Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 120–134

УДК 517.956.6
DOI 10.46698/n1128-9779-9257-d

ЗАДАЧА ТРИКОМИ — НЕЙМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. К. Уринов[1]**, К. Т. Каримов**[1]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19
E-mail: urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

Аннотация. В работе исследована задача Трикоми — Неймана для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в смешанной области, состоящей из четверти цилиндра и прямоугольной призмой. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи в классе регулярных решений. При этом использован метод Фурье, основанный на разделение переменных. После разделения переменных в гиперболической части смешанной области, появляются задачи на собственные значения для одномерных и двумерных уравнений. Решая эти задачи, находим собственные функции соответствующих задач. Для решения двумерной задачи использована формула, дающая решения задачи Коши — Гурса. В результате найдены решения задач на собственных значений для трехмерного уравнения в гиперболической части. С помощью этих собственных функций и условия склеивания получена нелокальная задача в эллиптической части смешанной области. Для решения задачи в эллиптической части, она была отражена в цилиндрической системе координат, а потом путем разделения переменных получены задачи на собственные значения для двух обыкновенных дифференциальных уравнений. На основании свойства полноты систем собственных функций этих задач доказана теорема единственности. Решение исследуемой задачи построено в виде суммы двойного ряда. При обосновании равномерной сходимости построенных рядов использовались асимптотические оценки функций Бесселя действительного и мнимого аргумента. На их основе получены оценки для каждого члена ряда, что позволило доказать сходимость полученного ряда и его производных до второго порядка включительно, а также теорему существования в классе регулярных решений.

Ключевые слова: задача Трикоми — Неймана, задача Коши — Гурса, сингулярный коэффициент, функция Бесселя, гипергеометрический функция Гаусса и Гумберта.

AMS Subject Classification: 35M10, 35M12.

Образец цитирования: *Уринов А. К., Каримов К. Т.* Задача Трикоми — Неймана для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 120–134. DOI: 10.46698/n1128-9779-9257-d.

1. Введение. Постановка задачи TN

Изучение уравнений смешанного типа в силу ее прикладной важности является одной из центральных проблем теории уравнений с частными производными. Ф. И. Франкль [1] обнаружил важные приложения этих задач в газовой динамике. И. Н. Векуа [2] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в безмоментной теории оболочек.

До настоящего времени исследования краевых задач для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами проводились в основном в случае двух независимых переменных. Однако, задачи такого типа в трехмерных областях для уравнения с сингулярными коэффициентами остаются малоизученными.

Задача Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована в работе [3]. После этой работы появились ряд работ, в которых рассматрены краевые задачи для различных уравнений эллиптико-гиперболического типа в трехмерных областях (см. например [4–12]).

Пусть Ω — трехмерная область, ограниченная цилиндрической поверхностью

$$S_0 = \Big\{(x, y, z): \ x^2 + y^2 = 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z \in (0, c)\Big\},$$

прямоугольниками

$$S_1 = \Big\{(x, y, z): \ x \in (1/2, 1), \ x - y = 1, \ z \in (0, c)\Big\},$$

$$S_2 = \Big\{(x, y, z): \ x \in (0, 1/2), \ x + y = 0, \ z \in (0, c)\},$$

$$S_3 = \Big\{(x, y, z): \ x = 0, \ y \in (0, 1), \ z \in (0, c)\Big\}$$

и плоскими фигурами $S_4 = M_0 \cup I_1 \cup M_1$, $S_5 = M_2 \cup I_2 \cup M_3$, где

$$M_0 = \Big\{(x, y, z): \ x^2 + y^2 < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z = 0\Big\},$$
$$M_1 = \Big\{(x, y, z): \ -y < x < 1 + y, \ -1/2 < y < 0, \ z = 0\Big\},$$
$$M_2 = \Big\{(x, y, z): \ x^2 + y^2 < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z = c\Big\},$$
$$M_3 = \Big\{(x, y, z): \ -y < x < 1 + y, \ -1/2 < y < 0, \ z = c\Big\},$$
$$I_1 = \big\{(x, y, z): \ x \in (0, 1), \ y = 0, \ z = 0\big\}, \quad I_2 = \big\{(x, y, z): \ x \in (0, 1), \ y = 0, \ z = c\big\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + (\operatorname{sgn} y) U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x} U_x + \frac{2\beta}{|y|} U_y + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0, \tag{1}$$

где $\beta, \gamma \in R$, причем $0 < \beta < 1/2$, $-2 < \gamma < 1/2$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно, в области $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$ — эллиптическому типу, а в области $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$ — гиперболическому типу, причем $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольник $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1$ уравнение меняет свой тип.

Для уравнения (1) в области Ω сформулируем и исследуем следующую задачу:

Задача TN. Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим условиям:

$$u(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}\left(\Omega_0 \cup \Omega_1\right), \quad x^{2\beta} U_x, \ z^{2\gamma} U_z \in C\left(\bar{\Omega}\right); \tag{2}$$

$$\lim_{x \to 0} x^{2\beta} U_x(x, y, z) = 0, \ \ (0, y, z) \in S_3; \quad \frac{\partial}{\partial n} U(x, y, z) = F(x, y, z), \ \ (x, y, z) \in S_0; \tag{3}$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_4} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_5} = 0, \tag{4}$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y(x,y,z)=\lim_{y\to+0}y^{2\beta}U_y(x,y,z),\quad x\in(0,1),\ z\in(0,c),\tag{5}$$

где $\partial U/\partial n$ — производная по внешней нормали к поверхности S_0, а $F(x,y,z)$ — заданная непрерывная функция.

