

УДК 539.3

DOI 10.46698/q5632-5654-3734-n

## МАСШТАБНО-ЗАВИСИМАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА С ПОКРЫТИЕМ<sup>#</sup>

А. О. Ватульян<sup>1,2</sup>, С. А. Нестеров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Южный федеральный университет,

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

<sup>2</sup> Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,

Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

**Аннотация.** Проведено исследование задачи градиентной электроупругости для сплошного радиально-поляризованного цилиндра с покрытием. На неэлектродированную боковую поверхность покрытия действует постоянная нормальная механическая нагрузка. Модель электроупругости включает один градиентный механический параметр. При этом учитывается влияние градиента деформации, но не учитывается влияние градиента напряженности электрического поля. В рамках градиентной постановки задаются дополнительные к классической постановке граничные условия и условия сопряжения. После исключения электрического потенциала задача сводится к задаче градиентной теории упругости с ужесточенными модулями упругости. В случае однородного покрытия получены аналитические выражения для нахождения радиальных смещений и напряжений. В случае неоднородного покрытия численное решение построено на основе метода пристрелки. Проведены вычисления смещений, напряжений Коши и моментных напряжений, как однородного, так и неоднородного покрытий. Осуществлен сравнительный анализ результатов, полученных на основе моделей классической и градиентной электроупругости в зависимости от значений масштабного параметра. Проведено исследование влияния законов неоднородности материальных характеристик покрытия на распределение перемещений. Выяснено, что: 1) напряжения Коши испытывают скачок на границе цилиндра и покрытия; 2) моментные напряжения принимают пиковое значение на поверхности сопряжения; 3) увеличение масштабного параметра снижает значения радиальных перемещений.

**Ключевые слова:** сплошной цилиндр, покрытие, градиентная модель электроупругости, напряжения Коши, моментные напряжения, полные напряжения, масштабные эффекты, метод пристрелки, функционально-градиентный материал.

**AMS Subject Classification:** 74B05.

**Образец цитирования:** Ватульян А. О., Нестеров С. А. Масштабно-зависимая модель электроупругости для сплошного цилиндра с покрытием // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 29–40. DOI: 10.46698/q5632-5654-3734-n.

### 1. Введение

Пьезоэлектрические элементы цилиндрической формы широко используются в качестве сенсоров и актуаторов в микро-электромеханических устройствах [1]. В таких структурах в связи с тем, что размеры исследуемых элементов могут быть соизмеримы с характерными размерами микроструктуры материала, согласно экспериментальным данным наблюдаются масштабные эффекты [2, 3], т. е. зависимость напряженно-деформированного состояния (НДС) от характерных размерных параметров.

<sup>#</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>.

© 2023 Ватульян А. О., Нестеров С. А.

Задачи деформирования и колебаний пьезоэлектрических тел цилиндрической формы достаточно полно изучены в рамках классической теории электроупругости [4–6]. Так, в [5] отражены общие вопросы деформирования и колебаний пьезокерамических цилиндров с постоянными характеристиками, представлено большое количество постановок задач.

Однако классической теории становится недостаточно для моделирования масштабных эффектов. В настоящее время для учета масштабных эффектов применяется неклассическая механика, основанная на градиентных моделях, которая в определяющие соотношения включает градиентные параметры размерности длины [7]. По своему физическому смыслу масштабные параметры определяют протяженность неклассических масштабных эффектов. Значения масштабных параметров для монокристаллов имеют порядки межатомных расстояний (микронны). Однако для композитов масштабные параметры могут значительно превосходить параметры межатомных расстояний и определяться размерами ячейки периодичности материала. К основным методам определения масштабных параметров относятся: 1) испытание микроразмерных балок на изгиб; 2) сопоставление соотношений континуальной градиентной теории с оценками, получаемыми на основе молекулярной динамики; 3) испытание образцов с различным размером эффектов.

Градиентная теория упругости (ГТУ) получила свое развитие в середине XX века в работах Тупина [8] и Миндлина [9] и в дальнейшем получила обобщение на механику связанных полей, в том числе на теорию термоупругости [10] и электроупругости [11].

Современные исследования в области градиентной электроупругости можно разделить на две группы: одна в рамках теории градиентной упругости учитывает влияние градиента деформации, но не учитывает градиент электрического поля [12], другая учитывает влияние градиента электрического поля, но пренебрегает эффектом градиента деформации [13]. Градиентные модели электроупругости приводят к увеличению порядка дифференциального оператора в уравнениях равновесия или электростатики, причем старшие производные входят в соответствующие дифференциальные уравнения с малыми параметрами.

Впервые задача Ламе в рамках ГТУ для однородного цилиндра была поставлена в [14]. В случае однородного цилиндра в [15, 16] были получены точные аналитические решения ГТУ. Аналитические решения получены также и в случае упругого неоднородного полого цилиндра со степенным законом изменения коэффициентов Ламе [17].

Градиентная механика широко применяется также и для исследования поведения физических полей в окрестности поверхностей сопряжения и трещин. Некоторые задачи градиентной механики для слоистых тел (балки, полосы, цилиндра) рассмотрены в [18–21].

В [22–24] представлено численное решение задачи градиентной электроупругости для полого функционально-градиентного цилиндра со степенными законами неоднородности. Однако задача градиентной электроупругости для сплошного цилиндра с покрытием остается неизученной.

