Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 50–57

УДК 517.518.234+517.548.3
DOI 10.46698/q1367-9905-0509-t

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ИЛИ МНИМОЙ ЧАСТИ ОБОБЩЕННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

С. Б. Климентов[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `sbklimentov@sfedu.ru`

Аннотация. Обозначим $D = D_z = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости, $\Gamma = \partial D$. Хорошо известно следующее свойство гармонических функций. Если вещественная функция $U(z) \in C(\overline{D})$ гармонична в D, $U(z)|_{z\in\Gamma} \geqslant K = \text{const} > 0$, то $U(z) \geqslant K$ для любого $z \in \overline{D}$. Предмет настоящей работы — обобщение этого свойства на вещественную (мнимую) часть решения эллиптической в D системы $\partial_{\bar z} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0$, где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$, $\partial_z = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\big)$— производные в смысле Соболева, $q_1(z)$ и $q_2(z)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы $|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0 = \text{const} < 1$, $z \in \overline{D}$, $A(z)$, $B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, — также заданные комплексные функции.

Ключевые слова: эллиптическая система первого порядка, обобщенная аналитическая функция.

AMS Subject Classification: 30G30.

Образец цитирования: *Климентов С. Б.* Априорные оценки положительной вещественной или мнимой части обобщенной аналитической функции // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 50–57. DOI: 10.46698/q1367-9905-0509-t.

1. Введение. Формулировка результатов

Обозначим $D = D_z = \{z : \ |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

В статье используются следующие функциональные пространства со стандартными нормами в них: $L_p(\overline{D})$ — пространство суммируемых с показателем $p \geqslant 1$ в $\overline{D}$ функций; $C(\overline{D})$ — пространство функций, непрерывных в $\overline{D}$; $W_p^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots,$ $p \geqslant 1$, — класс функций, имеющих в $\overline{D}$ обобщенные в смысле Соболева производные до k-го порядка, суммируемые с показателем p, $W_p^0(\overline{D}) \equiv L_p(\overline{D})$; $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots,$ $0 < \alpha < 1$, — пространство функций, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ частные производные до порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $C_\alpha^0(\overline{D}) \equiv C_\alpha(\overline{D})$.

Как известно, по теореме вложения Соболева — Кондрашева при $p > 2$, $k \geqslant 1$, $W_p^k(\overline{D}) \subset C_\alpha^{k-1}(\overline{D})$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$, так что в этом случае функции из $W_p^k(\overline{D})$ будем считать непрерывными в $\overline{D}$.

Рассмотрим в $\overline{D}$ общую эллиптическую систему первого порядка в комплексной записи

$$\partial_{\bar z} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \tag{1}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$,— производные в смысле Соболева, $q_1(z)$ и $q_2(z)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы (1)

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0 = \text{const} < 1, \quad z \in \overline{D}, \tag{2}$$

$A(z)$, $B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, — также заданные комплексные функции.

Хорошо известно следующее свойство гармонических функций. Если вещественная функция $U(z) \in C(\overline{D})$ гармонична в D, $U(z)|_{z\in\Gamma} \geqslant K = \text{const} > 0$, то $U(z) \geqslant K$ для любого $z \in \overline{D}$.

Если в (1) $A(z) = B(z) \equiv 0$ (случай *обобщенного уравнения Бельтрами*), то это свойство дословно переносится на вещественную $u(z)$ либо мнимую $v(z)$ часть решения $w(z) = u(z) + iv(z)$ уравнения (1), поскольку в этом случае имеет место представление $w(z) = \Phi(\zeta(z))$, где $\zeta = \zeta(z)$ — некоторый гомеоморфизм круга $\overline{D}$ на себя, а Φ — некоторая непрерывная в $\overline{D}$ голоморфная функция [1].

Предмет настоящей работы — обобщение этого свойства на вещественную (мнимую) часть решения системы (1) в случае $|A(z)|^2 + |B(z)|^2 \neq 0$. Чтобы не загромождать обозначения, там, где это не может вызвать недоразумений, различные константы иногда обозначаются одними и теми же буквами.

