1–4]. Эти исследования опираются на свойства дуальной бипары $\langle\langle H, H^*\rangle, \langle P, P^*\rangle\rangle$, где $H := H(\Omega)$ — пространство аналитических функций, H^* — его сильное сопряженное пространство, $P := P_\Omega$ — интерпретация H^* в терминах оператора Лапласа, P^* — его сильное сопряженное пространство. Двойственные переходы в условиях этой бипары осуществлялись неоднократно и при решении разных задач [5–16].

2. Вполне изотонные отображения

2.1. Терминология и обозначения. Декартово произведение $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ семейства множеств $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ обозначаем X_Λ. Элементы декартова произведения X_Λ обозначаем $x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$. Декартову степень $\prod_{\lambda\in\Lambda} X$ множества X обозначаем X^Λ. Декартово произведение X_Λ частично упорядоченных множеств всегда рассматриваем как частично упорядоченное множество с порядком: $x_\Lambda \leqslant x'_\Lambda$ тогда и только тогда, когда $x'_\lambda \leqslant x_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Замечаем, что порядок в декартовом произведении X_Λ является обратным по отношению к порядкам в множествах $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Например, если Λ состоит из одного элемента $\Lambda = \{0\}$, то X_Λ совпадает с множеством X_0, в котором порядок заменен обратным порядком.

Отображения отождествляем с непустыми однозначными бинарными отношениями. Для обозначения отображения m, действующего из множества X в множство Y, используем обычный символ $m : X \to Y$. Область определения (соответственно область значений) отображения m обозначаем символом $\operatorname{Dom} m$ (соответственно $\operatorname{Im} m$). Если $\operatorname{Dom} m = X$, то пишем $m : X \mapsto Y$. Сужение $m|_{X_0}$ отображения $m : X \to Y$ на множество X_0 определяется как отображение $n : X \to Y$, удовлетворяющее условиям: $\operatorname{Dom} n = X_0 \cap \operatorname{Dom} m$ и $n(x) = m(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom} n$. Областью определения (соответственно областью значений) семейства $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ отображений $m_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ называем пересечение $\operatorname{Dom}\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\} := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Dom} m_\lambda$ (соответственно объединение $\operatorname{Im}\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Im} m_\lambda$). Декартовым произведением семейства отображений $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ называется отображение

$$m_\Lambda : X_\Lambda \to Y_\Lambda \mid (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto (m_\lambda(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda).$$

Область определения декартова произведения m_Λ совпадает с декартовым произведением $\prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Dom} m_\lambda$. Декартовой степенью отображения $m : X \to Y$ называется отображение

$$m^\Lambda : X^\Lambda \to Y^\Lambda \mid (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto (m(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda).$$

Область определения отображения m^Λ совпадает с декартовой степенью $(\operatorname{Dom} m)^\Lambda$.

Говорим, что отображения $m : X \to Y$ и $n : Z \to T$ совпадают (имеет место функциональное равенство $m = n$), если $\operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom} n$ и $m(x) = n(x)$ для любого $x \in \operatorname{Dom} m$. Говорим, что на множестве X_0 имеет место функциональное равенство $m = n$ (отображения m и n совпадают на множестве X_0), если $m|_{X_0} = n|_{X_0}$. Символом $X(m = n)$ (соответственно $X(m \leqslant n)$) обозначаем множество

$$\{x \in \operatorname{Dom}\{m, n\} : m(x) = n(x)\}$$
$$(\text{соотв. } \{x \in \operatorname{Dom}\{m, n\} : m(x) \leqslant n(x)\}).$$

При фиксированном $z \in \operatorname{Dom} n$ (соответственно $x \in \operatorname{Dom} m$) символом $X(m(x) \leqslant n(z))$ (соответственно $Z(m(x) \leqslant n(z))$ обозначаем множество

$$\{x \in \operatorname{Dom} m : m(x) \leqslant n(z)\}$$
$$(\text{соотв. } \{z \in \operatorname{Dom} n : m(x) \leqslant n(z)\})$$

Композиция $n \circ m$ отображений n и m определяется как отображение $X \to T \mid x \to n(m(x))$ с областью определения

$$\operatorname{Dom}(n \circ m) := \{x \in \operatorname{Dom} m : m(x) \in \operatorname{Dom} n\}.$$

При рассмотрении произвольной композиции $n \circ m$ всегда предполагаем, что выполнено условие ее существования $\operatorname{Im} m \cap \operatorname{Dom} n \neq \varnothing$.

2.2. Вполне изотонные отображения. Отображение $m : X \to Y$, где X, Y — частично упорядоченные множества, называется *изотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} m$, удовлетворяющих условию $x_1 \leqslant x_2$, выполнено неравенство $m(x_1) \leqslant m(x_2)$. Элемент $y \in Y$ называем *частичной мажорантой* (соответственно *частичной минорантой*) изотонного отображения $m : X \to Y$, если множество $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$) не является пустым. Согласно этому определению любая точка из области значений $\operatorname{Im} m$ является и частичной мажорантой, и частичной минорантой отображения m. Если элемент $y \in Y$ является частичной мажорантой (соответственно частичной минорантой) изотонного отображения $m : X \to Y$ и $y \leqslant y'$ (соответственно $y' \leqslant y$), то элемент $y' \in Y$ тоже является частичной мажорантой (соответственно частичной минорантой) отображения m.

Изотонное отображение $m : X \to Y$ называем *инъективным* (соответственно *проективным*), если выполнены условия:

1) если $x, x' \in X$, $x \leqslant x'$ (соответственно $x' \leqslant x$) и $x \in \operatorname{Dom} m$, то $x' \in \operatorname{Dom} m$;

2) для любой частичной мажоранты (соответственно частичной миноранты) $y \in Y$ отображения m множество $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$) обладает наибольшим (соответственно наименьшим) элементом.

Инъективные и проективные отображения называем *вполне изотонными* отображениями. Множество $X_0 \subseteq X$, обладающее свойством

$$x \leqslant x',\ x' \in X_0 \Rightarrow x \in X_0 \ \ (\text{соотв. } x' \leqslant x,\ x' \in X_0 \Rightarrow x \in X_0),$$

принято называть прямым (соответственно обратным) *порядковым идеалом*. Значит, по определению вполне изотонного отображения область его определения является порядковым идеалом. Отмечаем, что при замене порядков в множествах X и Y их обратными порядками инъективное (соответственно проективное) отображение $m : X \to Y$ становится проективным (соответственно инъективным) отображением.

Понятие вполне изотонного отображения напрямую связано с понятием многозначного отображения (непустого бинарного отношения). Поясним это утверждение. Пусть A, B — множества, $X := (X, \subseteq)$, $Y := (Y, \subseteq)$ — их булеаны соответственно. Многозначное отображение $F : A \mapsto B$ можно рассматривать как однозначное отображение $m : X \to Y \mid x \mapsto F(x)$, где $F(x) \in Y$ — образ множества $x \subseteq A$. При этом, если $\operatorname{Dom} F = A$, то отображение m является инъективным. Действительно, в этом случае $\operatorname{Dom} m = X$, отображение m является изотонным и для любой частичной мажоранты $y \in Y$ отображения m множество $X(m \leqslant y)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является прообраз $F^{-1}(y)$ множества $y \subseteq B$.

С другой стороны, всякое многозначное отображение $F : A \to B$ имеет многозначное обратное отображение $F^{-1} : B \to A$, которое каждому $b \in \operatorname{Im} F$ ставит в соответствие прообраз $F^{-1}(b)$. Обратное многозначное отображение $F^{-1} : B \to A$ можно рассматривать как однозначное отображение $n : Y \to X \mid y \mapsto F^{-1}(y)$, где $F^{-1}(y) \in X$ — прообраз множества $y \subseteq B$. При этом, если $\operatorname{Im} F = B$, то отображение n является проективным. Действительно, в этом случае $\operatorname{Dom} n = Y$, отображение n является изотонным и для любой частичной миноранты $x \in X$ отображения n множество $Y(x \leqslant n)$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является образ $F(x)$ множества $x \subseteq A$.

2.3. Примеры вполне изотонных отображений. Вполне изотонные отображения встречаются часто. Рассмотрим еще четыре примера вполне изотонных отображений.

Пример 1. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества. Порядковый изоморфизм $m : X \mapsto Y$ является инъективным и проективным отображением одновременно. Его условно обратное отображение совпадает с обратным отображением.

Пример 2. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}$. Действительная возрастающая функция $m : X \mapsto \mathbf{R}$ осуществляет инъективное (соответственно проективное) отображение $X \mapsto \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу (соответственно полунепрерывна сверху).

Пример 3. Пусть $\langle A, B \rangle$ — дуальная пара векторных пространств над полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$; $X := (X, \subseteq)$, $Y := (Y, \supseteq)$ — булеаны множеств A и B соответственно. Полярой x^0 множества $x \in X$ называется абсолютно выпуклое слабо замкнутое множество элементов $b \in B$, для которых $|\langle a, b \rangle| \leqslant 1$ при любом $a \in A$. Поляра y^0 множества $y \in Y$ определяется симметрично и состоит из элементов $a \in A$, для которых $|\langle a, b \rangle| \leqslant 1$ при любом $b \in B$. Отметим элементарные свойства поляр:

1°. если $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \leqslant x_2$, то $x_1^0 \leqslant x_2^0$;
2°. если $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \leqslant y_2$, то $y_1^0 \leqslant y_2^0$;
3°. если $x \in X$ и $x^{00} = (x^0)^0$, то $x \leqslant x^{00}$;
4°. если $y \in Y$ и $y^{00} = (y^0)^0$, то $y^{00} \leqslant y$.

Рассмотрим отображения $m : X \mapsto Y | \, x \to x^0$ и $n : Y \mapsto X | \, y \to y^0$. По свойствам 1° и 2° отображения m и n являются изотонными. При этом отображение m является инъективным. Действительно, если элемент $y \in Y$ является частичной мажорантой отображения m, то множество $X(m(x) \leqslant y)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является поляра y^0. В самом деле, по свойству 4° $y^{00} \leqslant y$, значит, $y^0 \in X(m(x) \leqslant y)$. При этом, если $x \in X(m(x) \leqslant y)$, то $x^0 \leqslant y$ и по свойствам 3° и 2° $x \leqslant x^{00} \leqslant y^0$.

С другой стороны, отображение n является проективным. Действительно, если элемент $x \in X$ является частичной минорантой отображения n, то множество $Y\ (x \leqslant m(y))$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является поляра x^0. В самом деле, по свойству 3° $x \leqslant x^{00}$, значит, $x^0 \in Y(x \leqslant m(y))$. При этом, если $y \in Y(x \leqslant m(y))$, то $x \leqslant y^0$, и по свойствам 1° и 4° $x^0 \leqslant y^{00} \leqslant y$.

Пример 4. Пусть A — топологическая группа, B — группа характеров группы A, x — некоторая замкнутая подгруппа группы A. Множество x^0 всех элементов $b \in B$, для которых $b(a) = 0$ при всяком $a \in x$, называется аннулятором подгруппы x в группе B и представляет собой подгруппу группы B. Далее, пусть y — замкнутая подгруппа группы B. Множество y^0 всех элементов $a \in A$, для которых $b(a) = 0$ при всяком $b \in y$, называется аннулятором подгруппы y в группе A и представляет собой подгруппу группы A. Множества x^0 и y^0 являются замкнутыми подгруппами топологических групп B и A соответственно.

Пусть $X := (X, \subseteq), Y := (Y, \supseteq)$ — совокупность всех замкнутых подгрупп A и B соответственно. Рассмотрим отображения $m : X \mapsto Y | \, x \to x^0$ и $n : Y \mapsto X | \, y \to y^0$. Свойства аннуляторов повторяют свойства поляр 1°–4°, сформулированные в предыдущем примере. Значит, отображение m является инъективным, а отображение n является проективным.

3. Свойства вполне изотонных отображений

3.1. Условно обратные отображения. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества. Всякое инъективное (соответственно проективное) отображение $m : X \to Y$ обладает *условно обратным* отображением $m^- : Y \to X$, которое каждой частичной мажоранте (соответственно частичной миноранте) $y \in Y$ отображения m ставит в соответствие наибольший (соответственно наименьший) элемент множества $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$). Согласно этому определению область определения $\operatorname{Dom} m^- \subseteq Y$ условно обратного отображения m^- совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения m. При этом для любого вполне изотонного отображения $m : X \to Y$ выполняются включения:

$$\operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^- \subseteq Y, \quad \operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m \subseteq X, \tag{1}$$

Свойство 1. *Если $m : X \to Y$ — инъективное* (соответственно *проективное*) *отображение, то для любого $y \in \operatorname{Dom} m^-$ выполняется неравенство*

$$m \circ m^-(y) \leqslant y \quad (\text{соотв.} \ \ y \leqslant m \circ m^-(y)). \tag{2}$$

$\lhd$ Пусть $m : X \to Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение. Выберем произвольный элемент $y \in \operatorname{Dom} m^-$. По определению условно обратного отображения элемент $m^-(y)$ принадлежит множеству $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$). Значит, выполняется неравенство $m \circ m^-(y) \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant m \circ m^-(y)$). $\rhd$

Свойство 2. *Если $m : X \to Y$ — инъективное* (соответственно *проективное*) *отображение, то для любого $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство*

$$x \leqslant m^- \circ m(x) \quad (\text{соотв.} \ \ m^- \circ m(x) \leqslant x). \tag{3}$$

$\lhd$ Пусть $x \in \operatorname{Dom} m$ и $y := m(x)$. Замечаем, что x принадлежит множеству $X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant m(x))$). Так как $m^-(y)$ — наибольший (соответственно наименьший) элемент этого множества, то справедливы соотношения $x \leqslant m^-(y) = m^- \circ m(x)$ (соответственно $m^-(y) = m^- \circ m(x) \leqslant x$). $\rhd$

Свойство 3. *Если $m : X \to Y$ — вполне изотонное отображение, то условно обратное отображение $m^- : Y \to X$ является изотонным.*

$\lhd$ Действительно, допустим, что исходное отображение $m : X \to Y$ является инъективным (соответственно проективным). Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Dom} m^-$ и $y_1 \leqslant y_2$. Тогда имеет место вложение $X(m(x) \leqslant y_1) \subseteq X(m(x) \leqslant y_2)$ (соответственно $X(y_2 \leqslant m(x)) \subseteq X(y_1 \leqslant m(x))$). Значит, $m^-(y_1) \in X(m(x) \leqslant y_2)$ (соответственно $m^-(y_2) \in X(y_1 \leqslant m(x))$) и по определению условно обратного отображения $m^-(y_1) \leqslant m^-(y_2)$. $\rhd$

Свойство 4. *Если $m : X \to Y$ — вполне изотонное отображение, то для любого $x \in \operatorname{Im} m^-$ выполняется равенство*

$$m^- \circ m(x) = x,$$

а для любого $y \in \operatorname{Im} m$ выполняется равенство

$$m \circ m^-(y) = y.$$

$\lhd$ Пусть $m : X \to Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение. Во-первых, выберем произвольный элемент $x \in \operatorname{Im} m^-$. Найдется такой элемент $y \in \operatorname{Dom} m^-$, что $x = m^-(y)$. Так как $\operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$, то $x \in \operatorname{Dom} m$ и по свойству 1 $m(x) = m \circ m^-(y) \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant m \circ m^-(y) = m(x)$). С другой стороны, $\operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^-$, значит, $m(x) \in \operatorname{Dom} m^-$ и по свойству 3 $m^- \circ m(x) \leqslant m^-(y) = x$ (соответственно $x = m^-(y) \leqslant m^- \circ m(x)$). Следовательно, по свойству 2 $m^- \circ m(x) = x$.