Целями данной работы являются: постановка задачи градиентной электроупругости для сплошного цилиндра с покрытием; получение точных аналитических решений в случае однородного покрытия и численных решений на основе метода пристрелки в случае неоднородного покрытия; вычисление радиальных смещений и напряжений двухслойного цилиндра; сравнительный анализ полученных результатов.

## 2. Определяющие соотношения градиентной электроупругости

Пусть пьезоэлектрическое тело занимает объем  $V$  с поверхностью  $S = S_u \cup S_p = S_\phi \cup S_q$ . Ограничиваясь только влиянием градиента деформации, т. е. не учитывая влияние градиента напряженности электрического поля, плотность электрической энтальпии можно представить в виде [12]:

$$g(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, E_i) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n}, \quad (1)$$

где  $E_i = -\phi_{,i}$  — компоненты вектора напряженности электрического поля,  $\phi$  — электрический потенциал,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$  — компоненты тензора деформации,  $u_i$  — компоненты вектора перемещения,  $c_{ijkl}$  и  $A_{ijklmn}$  — компоненты тензоров модулей упругости 4-го и 6-го порядка,  $e_{kij}$  — компоненты тензора пьезомодулей 3-го порядка,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров коэффициентов диэлектрической проницаемости 2-го порядка соответственно.

Математическая постановка задачи градиентной электроупругости, полученная путем применения вариационного принципа, имеет вид [12, 25]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

$$D_{i,i} = 0, \quad (3)$$

$$m_{ijk,k} n_j n_k = s_i, \quad \tau_{ij} n_j - m_{ijk,k} n_j - (m_{ijk,k} n_k)_{,j} + (m_{ijk,k} n_j n_k)_{,s} n_s = p_i, \quad (4)$$

$$u_i = v_i, \quad u_{i,l} n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n}, \quad (5)$$

$$D_j n_j = q, \quad \phi = V_0. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk,k}$  — компоненты тензора полных напряжений,  $\tau_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k$  — компоненты тензора напряжений Коши,  $m_{ijk} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$  — компоненты тензора моментных напряжений,  $D_i = -\frac{\partial g}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ij} E_j$  — компоненты вектора электрической индукции,  $p_i, s_i$  — компоненты векторов заданных сил на поверхности тела,  $q$  — плотность поверхностного заряда,  $n_i$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Выишем в полярной системе координат выражения для ненулевых компонент тензоров полных напряжений  $\sigma_{\phi\phi} = \tau_{\phi\phi} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{\phi\phi r}) - \frac{1}{r} (m_{\phi r\phi} + m_{r\phi\phi})$ ,  $\sigma_{rr} = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\phi r\phi} + m_{r\phi\phi})$ , напряжений Коши  $\tau_{rr} = c_{33} \frac{du_r}{dr} + c_{13} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{d\phi}{dr}$ ,  $\tau_{\phi\phi} = c_{13} \frac{du_r}{dr} + c_{11} \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{d\phi}{dr}$ , моментных напряжений  $m_{r\phi\phi} = m_{\phi r\phi} = \frac{1}{2} l^2 \frac{(\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi})}{r}$ ,  $m_{rrr} = l^2 \frac{d\tau_{rr}}{dr}$ ,  $m_{\phi\phi r} = l^2 \frac{d\tau_{\phi\phi}}{dr}$ , вектора электрической индукции  $D_r = -e_{33} \frac{d\phi}{dr} + e_{31} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{du_r}{dr}$  и поверхностной нагрузки  $p_r = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\phi\phi r} + m_{\phi r\phi} + m_{r\phi\phi})$ . Здесь  $l$  — механический градиентный параметр.

## 3. Постановка задачи для сплошного цилиндра

В рамках градиентной модели (2)–(6) рассмотрим задачу о деформировании бесконечного сплошного кругового неоднородного пьезокерамического цилиндра радиуса  $a$  с радиальной поляризацией. Электроды на поверхности цилиндра отсутствуют. К боковой поверхности цилиндра  $r = a$  приложена постоянная нормальная механическая нагрузка  $p$ . Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dD_r}{dr} + \frac{D_r}{r} = 0, \quad (8)$$

$$D_r(a) = 0, \quad (9)$$

$$m_{rrr}(a) = 0, \quad p_r(a) = p_0. \quad (10)$$

Здесь  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\phi\phi}$  — радиальная и окружная компоненты тензора полных напряжений,  $D_r$  — радиальная компонента вектора электрической индукции,  $m_{rrr}$  — радиальная компонента тензора моментных напряжений.

После интегрирования уравнения электростатики (8) с учетом граничного условия (9) и исключения электрического потенциала из соотношений для радиальной и окружной компонент напряжений Коши согласно [6] получим следующие модифицированные выражения для напряжений Коши:

$$\tau_{rr}^* = c_{33}^* \frac{du_r}{dr} + c_{13}^* \frac{u_r}{r}, \quad \tau_{\phi\phi}^* = c_{13}^* \frac{du_r}{dr} + c_{11}^* \frac{u_r}{r}, \quad (11)$$

где  $c_{11}^* = c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\epsilon_{33}}$ ,  $c_{13}^* = c_{13} + \frac{e_{31}e_{33}}{\epsilon_{33}}$ ,  $c_{33}^* = c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}}$ .

После исключения электрического потенциала задача электроупругости (7)–(10) сводится к задаче градиентной теории упругости с ужесточенными модулями упругости.