В качестве базового рассматривается частный случай $q_1(z) = q_2(z) \equiv 0$ и доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть $w(z) = u(z) + iv(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, — решение канонической эллиптической системы в комплексной записи*

$$\partial_{\bar z} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0 \tag{3}$$

(*обобщенная аналитическая функция в смысле И. Н. Векуа* [2]),

$$\big\||A(z)| + |B(z)|\big\|_{L_p(\overline{D})} \leqslant C = \text{const}, \tag{4}$$

$$u(z)\big|_{z\in\Gamma} \geqslant C_1 > 0, \quad |w(z)| \leqslant C_2 \quad (\forall\, z \in \overline{D}). \tag{5}$$

Тогда найдется константа $C_3 > 0$, зависящая только от C, C_1, C_2, такая, что

$$u(z) \geqslant C_3 \quad (\forall\, z \in \overline{D}). \tag{6}$$

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 вещественную часть $u(z)$ можно заменить мнимой частью $v(z)$. Доказательство состоит в переходе к функции $\widetilde{w}(z) = -iw(z)$.

Замечание 2. Как показывает нижеследующий пример, в неголоморфном случае (т. е., если в (3) либо $A(z)$, либо $B(z)$ отличны от тождественного нуля) невозможно избавиться от ограничений на $w(z)$.

Пример. Рассмотрим в $\overline{D}$ функцию $w(z) = |z|^2 + \frac{1}{n} + in(|z|^2 + 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Она удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar z} w + A(z)w = 0$, где

$$A(z) = -\frac{2z(1 + in)}{|z|^2 + \frac{1}{n} + in(|z|^2 + 1)}, \quad |A(z)| \leqslant 2\sqrt{2}.$$

В обозначениях теоремы 1 $C = 2\pi\sqrt{2}$, $C_1 = 1$, $C_2 = C_2(n)$, $C_3 = C_3(n)$, причем при $n \to \infty$ $C_2(n) \to \infty$, $C_3(n) \to 0$.

Замечание 3. В статье автора [3] в результате борьбы за сокращение объема статьи неравенство (2.40) приведено без должного обоснования (предыдущее неравенство, «обосновывающее» (2.40), очевидно ошибочно). Теорема 1 дает обоснование неравенству (2.40) из [3].

Некоторое усиление ограничений на $w(z)$ позволяет получить соответствующее утверждение для решений общего уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть* $w(z) = u(z) + iv(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, *— решение эллиптической системы в комплексной записи* (1), *коэффициенты которой удовлетворяют условиям* (2), (4), *решение* $w(z)$ *удовлетворяет условиям*

$$u(z)\big|_{z\in\Gamma} \geqslant C_1 > 0, \quad \|w(z)\|_{W_p^1(\overline{D})} \leqslant C_4. \tag{7}$$

Тогда найдется константа $C_3 > 0$, *зависящая только от* q_0, C, C_1, C_4, *такая, что выполнено неравенство* (6).

Можно не усиливать ограничения на $w(z)$, но ввести дополнительные требования на $q_1(z)$, $q_2(z)$.

Теорема 3. *Пусть* $w(z) = u(z) + iv(z) \in W_p^1(\overline{D})$, $p > 2$, *— решение эллиптической системы в комплексной записи* (1), *коэффициенты которой удовлетворяют условиям* (2), (4) *и*

$$\|q_1(z)\|_{W_p^1(\overline{D})} + \|q_2(z)\|_{W_p^1(\overline{D})} \leqslant C_6, \quad \operatorname{Im} q_2(z) \equiv 0. \tag{8}$$

Пусть также решение $w(z)$ *удовлетворяет условиям* (5).

Тогда найдется константа $C_3 > 0$, *зависящая только от* q_0, C, C_1, C_2, C_6, *такая, что выполнено неравенство* (6).

Замечание 4. Можно ли в теореме 3 избавиться хотя бы от условия $\operatorname{Im} q_2(z) \equiv 0$ — вопрос открытый.