2. Построения собственных функций задачи TN

Сначала находим нетривиальное решение задачи TN в области Ω_1. С этой целью, разделив переменные по формуле $U(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий $U(x,y,z)|_{\bar S_2}=0$ и $U(x,y,z)|_{\bar S_4}=0$ получим следующие задачи:

$$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x-\frac{2\beta}{y}u_y-\lambda u=0,\quad (x,y)\in M_1,\tag{6}$$

$$u(x,-x)=0,\quad x\in[0,1/2];\tag{7}$$

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)+\lambda Z(z)=0,\quad z\in(0,c),\tag{8}$$

$$Z(0)=0,\tag{9}$$

где λ — константа разделения.

Перейдем к исследованию задачи (6)–(7). Предварительно построим решение задачи Коши — Гурса для уравнения (6) в области M_1.

Задача Коши — Гурса. Найти в области M_1 решение $u(x,y)$ уравнения (6), удовлетворяющее условиям (7) и $\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}(\partial/\partial y)u(x,y)=\nu(x)$, $x\in(0,1)$, где $\nu(x)$ — заданная функция.

Имеет место следующая теорема [13]:

Теорема 1. *Если $\nu(x)\in C^2(0,1)$ (причем она может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to0$, $x\to1$), то существует единственное решение задачи (6)–(7) в области M_1, которое определяется формулой*

$$u(x,y)=\chi\int\limits_0^{x+y}\nu(t)\left(r_0^2\right)^{-\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta}\Xi_2(\beta,1-\beta,1-\beta;r_1,r_2)\,dt,$$

где $\chi=2^{2\beta-1}\Gamma(\beta)/[\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$, $r_0^2=(x-t)^2-y^2$, $r_1=-r_0^2/(4xt)$, $r_2=\lambda r_0^2/4$, *а* $\Xi_2(a,b,c;x,y)$ *— гипергеометрическая функция Гумберта* [14]*:*

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_{m+k}\,m!k!}x^my^k,$$

$(a)_m=a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)=\Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ *— символ Похгаммера.*

Теперь рассмотрим задачи (8)–(9). Решением уравнения (8), удовлетворяющим условиям (9), является функция

$$Z(z)=z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\big(\sqrt{\lambda}z\big),\tag{10}$$

где $J_l(z)$ — функция Бесселя порядка l первого рода [15].

Частным решениям уравнения (1) в области Ω_1, удовлетворяющим граничному условию $U(x,y,z)|_{\bar{S}_2}=0$, является функция

$$U(x,y,z)=\chi Z(z)\int\limits_0^{x+y}\nu(t)\left(r_0^2\right)^{-\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta}\Xi_2(\beta,1-\beta,1-\beta;r_1,r_2)\,dt. \tag{11}$$

Полагая в формуле (11) $y=0$, получим

$$U(x,0,z)=\chi Z(z)\;\Gamma(1-2\beta)\,\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}[\nu(x)],\quad x\in[0,1],\ z\in[0,c], \tag{12}$$

где

$$\Gamma(1-2\beta)\,\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}[f(x)]\equiv\int\limits_0^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{2\beta}}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta}\Xi_2\left[\beta,1-\beta,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},\ \frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right]dt.$$

Таким образом, задача TN эквивалентно сведена к следующей нелокальной эллиптической задаче: найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую в области Ω_0 уравнению (1) и условиям (2), (3), (12), $U(x,y,z)|_{\bar{S}_4}=0$ и $U(x,y,z)|_{\bar{S}_5}=0$.

Для нахождения решения этой задачи переходим в цилиндрические координаты $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. При этом область Ω_0 переходит в параллелепипед $\Delta=\{(\rho,\varphi,z):\ \rho\in(0,1),\ \varphi\in(0,\pi/2),\ 0<z<c\}$, а уравнение (1) и условия (2), (3), (12), $U(x,y,z)|_{\bar{S}_4}=0$ и $U(x,y,z)|_{\bar{S}_5}=0$ принимают вид

$$V(\rho,\varphi,z)\in C\left(\bar{\Delta}\right)\cap C_{\rho,\varphi,z}^{2,2,2}(\Delta),\quad (\sin 2\varphi)^{2\beta}V_\varphi,z^{2\gamma}V_z\in C\left(\bar{\Delta}\right); \tag{13}$$

$$V_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho^2}V_{\varphi\varphi}+\frac{1+4\beta}{\rho}V_\rho+\frac{4\beta\operatorname{ctg}2\varphi}{\rho^2}V_\varphi+V_{zz}+\frac{2\gamma}{z}V_z=0,\quad (\rho,\varphi,z)\in\Delta; \tag{14}$$

$$|V(0,\varphi,z)|<+\infty,\quad V_\rho(1,\varphi,z)=f(\varphi,z),\quad \varphi\in(0,\pi/2),\ z\in(0,c); \tag{15}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}(\cos\varphi)^{2\beta}V_\varphi(\rho,\varphi,z)=0,\quad \rho\in(0,1),\ z\in(0,c); \tag{16}$$

$$V(\rho,0,z)=\chi\Gamma(1-2\beta)\,\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[\rho^{2\beta-1}\lim_{\varphi\to0}(\sin\varphi)^{2\beta}V_\varphi(\rho,\varphi,z)\right]; \tag{17}$$

$$V(\rho,\varphi,0)=0,\quad V(\rho,\varphi,c)=0,\quad \rho\in[0,1],\ \varphi\in[0,\pi/2], \tag{18}$$

где $U(x,y,z)=V(\rho,\varphi,z)$, $f(\varphi,z)=F(\cos\varphi,\sin\varphi,z)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$.