Введем безразмерные параметры и функции по формулам:  $\xi = \frac{r}{a}$ ,  $U = \frac{u_r}{a}$ ,  $\Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}(a)}$ ,  $\Omega_{\phi\phi} = \frac{\sigma_{\phi\phi}}{c_{33}(a)}$ ,  $S_{rr} = \frac{\tau_{rr}^*}{c_{33}(a)}$ ,  $S_{\phi\phi} = \frac{\tau_{\phi\phi}^*}{c_{33}(a)}$ ,  $M_{rrr} = \frac{m_{rrr}}{c_{33}(a)a}$ ,  $M_{\phi\phi r} = \frac{m_{\phi\phi r}}{c_{33}(a)a}$ ,  $M_{r\phi\phi} = \frac{m_{r\phi\phi}}{c_{33}(a)a}$ ,  $P = \frac{p_0}{c_{33}(a)}$ ,  $\bar{p}_r = \frac{p_r}{c_{33}(a)}$ ,  $\alpha = \frac{l}{a}$ ,  $B_1(\xi) = \frac{c_{11}^*}{c_{33}(a)}$ ,  $B_2(\xi) = \frac{c_{13}^*}{c_{33}(a)}$ ,  $B_3(\xi) = \frac{c_{33}^*}{c_{33}(a)}$ .

Обезразмеренная постановка задачи градиентной теории упругости примет вид:

$$\frac{d\Omega_{rr}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\phi\phi}}{\xi} = 0, \quad (12)$$

$$M_{rrr}(1) = 0, \quad \bar{p}_r(1) = P. \quad (13)$$

Здесь

$$\Omega_{rr} = S_{rr} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi M_{rrr}) + \frac{1}{\xi} (M_{\phi\phi r} + M_{r\phi\phi}), \quad \Omega_{\phi\phi} = S_{\phi\phi} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi M_{\phi\phi r}) - \frac{1}{\xi} (M_{\phi\phi r} + M_{r\phi\phi}),$$

$$S_{rr} = B_3(\xi) \frac{dU}{d\xi} + B_2(\xi) \frac{U}{\xi}, \quad S_{\phi\phi} = B_2(\xi) \frac{dU}{d\xi} + B_1(\xi) \frac{U}{\xi}, \quad M_{rrr} = \alpha^2 \frac{dS_{rr}}{d\xi},$$

$$M_{\phi\phi r} = \alpha^2 \frac{dS_{\phi\phi}}{d\xi}, \quad M_{r\phi\phi} = M_{\phi r\phi} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{(S_{rr} - S_{\phi\phi})}{\xi},$$

$$\bar{p}_r(1) = \left\{ S_{rr} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi M_{rrr}) + \frac{1}{\xi} (M_{\phi\phi r} + M_{\phi r\phi} + M_{r\phi\phi}) \right\}_{\xi=1}.$$

В задаче (12), (13) физические характеристики цилиндра  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ ,  $B_3(\xi)$  являются функциями безразмерной радиальной координаты, в частности могут быть кусочно-постоянными в случае цилиндра с однородным покрытием или непрерывными, в случае, если покрытие изготовлено из функционально-градиентного материала (ФГМ).

Согласно классической теории упругости на поверхности сопряжения покрытия и цилиндра  $\xi = R_0$  должны выполняться условия непрерывности по перемещениям и радиальным напряжениям. В градиентной теории упругости на поверхности соединения цилиндра и покрытия согласно вариационному принципу [18] должны выполняться дополнительные условия сопряжения в виде непрерывности градиентов перемещений и

моментных напряжений. Для упрощения расчетов примем градиентный параметр одинаковым для покрытия и цилиндра, т. е.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . В случае двухслойного цилиндра постановка задачи (12), (13) согласно [18] преобразуется к виду:

$$\frac{d\Omega_{rr}^{(1)}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr}^{(1)} - \Omega_{\phi\phi}^{(1)}}{\xi} = 0, \quad \frac{d\Omega_{rr}^{(2)}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr}^{(2)} - \Omega_{\phi\phi}^{(2)}}{\xi} = 0, \quad (14)$$

$$U^{(1)}(R_0) = U^{(2)}(R_0), \quad \frac{dU^{(1)}}{d\xi}(R_0) = \frac{dU^{(2)}}{d\xi}(R_0),$$

$$M_{rrr}^{(1)}(R_0) = M_{rrr}^{(2)}(R_0), \quad \bar{p}_r^{(1)}(R_0) = \bar{p}_r^{(2)}(R_0), \quad (15)$$

$$M_{rrr}^{(2)}(1) = 0, \quad \bar{p}_r^{(2)}(1) = P, \quad (16)$$

где  $R_0 = \frac{r_0}{a}$  — поверхность сопряжения.

#### 4. Решение задачи

Цель исследования состоит в нахождении НДС цилиндра с покрытием, как в случае однородного покрытия, так и сделанного из ФГМ.