2. Доказательство теоремы 1

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $\frac{1}{n} < C_1$, найдется точка $z_0^{(n)} \in D$, коэффициенты $A^{(n)}(z)$, $B^{(n)}(z)$, и решение уравнения (3) $w^{(n)}(z) \in W_p^1(\overline{D})$, при $A = A^{(n)}(z)$, $B = B^{(n)}(z)$, удовлетворяющие условиям теоремы, для которых

$$\operatorname{Re} w^{(n)}(z_0^{(n)}) = \frac{1}{n}. \tag{9}$$

В дальнейшем считаем, что

$$n \geqslant n_0 > \frac{1}{2}C_1. \tag{10}$$

Лемма 1. *Последовательность* $\{z_0^{(n)}\}_{n=n_0}^{\infty}$ *не может иметь точки сгущения* $z^* \in \Gamma$, *т. е. существует* r, $0 < r < 1$, *такое, что* $\{z_0^{(n)}\}_{n=n_0}^{\infty} \subset \overline{D}_r = \{z : |z| \leqslant r\}$.

$\lhd$ Предположим противное, т. е., что $z^* \in \Gamma$ — точка сгущения последовательности $\{z_0^{(n)}\}_{n=n_0}^{\infty}$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\lim_{n\to\infty} z_0^{(n)} = z^*.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$T_0 f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \left[\frac{f(t)}{t-z} + \frac{z\overline{f(t)}}{1-t\bar{z}} \right] dx\, dy, \quad t = x + iy.$$

Отметим, что при $f(z) \in L_p(\overline{D})$ [2, гл. 1, § 6; гл. 4, § 7]

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} T_0 f(z)|_{z\in\Gamma} = 0, \quad |T_0 f(z_1) - T_0 f(z_2)| \leqslant K_1 \|f\|_{L_p(\overline{D})} |z_1 - z_2|^\alpha, \\ z_1,\, z_2 \in \overline{D}, \quad \alpha = \frac{p-2}{p}, \end{gathered} \tag{11}$$

где константа K_1 от f не зависит.

Для функции $w^{(n)}(z)$ при любом n имеем представление [2, гл. 4, § 7]:

$$w^{(n)}(z) + T_0 \left(A^{(n)} w^{(n)} + B^{(n)} \bar{w}^{(n)} \right) = \Phi^{(n)}(z), \tag{12}$$

где $\Phi^{(n)}(z) = U^{(n)}(z) + iV^{(n)}(z)$ — голоморфная в D функция класса $W_p^1(\overline{D})$,

$$\operatorname{Re} w^{(n)}(z) = \operatorname{Re} \Phi^{(n)}(z) \quad (\forall\, z \in \Gamma).$$

Таким образом, подставив в (12) $z = z_0^{(n)}$, будем иметь:

$$U^{(n)} \left(z_0^{(n)} \right) = \frac{1}{n} + \operatorname{Re} T_0 \left(A^{(n)} w^{(n)} + B^{(n)} \bar{w}^{(n)} \right) (z_0^{(n)}). \tag{13}$$

Но в силу (11)

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{Re} T_0 \left(A^{(n)} w^{(n)} + B^{(n)} \bar{w}^{(n)} \right) \left(z_0^{(n)} \right) \right| \\ &\quad = \left| \operatorname{Re} T_0 \left(A^{(n)} w^{(n)} + B^{(n)} \bar{w}^{(n)} \right) \left(z_0^{(n)} \right) - \operatorname{Re} T_0 \left(A^{(n)} w^{(n)} + B^{(n)} \bar{w}^{(n)} \right) (z^*) \right| \\ &\qquad \leqslant K_1 \cdot C \cdot C_2 \cdot \left| z^* - z_0^{(n)} \right|^\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) и (14) получаем, что если n такое, что

$$K_1 \cdot C \cdot C_2 \cdot \left| z^* - z_0^{(n)} \right|^\alpha < \frac{1}{n},$$

то $U^{(n)}(z_0^{(n)}) < C_1$.

В силу гармоничности функции $U^{(n)}(z)$ найдется точка $z^{(n)} \in \Gamma$ такая, что $U^{(n)}(z^{(n)}) < C_1$. Но из (10), (12), (11) и (5) следует, что $U^{(n)}(z^{(n)}) \geqslant C_1$. Противоречие.

Лемма 1 доказана. $\triangleright$

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$T_{z_0,z_1} f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D f(t) \left[\frac{1}{t-z} - P(z,t,z_0,z_1) \right] dx\, dy, \quad t = x + iy,$$

где $f \in L_p(\overline{D})$,

$$P(z,t,z_0,z_1) = \frac{z-z_1}{z_0-z_1} \cdot \frac{1}{t-z_0} + \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \cdot \frac{1}{t-z_1}, \quad z_0, z_1 \in \overline{D},\ z_0 \neq z_1.$$

В дальнейшем также будем обозначать $Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(t)}{t-z}\,dx\,dy$.