Во-вторых, выберем произвольный элемент $y \in \operatorname{Im} m$. Найдется такой элемент $x \in \operatorname{Dom} m$, что $y = m(x)$. Так как $\operatorname{Im} m \subseteq \operatorname{Dom} m^-$, то $y \in \operatorname{Dom} m^-$ и по свойству 2 $x \leqslant m^- \circ m(x) = m^-(y)$ (соответственно $m^-(y) = m^- \circ m(x) \leqslant x$). С другой стороны, $\operatorname{Im} m^- \subseteq \operatorname{Dom} m$, значит, $m^-(y) \in \operatorname{Dom} m$ и в силу изотонности отображения m имеем $y = m(x) \leqslant m \circ m^-(y)$ (соответственно $m \circ m^-(y) \leqslant m(x) = y$). Следовательно, по свойству 1 $m \circ m^-(y) = y$. $\rhd$

Свойство 5. *Изотонное отображение $n : X \to Y$ является инъективным* (соответственно *проективным*) *тогда и только тогда, когда существует изотонное отображение $r : Y \to X$, удовлетворяющее условиям:*

1) $\operatorname{Dom} r$ *совпадает с множеством всех частичных мажорант* (соответственно *минорант*) *отображения n;*

2) $n \circ r(y) \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant n \circ r(y)$) *для любого $y \in \operatorname{Dom} r$;*

3) $x \leqslant r \circ n(x)$ (соответственно $r \circ n(x) \leqslant x$) *для любого $x \in \operatorname{Dom} n$.*

Отображение r, удовлетворяющее условиям 1) 2), 3), *и условно обратное отображение n^- совпадают.*

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть $n : X \to Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, n^- — его условно обратное отображение. По определению условно обратного отображения отображение $r := n^-$ удовлетворяет условию 1). По свойствам 1 и 2 вполне изотонных отображений отображение $r := n^-$ удовлетворяет условиям 2) и 3).

Достаточность. Допустим, что существует изотонное отображение $r : Y \to X$, удовлетворяющее условиям 1), 2) и 3). Покажем, что отображение n является инъективным (соответственно проективным). Выберем произвольную частичную мажоранту (соответственно частичную миноранту) $y \in Y$ отображения n и рассмотрим множество $X(n(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant n(x))$). Из условий 1) и 2) вытекает, что это множество содержит элемент $r(y)$. При этом, если x принадлежит множеству $X(n(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y \leqslant n(x))$), то по условию 1) $n(x) \in \operatorname{Im} n \subseteq \operatorname{Dom} r$. В силу изотонности отображения r получаем $r \circ n(x) \leqslant r(y)$ (соответственно $r(y) \leqslant r \circ n(x)$). Значит, в силу условия 3) имеем $x \leqslant r \circ n(x) \leqslant r(y)$ (соответственно $r(y) \leqslant r \circ n(x) \leqslant x$). Другими словами, элемент $r(y)$ является наибольшим (соответственно наименьшим) элементом множества $X(n(x) \leqslant y)$ (соответственно $X(y(x) \leqslant n)$). Это означает, что $r(y) = n^{-}(y)$ и отображение n является инъективным (соответственно проективным). Так как $r(y) = n^{-}(y)$ для любого $y \in \operatorname{Dom} r$, то отображения r и n^{-} совпадают. $\rhd$

Свойство 6. *Если отображение $m : X \to Y$ является инъективным* (соответственно *проективным*), *то его условно обратное отображение $m^{-} : Y \to X$ является проективным* (соответственно *инъективным*) *и второе условно обратное отображение $(m^{-})^{-}$ совпадает с отображением m.*

$\lhd$ Пусть $m : X \to Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, $m^{-} : Y \to X$ — его условно обратное отображение. Покажем, что пара отображений $n := m^{-}$ и $r := m$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3) из формулировки свойства 5. Во-первых, пусть $\operatorname{Dom}(m^{-})^{-}$ — совокупность всех частичных минорант (соответственно частичных мажорант) отображения m^{-}. Покажем, что $\operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom}(m^{-})^{-}$. С одной стороны, если $x \in \operatorname{Dom}(m^{-})^{-}$, то при некотором $y \in \operatorname{Dom} m^{-}$ выполняется неравенство $x \leqslant m^{-}(y)$ (соответственно $m^{-}(y) \leqslant x$). При этом y — частичная мажоранта (соответственно частичная миноранта) отображения m, значит, $m(x') \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant m(x')$) при некотором $x' \in \operatorname{Dom} m$. Можно считать, что $x' := m^{-}(y)$. Тогда $x' \in \operatorname{Im} m^{-} \subseteq \operatorname{Dom} m$ и $x \leqslant x'$ (соотв. $x' \leqslant x$). Значит, $x \in \operatorname{Dom} m$ и $\operatorname{Dom}(m^{-})^{-} \subseteq \operatorname{Dom} m$. С другой стороны, пусть $x \in \operatorname{Dom} m$ и $y := m(x) \in \operatorname{Dom} m^{-}$. Так как $x \in X(m(x) \leqslant y)$ (соответственно $x \in X(y \leqslant m(x))$), то $x \leqslant m^{-}(y) = m^{-} \circ m(x)$ (соответственно $m^{-}(y) = m^{-} \circ m(x) \leqslant x$), т. е. x — частичная миноранта (соответственно частичная мажоранта) отображения m^{-}. Значит, $\operatorname{Dom} m \subseteq \operatorname{Dom}(m^{-})^{-}$ и, следовательно, $\operatorname{Dom} m = \operatorname{Dom}(m^{-})^{-}$. Отсюда следует, что пара отображений $n := m^{-}$ и $r := m$ удовлетворяют условию 1) из свойства 5.

Во-вторых, по свойству 1 для любого $y \in \operatorname{Dom} m^{-}$ выполняется неравенство (2), а по свойству 2 для любого $x \in \operatorname{Dom} m$ выполняется неравенство (3). Следовательно, пара отображений $n := m^{-}$ и $r := m$ удовлетворяют условиям 2) и 3) из свойства 5. Это означает, что условно обратное отображение m^{-} является проективным (соответственно инъективным) и отображение m является условно обратным для отображения m^{-}. $\rhd$

Свойство 7. *Если $m : X \to Y$ — инъективное* (соответственно *проективное*) *отображение, то*

$$X(m(x) \leqslant y) = X\,(x \leqslant m^{-}(y)) \quad (\text{соотв. } X(y \leqslant m(x)) = X(m^{-}(y) \leqslant x)).$$

$\lhd$ Действительно, если $m : X \to Y$ — инъективное отображение и при некоторых $x \in \operatorname{Dom} m$, $y \in Y$ имеет место неравенство $m(x) \leqslant y$, то y — частичная мажоранта отображения m, значит, $y \in \operatorname{Dom} m^{-}$. Следовательно, $m^{-} \circ m(x) \leqslant m^{-}(y)$ и по свойству 2 $x \leqslant m^{-}(y)$. С другой стороны, если при некоторых $x \in X$, $y \in \operatorname{Dom} m^{-}$ имеет место неравенство $x \leqslant m^{-}(y)$, то y — частичная миноранта отображения m^{-}, значит, $y \in \operatorname{Dom}(m^{-})^{-}$. Но по свойству 6 $(m^{-})^{-} = m$, значит, $y \in \operatorname{Dom} m$. Следовательно, $m(x) \leqslant m \circ m^{-}(y)$ и по свойству 1 $m(x) \leqslant y$. Параллельное утверждение доказывается аналогично. $\rhd$

3.2. Композиции вполне изотонных отображений. Продолжим рассмотрение свойств вполне изотонных отображений. Пусть X, Y, Z, T — частично упорядоченные множества.

Свойство 8. *Если отображения $m : X \to Y$ и $n : Y \to Z$ являются инъективными* (соответственно *проективными*)*, то композиция $n \circ m$ является инъективным* (соответственно *проективным*) *отображением из X в Z и его условно обратное отображение совпадает с композицией $m^- \circ n^-$.*

$\lhd$ По свойству 3 отображения m, n и их условно обратные отображения являются изотонными, значит, отображения $n \circ m$ и $m^- \circ n^-$ тоже являются изотонными. Осталось убедиться, что отображение $n \circ m$ является инъективным (соответственно проективным) и его условно обратное отображение $(n \circ m)^-$ совпадает с отображением $m^- \circ n^-$. По свойству 5 для этого достаточно показать, что изотонное отображение $m^- \circ n^-$ удовлетворяет условиям:

1) $\mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-)$ совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения $n \circ m$;

2) $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant z$ (соответственно $z \leqslant n \circ m \circ m^- \circ n^-(z)$) для любого $z \in \mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-)$;

3) $x \leqslant m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$ (соответственно $m^- \circ n^- \circ n \circ m(x) \leqslant x$) для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(n \circ m)$.

Проверим выполнимость условия 1). Пусть $\mathrm{Dom}\,(n \circ m)^-$ — множество всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения $n \circ m$ и $z \in \mathrm{Dom}\,(n \circ m)^-$. Значит, множество $X(n \circ m \leqslant z)$ (соответственно $X(z \leqslant n \circ m)$) не является пустым. Выберем произвольный элемент x из этого множества. Тогда по определению композиции $m(x) \in \mathrm{Dom}\,n$ и $n \circ m(x) \leqslant z$ (соответственно $z \leqslant n \circ m(x)$), значит, $z \in \mathrm{Dom}\,n^-$. Отображение n является инъективным (соответственно проективным), значит, по свойству 2 $m(x) \leqslant n^- \circ n \circ m(x) \leqslant n^-(z)$ (соответственно $n^-(z) \leqslant n^- \circ n \circ m(x) \leqslant m(x)$), значит, $n^-(z) \in \mathrm{Dom}\,m^-$. Отсюда следует, что $z \in \mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-)$. Следовательно, $\mathrm{Dom}\,(n \circ m)^- \subseteq \mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-)$. С другой стороны, если $z \in \mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-)$, то по определению композиции $z \in \mathrm{Dom}\,n^-$ и $n^-(z) \in \mathrm{Dom}\,m^-$. Из включения $n^-(z) \in \mathrm{Dom}\,m^-$ вытекает, что при некотором $x \in \mathrm{Dom}\,m$ выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^-(z)$ (соответственно $n^-(z) \leqslant m(x)$). Значит, по свойству 1 из включения $z \in \mathrm{Dom}\,n^-$ следует, что $n \circ m(x) \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant z$ (соответственно $z \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant n \circ m(x)$). Отсюда вытекает, что $z \in \mathrm{Dom}\,(n \circ m)^-$. Следовательно, $\mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-) \subseteq \mathrm{Dom}\,(n \circ m)^-$, т. е. $\mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-) = \mathrm{Dom}\,(n \circ m)^-$.

Покажем, что выполняется условие 2). Действительно, пусть $z \in \mathrm{Dom}\,(m^- \circ n^-)$. Тогда $m^- \circ n^-(z) \in \mathrm{Im}\,m^- \subseteq \mathrm{Dom}\,m$ и по определению композиции $n^-(z) \in \mathrm{Dom}\,m^-$. В силу инъективности (соответственно проективности) отображения m по свойству 1 выполняется неравенство $m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant n^-(z)$ (соответственно $n^-(z) \leqslant m \circ m^- \circ n^-(z)$). Аналогично, в силу инъективности (соответственно проективности) отображения n выполняются неравенства $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant z$ (соответственно $z \leqslant n \circ n^-(z) \leqslant n \circ m \circ m^- \circ n^-(z)$).

Далее покажем, что выполняется условие 3). Действительно, пусть $x \in \mathrm{Dom}\,(n \circ m)$. Тогда $m(x) \in \mathrm{Dom}\,n$ и $n \circ m(x) \in \mathrm{Im}\,n \subseteq \mathrm{Dom}\,n^-$. В силу инъективности (соответственно проективности) отображения n по свойству 2 выполняется неравенство $m(x) \leqslant n^- \circ n \circ m(x)$ (соответственно $n^- \circ n \circ m(x) \leqslant m(x)$). Аналогично, в силу инъективности (соответственно проективности) отображения m по свойству 2 выполняются неравенства $x \leqslant m^- \circ m(x) \leqslant m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$ (соответственно $m^- \circ n^- \circ n \circ m(x) \leqslant m^- \circ m(x) \leqslant x$). $\rhd$

Пусть $m : X \to Y$, $n : Y \to Z$, $k : X \to Z$ — произвольные вполне изотонные отображения; m^-, n^-, k^- — их условно обратные отображения. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "n"] & \\ X \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "k"'] & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "m^-"] & \\ Z \arrow[ur, "n^-"] \arrow[rr, "k^-"'] & & X \end{tikzcd}$$

Коммутативность этих диаграмм означает выполнение функциональных равенств $k = n \circ m$ и $k^- = m^- \circ n^-$ соответственно. Справедливо следующее предложение.

Свойство 9. *Если отображения m, n являются инъективными* (соответственно *проективными*), *то первая из представленных диаграмм коммутативна тогда и только тогда, когда вторая диаграмма коммутативна.*

$\lhd$ Предположим, что первая диаграмма коммутативна, т. е. $k = n \circ m$. По свойству 8 условно обратное отображение k^- является вполне изотонным и совпадает с композицией $m^- \circ n^-$. Значит, вторая диаграмма тоже коммутативна. Далее предположим, что вторая диаграмма коммутативна, значит, $k^- = m^- \circ n^-$. По свойству 8 $(k^-)^- = (n^-)^- \circ (m^-)^-$, где $(k^-)^-$, $(n^-)^-$ и $(m^-)^-$ — вторые условно обратные отображения. По свойству 6 отображения $(k^-)^-$, $(n^-)^-$ и $(m^-)^-$ совпадают с отображениями k, n и m соответственно. Значит, $k = n \circ m$. Следовательно, первая диаграмма тоже коммутативна. $\rhd$

Пусть $k : X \to Y$, $l : Z \to T$, $m : Z \to Y$, $n : T \to X$ — произвольные вполне изотонные отображения; k^-, l^-, m^-, n^- — их условно обратные отображения. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} Y & Z \arrow[l, "m"'] \arrow[d, "l"] \\ X \arrow[u, "k"] & T \arrow[l, "n"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z & Y \arrow[l, "m^-"'] \arrow[d, "k^-"] \\ T \arrow[u, "l^-"] & X \arrow[l, "n^-"] \end{tikzcd}$$

Из свойств 6, 7 и 8 легко вытекает справедливость следующих свойств.