Если разделим переменные по формуле $V(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\,S(\varphi)\,Z(z)$, из уравнения (14) и условий (15)–(18) получим задачи:

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)+\lambda Z(z)=0,\quad z\in(0,c),\ \ Z(0)=0,\ \ Z(c)=0, \tag{19}$$

$$\rho^2R''(\rho)+(1+4\beta)\,\rho R'(\rho)-\left[\lambda\rho^2+\mu\right]R(\rho)=0,\quad \rho\in(0,1), \tag{20}$$

$$|R(0)|<+\infty, \tag{21}$$

$$S''(\varphi)+4\beta\operatorname{ctg}(2\varphi)\,S'(\varphi)+\mu S(\varphi)=0,\quad \varphi\in(0,\pi/2), \tag{22}$$

$$R(x)\,S(0)=\chi\Gamma(1-2\beta)\,\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left\{x^{2\beta-1}R(x)\lim_{\varphi\to0}\left[S'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right]\right\}, \tag{23}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\left[S'(\varphi)(\cos\varphi)^{2\beta}\right]=0, \tag{24}$$

где μ — константа разделения.

Исследуем задачи (19). Известно, что решение уравнения из (19), удовлетворяющее условию $Z(0)=0$, существует и оно определяется равенством (10). Подставляя (10) в условие $Z(c)=0$ и считая $c_1\neq 0$, получим

$$J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}c\right)=0. \tag{25}$$

Известно, что при $l>-1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [15]. Так как $1/2-\gamma>0$, то уравнение (25) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_m m-ый положительный корень уравнения (25), получим значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (19), т. е. собственные значения задачи (19) $\lambda_m=(\sigma_m/c)^2$, $m\in N$.

Полагая в (10) $\lambda=\lambda_m$, $m\in N$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи (19). Нормируя эту систему функций, имеем

$$Z_m(z)=\frac{\sqrt{2}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)}{\left|cJ_{3/2-\gamma}(\sigma_m)\right|},\quad m\in N. \tag{26}$$

Согласно теории бесселевых функций [15], система собственных функций (26) ортонормальна и полна в пространстве $L_2(0,c)$ с весом $z^{2\gamma}$.

Теперь исследуем задачи (20)–(21). Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$R_m(\rho)=c_3\rho^{-2\beta}I_\omega(\sigma_m\rho/c)+c_4\rho^{-2\beta}K_\omega(\sigma_m\rho/c), \tag{27}$$

здесь $I_l(z)$ и $K_l(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка l [15] соответственно, $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}$, а c_3 и c_4 — произвольные постоянные.

Из (27) следует, что решение уравнения (20), удовлетворяющее условию (21), существует при $\operatorname{Re}\omega\geqslant 2\beta$, и оно определяется равенством

$$R_m(\rho)=c_3\rho^{-2\beta}I_\omega(\sigma_m\rho/c). \tag{28}$$

Имеет место следующая лемма [16].

Лемма 1. *Если* $0<\beta<1/2$, $\operatorname{Re}\omega\geqslant 2\beta$, *то справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\int\limits_0^x(x-t)^{-2\beta}t^{\beta-1}I_\omega(\sigma_m t)\,\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta,-\frac{(x-t)^2}{4xt},\frac{(\sigma_m/c)^2}{4}(x-t)^2\right)dt\\ =\left[2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(1-2\beta)\,/\Gamma(1-\beta+\omega/2)\right]x^{-\beta}I_\omega(\sigma_m x),\quad m\in N.\end{gathered} \tag{29}$$

Теперь исследуем задачу (22)–(24). Подставляя функцию (28) в равенство (23) и вычисляя полученный интеграл по формуле (29), получим

$$S(0)=\chi 2^{2\beta-1}\frac{\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta+\omega/2)}\lim_{\varphi\to 0}\left[S'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right]. \tag{30}$$

В итоге, относительно функции $S(\varphi)$, имеем задачу на собственные значения (22), (24), (30). Решим эту задачу. Произведя замену $t=\sin^2\varphi$ в уравнении (22), получим гипергеометрическое уравнение

$$t(1-t)\,\tilde{S}''(t)+[(\beta+1/2)-(1+2\beta)\,t]\,\tilde{S}'(t)+(\mu/4)\,\tilde{S}(t)=0,$$

где $\tilde{S}(t)=S\left(\arcsin\sqrt{t}\right)$.

Пользуясь общим решением этого уравнения, находим общее решение уравнения (22) в виде

$$\begin{gathered} S(\varphi) = c_5 F\left(\beta+\omega/2, \beta-\omega/2, \beta+1/2; \sin^2\varphi\right) \\ + c_6 (\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\omega)/2, (1-\omega)/2, 3/2-\beta; \sin^2\varphi\right], \end{gathered} \tag{31}$$

где c_5 и c_6 — произвольные постоянные.

Из (31), найдем

$$S(0) = c_5, \quad \lim_{\varphi\to 0}\left[S'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right] = (1-2\beta)\, c_6. \tag{32}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\left[S'(\varphi)(\cos\varphi)^{2\beta}\right] = \frac{2c_5\Gamma^2(\beta+1/2)}{\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(\beta-\omega/2)} + \frac{2c_6\Gamma(-\beta+3/2)\,\Gamma(\beta+1/2)}{\Gamma[(1-\omega)/2]\,\Gamma[(1+\omega)/2]}. \tag{33}$$

Подставляя (32) и (33) в граничные условия (24) и (30), имеем однородную систему уравнений относительно c_5 и c_6 :

$$\begin{cases} c_5 - 4^{2\beta-1}\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(2-2\beta)\left\{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(2\beta)\,\Gamma(1-\beta+\omega/2)\right\}^{-1} c_6 = 0, \\ \Gamma^2(\beta+1/2)\left\{\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(\beta-\omega/2)\right\}^{-1} c_5 \\ \qquad +\Gamma(3/2-\beta)\,\Gamma(1/2+\beta)\left\{\Gamma[(1-\omega)/2]\,[(1+\omega)/2]\right\}^{-1} c_6 = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Так как мы ищем функцию $S(\varphi)\neq 0$, то в формуле (31) должен быть $c_5^2+c_6^2\neq 0$ и, поэтому, система (34) должна иметь нетривиальное решение. Поэтому основной определитель системы равен нулю. Составляя основной определитель системы (34) и приравнивая ее к нулю, а затем, используя формулу $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\sin(z\pi)$, $z\notin Z$, имеем тригонометрическое уравнение относительно ω : $\sin[\pi(\beta+1/2-\omega)/2] = 0$.