Отметим, что
$$T_{z_0,z_1}f(z_j) = 0, \quad j = 0,1. \tag{15}$$

Вернемся к определенной в (9) последовательности точек $\{z_0^{(n)}\}$, которая, согласно лемме 1, содержится в $\overline{D}_r$.

Положим в определении оператора T_{z_0,z_1} $z_0 = z_0^{(n_0)}$, а $z_1 = z_1^{(n_0)} \in \Gamma$ выберем произвольно.

Для $w^{(n_0)}(z)$ имеет место представление [2, гл. 3, § 5]:
$$w^{(n_0)}(z) + T_{z_0^{(n_0)},z_1^{(n_0)}}\left(A^{(n_0)}w^{(n_0)} + B^{(n_0)}\bar{w}^{(n_0)}\right) = \Phi^{(n_0)}(z), \tag{16}$$
где $\Phi^{(n_0)}(z) = U^{(n_0)}(z) + iV^{(n_0)}(z)$ — вполне определенная голоморфная в D функция класса $W_p^1(\overline{D})$. В силу (9), (15) и гармоничности функции $U^{(n_0)}(z)$ существует $z_1^{(n_0+1)} \in \Gamma : U^{(n_0)}(z_1^{(n_0+1)}) = \frac{1}{n_0}$.

Запишем теперь представление (16) для $w^{(n_0+1)}(z)$ при $z_0 = z_0^{(n_0+1)}$, $z_1 = z_1^{(n_0+1)}$:
$$w^{(n_0+1)}(z) + T_{z_0^{(n_0+1)},z_1^{(n_0+1)}}\left(A^{(n_0+1)}w^{(n_0+1)} + B^{(n_0+1)}\bar{w}^{(n_0+1)}\right) = \Phi^{(n_0+1)}(z),$$
где $\Phi^{(n_0+1)}(z) = U^{(n_0+1)}(z) + iV^{(n_0+1)}(z)$ — голоморфная в D функция класса $W_p^1(\overline{D})$. Аналогично предыдущему существует $z_1^{(n_0+2)} \in \Gamma : U^{(n_0+1)}(z_1^{(n_0+2)}) = \frac{1}{n_0+1}$; и т. д.

Получим последовательность точек $\{z_1^{(n)}\}_{n=n_0}^{\infty} \subset \Gamma$ такую, что
$$w^{(n)}(z) + T_{z_0^{(n)},z_1^{(n)}}\left(A^{(n)}w^{(n)} + B^{(n)}\bar{w}^{(n)}\right) = \Phi^{(n)}(z), \tag{17}$$
где $\Phi^{(n)}(z) = U^{(n)}(z) + iV^{(n)}(z)$ — голоморфная в D функция класса $W_p^1(\overline{D})$ и
$$U^{(n)}(z_1^{(n+1)}) = \frac{1}{n+1}. \tag{18}$$

Без ограничения общности можем считать эту последовательность сходящейся:
$$\lim_{n\to\infty} z_1^{(n)} = z_1^* \in \Gamma. \tag{19}$$

Подставим в (17) $z = z_1^{(n+1)}$ и оценим получившийся интеграл:
$$w^{(n)}\left(z_1^{(n+1)}\right) + T_{z_0^{(n)},z_1^{(n)}}\left(A^{(n)}w^{(n)} + B^{(n)}\bar{w}^{(n)}\right)\left(z_1^{(n+1)}\right) = \Phi^{(n)}\left(z_1^{(n+1)}\right). \tag{20}$$
Далее для сокращения записей будем обозначать $T_{z_0^{(n)},z_1^{(n)}} = T_n$.