Свойство 10. *Если отображения k, l, n являются инъективными* (соответственно *проективными*), *то композиция $m := k \circ n \circ l$ является инъективным* (соответственно *проективным*) *отображением и его условно обратное отображение m^- совпадает с композицией $l^- \circ n^- \circ k^-$.*

Свойство 11. *Если отображения k, l, n являются инъективными* (соответственно *проективными*), *то первая из представленных диаграмм коммутативна тогда и только тогда, когда вторая диаграмма коммутативна.*

4. Дескрипторы

4.1. Обозначения. Если высказываемое нами утверждение или определение сохраняет силу и для отображений из X в Y, и для отображений из Y в X, то при его записи будем использовать символ $m : X \rightleftarrows Y$. Этот символ означает один из двух символов $m : X \to Y$ или $m : Y \to X$. Символ $m : X \to Y$ называем первым значением символа $m : X \rightleftarrows Y$, а символ $m : Y \to X$ называем вторым значением символа $m : X \rightleftarrows Y$. При этом выбор значения символа $m : X \rightleftarrows Y$ осуществляется только один раз. При повторном использовании символа $m : X \rightleftarrows Y$ его значение остается прежним.

С символом $m : X \rightleftarrows Y$ свяжем два символа $m^\pm : X \to Y$ и $m^\mp : Y \to X$. Символ $m^\pm : X \to Y$ означает один из двух символов $m : X \to Y$ (первое значение) и $m^- : X \to Y$

(второе значение). При этом символ $m^{\pm} : X \to Y$ принимает первое (соответственно второе) значение, если символ $m : X \rightleftarrows Y$ принимает первое (соответственно второе) значение. Символ $m^{\mp} : Y \to X$ означает один из двух символов $m : Y \to X$ (первое значение) и $m^{-} : Y \to X$ (второе значение). При этом символ $m^{\mp} : Y \to X$ принимает первое (соответственно второе) значение, если символ $m : X \rightleftarrows Y$ принимает второе (соответственно первое) значение.

В общем случае символы $m : X \rightleftarrows Y$ и $m : Y \rightleftarrows X$ равносильны. Необходимо исключить использование одного из этих символов. Для этого будем предполагать, что множества X и Y являются элементами некоторого простого ориентированного цикла

$$A \dashrightarrow B \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow Z \dashrightarrow A,$$

содержащего более двух различных элементов. Договоримся использовать символ $m : X \rightleftarrows Y$ только при условии, что множества X и Y являются соседними элементами этого цикла и X предшествует Y (в обозначениях $X \dashrightarrow Y$). Легко увидеть, что это соглашение исключает совместное использование символов $m : X \rightleftarrows Y$ и $m : Y \rightleftarrows X$. Если множества X, Y и Z, T являются соседними элементами одного простого ориентированного цикла и $X \dashrightarrow Y$, $Z \dashrightarrow T$, то символ

$$(m, n) := (m : X \rightleftarrows Y,\ n : Z \rightleftarrows T)$$

означает один из четырех символов

$$(m : X \to Y,\ n : Z \to T), \quad (m : X \to Y,\ n : T \to Z),$$

$$(m : Y \to X,\ n : Z \to T), \quad (m : Y \to X,\ n : T \to Z).$$

Выбор значения символа (m, n) осуществляется только один раз и остается прежним в дальнейших построениях. Важно лишь то, что проводимые рассуждения не зависят от сделанного выбора.

4.2. Дуальные пары. Пусть X, Y, Z и T — частично упорядоченные множества. Сформируем из этих множеств простой ориентированный цикл

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow T \dashrightarrow X.$$

Выберем произвольные вполне изотонные отображения $k : X \rightleftarrows Y$ и $l : Z \rightleftarrows T$. Пару (k, l) называем *дуальной парой* и обозначаем символом $\langle k, l \rangle$. Дуальную пару $\langle k, l \rangle$ называем *симметричной*, если отображение k действует из X в Y, а отображение l действует из T в Z или, наоборот, отображение k действует из Y в X, а отображение n действует Z в T. Если дуальная пара $\langle k, l \rangle$ является симметричной, то и *зеркальная* дуальная пара $\langle l, k \rangle$ является симметричной. Дуальные пары $\langle k^{\pm}, k^{\mp} \rangle$ и $\langle k^{\mp}, k^{\pm} \rangle$ тоже являются симметричными. Здесь отображение $k^{\pm} : X \to Y$ по определению совпадает с отображением k, если k действует из X в Y и, наоборот, совпадает с условно обратным отображением k^{-}, если k действует из Y в X. Отображение $k^{\mp} : Y \to X$ определяется симметрично. Оно совпадает с отображением k^{-}, если k действует из X в Y и, наоборот, совпадает с отображением k, если k действует из Y в X.

Отметим, что по свойству 6 условно обратное к отображению $k^{\pm}$ совпадает с отображением $k^{\mp}$ и, наоборот, условно обратное к отображению $k^{\mp}$ совпадает с отображением $k^{\pm}$, т. е.

$$(k^{\pm})^{-} = k^{\mp}, \quad (k^{\mp})^{-} = k^{\pm}.$$

С другой стороны, используя свойство 6, легко убедиться, что справедливы и следующие соотношения:

$$(k^-)^{\pm} = k^{\pm}, \quad (k^-)^{\mp} = k^{\mp}.$$

При этом, если отображение $k^{\pm}$ (соответственно $k^{\mp}$) является инъективным, то отображение $k^{\mp}$ (соответственно $k^{\pm}$) является проективным и, наоборот, если отображение $k^{\pm}$ (соответственно $k^{\mp}$) является проективным, то отображение $k^{\mp}$ (соответственно $k^{\pm}$) является инъективным.

4.3. Дуальные отображения. Рассмотрим совокупность из двух ориентированных диаграмм

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "m"] & Z \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left, "l"] \\ X \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[r, shift left] & T \arrow[l, shift left, "n"] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "m^{\pm}"] & Z \\ X \arrow[u, "k^{\pm}"] \arrow[r, "n^{\mp}"'] & T \arrow[u, "l^{\mp}"'] \end{tikzcd} \tag{4}$$

где $\langle k, l\rangle$ — дуальная пара вполне изотонных отображений $k : X \rightleftarrows Y$ и $l : Z \rightleftarrows T$, $\langle m, n\rangle$ — симметричная дуальная пара вполне изотонных отображений $m : Y \rightleftarrows Z$ и $n : T \rightleftarrows X$. Вполне изотонное отображение $m : Y \rightleftarrows Z$ называем *дуальным* к вполне изотонному отображению $n : T \rightleftarrows X$ относительно дуальной пары $\langle k, l\rangle$, если для любого $x \in \operatorname{Dom} n^{\mp}$ выполняется неравенство

$$l^{\mp} \circ n^{\mp}(x) \leqslant m^{\pm} \circ k^{\pm}(x).$$

Выполнение этого неравенства означает, в частности, что $\operatorname{Im} n^{\mp} \subseteq \operatorname{Dom} l^{\mp}$, $\operatorname{Dom} n^{\mp} \subseteq \operatorname{Dom} k^{\pm}$ и $k^{\pm}(\operatorname{Dom} n^{\mp}) \subseteq \operatorname{Dom} m^{\pm}$.

Рассмотрим другую совокупность из двух противоположно ориентированных диаграмм

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left] & T \arrow[l, shift left, "n"'] \arrow[d, shift left, "l"] \\ Y \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[r, shift left] & Z \arrow[l, shift left, "m"] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "n^{\mp}"] & T \\ Y \arrow[u, "k^{\mp}"] \arrow[r, "m^{\pm}"'] & Z \arrow[u, "l^{\pm}"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

которые получены из диаграмм (4) с помощью горизонтальной симметрии. Вполне изотонное отображение $n : X \rightleftarrows T$ называем *дуальным* к вполне изотонному отображению $m : Y \rightleftarrows Z$ относительно дуальной пары $\langle k, l\rangle$, если для любого $y \in \operatorname{Dom} m^{\pm}$ выполняется неравенство

$$l^{\pm} \circ m^{\pm}(y) \leqslant n^{\mp} \circ k^{\mp}(y).$$

Выполнение этого неравенства означает, в частности, что $\operatorname{Im} m^{\pm} \subseteq \operatorname{Dom} l^{\pm}$, $\operatorname{Dom} m^{\pm} \subseteq \operatorname{Dom} k^{\mp}$ и $k^{\mp}(\operatorname{Dom} m^{\pm}) \subseteq \operatorname{Dom} n^{\mp}$.

При замене симметричной дуальной пары $\langle m, n\rangle$ симметричной дуальной парой $\langle m^-, n^-\rangle$ вторые диаграммы в совокупностях (4) и (5) не меняются, значит, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Вполне изотонное отображение* $m : Y \rightleftarrows Z$ (соответственно $n : T \rightleftarrows X$) *является дуальным к вполне изотонному отображению* $n : T \rightleftarrows X$ (соответственно $m : Y \rightleftarrows Z$) *относительно дуальной пары* $\langle k, l\rangle$ *тогда и только тогда, когда условно обратное отображение* m^- (соответственно n^-) *является дуальным к условно обратному отображению* n^- (соответственно m^-) *относительно дуальной пары* $\langle k, l\rangle$.

Предложение 2. *Если вполне изотонное отображение* $m : Y \rightleftarrows Z$ *является дуальным к вполне изотонному отображению* $n : T \rightleftarrows X$ *относительно дуальной пары* $\langle k, l\rangle$ *и* *отображение* $m^{\pm} : Y \to Z$ *является инъективным* (соответственно *проективным*), *то для любого* $x \in \operatorname{Dom} n^{\mp}$ *выполняется включение*

$$Y(y \leqslant k^{\pm}(x)) \subseteq \operatorname{Dom} m^{\pm} \quad (\text{соотв. } Y(k^{\pm}(x) \leqslant y) \subseteq \operatorname{Dom} m^{\pm}).$$

Если вполне изотонное отображение $n : T \rightleftarrows X$ *является дуальным к вполне изотонному отображению* $m : Y \rightleftarrows Z$ *относительно дуальной пары* $\langle k, l\rangle$ *и отображение* $n^{\mp} : X \to T$ *является инъективным* (соответственно *проективным*), *то для любого* $y \in \operatorname{Dom} m^{\pm}$ *выполняется включение*

$$X(x \leqslant k^{\mp}(y)) \subseteq \operatorname{Dom} n^{\mp} \quad (\text{соотв. } X(k^{\mp}(y) \leqslant x) \subseteq \operatorname{Dom} n^{\mp}).$$

$\lhd$ Во-первых, пусть вполне изотонное отображение $m : Y \rightleftarrows Z$ является дуальным к вполне изотонному отображению $n : T \rightleftarrows X$ относительно дуальной пары $\langle k, l\rangle$ и отображение $m^{\pm} : Y \to Z$ является инъективным. Выберем произвольное x из $\operatorname{Dom} n^{\mp}$. По определению дуального отображения выполняется неравенство

$$l^{\mp} \circ n^{\mp}(x) \leqslant m^{\pm} \circ k^{\pm}(x).$$

Значит, $x \in \operatorname{Dom} k^{\pm}$ и $k^{\pm}(x) \in \operatorname{Dom} m^{\pm}$. Если $y \leqslant k^{\pm}(x)$, то по определению инъективного отображения $y \in \operatorname{Dom} m^{\pm}$, значит, $Y(y \leqslant k^{\pm}(x)) \subseteq \operatorname{Dom} m^{\pm}$. С другой стороны, если отображение $m^{\pm} : Y \to Z$ является проективным и $k^{\pm}(x) \leqslant y$, то по определению проективного отображения тоже $y \in \operatorname{Dom} m^{\pm}$, значит, $Z(k^{\pm}(x) \leqslant y) \subseteq \operatorname{Dom} m^{\pm}$.

Во-вторых, пусть вполне изотонное отображение $n : T \rightleftarrows X$ является дуальным к вполне изотонному отображению $m : Y \rightleftarrows Z$ относительно дуальной пары $\langle k, l\rangle$ и отображение $n^{\mp} : X \to T$ является инъективным. Выберем произвольное y из $\operatorname{Dom} m^{\pm}$. По определению дуального отображения выполняется неравенство

$$l^{\pm} \circ m^{\pm}(y) \leqslant n^{\mp} \circ k^{\mp}(y).$$

Значит, $y \in \operatorname{Dom} k^{\mp}$ и $k^{\mp}(x) \in \operatorname{Dom} n^{\mp}$. Если $x \leqslant k^{\mp}(y)$, то по определению инъективного отображения $x \in \operatorname{Dom} n^{\mp}$, значит, $X(x \leqslant k^{\mp}(y)) \subseteq \operatorname{Dom} n^{\mp}$. С другой стороны, если отображение $n^{\mp} : X \to T$ является проективным и $k^{\mp}(y) \leqslant x$, то по определению проективного отображения $x \in \operatorname{Dom} n^{\mp}$, значит, $X(k^{\mp}(y) \leqslant x) \subseteq \operatorname{Dom} n^{\mp}$. $\rhd$

4.4. Дескрипторы. Пусть Λ — множество; X^{Λ}, Y^{Λ} — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ символами x^{Λ} и y^{Λ} обозначаем элементы $(x : \lambda \in \Lambda) \in X^{\Lambda}$ и $(y : \lambda \in \Lambda) \in Y^{\Lambda}$ соответственно. Сформируем из частично упорядоченных множеств $X, X^{\Lambda}, Y, Y^{\Lambda}$ простой ориентированный цикл

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Y^{\Lambda} \dashrightarrow X^{\Lambda} \dashrightarrow X.$$

Вполне изотонные отображения $F : X^{\Lambda} \rightleftarrows X$ и $G : Y \rightleftarrows Y^{\Lambda}$ называем *дескрипторами* (на множестве X и Y соответственно). Дескриптор $F : X^{\Lambda} \rightleftarrows X$ называем *интериоризатором* в точке $x \in X$, если отображение $F^{\pm} : X^{\Lambda} \to X$ является инъективным, $x^{\Lambda} \in \operatorname{Dom} F^{\pm}$ и выполняется неравенство

$$F^{\pm}\big(x^{\Lambda}\big) \leqslant x.$$

Дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^{\Lambda}$ называем *экстериоризатором* в точке $y \in Y$, если отображение $G^{\mp} : Y^{\Lambda} \to Y$ является проективным, $y \in \operatorname{Dom} G^{\pm}$ и выполняется неравенство

$$y^{\Lambda} \leqslant G^{\pm}(y).$$

Из свойства 7 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 3. *Если дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ является интериоризатором в точке $x \in X$, то $x \in \operatorname{Dom} F^\mp$ и*

$$X\left(F^\pm\left(x^\Lambda\right) \leqslant x\right)\right) = X\left(x^\Lambda \leqslant F^\mp(x)\right).$$