Известно, что последнее уравнение имеет только вещественные корни. Выписывая его решения и принимая во внимание условие $\omega\geqslant 2\beta$, имеем

$$\omega_n = 2n+\beta-3/2, \quad n\in N. \tag{35}$$

Следовательно, $\mu=\mu_n=\omega_n^2-4\beta^2$, $n\in N$, где ω_n, $n\in N$, — числа, определяемые равенством (35), являются собственными значениями задачи (22), (24), (30).

Из системы (34) при $\omega=\omega_n$, $n\in N$, находим

$$c_6 = [\Gamma(1-\beta+\omega_n/2)\,\Gamma(1/2+\beta)]\,/\,[\Gamma(\beta+\omega_n/2)\,\Gamma(3/2-\beta)]\, c_5. \tag{36}$$

Полагая в (31) $\omega=\omega_n$, $c_5=d_n$, $n\in N$, где $d_n\neq 0$ — произвольные постоянные, и учитывая (36), получим собственные функции задачи (22), (24), (30), соответствующим собственным значениям μ_n:

$$\begin{gathered} S_n(\varphi) = d_n\Big\{F\left(\beta+\omega_n/2,\ \beta-\omega_n/2,\ \beta+1/2; \sin^2\varphi\right) \\ + l_n(\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\omega_n)/2,\ (1-\omega_n)/2,\ 3/2-\beta; \sin^2\varphi\right]\Big\}, \quad n\in N, \end{gathered} \tag{37}$$

где $l_n = [\Gamma(1-\beta+\omega_n/2)\,\Gamma(1/2+\beta)]\,/\,[\Gamma(\beta+\omega_n/2)\,\Gamma(3/2-\beta)]$.

Перепишем формулу (37) в другом виде. Применяя [14, с. 144, формулы (6), (7); с. 148, формулы (8)], получим

$$F\left(\beta+\frac{\omega_n}{2},\ \beta-\frac{\omega_n}{2},\ \beta+\frac{1}{2}; \sin^2\varphi\right) = \frac{\Gamma(\beta+1/2)}{2^{1/2-\beta}}(\sin 2\varphi)^{1/2-\beta}\,\mathrm{P}^{1/2-\beta}_{(\omega_n-1)/2}(\cos 2\varphi), \tag{38}$$

$$\begin{gathered} l_n (\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\omega_n)/2, (1-\omega_n)/2, (3/2)-\beta; \sin^2\varphi\right] \\ = 2^{\beta-1/2} \frac{\Gamma(\beta+1/2)\,\Gamma(1-\beta+\omega_n/2)}{\Gamma(\beta+\omega_n/2)} (\sin 2\varphi)^{1/2-\beta}\, \mathrm{P}^{\beta-1/2}_{(\omega_n-1)/2} (\cos 2\varphi)\,, \end{gathered} \tag{39}$$

где $P_a^b(x)$ — функция Лежандра.

Подставляя (38) и (39) в (37), имеем

$$\begin{gathered} S_n(\varphi) = d_n 2^{\beta-1/2} \Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right) (\sin 2\varphi)^{1/2-\beta} \\ \times\left\{ \mathrm{P}^{1/2-\beta}_{(\omega_n-1)/2} (\cos 2\varphi) + \frac{\Gamma(1-\beta+\omega_n/2)}{\Gamma(\beta+\omega_n/2)} \mathrm{P}^{\beta-1/2}_{(\omega_n-1)/2} (\cos 2\varphi) \right\}. \end{gathered} \tag{40}$$

Применяя [14, с. 145, формулы (17) и (14)] к функциям (40), получим

$$\begin{gathered} S_n(\varphi) = d_n 2^{\beta-1/2} \Gamma(\beta+1/2) (\sin 2\varphi)^{1/2-\beta} \\ \times\left\{ \left[1+\sin(\beta\pi)+\cos(\beta\pi)\operatorname{ctg}\left(\beta\pi-\frac{\omega_n\pi}{2}\right)\right] \mathrm{P}^{1/2-\beta}_{(\omega_n-1)/2} (\cos 2\varphi) \right. \\ \left. -\frac{\cos\beta\pi}{\sin\left[\beta\pi-(\omega_n\pi)/2\right]} \mathrm{P}^{1/2-\beta}_{(\omega_n-1)/2} (-\cos 2\varphi) \right\}, \quad \varphi\in[0,\pi/2]\,. \end{gathered}$$

Учитывая (35), нетрудно заметить, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Таким образом, функцию $S_n(\varphi)$ с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$S_n(\varphi) = (\sin\theta)^{1/2-\beta}\, \mathrm{P}^{1/2-\beta}_{(\omega_n-1)/2} (\cos\theta)\,, \quad \theta = \pi-2\varphi \in [0,\pi]\,. \tag{41}$$

Из леммы 3 [17] на основании теоремы 2 из [18] при $\beta\in(0,1/2)$ следует, что система собственных функций (41) полна в пространстве $L_2(0,\pi/2)$.