Из определения T_n имеем:
$$T_nf\left(z_1^{(n+1)}\right) = Tf\left(z_1^{(n+1)}\right) - \frac{z_1^{(n+1)} - z_1^{(n)}}{z_0^{(n)} - z_1^{(n)}}Tf\left(z_0^{(n)}\right) - \frac{z_1^{(n+1)} - z_0^{(n)}}{z_1^{(n)} - z_0^{(n)}}Tf\left(z_1^{(n)}\right),$$
откуда
$$\left|T_nf\left(z_1^{(n+1)}\right)\right| \leqslant \left|Tf\left(z_1^{(n+1)}\right) - Tf\left(z_1^{(n)}\right)\right| + \frac{\left|z_1^{(n+1)} - z_1^{(n)}\right|}{\left|z_0^{(n)} - z_1^{(n)}\right|}\cdot\left|Tf\left(z_0^{(n)}\right)\right| + \left|1 - \frac{z_1^{(n+1)} - z_0^{(n)}}{z_1^{(n)} - z_0^{(n)}}\right|\cdot\left|Tf\left(z_1^{(n)}\right)\right|. \tag{21}$$

Далее воспользуемся следующими свойствами оператора T [2, гл. 1, § 6]:

$$|Tf(z_1) - Tf(z_2)| \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{L_p(\overline{D})} |z_1 - z_2|^\alpha,$$
$$|Tf(z)| \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{L_p(\overline{D})}, \quad \forall\, z, z_1,\, z_2 \in \overline{D},\ \alpha = \frac{p-2}{p}, \tag{22}$$

где const от f не зависит.

Так как $\{z_0^{(n)}\} \subset \overline{D}_r$, из (21) и (22) получаем:

$$\left| T_n f\left(z_1^{(n+1)}\right)\right| \leqslant \|f\|_{L_p(\overline{D})} \cdot \left\{ \mathrm{const} \left| z_1^{(n+1)} - z_1^{(n)} \right|^\alpha + \mathrm{const}\, \frac{\left|z_1^{(n+1)} - z_1^{(n)}\right|}{1-r} \right\},$$

где const от f не зависят.

Отсюда

$$\left| T_n\left(Aw^{(n)}\right) + B\bar{w}^{(n)}\left(z_1^{(n+1)}\right)\right| \leqslant \mathrm{const} \cdot C \cdot C_2 \cdot \left| z_1^{(n+1)} - z_1^{(n)}\right|^\alpha, \tag{23}$$

где const от n не зависит.

Из (19), (20), (18) и (23) получаем, что при достаточно больших n

$$\operatorname{Re} w^{(n)}\left(z_1^{(n+1)}\right) < C_1,$$

что противоречит (5). Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1, только вместо представления (12) следует использовать представление [4]

$$w^{(n)}(z) + T_0\left(q_1^{(n)}\partial_z w^{(n)} + q_2^{(n)}\partial_{\bar z}\bar{w}^{(n)} + A^{(n)}w^{(n)} + B^{(n)}\bar{w}^{(n)}\right) = \Phi^{(n)}(z),$$

и везде далее (в (16) и т. д.) сделать аналогичную замену представления.

4. Доказательство теоремы 3

Используя наши предположения о коэффициентах уравнения (1), приведем его к каноническому виду (подробности можно найти в [5])

$$\omega_{\bar\zeta} + A_0(\zeta)\omega + B_0(\zeta)\overline{\omega} = 0,$$

где $\zeta \in D_\zeta = \{|\zeta| \leqslant 1\}$, $w = \omega + a\overline{\omega}$,

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{a_{\bar\zeta} + A_1 + B_1\overline{a}}{1-|a|^2} \\ B_0 &= \tfrac{-aa_{\bar\zeta} + A_1 a + B_1}{1-|a|^2} \end{aligned}\right\} \in L_p(\overline{D}_\zeta),$$

$$a = -\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{q_2(1-|\mu|^2)}{|1 - q_1\cdot\overline{\mu}|^2 - |q_2\cdot\mu|^2},$$

$$A_1 = \frac{(1-\overline{q}_1\cdot\mu)A + q_2\cdot\mu\cdot\overline{B}}{\overline{\zeta}_{\bar z}\left[|1-q_1\cdot\overline{\mu}|^2 - |q_2\cdot\mu|^2\right]},$$

$$B_1 = \frac{(1-\overline{q}_1\cdot\mu)B + q_2\cdot\mu\cdot\overline{A}}{\overline{\zeta}_{\bar z}\left[|1-q_1\cdot\overline{\mu}|^2 - |q_2\cdot\mu|^2\right]},$$

$$\mu = \frac{2q_1}{1+|q_1|^2-|q_2|^2+\sqrt{\Delta}},$$

где $\Delta = (1+|q_1|^2-|q_2|^2)^2 - 4|q_1|^2 \geqslant (1-q_0^2)^2 > 0$. Очевидно, что из (2) следует

$$|\mu(z)| \leqslant \mu_0 = \mathrm{const} < 1, \quad \mu(z) \in W_p^1(\overline{D}_z);$$

$|a(\zeta)| \leqslant a_0 = \mathrm{const} < 1$, в связи с чем $a(\zeta) \in W_p^1(\overline{D}_\zeta)$, $A_1(\zeta)$, $B_1(\zeta) \in L_p(\overline{D}_\zeta)$.