В [15] были получены точные аналитические выражения для радиальных перемещений однородного изотропного сплошного цилиндра, содержащие модифицированные функции Бесселя. Выяснено, что в этом случае градиентных эффектов не возникает. Исследуем возможные градиентные эффекты в случае сплошного электроупругого цилиндра с покрытием. В качестве первой задачи рассмотрим нахождение перемещений цилиндра  $U^{(1)}(\xi)$  и покрытия  $U^{(2)}(\xi)$  в случае, если цилиндр и покрытие изготовлены из однородных материалов. Для этого уравнения равновесия (14), условия сопряжения (15) и граничные условия (16) выражаются через перемещения, а физические характеристики цилиндра и покрытия полагаются константами. В параграфе 3 выяснено, что постановка задачи для электроупругого цилиндра сводится к постановке задачи для анизотропного упругого цилиндра с модифицированными модулями упругости. Выполняя действия, аналогичные, как в работах [15, 18] для упругого изотропного цилиндра, с учетом ограниченности решения в точке  $\xi = 0$ , получим решение задачи (14)–(16) в виде:

$$U^{(1)} = D_1 \xi^{m_1} + D_2 I_1 \left( \frac{m_1 \xi}{\alpha} \right),$$

$$U^{(2)} = D_3 \xi^{m_2} + D_4 \xi^{-m_2} + D_5 I_1 \left( \frac{m_2 \xi}{\alpha} \right) + D_6 K_1 \left( \frac{m_2 \xi}{\alpha} \right). \quad (17)$$

Здесь  $I_1 \left( \frac{m_1 \xi}{\alpha} \right)$ ,  $K_1 \left( \frac{m_1 \xi}{\alpha} \right)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка соответственно,  $m_1 = \sqrt{\frac{B_1^{(1)}}{B_3^{(1)}}}$ ,  $m_2 = \sqrt{\frac{B_1^{(2)}}{B_3^{(2)}}}$ .

В выражениях (17) константы  $D_1, \dots, D_6$  определяются путем удовлетворения условий сопряжения (15) и граничных условий (16). После нахождения перемещений далее аналитически определяются напряжения Коши  $S_{rr}$  и  $S_{\phi\phi}$ , моментные напряжения  $M_{rrr}$ ,  $M_{\phi\phi r}$ ,  $M_{r\phi\phi}$  и полные напряжения  $\Omega_{rr}$ ,  $\Omega_{\phi\phi}$  для каждого из слоев.

В качестве второй задачи рассмотрим нахождение НДС цилиндра с покрытием в случае, если покрытие изготовлено из ФГМ с непрерывным изменением модифицированных модулей упругости через поверхность сопряжения. В этом случае возможно лишь численное решение задачи (12), (13), например, методом пристрелки.

Для решения задачи методом пристрелки после некоторых преобразований уравнений получим каноническую систему 4 обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка относительно функций  $U_1 = U$ ,  $U_2 = S_{rr}$ ,  $U_3 = S'_{rr}$ ,  $U_4 = \bar{p}_r$

$$U'_1 = \frac{1}{B_3}U_2 - \frac{B_2}{B_1}\frac{U_1}{\xi}, \quad (18)$$

$$U'_2 = U_3, \quad (19)$$

$$U'_3 = -\frac{1}{\alpha^2}U_4 - \frac{1}{\xi^2}\left(B_1 - \frac{B_2^2}{B_1}\right)\frac{U_1}{\xi} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\xi^2}\left(1 - \frac{B_2}{B_3}\right)\right)U_2 - \frac{U_3}{\xi}, \quad (20)$$

$$U'_4 = -\frac{1}{\xi}U_4 + \frac{1}{\xi^2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\left(B_1 - \frac{B_2^2}{B_1}\right)U_1 + \frac{1}{\xi}\left(\left(1 + \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\frac{B_2}{B_3} - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)U_2. \quad (21)$$

Здесь знак «штрих» обозначает производную по координате  $\xi$ .

Граничные условия примут вид

$$U_1(\xi_0) = 0, \quad U_3(\xi_0) = 0, \quad U_3(1) = 0, \quad U_4(1) = P. \quad (22)$$

Первые два условия в (22) в силу ограниченности решения являются дополнительными граничными условиями в точке  $\xi = \xi_0$ , достаточно близкой к нулю.

Согласно методу пристрелки, решение краевой задачи (12), (13) можно представить в виде суммы решений двух вспомогательных задач Коши:

$$U_i = p_1 U_i^I(\xi) + p_2 U_i^{II}(\xi), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (23)$$

Каждая из вспомогательных задач состоит из канонической системы ОДУ (18)–(21) с одним из следующих наборов условий в точке  $\xi_0$ :

- 1)  $U_1^I(\xi_0) = 0$ ,  $U_2^I(\xi_0) = 1$ ,  $U_3^I(\xi_0) = 0$ ,  $U_4^I(\xi_0) = 0$ ;
- 2)  $U_1^{II}(\xi_0) = 0$ ,  $U_2^{II}(\xi_0) = 0$ ,  $U_3^{II}(\xi_0) = 0$ ,  $U_4^{II}(\xi_0) = 1$ .

Константы  $p_1$  и  $p_2$ , входящие в формулу (23), находятся путем удовлетворения двух последних условий (22) на боковой поверхности цилиндра.

При наличии у функций  $B_1(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ ,  $B_3(\xi)$  разрыва 1-го рода на поверхности  $\xi = R_0$  осуществлялось решение задач Коши на интервале  $[\xi_0, R_0]$ , а затем согласно [26], посчитанные решения в точке  $\xi = R_0$  задавались как условия для задач Коши, которые затем решались на интервале  $[R_0, 1]$ .

## 5. Результаты вычислений

Рассмотрим результаты вычислений распределения по координате  $\xi$  безразмерных перемещений, напряжений Коши и моментных напряжений двухслойного пьезокерамического цилиндра при  $P = 1$ ,  $R_0 = 0.7$ .