Если дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ является экстериоризатором в точке $y \in Y$, то $y^\Lambda \in \operatorname{Dom} G^\mp$ и

$$Y\left(y^\Lambda \leqslant G^\pm(y) = Y\left(G^\mp\left(y^\Lambda\right)\right) \leqslant y\right).$$

4.5. Дуальные дескрипторы. Пусть $\langle k, l\rangle$ — дуальная пара вполне изотонных отображений $k : X \rightleftarrows Y$ и $l : X \rightleftarrows Y$. Декартовы степени $k^\Lambda : Y^\Lambda \rightleftarrows X^\Lambda$ и $l^\Lambda : Y^\Lambda \rightleftarrows X^\Lambda$ отображений k и l соответственно являются вполне изотонными. Отображения $(k^\Lambda)^\pm : Y^\Lambda \to X^\Lambda$, $(k^\Lambda)^\mp : X^\Lambda \to Y^\Lambda$, $(l^\Lambda)^\pm : Y^\Lambda \to X^\Lambda$ и $(l^\Lambda)^\mp : X^\Lambda \to Y^\Lambda$ совпадают с декартовыми степенями отображений $k^\mp$, $k^\pm$, $l^\mp$ и $l^\pm$ соответственно, т. е.

$$(k^\Lambda)^\pm = (k^\mp)^\Lambda, \quad (k^\Lambda)^\mp = (k^\pm)^\Lambda, \quad (l^\Lambda)^\pm = (l^\mp)^\Lambda, \quad (l^\Lambda)^\mp = (k^\pm)^\Lambda.$$

Рассмотрим дуальные пары $\left\langle k, l^\Lambda\right\rangle$, $\left\langle k^\Lambda, l\right\rangle$ и ориентированные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "G"] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left, "l^\Lambda"] \\
X \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[r, shift right, "F"'] & X^\Lambda \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "G^\pm"] & Y^\Lambda \\
X \arrow[u, "k^\pm"] \arrow[r, "F^\mp"'] & X^\Lambda \arrow[u, "(l^\Lambda)^\mp"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Y^\Lambda \arrow[r, shift right] & Y \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift left, "l"] \\
X^\Lambda \arrow[u, shift left, "k^\Lambda"] \arrow[r, shift left] & X \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y^\Lambda \arrow[r, "G^\mp"] & Y \\
X^\Lambda \arrow[u, "(k^\Lambda)^\mp"] \arrow[r, "F^\pm"'] & X \arrow[u, "l^\pm"']
\end{tikzcd}$$

Если дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ относительно дуальной пары $\left\langle k, l^\Lambda\right\rangle$ и относительно дуальной пары $\left\langle k^\Lambda, l\right\rangle$, то дескриптор G называем *дуальным* к дескриптору F. Согласно этому определению дескриптор G является дуальным к дескриптору F, если для любого $x \in \operatorname{Dom} F^\mp$ и $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} F^\pm$ выполняются неравенства:

$$(l^\Lambda)^\mp \circ F^\mp(x) \leqslant G^\pm \circ k^\pm(x), \quad l^\pm \circ F^\pm(x_\Lambda) \leqslant G^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda).$$

Если дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ и отображение $G^\pm : Y \to Y^\Lambda$ является проективным, то по предложению 2 для любых $x \in \operatorname{Dom} F^\mp$ и $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} F^\pm$ выполняются включения:

$$Y\left(k^\pm(x) \leqslant y\right) \subseteq \operatorname{Dom} G^\pm. \tag{6}$$

Далее рассмотрим дуальные пары $\langle l, k^\Lambda \rangle$, $\langle l^\Lambda, k \rangle$ и ориентированные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "F"] & X^\Lambda \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left, "k^\Lambda"] \\
Y \arrow[u, shift left, "l"] \arrow[r, shift left] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F^\mp"] & X^\Lambda \\
Y \arrow[u, "l^\mp"] \arrow[r, "G^\pm"'] & Y^\Lambda \arrow[u, "(k^\Lambda)^\pm"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X^\Lambda \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[d, shift left] & X \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left, "k"] \\
Y^\Lambda \arrow[u, shift left, "l^\Lambda"] \arrow[r, shift left] & Y \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^\Lambda \arrow[r, "F^\pm"] & X \\
Y^\Lambda \arrow[u, "(l^\Lambda)^\pm"] \arrow[r, "G^\mp"'] & Y \arrow[u, "k^\mp"']
\end{tikzcd}$$

Если дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ относительно дуальной пары $\langle l, k^\Lambda \rangle$ и относительно дуальной пары $\langle l^\Lambda, k \rangle$, то дескриптор F называем *дуальным* к дескриптору G. Согласно этому определению дескриптор F является дуальным к дескриптору G, если для любых $y \in \operatorname{Dom} G^\pm$ и $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} G^\mp$ выполняются неравенства

$$(k^\Lambda)^\pm \circ G^\pm(y) \leqslant F^\mp \circ l^\mp(y), \quad k^\mp \circ G^\mp(y_\Lambda) \leqslant F^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y_\Lambda).$$

Если дескриптор F является дуальным к дескриптору G и отображение $F^\pm : X^\Lambda \to X$ является инъективным, то по предложению 2 для любого $y \in \operatorname{Dom} G^\pm$ выполняется включение

$$X(l^\mp(y) \leqslant x) \subseteq \operatorname{Dom} F^\mp. \tag{7}$$

Предложение 4. *Если проективный дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ и дескриптор F является интериоризатором в точке $x \in \operatorname{Dom}\{k^\pm, l^\mp\}$, то дуальный дескриптор G является экстериоризатором в любой точке $y \in Y$, удовлетворяющей неравенствам $k^\pm(x) \leqslant y \leqslant l^\pm(x)$.*

Если инъективный дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ и дескриптор G является экстериоризатором в точке $y \in \operatorname{Dom}\{k^\mp, l^\pm\}$, то дуальный дескриптор F является интериоризатором в любой точке $x \in X$, удовлетворяющей неравенствам $l^\mp(y) \leqslant x \leqslant k^\mp(y)$.

$\lhd$ Во-первых, пусть дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ является интериоризатором в точке $x \in \operatorname{Dom}\{k^\pm, l^\mp\}$. Тогда $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} F^\pm$ и $F^\pm(x^\Lambda) \leqslant x$. По предложению 3 $x \in \operatorname{Dom} F^\mp$ и

$$x^\Lambda \leqslant F^\mp(x).$$

Предположим, что дескриптор G является дуальным к дескриптору F, отображение $G^\mp : Y^\Lambda \to Y$ является проективным и точка $y \in Y$ удовлетворяет неравенствам $k^\pm(x) \leqslant y \leqslant l^\pm(x)$. Отметим, что из неравенства $y \leqslant l^\mp(x)$ вытекает неравенство

$$y^\Lambda \leqslant (l^\pm)^\Lambda(x^\Lambda) = (l^\Lambda)^\mp(x^\Lambda),$$

а в силу (6) из неравенства $k^\pm(x) \leqslant y$ вытекает включение $y \in \operatorname{Dom} G^\pm$. При этом по определению дуального отображения для любого $x \in \operatorname{Dom} F^\mp$ выполняется неравенство

$$(l^\Lambda)^\mp \circ F^\mp(x) \leqslant G^\pm \circ k^\pm(x).$$

Следовательно,

$$y^\Lambda \leqslant (l^\Lambda)^\mp(x^\Lambda) \leqslant (l^\Lambda)^\mp \circ F^\mp(x) \leqslant G^\pm \circ k^\pm(x) \leqslant G^\pm(y),$$

т. е. $y^\Lambda \leqslant G^\pm(y)$. Это означает, что дескриптор G является экстериоризатором в точке y.

Во-вторых, пусть дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ является экстериоризатором в точке $y \in \mathrm{Dom}\{k^\mp, l^\pm\}$. Тогда $y \in \mathrm{Dom}\, G^\pm$ и выполняется неравенство

$$y^\Lambda \leqslant G^\pm(y).$$

Предположим, что дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ является дуальным к дескриптору G, отображение $F^\pm : X^\Lambda \to X$ является инъективным и точка $x \in X$ удовлетворяет неравенствам $l^\mp(y) \leqslant x \leqslant k^\mp(y)$. Отметим, что из неравенства $x \leqslant k^\mp(y)$ вытекает неравенство

$$x^\Lambda \leqslant (k^\mp)^\Lambda(y^\Lambda) = (k^\Lambda)^\pm(y^\Lambda),$$

а в силу (7) из неравенства $l^\mp(y) \leqslant x$ вытекает включение $x \in \mathrm{Dom}\, F^\mp$. При этом по определению дуального отображения для любого $x \subseteq \mathrm{Dom}\, G^\pm$ выполняется неравенство

$$(k^\Lambda)^\pm \circ G^\pm(y) \leqslant F^\mp \circ l^\mp(y).$$

Следовательно,

$$x^\Lambda \leqslant (k^\Lambda)^\pm(y^\Lambda) \leqslant (k^\Lambda)^\pm \circ G^\pm(x^\Lambda) \leqslant F^\mp \circ l^\mp(y) \leqslant F^\mp(x),$$

т. е. $x^\Lambda \leqslant F^\mp(x)$. По предложению 1 $x^\Lambda \in \mathrm{Dom}\, F^\pm$ и $F^\pm(x^\Lambda) \leqslant x$. Это означает, что дескриптор F является интериоризатором в точке x. $\rhd$

5. Односторонняя схема двойственности

5.1. Инъективное и проективное описания. Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольные семейства частично упорядоченных множеств, X_Λ и Y_Λ — декартовы произведения этих семейств соответственно. Из множеств $X, X_\lambda, Y, Y_\lambda$ и $X^\Lambda, X_\Lambda, Y^\Lambda, Y_\Lambda$ сформируем простые ориентированные циклы:

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Y_\lambda \dashrightarrow X_\lambda \dashrightarrow X,$$

$$X_\Lambda \dashrightarrow Y_\Lambda \dashrightarrow Y^\Lambda \dashrightarrow X^\Lambda \dashrightarrow X_\Lambda.$$

Выберем произвольное семейство $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ вполне изотонных отображений $m_\lambda : X_\lambda \rightleftarrows X$. Считаем, что для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $m_\lambda^\pm : X_\lambda \to X$ является проективными. Значит, для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $m_\lambda^\mp : X \to X_\lambda$ является инъективным. Символом $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftarrows X_\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение $m_\Lambda^\pm := (m_\Lambda)^\pm : X^\Lambda \to X_\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{m_\lambda^\mp : \lambda \in \Lambda\}$ и является проективным, а отображение $m_\Lambda^\mp := (m_\Lambda)^\mp : X_\Lambda \to X^\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{m_\lambda^\pm : \lambda \in \Lambda\}$ и является инъективным. Если $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ — какой-либо интериоризатор в точке $x \in X$, то равенство

$$x = F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \tag{8}$$

называем *правилом инъективного описания.* Если оно выполнено для какого-либо элемента $x \in X$, то говорим, что элемент x допускает (инъективное) описание по правилу (8). По определению интериоризатора отображение $F^{\pm} : X_\Lambda \to X$ является инъективным. Значит, если элемент $x \in X$ допускает описание по правилу (8), то он восстанавливается по множеству $\{m_\lambda^{\mp} \circ m_\lambda^{\pm}(x) \in X : \lambda \in \Lambda\}$ с помощью инъективного отображения $F^{\pm}$.

Выберем другое семейство $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ вполне изотонных отображений $n_\lambda : Y \rightleftarrows Y_\lambda$. Считаем, что для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $n_\lambda^{\pm} : Y \to Y_\lambda$ является инъективными. Значит, для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $n_\lambda^{\mp} : Y_\lambda \to Y$ является проективным. Символом $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftarrows Y^\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение $n_\Lambda^{\pm} := (n_\Lambda)^{\pm} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{n_\lambda^{\mp} : \lambda \in \Lambda\}$ и является инъективным, а отображение $n_\Lambda^{\mp} := (n_\Lambda)^{\mp} : Y^\Lambda \to Y_\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{n_\lambda^{\pm} : \lambda \in \Lambda\}$ и является проективным. Если $G : Y \to Y^\Lambda$ — какой-либо экстериоризатор в точке $y \in Y$, то равенство

$$y = G^{\mp} \circ n_\Lambda^{\pm} \circ n_\Lambda^{\mp}(y^\Lambda) \tag{9}$$

называем *правилом проективного описания.* Если оно выполнено для какого-либо элемента $y \in Y$, то говорим, что элемент y допускает (проективное) описание по правилу (9). По определению экстериоризатора отображение $G^{\mp} : Y_\Lambda \to Y$ является проективным. Значит, если элемент $y \in Y$ допускает описание по правилу (9), то он восстанавливается по множеству $\{n_\lambda^{\pm} \circ n_\lambda^{\mp}(y) \in Y : \lambda \in \Lambda\}$ с помощью проективного отображения $G^{\mp}$.

Предложение 5. *Если вполне изотонное отображение $m_\Lambda^{\pm} : X^\Lambda \to X_\Lambda$ является проективным, то для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^{\pm}$ выполняется неравенство*

$$m_\Lambda^{\mp} \circ m_\Lambda^{\pm}(x_\Lambda) \leqslant x_\Lambda.$$

Если вполне изотонное отображение $n_\Lambda^{\pm} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$ является инъективным, то для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n_\Lambda^{\mp}$ выполняется неравенство

$$n_\Lambda^{\pm} \circ n_\Lambda^{\mp}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda.$$

$\lhd$ Во-первых, предположим, что вполне изотонное отображение $m_\Lambda^{\pm} : X^\Lambda \to X_\Lambda$ является проективным. Условно обратное к отображению $m_\Lambda^{\pm} : X^\Lambda \to X_\Lambda$ совпадает с отображением $(m_\Lambda^{\pm})^- = m_\Lambda^{\mp} : X_\Lambda \to X^\Lambda$ и является инъективным. В свою очередь, условно обратное к отображению $m_\Lambda^{\mp} : X_\Lambda \to X^\Lambda$ совпадает с отображением $m_\Lambda^{\pm} : X^\Lambda \to X_\Lambda$. Значит, по свойству 1 вполне изотонных отображений для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^{\pm}$ выполняется неравенство $m_\Lambda^{\mp} \circ m_\Lambda^{\pm}(x_\Lambda) = m_\Lambda^{\mp} \circ (m_\Lambda^{\mp})^-(x_\Lambda) \leqslant x_\Lambda$.