Теперь, полагая в (28) $\omega=\omega_n$, имеем

$$R_{nm}(\rho) = c_{3nm}\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m\rho/c)\,. \tag{42}$$

Следовательно, эллиптическая задача (13)–(18) имеет нетривиальные решения вида

$$V_{nm}(\rho,\varphi,z) = R_{nm}(\rho)\, S_n(\varphi)\, Z_m(z)\,,$$

где $R_{nm}(\rho)$, $S_n(\varphi)$, $Z_m(z)$ — функции, определяемые равенствами (42), (41), (26) соответственно.

3. Единственность решения задачи TN

Пусть $V(\rho,\varphi,z)$ — решение задачи TN. С помощью $V(\rho,\varphi,z)$ и собственных функций (26), (41) составим следующую функцию:

$$\vartheta_{nm}(\rho) = \int\limits_0^c \int\limits_0^{\pi/2} V(\rho,\varphi,z)\,(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi)\, z^{2\gamma} Z_m(z)\, d\varphi\, dz, \quad n,m\in N. \tag{43}$$

Как в работах [9, 12], можно доказать, что функция (43) удовлетворяет дифференциальному уравнению (20) при $\lambda=\lambda_m$ и $\mu=\mu_n$.

Кроме того, в силу граничных условий (15), из (43) следует, что функция $\vartheta_{nm}(\rho)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$|\vartheta_{nm}(0)| < +\infty, \quad \vartheta_{nm\rho}(1) = f_{nm}, \tag{44}$$

где $f_{nm} = \int_0^c \int_0^{\pi/2} f(\varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi)\, z^{2\gamma} Z_m(z)\, d\varphi\, dz$.

Отсюда следует, что функция $\vartheta_{nm}(\rho)$, определенная равенством (43), является решением уравнения (20) при $\lambda = \lambda_m$ и $\mu = \mu_n$, удовлетворяющее условиям (44). Поэтому удовлетворяя функцию (27) при $\lambda = \lambda_m$ и $\mu = \mu_n$ условиям (44), однозначно находим функцию $\vartheta_{nm}(\rho)$:

$$\vartheta_{nm}(\rho) = \frac{\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c)\, f_{nm}}{\left[(\omega_n - 2\beta)\, I_{\omega_n}(\sigma_m/c) + (\sigma_m/c)\, I_{\omega_n+1}(\sigma_m/c)\right]}, \quad \rho \in [0, 1]. \tag{45}$$

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если существует решение задачи TN, то оно единственно.*

$\lhd$ Для этого достаточно доказать, что однородная задача TN имеет только тривиальные решения. Пусть $f(\varphi, z) \equiv 0$, тогда $f_{nm} = 0$ при всех $n, m \in N$. На основании этого, из (45) и (43) следует, что

$$\int\limits_0^c \int\limits_0^{\pi/2} V(\rho, \varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi)\, z^{2\gamma} Z_m(z)\, d\varphi\, dz = 0.$$

Отсюда, в силу полноты системы собственных функций (26) в пространстве $L_2(0, c)$ с весом $z^{2\gamma}$, следует, что $\int_0^{\pi/2} V(\rho, \varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi)\, d\varphi = 0$. Если учесть полноту системы собственных функций (41) в пространстве $L_2(0, \pi/2)$, из последнего равенства вытекает, что $V(\rho, \varphi, z) \equiv 0$ для всех $\rho \in [0, 1]$ и при любом $\varphi \in [0, \pi/2]$, $z \in [0, c]$.

Итак, доказано, что если $F(x, y, z) = f(\varphi, z) \equiv 0$, то $U(x, y, z) = V(\rho, \varphi, z) \equiv 0$ в области Ω_0. В силу $\lim_{y\to+0} y^{2\beta} U_y(x, y, z) = 0$ и условия склеивания (5) имеем $\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta} u_y(x, y)\, Z(z) = \nu(x)\, Z(z) = 0$ или, принимая во внимание $z \in (0, c)$, получим $\nu(x) = 0$. В силу этого, из формулы (11) следует $U(x, y, z) \equiv 0$ в Ω_1. $\rhd$

4. Построение и обоснование решения задачи TN

Теорема 3. *Пусть* $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-2, 1/2)$ *и выполнены следующие условия:*

a) функции $f(\varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta-1}$ *и* $\sin 2\varphi\,(\partial/\partial\varphi)\left[f(\varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta-1}\right]$ *обращаются в нуль при* $\varphi \to 0$ *и* $\varphi \to \pi/2$ *равномерно по* z;

b) функции $f(\varphi, z)$ *и* $B^z_{\gamma-1/2} f(\varphi, z)$ *обращаются в нуль при* $z \to 0$ *и* $z \to c$ *равномерно по* φ;

c) $z^{2\gamma}(\partial/\partial z) f(\varphi, z)$, $z^{2\gamma}(\partial/\partial z) B^z_{\gamma-1/2} f(\varphi, z) \in C(\bar{\Pi})$;

d)

$$\frac{\partial}{\partial z} z^{2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} B^z_{\gamma-1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\frac{\partial\left[f(\varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta-1}\right]}{(\sin 2\varphi)\partial\varphi} \right] \right\} \in L(\bar{\Pi}),$$

где $\Pi = \{(\varphi, z) : \varphi \in (0, \pi/2),\ z \in (0, c)\}$.