В первой серии вычислений покрытие полагалось однородным, при этом модифицированные модули упругости полагались равными:  $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = B_3^{(1)} = 0.25$ ,  $B_1^{(2)} = B_2^{(2)} = B_3^{(2)} = 1$ . Вычисление перемещений производилось по формуле (17).

На рис. 1 а показано распределение по координате  $\xi$  радиальных напряжений Коши  $S_{rr}$ , а на рис. 1 б моментных напряжений  $M_{rrr}$ , вычисленных при  $\alpha = 0.06$ .

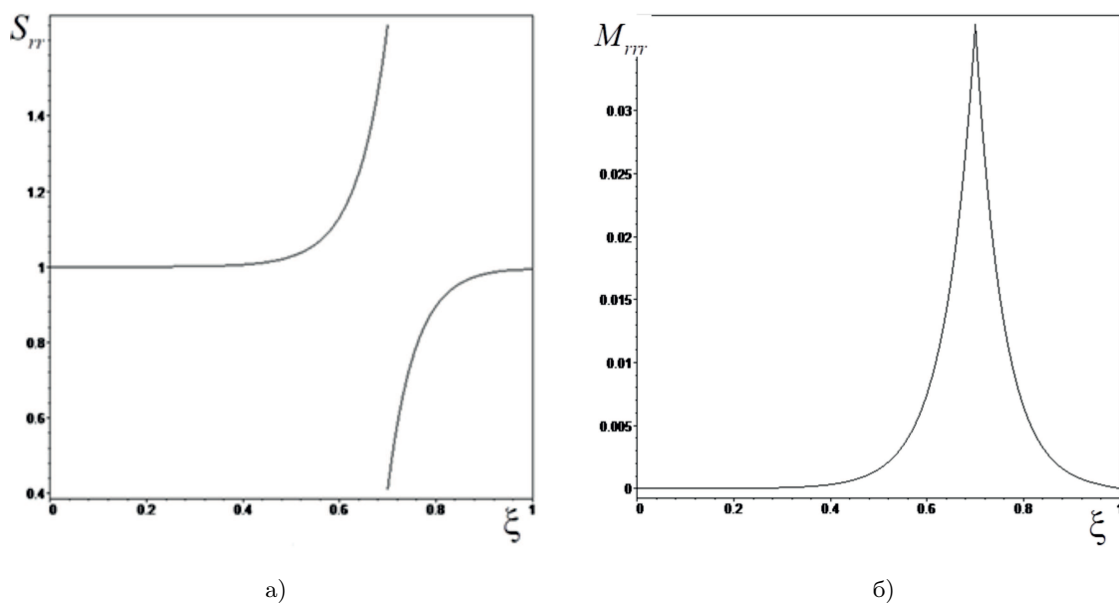


Рис. 1. Распределение по координате  $\xi$ : а)  $S_{rr}$ ; б)  $M_{rrr}$ .

Из рис. 1 следует, что: 1) радиальные напряжения Коши на границе сопряжения терпят разрыв, что связано с разностью электромеханических характеристик и непрерывностью перемещений и их первых производных на поверхности сопряжения; 2) моментные напряжения принимают пиковое значение на поверхности сопряжения.

На рис. 2 показан результат вычисления по формулам (17) радиального распределения смещений. При этом сплошной линией показано решение задачи в классической постановке при  $\alpha = 0$ , точками — в градиентной постановке при  $\alpha = 0.06$ .

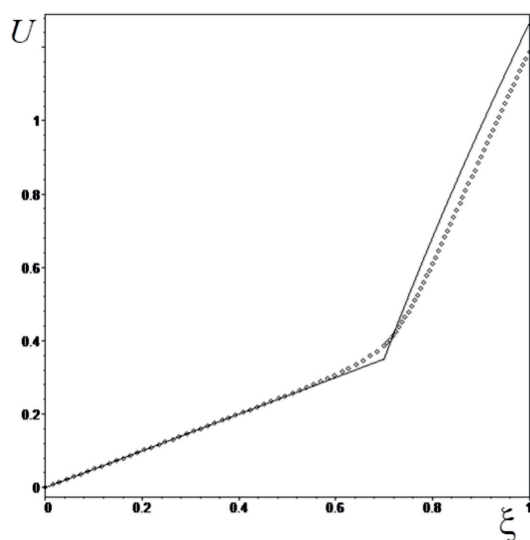


Рис. 2. Распределение перемещения по радиальной координате, когда покрытие однородное.

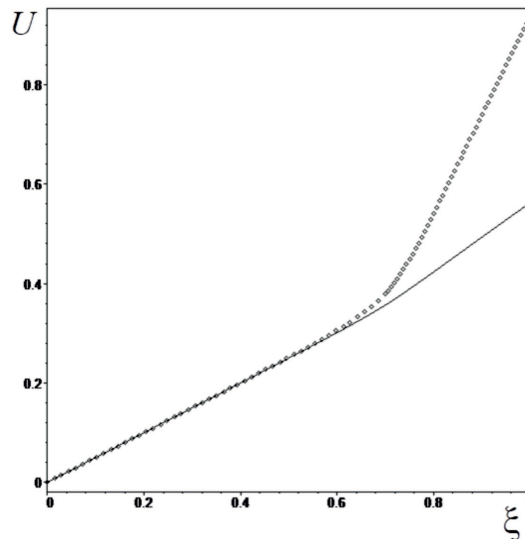
Из рис. 2 следует, что при решении задачи в градиентной постановке наблюдается: 1) более гладкое распределение радиальных перемещений в окрестности сопряжения; 2) уменьшение значений радиальных перемещений по сравнению с классической постановкой.