Во-вторых, предположим, что вполне изотонное отображение $n_\Lambda^{\pm} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$ является инъективным. Условно обратное к отображению $n_\Lambda^{\pm} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$ совпадает с отображением $(n_\Lambda^{\pm})^- = n_\Lambda^{\mp} : Y^\Lambda \to Y_\Lambda$ и является проективным. В свою очередь, условно обратное к отображению $n_\Lambda^{\mp} : Y^\Lambda \to Y_\Lambda$ совпадает с отображением $n_\Lambda^{\pm} : Y_\Lambda \to Y^\Lambda$. Значит, по свойству 2 вполне изотонных отображений для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n_\Lambda^{\mp}$ выполняется неравенство $n_\Lambda^{\pm} \circ n_\Lambda^{\mp}(y_\Lambda) = (n_\Lambda^{\mp})^- \circ n_\Lambda^{\mp}(y_\Lambda) \leqslant y_\Lambda$. $\rhd$

5.2. Дуальные описания. Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство вполне изотонных отображений $h_\lambda : Y_\lambda \rightleftarrows X_\lambda$, $h_\Lambda : X_\Lambda \rightleftarrows Y_\Lambda$ — декартово произведение этого семейства. Рассмотрим дуальную пару $\langle h_\Lambda, k^\Lambda \rangle$, ее зеркальную дуальную пару $\langle k^\Lambda, h_\Lambda \rangle$

и систему из четырех ориентированных диаграмм

$$
\begin{tikzcd}
Y_\Lambda \arrow[r, shift left, "n_\Lambda"] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left] \\
X_\Lambda \arrow[u, shift left, "h_\Lambda"] \arrow[r, shift left] & X^\Lambda \arrow[l, shift left, "m_\Lambda"] \arrow[u, shift left] \arrow[u, leftarrow, shift right, swap, "k^\Lambda"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y_\Lambda \arrow[r, "n^\pm_\Lambda"] & Y^\Lambda \\
X_\Lambda \arrow[u, "h^\pm_\Lambda"] \arrow[r, swap, "m^\mp_\Lambda"] & X^\Lambda \arrow[u, swap, "(k^\Lambda)^\mp"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Y^\Lambda \arrow[r, shift left] & Y_\Lambda \arrow[l, shift left, swap, "n^\Lambda"] \\
X^\Lambda \arrow[u, shift left, "k^\Lambda"] \arrow[r, shift left] & X_\Lambda \arrow[l, shift left, "m_\Lambda"] \arrow[u, shift left, swap, "h_\Lambda"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y^\Lambda \arrow[r, "n^\mp_\Lambda"] & Y_\Lambda \\
X^\Lambda \arrow[u, "(k^\Lambda)^\mp"] \arrow[r, swap, "m^\pm_\Lambda"] & X_\Lambda \arrow[u, swap, "h^\pm_\Lambda"]
\end{tikzcd}
$$

Если вполне изотонное отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ относительно дуальной пары $\left\langle h_\Lambda, k^\Lambda \right\rangle$ и относительно зеркальной дуальной пары $\left\langle k^\Lambda, h_\Lambda \right\rangle$, то отображение n_Λ называем *дуальным* к отображению m_Λ. Отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ, если для любых $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m^\mp_\Lambda \subseteq X_\Lambda$ и $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m^\pm_\Lambda \subseteq X^\Lambda$ соответственно выполняются неравенства:

$$(k^\Lambda)^\mp \circ m^\mp_\Lambda(x_\Lambda) \leqslant n^\pm_\Lambda \circ h^\pm_\Lambda(x_\Lambda), \quad h^\pm_\Lambda \circ m^\pm_\Lambda(x_\Lambda) \leqslant n^\mp_\Lambda \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda). \tag{10}$$

Далее рассмотрим систему из четырех ориентированных диаграмм

$$
\begin{tikzcd}
X_\Lambda \arrow[r, shift left] & X^\Lambda \arrow[l, shift left, swap, "m_\Lambda"] \\
Y_\Lambda \arrow[u, shift left, "h_\Lambda"] \arrow[r, shift left] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left, "n_\Lambda"] \arrow[u, shift left, swap, "l^\Lambda"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_\Lambda \arrow[r, "m^\mp_\Lambda"] & X^\Lambda \\
Y_\Lambda \arrow[u, "h^\mp_\Lambda"] \arrow[r, swap, "n^\pm_\Lambda"] & Y^\Lambda \arrow[u, swap, "(l^\Lambda)^\pm"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X^\Lambda \arrow[r, shift left, "m_\Lambda"] & X_\Lambda \arrow[l, shift left] \\
Y^\Lambda \arrow[u, shift left, "l^\Lambda"] \arrow[r, shift left] & Y_\Lambda \arrow[l, shift left, "n_\Lambda"] \arrow[u, shift left, swap, "h_\Lambda"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^\Lambda \arrow[r, "m^\pm_\Lambda"] & X_\Lambda \\
Y^\Lambda \arrow[u, "(l^\Lambda)^\pm"] \arrow[r, swap, "n^\mp_\Lambda"] & Y_\Lambda \arrow[u, swap, "h^\mp_\Lambda"]
\end{tikzcd}
$$

полученных с помощью горизонтальной симметрии и замены отображения k^Λ отображением l^Λ. Если вполне изотонное отображение m_Λ является дуальным к отображению n^Λ относительно дуальной пары $\left\langle h_\Lambda, l^\Lambda \right\rangle$ и относительно зеркальной дуальной пара $\left\langle l^\Lambda, h_\Lambda \right\rangle$, то отображение m_Λ называем *дуальным* к отображению n_Λ. Отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ, если для любых $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n^\mp_\Lambda \subseteq Y^\Lambda$ и $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n^\pm_\Lambda \subseteq Y_\Lambda$ соответственно выполняются неравенства

$$h^\mp_\Lambda \circ n^\mp_\Lambda(y_\Lambda) \leqslant m^\pm_\Lambda \circ (l^\Lambda)^\pm(y_\Lambda), \quad (l^\Lambda)^\pm \circ n^\pm_\Lambda(y_\Lambda) \leqslant m^\mp_\Lambda \circ h^\mp_\Lambda(y_\Lambda). \tag{11}$$

Если дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ является дуальным к дескриптору $G : X \rightleftarrows X^\Lambda$ и отображение $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftarrows X_\Lambda$ является дуальным к отображению $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftarrows Y^\Lambda$, то правило описания (8) называем *дуальным* к правилу (9). С другой стороны, если дескриптор $G : X \rightleftarrows X^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ и отображение $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftarrows Y^\Lambda$ является дуальным к отображению $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftarrows X_\Lambda$, то правило описания (9) называем *дуальным* к правилу (8).

5.3. Односторонняя схема двойственности. Рассмотрим ориентированные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[d, shift right, "k"'] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left, "l^\Lambda"] \\
X \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift right] & X^\Lambda \arrow[l, shift right, "F"'] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y_\Lambda \arrow[r, shift left, "n_\Lambda"] \arrow[d, shift right, "h_\Lambda"'] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left, "k^\Lambda"] \\
X_\Lambda \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift right] & X^\Lambda \arrow[l, shift right, "m_\Lambda"'] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "l"'] & X^\Lambda \arrow[l, shift right, "F"'] \arrow[d, shift left, "k^\Lambda"] \\
Y \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift left] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_\Lambda \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "h_\Lambda"'] & X^\Lambda \arrow[l, shift right, "m_\Lambda"'] \arrow[d, shift left, "l^\Lambda"] \\
Y_\Lambda \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift left] & Y^\Lambda \arrow[l, shift left, "n_\Lambda"] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}
$$

где F, G — дескрипторы; m_Λ, n_Λ, h_Λ — декартовы произведения семейств вполне изотонных отображений; k^Λ — декартова степень вполне изотонного отображения k; l^Λ — декартова степень вполне изотонного отображения l. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (односторонняя схема двойственности). *Если элемент $x \in \operatorname{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$ допускает инъективное описание по правилу* (8), *то любой элемент $y \in Y$, удовлетворяющий неравенствам $k^\pm(x) \leqslant y \leqslant l^\pm(x)$, допускает проективное описание по дуальному правилу* (9).

Если элемент $y \in \operatorname{Dom}\{k^\mp, l^\mp\}$ допускает проективное описание по правилу (9), *то любой элемент $x \in X$, удовлетворяющий неравенствам $l^\mp(y) \leqslant x \leqslant k^\mp(y)$, допускает инъективное описание по дуальному правилу* (8).

$\lhd$ Во-первых, пусть дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ является дуальным по отношению к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ и элемент $x \in \operatorname{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$ допускает инъективное описание по правилу (8). Тогда дескриптор F является интериоризатором в точке x и

$$x = F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda). \tag{12}$$

Предположим, что вполне изотонное отображение $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftarrows Y^\Lambda$ является дуальным к вполне изотонному отображению $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftarrows X_\Lambda$. Тогда в силу (10) для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^\pm$ выполняется неравенство $h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x_\Lambda) \leqslant n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda)$. В силу (12) $x^\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^\pm$, значит,

$$h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \leqslant n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x^\Lambda). \tag{13}$$

Кроме того, в силу (10) для любых $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^\mp$ выполняется неравенство $(k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp(x_\Lambda) \leqslant n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm(x_\Lambda)$. При этом в силу (1) выполняются включения $m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \in \operatorname{Im} m_\Lambda^\pm \subseteq \operatorname{Dom} m_\Lambda^\mp$, значит,

$$(k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \leqslant n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda). \tag{14}$$

По предложению 4 дескриптор G является экстериоризатором в любой точке $y \in \operatorname{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$, удовлетворяющей неравенствам $k^\pm(x) \leqslant y \leqslant l^\pm(x)$. Выберем произвольный элемент $y \in \operatorname{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$, удовлетворяющий этим неравенствам и отметим, что из неравенства $k^\pm(x) \leqslant y$ вытекает неравенство $(k^\Lambda)^\mp(x^\Lambda) \leqslant y^\Lambda$. По определению дуального отображения для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} F^\pm$ выполняется неравенство $l^\pm \circ F^\pm(x_\Lambda) \leqslant G^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda)$. Из равенства (12) следует, что $m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \in \operatorname{Dom} F^\pm$, значит, в силу (12), (14) и (13) имеем

$$
\begin{aligned}
y \leqslant l^\pm(x) &= l^\pm \circ F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \\
\leqslant G^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) &\leqslant G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \\
\leqslant G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x^\Lambda) &\leqslant G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda),
\end{aligned}
$$

т. е. $y \leqslant G^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda})$. Но по предложению 4 дескриптор G является экстериоризатором в точке y, значит, по определению экстериоризатора и по предложению 5 выполняются неравенства $G^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \leqslant G^{\pm}(y^{\Lambda}) \leqslant y$. Следовательно, $G^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) = y$, т. е. элемент y допускает проективное описание по дуальному правилу (9).

Во-вторых, пусть дескриптор $F : X^{\Lambda} \rightleftarrows X$ является дуальным по отношению к дескриптору $G : Y \rightleftarrows Y^{\Lambda}$ и элемент $y \in \operatorname{Dom}\{k^{\mp}, l^{\mp}\}$ допускает проективное описание по правилу (9). Тогда дескриптор G является экстериоризатором в точке y и

$$y = G^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}). \tag{15}$$

Предположим, что вполне изотонное отображение $m_{\Lambda} : X^{\Lambda} \rightleftarrows X_{\Lambda}$ является дуальным к вполне изотонному отображению $n_{\Lambda} : Y_{\Lambda} \rightleftarrows Y^{\Lambda}$. Тогда в силу (11) для любого $y_{\Lambda} \in \operatorname{Dom} n_{\Lambda}^{\pm}$ выполняется неравенство $h_{\Lambda}^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y_{\Lambda}) \leqslant m_{\Lambda}^{\pm} \circ (l^{\Lambda})^{\pm}(y_{\Lambda})$. В силу (15) $y^{\Lambda} \in \operatorname{Dom} n_{\Lambda}^{\mp}$, значит,

$$h_{\Lambda}^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \leqslant m_{\Lambda}^{\pm} \circ (l^{\Lambda})^{\pm}(y^{\Lambda}). \tag{16}$$

Кроме того, в силу (11) для любых $y_{\Lambda} \in \operatorname{Dom} n_{\Lambda}^{\pm}$ выполняется неравенство $(l^{\Lambda})^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\pm}(y_{\Lambda}) \leqslant m_{\Lambda}^{\mp} \circ h_{\Lambda}^{\mp}(y_{\Lambda})$. При этом в силу (1) выполняются включения $n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \in \operatorname{Im} n_{\Lambda}^{\mp} \subseteq \operatorname{Dom} n_{\Lambda}^{\pm}$, значит,

$$(l^{\Lambda})^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \leqslant m_{\Lambda}^{\mp} \circ h_{\Lambda}^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}). \tag{17}$$

По предложению 4 дескриптор F является интериоризатором в любой точке $x \in \operatorname{Dom}\{k^{\mp}, l^{\mp}\}$, удовлетворяющей неравенствам $l^{\mp}(y) \leqslant x \leqslant k^{\mp}(y)$. Выберем произвольный элемент $x \in \operatorname{Dom}\{k^{\mp}, l^{\mp}\}$, удовлетворяющий этим неравенствам и отметим, что из неравенства $l^{\mp}(y) \leqslant x$ вытекает неравенство $(l^{\Lambda})^{\pm}(y^{\Lambda}) \leqslant x^{\Lambda}$. По определению дуального отображения для любого $y_{\Lambda} \in \operatorname{Dom} G^{\mp}$ выполняется неравенство $k^{\mp} \circ G^{\mp}(y_{\Lambda}) \leqslant F^{\pm} \circ (l^{\Lambda})^{\pm}(y_{\Lambda})$. Из равенства (15) следует, что $n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \in \operatorname{Dom} G^{\mp}$, значит, в силу (15), (17) и (16) имеем

$$\begin{aligned} x \leqslant k^{\mp}(y) &= k^{\mp} \circ G^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \\ \leqslant F^{\pm} \circ (l^{\Lambda})^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\pm} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) &\leqslant F^{\pm} \circ m_{\Lambda}^{\mp} \circ h_{\Lambda}^{\mp} \circ n_{\Lambda}^{\mp}(y^{\Lambda}) \\ \leqslant F^{\pm} \circ m_{\Lambda}^{\mp} \circ m_{\Lambda}^{\pm} \circ (l^{\Lambda})^{\pm}(y^{\Lambda}) &\leqslant F^{\pm} \circ m_{\Lambda}^{\mp} \circ m_{\Lambda}^{\pm}(x^{\Lambda}), \end{aligned}$$

т. е. $x \leqslant F^{\pm} \circ m_{\Lambda}^{\mp} \circ m_{\Lambda}^{\pm}(x^{\Lambda})$. Но по предложению 4 дескриптор F является интериоризатором в точке x, значит, по определению интериоризатора и по предложению 5 выполняются неравенства $F^{\pm} \circ m_{\Lambda}^{\mp} \circ m_{\Lambda}^{\pm}(x^{\Lambda}) \leqslant F^{\pm}(x^{\Lambda}) \leqslant x$. Следовательно, $F^{\pm} \circ m_{\Lambda}^{\mp} \circ m_{\Lambda}^{\pm}(x^{\Lambda}) = x$, т. е. элемент x допускает инъективное описание по дуальному правилу (8). $\rhd$

6. Двусторонняя схема двойственности

В исследовательской практике, как правило, двойственные переходы осуществляются по упрощенной схеме. Будем называть ее *двусторонней схемой двойственности.* Упрощение достигается путем отождествления вполне изотонных отображений $k : X \rightleftarrows Y$ и $l : X \rightleftarrows Y$. При переходе к упрощенной схеме число рассматриваемых параллельно ситуаций резко сокращается и введенное нами обозначение $k : X \rightleftarrows Y$ теряет актуальность. В этих ситуациях вполне достаточно стандартное обозначение $k : X \to Y$. При этом частично упорядоченные множества X и Y выбираются произвольно, значит, можно считать, что вполне изотонное отображение $k : X \to Y$ является инъективным. В противном случае можно пару (X, Y) заменить парой (Y, X), а отображение $k : X \to Y$ заменить условно обратным отображением $k^{-} : Y \to X$. Таким образом, двусторонняя схема двойственности предполагает лишь две зеркальные ситуации, которые легко сводятся одна к другой. Это позволяет исследовать лишь одну из этих ситуаций.