Тогда решение задачи (13)–(18) в области Δ существует и определяется формулой

$$V(\rho,\varphi,z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_n(\varphi)\,\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho)\,z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)}{\left[cJ_{3/2-\gamma}(\sigma_m)\right]^2}, \tag{46}$$

где $S_n(\varphi)$ определяется формулой (41),

$$\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho) = \frac{\rho^{-2\beta}I_{\omega_n}(\sigma_m\rho/c)\,F_{nm}}{\left[(\omega_n-2\beta)\,I_{\omega_n}(\sigma_m/c)+(\sigma_m/c)\,I_{\omega_n+1}(\sigma_m/c)\right]}, \tag{47}$$

$$F_{nm} = \int_0^c\int_0^{\pi/2} f(\varphi,z)\,(\sin 2\varphi)^{2\beta}\,S_n(\varphi)\,z^{1/2+\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\,d\varphi\,dz. \tag{48}$$

Прежде чем переходит к доказательству этой теоремы, докажем некоторые леммы.

Лемма 2. *Если $\gamma\in(-2,1/2)$, то относительно функций $z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)$, при $z\in[0,c]$ и достаточно больших m, справедливы следующие оценки:*

$$\left|z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right| \leqslant \begin{cases} c_7(\sigma_m)^{-1/2+\gamma}, & \gamma\in[0,1/2),\\ c_8(\sigma_m)^{-1/2}, & \gamma\in(-2,0),\end{cases} \tag{49}$$

$$\left|z^{2\gamma}(d/dz)\left[z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right]\right| \leqslant \begin{cases} c_9(\sigma_m)^{1/2}, & \gamma\in[0,1/2),\\ c_{10}(\sigma_m)^{1/2-\gamma}, & \gamma\in(-2,0),\end{cases} \tag{50}$$

$$\left|B^z_{\gamma-1/2}\left[z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right]\right| \leqslant \begin{cases} c_{11}(\sigma_m)^{3/2+\gamma}, & \gamma\in[0,1/2),\\ c_{12}(\sigma_m)^{3/2}, & \gamma\in(-2,0),\end{cases} \tag{51}$$

где c_j, $j=7,\dots,12$, — положительные постоянные.

$\lhd$ Пусть $\gamma\in[0,1/2)$. Тогда функции $z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)$ можно переписать в виде

$$z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c) = (\sigma_m/c)^{\gamma-1/2}\,\xi^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\xi), \tag{52}$$

где $\xi=\sigma_m z/c$. Функция $\xi^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\xi)$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и равно нулю при $\xi=0$. Кроме того, в силу асимптотической формулы функции Бесселя при $\xi\to\infty$

$$J_\nu(\xi)\approx\left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2}\cos\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \tag{53}$$

справедливо равенство $\lim_{\xi\to\infty}\xi^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\xi)=0$. Следовательно, функция $\left|\xi^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\xi)\right|$ ограничена при $\xi\in[0,+\infty)$, т. е. $\left|\xi^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\xi)\right|\leqslant\tilde{c}_7$, где $\tilde{c}_7=\mathrm{const}>0$. Если учесть это, то из (52) следует первая оценка из (49). Если $\gamma<0$, то функцию $z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)$ перепишем в виде

$$z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c) = z^{-\gamma}\,(\sigma_m/c)^{-1/2}\,\xi^{1/2}J_{1/2-\gamma}(\xi),$$

где $\xi=\sigma_m z/c$. Рассуждая как и выше, находим, что $\left|\xi^{1/2}J_{1/2-\gamma}(\xi)\right|\leqslant\tilde{c}_8=\mathrm{const}$ при $\xi\in[0,+\infty)$. Учитывая это и неравенство $|\sqrt{c}z^{-\gamma}|<c^{1/2-\gamma}$, которое верно при $z\in[0,c]$, из последнего равенства получим вторую оценку из (49).

Теперь рассмотрим функцию

$$z^{2\gamma}(d/dz)\left[z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right]=(\sigma_m/c)z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\sigma_m z/c).$$

При $\gamma\in[0,1/2)$ эту функцию перепишем в виде

$$z^{2\gamma}(d/dz)\left[z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right]=(\sigma_m/c)^{1/2-\gamma}\,\xi^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\xi)\,, \tag{54}$$

где $\xi=\sigma_m z/c$. Функция $\xi^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\xi)$ в точке $\xi=0$ ограничена и при $\xi\in[0,+\infty)$ непрерывна. Кроме того, в силу (53) для достаточно больших ξ справедлива оценка $\left|\xi^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\xi)\right|<\xi^{\gamma}\tilde{c}_9$, где $\tilde{c}_9=\mathrm{const}>0$. Если учесть эти свойства функции $\xi^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\xi)$, то из (54) следует, что для достаточно больших ξ справедливо неравенство $\left|z^{2\gamma}(d/dz)\left[z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right]\right|\leqslant\tilde{c}_9\,(\sigma_m/c)^{1/2-\gamma}\,\xi^{\gamma}=\tilde{c}_9\,(\sigma_m/c)^{1/2}\,z^{\gamma}\leqslant c_9\,(\sigma_m)^{1/2}$, т. е. справедлива первая оценка из (50). Если $\gamma<0$, то в силу $(-1/2-\gamma)>-1/2$ для любого $\xi\in[0,+\infty)$ имеет место неравенство [15] $\left|\xi^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\xi)\right|\leqslant\tilde{c}_{10}=\mathrm{const}$. Если учесть это, то из (54) сразу следует, вторая оценка из (50).

Известно, что функция $z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)$ удовлетворяет уравнению (8) при $\lambda=\lambda_m$. Отсюда следует, что

$$B^{z}_{\gamma-1/2}\left[z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right]=-\,(\sigma_m/c)^2\,z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\,.$$

Тогда, в силу оценки (49), справедливы оценки (51). $\rhd$

Лемма 3. *Для достаточно больших $m\in N$ справедлива оценка*

$$J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_m)\geqslant\frac{c_{13}}{\sigma_m}, \tag{55}$$

где c_{13} — положительная постоянная.