Теперь достаточно сослаться на теорему 1.

Литература

1. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб.—1957.—Т. 43, № 4.—С. 451–503.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз.—1959.—628 с.
3. *Климентов С. Б.* Об априорных оценках производных радиуса-вектора поверхности положительной кривизны // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии.—М.: Винити, 1987.—Т. 19.—С. 187–213.
4. *Климентов С. Б.* Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны // Украинский геом. сб.—Харьков: Изд-во «Вища школа», 1986.—Вып. 29.—С. 56–82.
5. *Климентов С.Б.* Задача Римана — Гильберта в классах Харди для общих эллиптических систем первого порядка // Изв. вузов. Математика.—2016.—№ 6.—С. 36–47.

Статья поступила 8 ноября 2022 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
Южный федеральный университет,
профессор кафедры математического анализа и геометрии,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 50–57

A PRIORI ESTIMATES OF THE POSITIVE REAL OR IMAGINARY PART OF A GENERALIZED ANALYTIC FUNCTION

Klimentov, S. B.[1,2]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] South Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

E-mail: `sbklimentov@sfedu.ru`

Abstract. We denote by $D = D_z = \{z : |z| < 1\}$ the unit disk in the complex z-plane, $\Gamma = \partial D$. The following property of harmonic functions is well-known. If a real valued function $U(z) \in C(\overline{D})$ is harmonic in D, $U(z)|_{z\in\Gamma} \geqslant K = \text{const} > 0$, then $U(z) \geqslant K$ for all $z \in \overline{D}$. The subject of this work is the generalization of this property to the real (imaginary) part of the solution to the elliptic system on D: $\partial_{\bar z} w - q_1(z)\partial_z w - q_2(z)\partial_{\bar z}\overline{w} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0$, where $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ is a desired complex function. $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$, $\partial_z = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\big)$, are derivatives in Sobolev sense; $q_1(z)$ and $q_2(z)$ are given measurable complex functions satisfying the uniform ellipticity condition of the system $|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0 = \text{const} < 1$, $z \in \overline{D}$; $A(z)$, $B(z) \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, also are given complex functions.

Keywords: first-order elliptic system, generalized analytic function.

AMS Subject Classification: 30G30.

For citation: *Klimentov, S. B.* A Priori Estimates of the Positive Real or Imaginary Part of a Generalized Analytic Function, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 50–57. (in Russian). DOI: 10.46698/q1367-9905-0509-t.

References

1. *Bojarsky, B. V.* Weak Solutions to a System of First-Order Didderential Equations of Elliptic Type with Discontinuous Coefficients, *Matematichesky Sbornik*, 1957, vol. 43, no. 1, pp. 451–503 (in Russian).
2. *Vekua, I. N. Generalized Analytic Functions*, Oxford–London–New York–Paris, Pergamon Press: XXIX, 1962, 668 p.
3. *Klimentov, S. B.* On a Priori Estimates of the Derivatives of the Radius-Vector of a Surface of Positive Curvature, *Journal of Soviet Mathematics*, 1989, vol. 44, no. 2, pp. 215–235. DOI: 10.1007/BF01098655.
4. *Klimentov, S. B.* On a Method of Constructing the Solutions of Boundary-Value Problems of the Theory of Bendings of Surfaces of Positive Curvature, *Journal of Mathematical Sciences*, 1990, vol. 51, no. 2, pp. 2230–2248.
5. *Klimentov, S. B.* The Riemann–Hilbert Problem in Hardy Classes for General First-Order Elliptic Systems, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 29–39. DOI: 10.3103/S1066369X16060049.

Received November 8, 2022

Sergey B. Klimentov
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher;
South Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor
E-mail: `sbklimentov@sfedu.ru`