6.1. Принцип двойственности. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества, $k : X \to Y$ — инъективное отображение, $k^- : Y \to X$ — условно обратное отображение. По свойству 6 отображение k^- является проективным. Символом X_0 обозначим полный образ $\operatorname{Im} k^-$, а символом Y_0 обозначим полный образ $\operatorname{Im} k$.

Предложение 6 (принцип двойственности)**.** *Между элементами $x \in X_0$ и $y \in Y_0$ можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$y = k(x), \quad x = k^-(y).$$

$\lhd$ Во-первых, убедимся, что образ $k(X_0)$ совпадает с Y_0. Действительно, $k(X_0) \subseteq k(X) = \operatorname{Im} k =: Y_0$. С другой стороны, если $y \in Y_0$, то по свойству 4 $y = k \circ k^-(y) = k(x)$, где $x := k^-(y) \in X_0$, значит, $y \in k(X_0)$, т. е. $Y_0 \subseteq k(X_0)$. Следовательно, $k(X_0) = Y_0$. Во-вторых, убедимся, что образ $k^-(Y_0)$ совпадает с X_0. Действительно, $k^-(Y_0) \subseteq k^-(Y) = \operatorname{Im} k^- =: X_0$. С другой стороны, если $x \in X_0$, то по свойству 4 $x = k^- \circ k(x) = k^-(y)$, где $y := k(x) \in Y_0$, значит, $x \in k^-(Y_0)$, т. е. $X_0 \subseteq k^-(Y_0)$. Следовательно, $k^-(Y_0) = X_0$. Таким образом, из свойства 4 вытекает, что сужение отображения k^- на образ Y_0 и сужение отображения k на образ X_0 являются взаимно обратными отображениями. $\rhd$

Символом k_0 обозначим отображение $X_0 \mapsto Y_0 \mid x \mapsto k(x)$, а символом k_0^- обозначим отображение $Y_0 \mapsto X_0 \mid y \mapsto k^-(y)$. Из доказанного принципа двойственности следует, что отображение k_0 является порядковым изоморфизмом X_0 на Y_0, а отображение k_0^- совпадает с обратным отображением и является порядковым изоморфизмом Y_0 на X_0. Отображения k_0 и k_0^- являются инъективными и проективными одновременно, и условно обратное отображение $(k_0)^-$ совпадает с отображением k_0^-, а условно обратное отображение $(k_0^-)^-$ совпадает с отображением k_0.

6.2. Дуальные дескрипторы. Пусть Λ — множество и $0 \notin \Lambda$; X^Λ, Y^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно; $k^\Lambda : X^\Lambda \to Y^\Lambda$ — декартова степень отображения $k : X \to Y$. Отображение k^Λ является проективным. Его условно обратное отображение $(k^\Lambda)^- : Y^\Lambda \to X^\Lambda$ совпадает с декартовой степенью условно обратного отображения $k^- : Y \to X$ и является инъективным. Рассмотрим диаграммы, в ориентировании которых нет необходимости

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "G"] & Y^\Lambda \\ X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "F^-"'] & X^\Lambda \arrow[u, "k^\Lambda"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y^\Lambda \arrow[r, "G^-"] & Y \\ X^\Lambda \arrow[u, "k^\Lambda"] \arrow[r, "F"'] & X \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F^-"] & X^\Lambda \\ Y \arrow[u, "k^-"] \arrow[r, "G"'] & Y^\Lambda \arrow[u, "(k^\Lambda)^-"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^\Lambda \arrow[r, "F"] & X \\ Y^\Lambda \arrow[u, "(k^\Lambda)^-"] \arrow[r, "G^-"'] & Y \arrow[u, "k^-"'] \end{tikzcd}$$

Дескриптор $G : Y \to Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \to X$, если согласно определению для любого $x \in \operatorname{Dom} F^-$ и $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} F$ соответственно выполняются неравенства:

$$k^\Lambda \circ F^-(x) \leqslant G \circ k(x), \quad k \circ F(x_\Lambda) \leqslant G^- \circ k^\Lambda(x_\Lambda).$$

Дескриптор $F : X^\Lambda \to X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \to Y^\Lambda$, если для любых $y \in \operatorname{Dom} G$ и $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} G^-$ соответственно выполняются неравенства:

$$(k^\Lambda)^- \circ G(y) \leqslant F^- \circ k^-(y), \quad k^- \circ G^-(y_\Lambda) \leqslant F \circ (k^\Lambda)^-(y_\Lambda).$$

Из предложения 4 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 7. *Если проективный дескриптор $G : Y \to Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \to X$ и дескриптор F является интериоризатором в точке $x \in X_0$, то дуальный дескриптор G является экстериоризатором в точке $y = k(x) \in Y_0$.*

Если инъективный дескриптор $F : X^\Lambda \to X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \to Y^\Lambda$ и дескриптор G является экстериоризатором в точке $y \in Y_0$, то дуальный дескриптор F является интериоризатором в точке $x = k^-(y) \in X_0$.

6.3. Взаимно дуальные дескрипторы. Пусть X_0^Λ, Y_0^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X_0 и Y_0 соответственно; $k_0^\Lambda : X_0^\Lambda \to Y_0^\Lambda$ — декартова степень отображения $k_0 : X_0 \to Y_0$. Отображение k_0^Λ является порядковым изоморизмом X_0^Λ на Y_0^Λ и является инъективным отображением и проективным отображением одновременно. Его условно обратное отображение $(k_0^\Lambda)^- : Y_0^\Lambda \to X_0^\Lambda$ совпадает с обратным отображением и является порядковым изоморфизмом Y_0^Λ на X_0^Λ. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, "G_0"] \arrow[d, "k_0^-"'] & Y_0^\Lambda \\
X_0 \arrow[r, "F_0^-"'] & X_0^\Lambda \arrow[u, "k_0^\Lambda"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_0 & X_0^\Lambda \arrow[l, "F_0"'] \arrow[d, "k_0^\Lambda"] \\
Y_0 \arrow[u, "k_0^-"] & Y_0^\Lambda \arrow[l, "G_0^-"]
\end{tikzcd}$$

где $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ — инъективный дескриптор, $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ — проективный дескриптор. Дескрипторы F_0 и G_0 называем *взаимно дуальными*, если

$$G_0 = k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-, \quad F_0 = k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda.$$

Предложение 8. *Если дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными, то дескриптор F_0 является дуальным к дескриптору G_0, а дескриптор G_0 является дуальным к дескриптору F_0.*

$\lhd$ Предположим, что дескрипторы $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ и $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ являются взаимно дуальными. Отображения $k_0^-, G_0^-, k_0^\Lambda$ являются инъективными, значит, по свойству 10 вполне изотонных отображений условно обратное отображение F_0^- представляется в виде композиции $(k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0$. Отображения k_0^Λ, F_0^-, k_0^- являются проективными, значит, по свойству 10 условно обратное отображение G_0^- представляется в виде композиции $k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-$. При этом для любого $x \in \operatorname{Dom} F_0^-$ имеем

$$k_0^\Lambda \circ F_0^-(x) = k_0^\Lambda \circ (k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0(x) = G_0 \circ k_0(x),$$

а для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} F_0$ имеем

$$k_0 \circ F_0(x_\Lambda) = k_0 \circ k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda) = G_0^- \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda).$$

Значит, дескриптор F_0 является дуальным к дескриптору G_0. С другой стороны, для любого $y \in \operatorname{Dom} G_0$ имеем

$$(k_0^\Lambda)^- \circ G_0(y) = (k_0^\Lambda)^- \circ k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-(y) = F_0^- \circ k_0^-(y),$$

а для любого $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} G_0^-$ имеем

$$k_0^- \circ G_0^-(y_\Lambda) = k_0^- \circ k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda) = F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda).$$

Значит, дескриптор G_0 является дуальным к дескриптору F_0. $\rhd$

Существует простой способ построения пар (F_0, G_0) взаимно дуальных дескрипторов. Он описан в следующем предложении.

Предложение 9. *Если дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ является инъективным и дескриптор $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ совпадает с композицией $k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-$, то дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными.*

Если дескриптор $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ является проективным и дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ совпадает с композицией $k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda$, то дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными.

$\lhd$ Во-первых, предположим, что дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ является инъективным и дескриптор $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ совпадает с композицией $k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-$. По свойству 10 дескриптор G_0 является проективным и его условно обратное отображение G_0^- представляется в виде композиции $k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-$. Значит,

$$k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda = k_0^- \circ k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^- \circ k_0^\Lambda = F_0,$$

а это означает, что дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными. Во-вторых, предположим, что дескриптор $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ является проективным и дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ совпадает с композицией $k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda$. По свойству 10 дескриптор F_0 является инъективным и его условно обратное отображение F_0^- представляется в виде композиции $(k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0$. Значит,

$$k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^- = k_0^\Lambda \circ (k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0 \circ k_0^- = G_0,$$

а это означает, что дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными. $\rhd$

Из предложений 7 и 8 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 10. *Если дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными, то дескриптор F_0 является интериоризатором в точке $x \in X_0$ тогда и только тогда, когда дескриптор G_0 является экстериоризатором в точке $y = k(x) \in Y_0$.*

6.4. Взаимно дуальные описания. Выберем произвольное семейство $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ проективных отображений $m_\lambda : X_\lambda \to X_0$. Символом $m_\Lambda : X_\Lambda \to X_0^\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение m_Λ является инъективным. Если $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ — какой-либо интериоризатор в точке $x \in X_0$, то правило инъективного описания имеет следующий вид:

$$x = F_0 \circ m_\Lambda \circ m_\Lambda^-(x^\Lambda). \tag{18}$$

Выберем семейство $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ инъективных отображений $n_\lambda : Y_0 \to Y_\lambda$. Символом $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \to Y_\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение n_Λ является проективным. Если $G_0 : Y_0 \to Y_0^\Lambda$ — какой-либо экстериоризатор в точке $y \in Y_0$, то правило проективного описания имеет следующий вид:

$$y = G_0^- \circ n_\Lambda^- \circ n_\Lambda(y^\Lambda). \tag{19}$$

Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство порядковых изоморфизмов $h_\lambda : Y_\lambda \to X_\lambda$, $h_\Lambda : Y_\Lambda \to X_\Lambda$ — декартово произведение этого семейства. Отображение h_Λ является порядковым изоморфизмом, значит, оно является инъективным отображением и проективным отображением одновременно. Рассмотрим систему из двух диаграмм:

$$\begin{tikzcd} Y_\Lambda \arrow[r, "n_\Lambda^-"] & Y_0^\Lambda \\ X_\Lambda \arrow[u, "h_\Lambda^-"] \arrow[r, "m_\Lambda"'] & X_0^\Lambda \arrow[u, "k_0^\Lambda"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y_0^\Lambda \arrow[r, "n_\Lambda"] & Y_\Lambda \\ X_0^\Lambda \arrow[u, "k_0^\Lambda"] \arrow[r, "m_\Lambda^-"'] & X_\Lambda \arrow[u, "h_\Lambda^-"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X_0^\Lambda \arrow[r, "m_\Lambda^-"] & X_\Lambda \\ Y_0^\Lambda \arrow[u, "(k_0^\Lambda)^-"] \arrow[r, "n_\Lambda"'] & Y_\Lambda \arrow[u, "h_\Lambda"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_\Lambda \arrow[r, "m_\Lambda"] & X_0^\Lambda \\ Y_\Lambda \arrow[u, "h_\Lambda"] \arrow[r, "n_\Lambda"'] & Y_0^\Lambda \arrow[u, "(k_0^\Lambda)^-"'] \end{tikzcd}$$

Согласно определению отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ, если для любых $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda \subseteq X_\Lambda$ и $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^- \subseteq X_0^\Lambda$ соответственно выполняются неравенства

$$k_0^\Lambda \circ m_\Lambda(x_\Lambda) \leqslant n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(x_\Lambda), \quad h_\Lambda^- \circ m_\Lambda^-(x_\Lambda) \leqslant n_\Lambda \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda).$$

Отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ, если для любых $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n_\Lambda \subseteq Y_0^\Lambda$ и $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n_\Lambda^- \subseteq Y_\Lambda$ соответственно выполняются неравенства

$$h_\Lambda \circ n_\Lambda(y_\Lambda) \leqslant m_\Lambda^- \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda), \quad (k_0^\Lambda)^- \circ n_\Lambda^-(y_\Lambda) \leqslant m_\Lambda \circ h_\Lambda(y_\Lambda).$$

Говорим, что вполне изотонные отображения n_Λ и m_Λ являются *взаимно дуальными*, если

$$n_\Lambda = h_\Lambda^- \circ m_\Lambda^- \circ (k_0^\Lambda)^-, \quad m_\Lambda = (k_0^\Lambda)^- \circ n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-.$$

Если дескрипторы $F_0 : X_0^\Lambda \to X_0$ и $G_0 : X_0 \to X_0^\Lambda$ являются взаимно дуальными и вполне изотонные отображения $m_\Lambda : X_\Lambda \to X_0^\Lambda$ и $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \to Y_\Lambda$ являются взаимно дуальными, то правила описания (18) и (19) называем *взаимно дуальными.*

Предложение 11. *Если вполне изотонные отображения $m_\Lambda : X_\Lambda \to X_0^\Lambda$ и $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \to Y_\Lambda$ являются взаимно дуальными, то отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ и отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ.*

$\lhd$ Предположим, что вполне изотонные отображения $m_\Lambda : X_\Lambda \to X_0^\Lambda$ и $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \to Y_\Lambda$ являются взаимно дуальными. По свойству 11 вполне изотонных отображений условно обратные отображения представляются в виде следующих композиций:

$$n_\Lambda^- = k_0^\Lambda \circ m_\Lambda \circ h_\Lambda, \quad m_\Lambda^- = h_\Lambda \circ n_\Lambda \circ k_0^\Lambda.$$

Значит, для любого $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda$ и $x_\Lambda \in \operatorname{Dom} m_\Lambda^-$ соответственно выполняются равенства

$$k_0^\Lambda \circ m_\Lambda(x_\Lambda) = k_0^\Lambda \circ (k_0^\Lambda)^- \circ n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(x_\Lambda) = n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(x_\Lambda),$$
$$h_\Lambda^- \circ m_\Lambda^-(x_\Lambda) = h_\Lambda^- \circ h_\Lambda \circ n_\Lambda \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda) = n_\Lambda \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda).$$

Следовательно, отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ. С другой стороны, для любых $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n_\Lambda \subseteq Y_0^\Lambda$ и $y_\Lambda \in \operatorname{Dom} n_\Lambda^- \subseteq Y_\Lambda$ соответственно выполняются равенства

$$h_\Lambda^- \circ n_\Lambda^-(y_\Lambda) = h_\Lambda^- \circ k_0^\Lambda \circ m_\Lambda \circ h_\Lambda^-(y_\Lambda) = m_\Lambda \circ k^\Lambda(y_\Lambda),$$

$$k^{\Lambda} \circ n_{\Lambda}(y_{\Lambda}) = k^{\Lambda} \circ h_{\Lambda} \circ m_{\Lambda}^{-} \circ (k_0^{\Lambda})^{-}(y_{\Lambda}) = m_{\Lambda}^{-} \circ h_{\Lambda}^{-}(y_{\Lambda}).$$

Значит, отображение m_{Λ} является дуальным к отображению n_{Λ}. $\triangleright$

Из предложения 11 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 12. *Если правила описания* (18) *и* (19) *являются взаимно дуальными, то правило* (18) *является дуальным к правилу* (19), *а правило* (19) *является дуальным к правилу* (18).