$\lhd$ Так как σ_m — нули функции $J_{1/2-\gamma}(x)$, то справедливо равенство

$$\int\limits_0^c zJ^2_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\,dz=\frac{c^2}{2}J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_m).$$

Из последнего следует, что

$$J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_m)=\frac{2}{a^2}\int\limits_0^c zJ^2_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\,dx=\frac{2}{(\sigma_m)^2}\int\limits_0^{\sigma_m}\xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\,d\xi. \tag{56}$$

В силу асимптотической формулы (53) существует некоторое достаточно большое число $c_0>0$, такое, что при $\xi>c_0$ справедливо равенство $\xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\approx\frac{2}{\pi}\sin^2\left(\xi+\frac{\gamma\pi}{2}\right)$. Тогда если предположим, что σ_m достаточно большое число и $\sigma_m>2\,(c_0+1)$, то

$$\int\limits_0^{\sigma_m}\xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\,d\xi>\int\limits_{c_0}^{\sigma_m}\xi J^2_{1/2-\gamma}(\xi)\,d\xi\approx\frac{2}{\pi}\int\limits_{c_0}^{\sigma_m}\sin^2\left(\xi+\frac{\gamma\pi}{2}\right)d\xi$$
$$=\frac{1}{\pi}\sigma_m-\frac{1}{\pi}\big[c_0+\cos(\sigma_m+c_0+\gamma\pi)\sin(\sigma_m-c_0)\big]\geqslant\frac{1}{2\pi}\,\sigma_m.$$

Если учесть это, то из (56), следует оценка (55). $\rhd$

Лемма 4. *При любых $n, m \in N$ для функций $\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho)$, определенных равенством* (47), *справедливы оценки*

$$\left|\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho)\right| \leqslant c_{14}\left|F_{nm}\right|, \quad \rho \in [0,1], \tag{57}$$

$$\left|B_{2\beta}^{\rho}\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho)\right| \leqslant c_{14}\left(\sigma_m\right)^2\left|F_{nm}\right|, \quad \rho \in (0,1), \tag{58}$$

где c_{14} — положительная постоянная.

◁ Принимая во внимание $\omega_n - 2\beta > 0$, нетрудно убедится, что $\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m\rho/c)$ — возрастающая функция и имеет свой максимум в точке $\rho = 1$. Из этой рассуждений следует оценка (57).

Кроме того, как было показано ранее, функция $\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho)$, определенная равенством (45), удовлетворяет дифференциальному уравнению (20) при $\lambda = \lambda_m$ и $\mu = \mu_n$. Поэтому имеют место равенства

$$B_{2\beta}^{\rho}\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho) = \left(\lambda_m + \mu_n/\rho^2\right)\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho)$$
$$= \left(\frac{\sigma_m}{c}\right)^2\tilde{\vartheta}_{nm}(\rho) + \frac{\left(\omega_n^2 - 4\beta^2\right)(\omega_n+1)\,\rho^{\omega_n-2-2\beta}\bar{I}_{\omega_n}(\sigma_m\rho/c)}{(\omega_n-2\beta)(\omega_n+1)\,\bar{I}_{\omega_n}(\sigma_m/c) + (\sigma_m/c)^2\,\bar{I}_{\omega_n+1}(\sigma_m/c)/2}, \tag{59}$$

где $\bar{I}_\nu(\xi) = \Gamma(\nu+1)(\xi/2)^{-\nu} I_\nu(\xi)$.

Известно, что $\bar{I}_{\omega_n}(\sigma_m\rho/c)$ — возрастающая функция. Учитывая $\rho \in (0,1)$ и применяя правило Лопиталя, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\omega_n^2 - 4\beta^2\right)(\omega_n+1)\,\rho^{\omega_n-2-2\beta}\right] = 0,$$

следовательно, для достаточно больших n справедлива оценка

$$\left(\omega_n^2 - 4\beta^2\right)(\omega_n+1)\,\rho^{\omega_n-2-2\beta} < c_{15}, \quad c_{15} = \mathrm{const} > 0.$$

Принимая во внимание это и оценки (57), из (59) получим оценку (58). ▷

Лемма 5. *При любых $n \in N$ для функций $S_n(\varphi)$, определенных равенством* (41), *справедливы оценки*

$$\left|S_n(\varphi)\right| \leqslant c_{16}, \quad \left|(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n'(\varphi)\right| \leqslant \mu_n c_{17}, \quad \varphi \in [0, \pi/2], \tag{60}$$

$$\left|(\sin 2\varphi)^{-2\beta}\left[(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n'(\varphi)\right]'\right| \leqslant \mu_n c_{16}, \quad \varphi \in (0, \pi/2). \tag{61}$$

◁ Функция (41) через функции Гаусса запишем в виде

$$S_n(\varphi) = 2^{1/2-\beta}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\beta\right) F\left(\beta + \frac{\omega_n}{2}, \beta - \frac{\omega_n}{2}; \frac{1}{2}+\beta; \cos^2\varphi\right), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{62}$$

Известно [19, с. 362], что функция $F(a,b,c;z)$ будет ограничена, если выполнено одно из следующих условий: *a*) $|z| < 1$; *b*) $|z| = 1$, $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$. Если учесть это, то из (62) следует первая оценка (60). Вычисляя производную из (62), имеем

$$(\sin 2\varphi)^{2\beta} S_n'(\varphi) = \frac{2^{\beta-1/2}\mu_n}{\Gamma(3/2+\beta)}(\cos\varphi)^{1+2\beta} F\left(\frac{1-\omega_n}{2}, \frac{1+\omega_n}{2}; \frac{3}{2}+\beta; \cos^2\varphi\right). \tag{63}$$

Из (63) легко следует вторая оценка из (60).