Во второй серии вычислений покрытие полагалось неоднородным, а вычисления производились на основе метода пристрелки при  $\xi_0 = 0.001$ .

Исследовано влияние величины масштабного параметра  $\alpha$  на точность вычисления безразмерных перемещений численно методом пристрелки путем сравнения с аналитическим решением по формулам (17). Выяснено, что погрешность вычисления перемещений на боковой поверхности цилиндра  $\xi = 1$  методом пристрелки не превосходит 2% при  $\alpha \geq 0.05$ .

В случае покрытия из ФГМ в расчетах положим материальные характеристики цилиндра  $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = B_3^{(1)} = 0.25$ ,  $B_1^{(2)} = B_2^{(2)} = B_3^{(2)} = 1$ , а законы неоднородности модифицированных модулей покрытия  $B_1^{(2)}(\xi) = B_2^{(2)}(\xi) = B_3^{(2)}(\xi) = 1 + (10\xi - 7)^N$ , что обеспечивает непрерывное изменение материальных характеристик через поверхность сопряжения.

Проведено исследование влияния двух различных законов неоднородности, характеризующихся параметром  $N$ , на распределение радиальных перемещений. На рис. 3 показано радиальное распределение перемещений при  $\alpha = 0.06$  и показателях неоднородности  $N = 1$  (сплошная линия),  $N = 2$  (точки).



**Рис. 3.** Распределение перемещения по радиальной координате при разных значениях параметра неоднородности  $N$ .

Из рис. 3 следует, что с увеличением параметра  $N$  значения перемещений увеличиваются.

## 6. Заключение

Исследована задача о деформировании сплошного радиально-поляризованного цилиндра с покрытием под действием постоянной нормальной механической нагрузки на боковой поверхности. Задача сведена к задаче градиентной теории упругости с жесточенными модулями упругости. В случае однородного покрытия получены точные аналитические выражения для нахождения радиальных перемещений и напряжений. В случае функционально-градиентного покрытия решение построено на основе метода пристрелки. Показано отличие распределения перемещений и напряжений по радиальной координате, рассчитанных по классической теории и по градиентной теории электроупругости.



Выяснено, что 1) увеличение масштабного параметра снижает значения радиальных перемещений и полных окружных напряжений; 2) на поверхности сопряжения цилиндра с покрытием радиальные напряжения Коши терпят скачок, обусловленный непрерывностью градиентов перемещений; 3) радиальные моментные напряжения во много раз меньше напряжений Коши и принимают пиковое значение на поверхности сопряжения.

### Литература

1. *Li X.-F., Peng X.-L., Lee K. Y.* Radially polarized functionally graded piezoelectric hollow cylinders as sensors and actuators // *Eur. J. Mech. – A/Solids.*—2010.—Vol. 29, № 4.—P. 704–713. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.02.003.
2. *Lam D. C., Yang F., Chong A., Wang J., Tong P.* Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.*—2003.—Vol. 51 (8).—P. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.
3. *Aifantis E. C.* Gradient effects at the macro, micro- and nano- scales // *J. Mech. Behav. Mater.*—1994.—Vol. 5.—P. 335–353. DOI: 10.1515/JMBM.1994.5.3.355.
4. *Adelman N., Stavsky Ye., Segal E.* Axisymmetric vibrations of radially polarized piezoelectric ceramic cylinders // *Journal of Sound and Vibration.*—1975.—Vol. 38, № 2.—P. 245–254. DOI: 10.1016/S0022-460X(75)80008-3.
5. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.—М.: Наука, 1988.—472 с.
6. *Ватульян А. О., Кондратьев В. С.* Колебания неоднородного пьезокерамического цилиндра при наличии затухания // *Проблемы прочности и пластичности.*—2016.—Т. 78, № 4.—С. 406–414. DOI: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-406-414.
7. *Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О.* Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах теории упругости за счет градиентных эффектов // *Докл. Акад. наук.*—2019.—Т. 489, № 6.—С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591.
8. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple stresses // *Arch. Rational Mech. Anal.*—1962.—Vol. 11.—P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945.
9. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.*—1964.—Vol. 16.—P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
10. *Лурье С. А., Фам Т., Соляев Ю. О.* Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // *Механика композиционных материалов и конструкций.*—2012.—Т. 18, № 3.—С. 440–449.
11. *Hadjesfandiari A. R.* Size-dependent piezoelectricity // *Int. J. Solids Struct.*—2013.—Vol. 50 (18).—P. 2781–2791. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.04.020.
12. *Shodja H. M., Ghazisaeidi M.* Effects of couple stress on anti-plane problems of piezoelectric media with inhomogeneities // *Eur. J. Mech. – A/Solids.*—2007.—Vol. 26.—P. 647–658. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2006.09.001.
13. *Yang X. M., Hu Y. T., Yang J. S.* Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics // *Int. J. Solids Struct.* —2004.—Vol. 41 (24–25).—P. 6801–6811. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.05.018.
14. *Лурье М. В.* Задачи Ламе в градиентной теории упругости // *Докл. АН СССР.*—1968.—Т. 181, № 5.—С. 1087–1089.
15. *Papargyri-Beskou S., Tsinopoulos S.* Lamé’s strain potential method for plane gradient elasticity problems // *Arch. Appl. Mech.*—2015.—Vol. 85, № 9–10.—P. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00419-014-0964-5.
16. *Gao X. L., Park S. K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *Int. J. Solids Struct.* —2007.—Vol. 44 (22–23).—P. 7486–7499. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022.
17. *Chu L., Dui G.* Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity // *Int. J. Mech. Sci.*—2018.—Vol. 48.—P. 366–373. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011.
18. *Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О.* Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // *Вестн. Пермского национ. исслед. политехн. ун-та. Механика.*—2021.—№ 4.—С. 60–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07.
19. *Li A., Zhou S., Wang B. A.* Size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // *Compos. Struct.*—2014.—Vol. 108.—P. 259–266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.

20. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Градиентная модель изгиба составной балки // Экологический вестник научных центров ЧЭС.—2022.—Т. 19, № 2.—С. 6–16. DOI: 10.31429/vestnik-19-2-6-16.
21. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Modeling of thermoelastic deformation of a thin-layer «coating-substrate» system // J. Phys.: Conf. Ser.—2022.—Vol. 2317, 012012. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012012.
22. Dini A., Shariati M., Zarghami F., Amin Nematollahi M. Size dependent analysis of a functionally graded piezoelectric micro cylinder based on the strain gradient theory with the consideration of flexoelectric effect: plane strain problem // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.—2020.—Vol. 42.—P. 410–432. DOI: 10.1007/s40430-020-02497-x.
23. Zheng Y., Chu L., Dui G., Zhu X. Modeling and simulation of functionally graded flexoelectric micro-cylinders based on the mixed finite element method // Applied Physics A.—2021.—Vol. 127.—Article № 153. DOI: 10.1007/s00339-021-04316-z.
24. Chu L., Li Y., Dui G. Size-dependent electromechanical coupling in functionally graded flexoelectric nanocylinders // Acta Mech.—2019.—Vol. 230.—P. 3071–3086. DOI: 10.1007/s00707-019-02442-7.
25. Solyaev Y., Lurie S. Pure bending of the piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory // Acta Mech.—2019.—Vol. 230.—P. 4197–4211. DOI: 10.1007/s00707-019-02484-x.
26. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // Вычислительная механика сплошных сред.—2021.—Т. 14, № 3.—С. 253–264. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.

*Статья поступила 13 октября 2022 г.*

ВАТУЛЬЯН АЛЕКСАНДР ОВАНЕСОВИЧ  
Южный федеральный университет,  
заведующий кафедрой теории упругости  
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а  
Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН,  
заведующий отделом дифференц. уравнений  
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 53  
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

НЕСТЕРОВ СЕРГЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ  
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,  
старший научный сотрудник отдела дифференц. уравнений  
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 53  
E-mail: 1079@list.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>

*Vladikavkaz Mathematical Journal  
2023, Volume 25, Issue 4, P. 29–40*

## SIZE-DEPENDENT MODEL OF ELECTROELASTICITY FOR A SOLID COATED CYLINDER

Vatulyan, A. O.<sup>1,2</sup> and Nesterov, S. A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Southern Federal University,  
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;

<sup>2</sup> Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

**Abstract.** The study of the problem of gradient electroelasticity for a solid radially polarized cylinder with a coating is carried out. A constant normal mechanical load acts on the non-electrodized side surface of the coating. The electroelasticity model includes one gradient mechanical parameter. This takes into account

the effect of the strain gradient, but does not take into account the effect of the gradient of the electric field strength. In the framework of the gradient formulation, boundary conditions and conjugation conditions additional to the classical formulation are set. After eliminating the electric potential, the problem is reduced to the problem of the gradient theory of elasticity with stiffened elastic moduli. In the case of a homogeneous coating, analytical expressions are obtained for finding radial displacements and stresses. In the case of an inhomogeneous coating, the numerical solution is based on the targeting method. Calculations of the displacements, Cauchy stresses and moment stresses of both homogeneous and inhomogeneous coatings are carried out. A comparative analysis of the results obtained on the basis of classical and gradient electroelasticity models depending on the values of the scale parameter is carried out. The influence of the laws of heterogeneity of the material characteristics of the coating on the distribution of displacements has been studied. It was found that: 1) the Cauchy stresses experience a jump at the boundary between the cylinder and the coating; 2) couple stresses take a peak value on the mating surface; 3) an increase in the scale parameter reduces the values of radial displacements.

**Keywords:** solid cylinder, coating, electroelasticity gradient model, Cauchy stresses, couple stresses, total stresses, scale effects, targeting method, functionally graded material.

**AMS Subject Classification:** 74B05.

**For citation:** Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Size-Dependent Model of Electroelasticity for a Solid Coated Cylinder, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 29–40 (in Russian). DOI: 10.46698/q5632-5654-3734-n.