6.5. Двусторонняя схема двойственности. Из предложений 10, 12 и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2 (двусторонняя схема двойственности)**.** *Если правила описания* (18) *и* (19) *являются взаимно дуальными, то элемент $x \in X_0$ допускает инъективное описание по правилу* (18) *тогда и только тогда, когда элемент $y = k(x) \in Y_0$ допускает проективное описание по правилу* (19).

Теорема 2 (двусторонняя схема двойственности) обобщает «схему двойственности» из статьи [1] и теорему 1 из статьи [4]. Аналогичные теоремы есть и в статье [2] и в монографии [3] (многомерная ситуация). Эти теоремы являются основой для решения задач спектрального синтеза в комплексной плоскости. Они позволяют свести задачу спектрального синтеза к двойственной задаче локального описания. Теорема 2 придает теоремам двойственности общий вид и может быть использована при решении других задач. Однако, эти задачи должны относиться к рефлексивному случаю (т. е. задача должна быть сформулирована в условиях рефлексивного локально выпуклого пространства). Доказанная выше теорема 1 (односторонняя схема двойственности) допускает ее использование при решении задач в условиях нерефлексивного локально выпуклого пространства. Конкретного опыта в этом направлении в открытой печати пока нет.

Литература

1. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Мат. сб.—1998.—Т. 189, № 9.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm355.
2. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 12.—С. 123–160. DOI: 10.4213/sm789.
3. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Спектральный синтез и локальное описание аналитических функций.—Славянск-на-Кубани: Издательский центр филиала ФГБОУ ВПО «КубГУ», 2013.—304 с.
4. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Матем. Механика. Информатика.—2014.—Т. 14, № 1.—С. 47–65. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-47-65.
5. *Ehrenpreis L.* Mean periodic functions I // Amer. J. Math.—1955.—Vol. 77.—P. 293–328.
6. *Красичков И. Ф.* О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1967.—Т. 31, № 1.—С. 37–60.
7. *Красичков И. Ф.* О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1968.—Т. 32, № 5.—С. 1024–1032.
8. *Ehrenpreis L.* Fourier Analysis in Several Complex Variables.—New York–London–Sydney: John Wiley & Sons Inc., 1970.—(Pure and Applied Monograph; Vol. 17).
9. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 4.—С. 459–489.
10. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 88 (130), № 1 (5).—С. 3–30.
11. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
12. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1 (217).—С. 73–126.

13. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 70–84.
14. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 12.—С. 123–156. DOI: 10.4213/sm789.
15. *Трутнев В. М.* Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз.—2006.—Т. 108.—С. 158–180.
16. *Шишкин А. Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. научн. сем. ПОМИ.—2016.—Т. 447, № 1.—С. 129–170.

Статья поступила 11 мая 2020 г.

Шишкин Андрей Борисович
Кубанский государственный университет,
заведующий кафедрой МИЕОД
РОССИЯ, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200
E-mail: shishkin-home@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 124–150

ONE-SIDED DUAL SCHEMES

Shishkin, A. B.[1]

[1] Kuban State University,
200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia
E-mail: shishkin-home@mail.ru

Abstract. The phenomenon of duality appears in all areas of mathematics and is closely related to the phenomenon of equivalence. These phenomena complement each other and are used to transfer various mathematical statements from one area of mathematics to another and vice versa (dual and equivalent transitions). The main difference between duality and equivalence is the use of involution. An involution of an object is a transformation of an object whose action is eliminated by an inverse transformation, that is, an inverse transformation restores an object. Any involution generates its duality, which is affirmed by the corresponding duality theorem. Duality theorems are two-sided. They allow for dual transitions to one and the other. Weaken the conditions for involution and assume that its repeated action restores the object only by half (instead of equality, we obtain inequality). In this case, for such a complete restoration of an object, two such involutions are required. This article is about weakened (one-sided) involutions. As such, completely isotonic mappings are considered (they are defined in the second section). The properties of these mappings and their conditionally inverse mappings allow half-dual transitions — transitions in only one direction. Duality theorems claiming the possibility of such transitions are called one-sided duality schemes. The content of the work is an attempt to bring a unified mathematical base for all possible one-sided schemes of duality, which allows us to reformulate each of them in accordance with a single standard. This possibility is presented by the interpretation of dual transitions that arose under the conditions of the theory of spectral synthesis in the complex field as transitions from an injective (internal) description of some mathematical objects to a projective (external) description of other mathematical objects. The involutions used in one-sided schemes of duality, in turn, are one-sided and the restrictions imposed on them are much weaker. This leads to a significant expansion of the scope of the possible application of dual schemes in research practice.

Key words: duality, duality theorem, injective description, projective description.

Mathematical Subject Classification (2010): 14A15, 22D35, 32C37, 46B10, 47L50.

For citation: *Shishkin, A. B.* One-Sided Dual Schemes, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 124–150 (in Russian). DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

References

1. *Shishkin, A. B.* Spectral Synthesis for Systems of Differential Operators with Constant Coefficients. Duality Theorem, *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1423–1440. DOI: 10.1070/SM1998v189n09ABEH000355.
2. *Shishkin, A. B.* Spectral Synthesis for Systems of Differential Operators with Constant Coefficients, *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 12, pp. 1865–1898. DOI: 10.1070/SM2003v194n12ABEH000789.
3. *Shishkin A. B. Proektivnoe i in'ektivnoe opisaniya v kompleksnoi oblasti. Spektralnyi sintez i lokalnoe opisanie analiticheskikh funktsii*, Slavyansk-na-Kubani, Izdatelskii tsentr KubGU, 2013, 304 p. (in Russian).
4. *Shishkin A. B.* Projective and Injective Descriptions in the Complex Domain. Duality, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 47–65.
5. *Ehrenpreis L.* Mean Periodic Functions I, *American Journal of Mathematics*, 1955, vol. 77, pp. 293–328.
6. *Krasichkov I. F.* Closed Ideals in Locally Convex Algebras of Entire Functions, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 35–55. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000546.
7. *Krasichkov I. F.* Closed Ideals in Locally Convex Algebras of Entire Functions. II, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 5, pp. 979–986. DOI: 10.1070/IM1968v002n05ABEH000683.
8. *Ehrenpreis L.* Fourier Analysis in Several Complex Variables, *Pure and Applied Mathematics*, 1970, vol. 17, N. Y.–London–Sydney, John Wiley & Sons Inc., 1970.
9. *Krasichkov-Ternovsky I. F.* Invariant Subspaces of Analytic Functions. I. Spectral Analysis on Convex Regions, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500. DOI: 10.1070/SM1972v016n04ABEH001436.
10. *Krasichkov-Ternovsky I. F.* Invariant Subspaces of Analytic Functions. II. Spectral Synthesis of Convex Domains, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 17, no. 1, pp. 1–29. DOI: 10.1070/SM1972v017n01ABEH001488.
11. *Korobeinik Yu. F.* Representing Systems, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 309–335. DOI: 10.1070/IM1978v012n02ABEH001856.
12. *Korobeinik Yu. F.* Representing Systems, *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
13. *Korobeinik Yu. F., Melikhov S. N.* A Continuous Linear Right Inverse of the Representation Operator and Applications to the Convolution Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 59–72. DOI: 10.1007/BF00971241.
14. *Shishkin A. B.* Spectral Synthesis for Systems of Differential Operators with Constant Coefficients, *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 12, pp. 1865–1898. DOI: 10.1070/SM2003v194n12ABEH000789.
15. *Trutnev V. M.* Convolution Equations in Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Journal of Mathematical Sciences (N. Y.)*, 2004, vol. 120, no 6, pp. 1901–1915. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000020709.31698.80.
16. *Shishkin A. B.* Exponential Synthesis in the Kernel of a Symmetric Convolution, *Journal of Mathematical Sciences (N. Y.)*, 2018, vol. 229, no. 5, pp. 572–599. DOI: 10.1007/s10958-018-3700-9.

Received May 11, 2020

Andrey B. Shishkin
Kuban State University,
200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia,
Head of Department
E-mail: shishkin-home@mail.ru

Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 151–157

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ЮРИЙ ФЁДОРОВИЧ КОРОБЕЙНИК (К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

18 июля 2020 г. — день 90-летия замечательного математика, доктора физико-математических наук, Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, Заслуженного профессора Южного федерального университета, главного научного сотрудника Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН Юрия Фёдоровича Коробейника. И это отличный повод для того, чтобы вспомнить этапы его большого пути в науке.

Детство Юрия Фёдоровича, уроженца Ростова-на-Дону, прошло в родном городе (исключая несколько военных лет, в течение которых семья жила на Кавказе и в Закавказье). Ему пришлось пережить и эвакуацию, и тяжелый период оккупации Ростова, и послевоенные голодные годы. Прошедший войну и тяжело болевший отец, Фёдор Николаевич, и мама, Анастасия Ефремовна, сделали все, чтобы талантливый и жаждущий знаний сын сумел получить среднее образование.

После окончания в 1947 г. десятилетки серебряный медалист оказался, как он сам вспоминал, перед сложным выбором — его интересовали и химия, и лингвистика, однако в итоге документы были поданы на физико-математический факультет РГУ, на специальность «физика». Позже Юрий Фёдорович рассказывал: «Я быстро убедился в том, что толковый экспериментатор из меня не выйдет. Оставалась разве что теоретическая физика, но она тогда в РГУ практически не существовала». В итоге первокурсник поддался очарованию математического анализа (в немалой степени благодаря лекциям А. П. Гремяченского и появившемуся осенью 1947 г. первому тому учебника Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления») и решил стать «аналитиком». В конце 2-го года обучения при распределении студентов по специальностям и кафедрам он выбрал кафедру математического анализа и свою первую научную работу по признакам сходимости числовых рядов написал под руководством Семена Яковлевича Альпера. Интересно, что за все время учебы в университете Юрий Коробейник выступил с четырьмя докладами на трех студенческих научных конференциях. При этом один из докладов, «Первые русские учебники по теории функций комплексного переменного» (выполненный пятикурсником под руководством ректора, С. Е. Белозерова), стал в некоторой степени «пророческим» — ведь впоследствии Ю. Ф. Коробейник на протяжении многих лет прекрасно читал этот курс.

Успехи в научной работе, активная общественная деятельность и защищенная на «отлично» дипломная работа позволили Сталинскому стипендиату Юрию Коробейнику в 1952 г., по окончании университета, получить рекомендацию в аспирантуру по специальности «математический анализ». Он успешно сдал вступительные экзамены доценту (впоследствии доктору наук и профессору) Михаилу Григорьевичу Хапланову, который предложил юноше в качестве темы будущей диссертации на выбор несколько задач из теории функций комплексного переменного, соответствовавших как его научным интересам, так и тематике защищенной дипломной работы. Но ни одна из предложенных тем не была принята. Отчасти это произошло из-за желания молодого аспиранта вести исследования в новых областях математики, но основную роль сыграла другая причина.

Весной 1950 г. на факультете появились молодые преподаватели — будущие академики Никита Николаевич Моисеев и Иосиф Израилевич Ворович. Прекрасные специалисты в области механики, они являлись и великолепными математиками, успешно применявшими для исследования различных задач теории упругости и гидродинамики общую теорию уравнений в частных производных и нелинейный функциональный анализ. Их влияние, сотрудничество с Марком Александровичем Красносельским и Селимом Григорьевичем Крейном из Воронежского университета, а также знакомство с работами математика (с 1951 г. академика АН Казахской ССР) Константина Петровича Персидского и его учеников привели к тому, что Юрий Фёдорович всерьез заинтересовался доказательством существования решений бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений, обоснованием построения приближенного решения таких систем методами итераций и широко распространенной техникой «урезания» и, наконец, оценкой погрешности, возникающей при замене точного решения приближенным. В итоге он сам сформулировал тему своей будущей диссертации — «Исследование бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений» — и М. Г. Хапланов согласился с этим выбором, хотя тема и не была связана с его научными интересами.

Получив результаты о существовании решений бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений и их приближенном решении, Ю. Ф. Коробейник занялся их применением к уравнениям в частных производных. Он заметил, что с помощью подобных систем можно обосновать метод Фурье решения смешанных задач для некоторых уравнений в частных производных с неразделяющимися переменными и, продолжая исследования, обосновал применение метода Фурье к абстрактным операторным (линейным) уравнениям с неразделяющимися переменными, а также получил результаты по решению методом Фурье смешанной задачи для уравнений второго порядка (гиперболического типа) в частных производных. Часть этих результатов, опубликованных впоследствии, была включена в кандидатскую диссертацию Ю. Ф. Коробейника, защищенную осенью 1955 г. Официальными оппонентами на защите диссертации были М. А. Красносельский и И. И. Ворович.

Важно отметить, что объемный и весьма разнообразный математический материал, изученный и разработанный в процессе подготовки кандидатской диссертации, не остался «мертвым грузом» — эти исследования продолжили первые дипломники Ю. Ф. Коробейника, Казбек Малий и Захар Иткин. Проводил исследования в этой области и его ученик А. В. Дедушев, кандидатская диссертация которого, защищенная в 1987 г., была посвящена обоснованию метода Фурье для некоторых классов уравнений в частных производных.

Внимание же самого ученого, как он вспоминал позднее, вновь привлекли «свойства функциональных рядов в комплексной области, причем не только (как прежде) распределение нулей их частных сумм, но и сверхсходимость, непродолжаемость их суммы и вообще поиски классов функциональных рядов со свойствами, подобными свойствам обычных степенных рядов». Его первая аспирантка, С. В. Варганова (Фоменко), защитила в 1964 г. диссертацию, в которой, в частности, для рядов по почти правильным системам были получены аналоги известных теорем Йенча для степенных рядов (кстати, ее результаты цитируются в современной фундаментальной монографии Q. I. Rahman, G. Schmeisser «Analytic Theory of Polynomials», Oxford University Press, 2002). В 2000 г. Юрий Фёдорович вернулся к проблеме распределения в комплексной плоскости нулей частных сумм функциональных рядов и опубликовал (единолично и в соавторстве со студентом Д. В. Петиным) несколько статей по этой тематике. Отметим еще интересные применения результатов круга теорем Йенча в теории полиномов Бернштейна из недавних совместных работ В. Б. Шерстюкова (неожиданно, спустя почти 20 лет, «выстрелили» знания, полученные им на уникальном спецкурсе Юрия Фёдоровича по дополнительным главам анализа).