## References

1. Li, X.-F., Peng, X.-L. and Lee, K. Y. Radially Polarized Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinders as Sensors and Actuators, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2010, vol. 41, no. 4, pp. 704–713. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.02.003.
2. Lam, D. C., Yang, F., Chong, A., Wang, J. and Tong, P. Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, vol. 51, no. 8, pp. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.
3. Aifantis, E. C. Gradient Effects at the Macro, Micro- and Nano- Scales, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 1994, no. 5, pp. 335–353. DOI: 10.1515/JMBM.1994.5.3.355.
4. Adelman, N., Stavsky, Ye. and Segal, E. Axisymmetric Vibrations of Radially Polarized Piezoelectric Ceramic Cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, 1975, vol. 38, no. 2, pp. 245–254. DOI: 10.1016/S0022-460X(75)80008-3.
5. Parton, V. Z. and Kudryavtsev, B. A. *Electromagnetoelasticity of Piezoelectric and Electrically Conductive Bodies*, Moscow, Nauka, 1988, 472 p. (in Russian).
6. Vatulyan, A. O. and Kondratiev, V. S. Oscillations of an Inhomogeneous Piezoceramic Cylinder in the Presence of Attenuation, *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2016, vol. 78, no. 4, pp. 406–414 (in Russian). DOI: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-406-414.
7. Lomakin, E. V., Lurie, S. A., Rabinskiy, L. N. and Solyaev, Y. O. On the Refined Stress Analysis in the Applied Elasticity Problems Accounting of Gradient Effects, *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 12, pp. 482–486 (in Russian). DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591.
8. Toupin, R. A. Elastic Materials with Couple Stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945.
9. Mindlin, R. D. Micro-Structure in Linear Elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, pp. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
10. Lurie, S. A., Pham, T. and Soliaev, J. O. Gradient Model of Thermoelasticity and its Application for the Modeling of thin Layered Composite Structures, *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivii* [Journal of Composite Mechanics and Design], 2012, vol. 18, no. 3, pp. 440–449.
11. Hadjesfandiari, A. R. Size-Dependent Piezoelectricity, *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no. 18, pp. 2781–2791. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.04.020.
12. Shodja, H. M. and Ghazisaeidi, M. Effects of Couple Stress on Anti-Plane Problems of Piezoelectric Media with Inhomogeneities, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2007, vol. 26, pp. 647–658. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2006.09.001.
13. Yang, X. M., Hu, Y. T. and Yang, J. S. Electric Field Gradient Effects in Anti-Plane Problems of Polarized Ceramics, *International Journal of Solids and Structures*, 2004, vol. 41, no. 24–25, pp. 6801–6811. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.05.018.
14. Lurie, M. V. Lamé Problems in the Gradient Theory of Elasticity, *Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1968, vol. 181, no. 5, pp. 1087–1089 (in Russian).

15. Papargyri-Beskou, S. and Tsinopoulos, S. Lamé's Strain Potential Method for Plane Gradient Elasticity Problems, *Archive of Applied Mechanics*, 2015, vol. 85, no. 9–10, pp. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00419-014-0964-5.
16. Gao, X. L. and Park, S. K. Variational Formulation of a Simplified Strain Gradient Elasticity Theory and its Application to a Pressurized Thick-Walled Cylinder Problem, *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, no. 22–23, pp. 7486–7499. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022.
17. Chu, L. and Dui, G. Exact Solutions for Functionally Graded Micro-Cylinders in First Gradient Elasticity, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, vol. 48, pp. 366–373. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011.
18. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yurov, V. O. Investigation of the Stress-Strain State of a Hollow Cylinder with a Coating Based on the Gradient Model of Thermoelasticity, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 4, pp. 60–70 (in Russian). DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07.
19. Li, A., Zhou, S. and Wang, B. A. Size-Dependent Bilayered Microbeam Model Based on Strain Gradient Elasticity Theory, *Composite Structures*, 2014, vol. 108, pp. 259–266. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.020.
20. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Gradient Model of Bending of a Composite Beam, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 6–16 (in Russian). DOI: 10.31429/vestnik-19-2-6-16.
21. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Modeling of Thermoelastic Deformation of a Thin-Layer «coating-substrate» System, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2317, 012012. DOI: 10.1088/1742-6596/2317/1/012012.
22. Dini, A., Shariati, M., Zarghami, F. and Amin Nematollahi, M. Size Dependent Analysis of a Functionally Graded Piezoelectric Micro Cylinder Based on the strain Gradient Theory with the Consideration of Flexoelectric Effect: Plane Strain Problem, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, vol. 42, pp. 410–432. DOI: 10.1007/s40430-020-02497-x.
23. Zheng, Y., Chu, L., Dui, G. and Zhu, X. Modeling and Simulation of Functionally Graded Flexoelectric Micro-Cylinders Based on the Mixed Finite Element Method, *Applied Physics A*, 2021, vol. 127, no. 9–10, pp. 1399–1419. DOI: 10.1007/s00339-021-04316-z.
24. Chu, L., Li, Y. and Dui, G. Lamé's Strain Potential Method for Plane Gradient Elasticity Problems, *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 3071–3086. DOI: 10.1007/s00707-019-02442-7.
25. Solyaev, Y. and Lurie, S. Lamé's Strain Potential Method for Plane Gradient Elasticity Problems, *Acta Mechanica*, 2018, vol. 230, pp. 4197–4211. DOI: 10.1007/s00707-019-02484-x.
26. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yurov, V. O. Solution of the gradient Thermoelasticity Problem for a Cylinder with a Heat-Protected Coating, *Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 253–264 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.

*Received October 13, 2022*

ALEXANDER O. VATULYAN  
Southern Federal University,  
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,  
*Head of the Department of Theory of Elasticity;*  
Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia,  
*Head of the Department of Differential Equations*  
E-mail: aovatulyan@sfsu.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

SERGEY A. NESTEROV  
Southern Mathematical Institute VSC RAS,  
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,  
*Senior Researcher of the Department of Differential Equations*  
E-mail: 1079@list.ru  
<https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>