В конце 50-х годов определилось первое из двух магистральных направлений в научных изысканиях Ю. Ф. Коробейника — исследование разрешимости в комплексной области линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с многочленными коэффициентами и уравнений свертки, изучение свойств аналитических решений подобных уравнений.

В этот период важную роль сыграло знакомство с членом-корреспондентом АН СССР Алексеем Фёдоровичем Леонтьевым. В 1959 г., на II Всесоюзной конференции по комплексному анализу, этот признанный специалист по теории функций, дифференциальным уравнениям бесконечного порядка и дифференциально-разностным уравнениям высоко оценил выступление ростовского математика. Ю. Ф. Коробейник вдохновился идеями, разрабатываемыми в школе Леонтьева (в воспоминаниях он предположил, что играющий важнейшую роль в исследованиях по этой тематике оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева получил свое официальное название после написанной им для ДАН СССР рецензии на работу украинского математика Н. Н. Супруна), применил их в собственных работах и подтолкнул к этому своих учеников, в частности, аспирантку Т. И. Демченко (Коршикову), чья кандидатская диссертация была посвящена уравнениям бесконечного порядка в обобщенных производных с многочленными коэффициентами.

В 1962–1964 гг. Ю. Ф. Коробейник перенес почти все результаты, полученные им ранее для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с многочленными коэффициентами, на уравнения не в обычных, а в обобщенных производных. При этом им применялись как прежние методы (использование теоремы об операторе сжатия, сведение к интегральному уравнению), так и метод, основанный на теории нормально разрешимых операторов, который, начиная с 40-х годов, с легкой руки академика С. М. Никольского развивали многие известные математики (М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, И. Ц. Гохберг и др.). Многое из сделанного в эти годы по уравнениям бесконечного порядка вошло в докторскую диссертацию Ю. Ф. Коробейника «Аналитические решения операторных уравнений бесконечного порядка», успешно защищенную в 1965 г. Впоследствии немало времени было уделено приложениям полученных на этом пути результатов к различным задачам аналитической теории уравнений в частных производных. Эти результаты докладывались на разных школах и конференциях, а также научных семинарах. Многие из них были опубликованы в советских и зарубежных математических журналах, а их обобщения и усиления составили содержание его монографии «О разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторных уравнений», вышедшей вторым изданием в 2010 г.

Начиная примерно с 1966 г., Ю. Ф. Коробейник занимался мало изученными тогда решениями уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, аналитическими в выпуклых некруговых областях, активно применяя при этом общую теорию двойственности в локально выпуклых пространствах и некоторые факты теории целых функций экспоненциального типа. Эффективность развитых им методов позволила перейти к исследованию проблемы эпиморфности гораздо более общих, чем дифференциальные операторы бесконечного порядка, операторов свертки в классах функций, аналитических в произвольных односвязных областях. Важные результаты, полученные в этом направлении, были сообщены Ю. Ф. Коробейником на Всемирном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. и вызвали большой интерес со стороны таких признанных во всем мире специалистов в области теории функций, как С. Мандельбройт, Б. Я. Левин и А. Ф. Леонтьев. Впоследствии эта тематика получила дальнейшее развитие как в работах самого Ю. Ф. Коробейника и его учеников О. В. Епифанова, Г. Г. Брайчева, В. В. Моржакова, И. М. Мальцева, И. С. Шрайфеля и С. Н. Мелихова, так и известных представителей других научных школ — В. В. Напалкова и А. С. Кривошеева из Уфы, С. В. Знаменского из Красноярска, З. Момма из Дюссельдорфа (Германия). Важно отметить, что определенного рода итог исследованиям, связанным с рассмотренной выше тематикой, был подведен в публикациях 1970 (в «Известиях АН СССР») и 1981 (в «Математическом сборнике») годов. Также многие результаты Ю. Ф. Коробейника по этой теме можно найти в § 13 его книги «Операторы сдвига на числовых семействах» (1983 г.) и в двух первых главах упомянутой выше монографии 2010 г.

Продолжая достаточно активно заниматься дифференциальными уравнениями бесконечного порядка, Юрий Фёдорович начинает интересоваться смежными и даже более отдаленными разделами комплексного анализа. В частности, его внимание привлекает изучение свойств линейных операторов, удовлетворяющих определенным коммутационным соотношениям. Главным же направлением становится изучение систем элементов, по которым можно разложить в ряд любой элемент из рассматриваемого пространства, но при этом не обязательно единственным образом. Такие системы занимают промежуточное положение между хорошо исследованными базисами и полными системами и обладают по сравнению с ними многими новыми свойствами, важными для приложений. Развитие данного направления привело к созданию теории представляющих и абсолютно представляющих систем в локально выпуклых пространствах, основателем которой по праву считается Ю. Ф. Коробейник. В нескольких работах середины 70-х годов им была описана двойственная связь между свойством системы быть представляющей или абсолютно представляющей в отделимом локально выпуклом пространстве и разрешимостью в сопряженном пространстве соответствующей интерполяционной задачи или совпадением в нем определенных топологий. Эти основополагающие результаты ему удалось с большим эффектом применить к системам экспонент и их обобщений, которые имеют значительный «удельный вес» в комплексном анализе и ранее интенсивно изучались с позиций теории функций А. Ф. Леонтьевым и его научной школой. Именно отправляясь от его работ, Ю. Ф. Коробейник в нескольких статьях 80-х годов изучил связь между наличием в отделимом локально выпуклом пространстве сходящегося (или абсолютно сходящегося) нетривиального разложения нуля по системе обобщенных экспонент и свойством этой системы быть представляющей или абсолютно представляющей. Эти исследования велись и самостоятельно (можно вспомнить «ключевую» статью 1981 г. из «Успехов математических наук»), и совместно с учениками А. В. Абаниным и С. Н. Мелиховым, которые впоследствии активно развивали данную тематику. Новая теория нашла широкое применение в комплексном анализе и аналитической теории линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Кроме того, при ее разработке стали развиваться не менее важные смежные направления, среди которых наибольший интерес представляют новые классы интерполяционных задач и топологические свойства индуктивных и проективных пределов различных функциональных пространств.

В первые два десятилетия развития теории представляющих систем полученные общие результаты применялись, как правило, лишь к различным пространствам аналитических функций. Однако впоследствии Ю. Ф. Коробейник с успехом применил их к пространствам бесконечно дифференцируемых функций и решил с их помощью ряд трудных задач, связанных с продолжением таких функций по Борелю — Уитни и справедливостью для них аналога теоремы Пэли — Винера — Шварца.

Выше не раз упоминались имена учеников Юрия Фёдоровича. И это не случайно. Получив право руководить аспирантами в 1960 г., он дал путевку в жизнь 24-м своим ученикам, из которых 22 защитили кандидатские диссертации, 5 стали докторами наук. Этот крепкий научный коллектив возник еще в начале 70-х годов. Объединенные активно функционирующим регулярным научным семинаром, они проводили и проводят исследования довольно широким фронтом по различным направлениям, связанным прямо или косвенно с дифференциальными уравнениями бесконечного порядка и уравнениями свертки, интерполяционными задачами и абсолютно представляющими системами, теорией целых функций. Первый дипломник Ю. Ф. Коробейника, К. С. Мамий, прошел путь от ассистента до профессора и заведующего кафедрой математического анализа в Адыгейском государственном университете. Другие ученики успешно продолжали и продолжают дело своего наставника на родном факультете (С. В. Фоменко, О. В. Епифанов, В. В. Моржаков, Т. И. Коршикова, Ю. А. Кирютенко, А. В. Абанин, С. Н. Мелихов), в ДГТУ и его филиале в Шахтах (И. М. Мальцев, А. Б. Михайлов, И. С. Шрайфель, В. А. Савельев), в РГУПС (В. А. Богачёв), в Москве (Г. Г. Брайчев — профессор, МПГУ, В. Б. Шерстюков — профессор, НИЯУ МИФИ), в Германии (А. В. Дедушев), в Сингапуре (Ле Хай Хой (Le Hai Khoi) — Professor, Nanyang Technological University) и Вьетнаме (Ха Зуй Банг (Ha Huy Bang) — Professor, Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology).

Активная научная работа у Ю. Ф. Коробейника всегда была неразрывно связана с различными сферами педагогической деятельности. Еще в студенческие годы Юрий Фёдорович стал «прикрепленным преподавателем» у первокурсников, потом вел практические занятия по уравнениям математической физики и математическому анализу. С начала 60-х годов он читал лекции по вариационному исчислению, обобщенным функциям, аналитической теории дифференциальных уравнений и другим предметам, в 60–80-е годы основным его лекционным курсом стал математический анализ для математиков и физиков дневного и вечернего отделений, а в 70–90-е годы Юрий Фёдорович был основным лектором по общему курсу теории функций комплексного переменного (читал его в основном математикам, иногда — механикам). В течение 45 лет (с 1960 г. по 2005 г.) разработал и прочитал большое количество разнообразных по тематике и уникальных по содержанию специальных курсов, непосредственно связанных с его научными исследованиями: целые функции; теорема Стоуна — Вейерштрасса, ее обобщения и приложения; асимптотические методы в анализе; дифференциальные уравнения бесконечного порядка; базисы, полные и представляющие системы; достаточные множества и их приложения.

Несмотря на занятость учебной работой, подготовкой научной смены, руководством кафедрой и научным семинаром, Ю. Ф. Коробейник всегда активно участвовал в различных школах и конференциях, выступая на них с докладами и обзорными лекциями. За пять десятилетий (с середины 60-х годов) он принял участие во множестве научных конференций, симпозиумов, школ в самых разных городах Советского Союза, читал лекции по приглашению в университетах Уфы, Саратова, Нижнего Новгорода, Львова, Черновцов, Великого Новгорода, Душанбе, Нальчика, Якутска. Юрий Фёдорович совершил ряд зарубежных поездок (выступал с докладами на семинарах Р. Майзе и Д. Фогта в Германии, читал лекции в университетах Японии и Израиля, принимал участие в Международных конференциях, проходивших в Болгарии и Турции). Кроме того, он регулярно был в числе тех, кто организовывал конференции самого высокого уровня на Северном Кавказе (Теберда, Владикавказ, Новороссийск, Волгодонск, Ростов-на-Дону).

Со своим родным физико-математическим факультетом (с 1961 г. механико-математическим факультетом — легендарным мехматом, который сейчас имеет официальное название «Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича») Юрий Фёдорович не расставался с 1947 по 2015 годы. После окончания аспирантуры он работал на кафедре математического анализа, на отпочковавшейся от нее кафедре теории функций и функционального анализа, руководил кафедрой методов теории функций комплексного переменного и теоретическим отделом НИИ механики и прикладной математики; при этом несколько лет являлся проректором Ростовского государственного университета по науке. Но главным делом его жизни была кафедра математического анализа, которую он возглавлял 24 года и на которой благодаря его усилиям сформировался крепкий коллектив учеников и единомышленников, достойно переживший сумбур 90-х годов. Отметим также активную деятельность Юрия Фёдоровича в качестве президента Ростовского математического общества, которое он возглавлял долгие годы, способствуя развитию математики в Ростове-на-Дону и области. Весом его вклад и в подготовку кадров высшей квалификации на Северном Кавказе: Ю. Ф. Коробейник на протяжении ряда лет был председателем докторского Диссертационного Совета по математике — единственного Совета по математике в Южном регионе. Его принципиальность в оценке представляемых к защите результатов и огромный авторитет сыграли большую роль в повышении уровня диссертационных работ.

В 2002–2003 годах, на одном из математических симпозиумов, проходившем в Шахтах, Ю. Ф. Коробейник познакомился с А. Г. Кусраевым, председателем Владикавказского научного центра РАН, руководителем научно-исследовательского института, который ныне называется «Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН». Через некоторое время И. М. Мальцев, ученик Ю. Ф. Коробейника, и профессор В. Г. Фетисов предложили создать на базе Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса (ЮРГУЭС) математическую лабораторию совместно с ЮМИ и РГУ. Впоследствии, благодаря объединенным усилиям Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева, уже в ЮФУ за несколько лет (2007–2011 гг.) было создано подразделение ЮМИ, ныне состоящий из отделов математического анализа и дифференциальных уравнений, в первом из которых Юрий Фёдорович продолжает свою научную деятельность до настоящего времени. Плодотворность этого сотрудничества для обеих организаций, а главное — для развития математики и механики на Юге России — была многократно подтверждена проведением совместных исследований по грантам престижных фондов, президентским и министерским программам, многогранной издательской деятельностью, организацией научных школ и конференций, подготовкой к профессиональной деятельности молодых ученых. В течение 2010–2015 гг. вышел в свет четырехтомник избранных работ Ю. Ф. Коробейника, изданный Южным математическим институтом ВНЦ РАН и РСО-А. По инициативе Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева на протяжении ряда лет издается южный вариант «Итогов науки», где публикуются монографии ученых Юга России, труды участников конференций Южного математического института, в которых Ю. Ф. Коробейник принимал активное участие. Кроме того, Юрий Фёдорович является членом редколлегии «Владикавказского математического журнала», единственного специализированного журнала по чистой и прикладной математике на Юге России.

Заслуги Ю. Ф. Коробейника были по достоинству оценены государством и университетом. В 1991 г. указом Президента России ему было присвоено звание Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, а в 2005 г. он был награжден орденом Дружбы. Все годы действия Указа о государственных стипендиях для выдающихся ученых России (1993–2003 гг.) Ю. Ф. Коробейник получал такую стипендию, а в 1996 г. решением Ученого совета РГУ ему присвоено звание Заслуженного профессора университета.

Профессионал самого высокого уровня, блестящий ученый, замечательный организатор, всегда и во всем служивший интересам дела, которому он посвятил свою жизнь, и одновременно активный общественник, искренний и неравнодушный человек, всегда готовый прийти на помощь в трудную минуту... Все эти качества снискали Ю. Ф. Коробейнику глубокое уважение коллег и признательность его учеников.

Поздравляя Юрия Фёдоровича с юбилеем, мы от всей души желаем ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов!

А. В. Абанин, В. А. Богачев, Г. Г. Брайчев, А. О. Ватульян,
М. И. Карякин, Ю. А. Кирютенко, А. Г. Кусраев, Ле Хай Хой (Le Hai Khoi),
И. М. Мальцев, С. Н. Мелихов, Ю. С. Налбандян, Ю. А. Устинов,
Ха Зуй Банг (Ha Huy Bang), В. Б. Шерстюков

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 22

Выпуск 3

Зав. редакцией В. В. Бозрова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 19.09.2020. Дата выхода в свет 29.09.2020.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 18,60. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380