Функция $S_n(\varphi)$, определенная равенством (62), удовлетворяет дифференциальному уравнению (22) при $\mu = \mu_n$. Поэтому имеет место равенство $S''(\varphi) + 4\beta \operatorname{ctg} 2\varphi \, S'(\varphi) = -\mu_n S(\varphi)$. Отсюда, в силу первой оценки (60), сразу следует справедливость оценки (61). $\triangleright$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда, для коэффициентов* F_{nm}, *определенных равенствами* (48), *справедливы следующие оценки:*

$$|F_{nm}| \leqslant \begin{cases} c_{18}\left[\mu_n - 4(1-2\beta)\right]^{-1}\left[\mu_n - 16(1-\beta)\right]^{-1}(\sigma_m)^{\gamma-4,5}, & \gamma \in [0, 1/2), \\ c_{19}\left[\mu_n - 4(1-2\beta)\right]^{-1}\left[\mu_n - 16(1-\beta)\right]^{-1}(\sigma_m)^{-4,5}, & \gamma \in (-2, 0), \end{cases} \tag{64}$$

где c_{18}, c_{19} *— некоторые положительные постоянные.*

$\triangleleft$ Коэффициенты F_{nm}, которые задаются формулой (48), представим в виде

$$F_{nm} = \frac{2^{3/2-\beta}(1-2\beta)}{\Gamma(3/2+\beta)\left[\mu_n - 4(1-2\beta)\right]\sigma_m} \int_0^c \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dz}\left[z^{1/2+\gamma} J_{-1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\right] \\ \times \frac{f(\varphi, z)}{(\sin 2\varphi)^{1-2\beta}} \frac{d}{d\varphi}\Big[F\Big((1-\omega_n)/2, (1+\omega_n)/2; 3/2+\beta; \cos^2\varphi\Big)\Big] d\varphi \, dz. \tag{65}$$

Применяя правило интегрирования по частям по переменной φ два раза, а по переменной z четыре раза к интегралу (65) и учитывая часть a), b) и c) условий теоремы 2, получим

$$f_{nm} = \frac{2^{5/2-\beta}(1-2\beta)(3-2\beta)\,c^4}{\Gamma(1/2+\beta)\left[\mu_n - 4(1-2\beta)\right]\left[\mu_n - 16(1-\beta)\right](\sigma_m)^4} \\ \times \int_0^c \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial z} z^{2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} B^z_{\gamma-1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial\left[f(\varphi, z)(\sin 2\varphi)^{2\beta-1}\right]}{(\sin 2\varphi)\partial\varphi}\right]\right\} z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c) \\ \times F\left(\beta + \frac{\omega_n}{2} - 2, \beta - \frac{\omega_n}{2} - 2; \beta - \frac{3}{2}; \cos^2\varphi\right) d\varphi \, dz.$$

Отсюда, принимая во внимание ограниченность функции $F\left(\beta + \frac{\omega_n}{2} - 2, \beta - \frac{\omega_n}{2} - 2; \beta - \frac{3}{2}; \cos^2\varphi\right)$ и оценки (49), а также часть d) теоремы 2, получим оценки (64). $\triangleright$

В силу доказанных выше лемм можно доказать равномерную сходимость ряда (46) и рядов $(\sin 2\varphi)^{2\beta} V_\varphi$, $z^{2\gamma} V_z$ в $\bar{\Delta}$, а также рядов $B^\rho_{2\beta} V$, $V_{\varphi\varphi} + 4\beta \operatorname{ctg} 2\varphi V_\varphi$, $B^z_{\gamma-1/2} V$ в любом компакте $K \subset \Delta$. Теорема 3 доказана.

Из равенства (46) в силу условия склеивания (5) находим $\lim_{y\to+0} y^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y\to-0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = \nu(x) Z(z)$. Затем, подставляя это в формулу (11), находим решение задачи TN в области Ω_1. Этим завершено исследование задачи TN.

Литература

1. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике.—М.: Наука, 1973.—712 с.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитический функции.—М.: ГИФМЛ, 1959.—628 с.
3. *Бицадзе А. В.* Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сиб. мат. журн.—1962.—Т. 3, № 5.—С. 642–644.
4. *Ежов А. М., Пулькин С. П.* Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР.—1970.—Т. 193, № 5.—С. 978–980.

5. *Нахушев А. М.* Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения.—1968.—Т. 4, № 1.—С. 52–62.
6. *Пономарев С. М.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 246, № 6.—С. 1303–1306.
7. *Салахиддинов М. С., Исломов Б.* Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в пространстве // Узб. мат. журн.—1993.—№ 3.—С. 13–20.
8. *Уринов А. К., Каримов К. Т.* Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // Вестн. НУУз. Ташкент.—2016.—№ 2/1.—С. 14–25.
9. *Уринов А. К., Каримов К. Т.* Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2017.—Т. 21, №4.—С. 665–683. DOI: 10.14498/vsgtu1559.
10. *Назипов И. Т.* Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем.—2011.—№ 3.—С. 69–85.
11. *Сабитов К. Б., Карамова А. А.* Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Изв. РАН. Сер. матем.—2001.—Т. 65, № 4.—С. 133–150. DOI: 10.4213/im351.
12. *Каримов К. Т.* Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2020.—Т. 30, № 1.—С. 31–48. DOI: 10.35634/vm200103.
13. *Капилевич М. Б.* Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференц. уравнения.—1968.—Т. 4, № 8.—С. 1465–1486.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра.—М.: Наука, 1973.—296 с.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.—798 с.
16. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа.—Ташкент: Изд-во Mumtoz So'z, 2010.—355 с.
17. *Мамедов Я. Н.* К задаче на собственные значения для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1993.—Т. 29, № 1.—С. 95–103.
18. *Моисеев Е. И.* О базисности синусов и косинусов // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 275, № 4.—С. 794–798.
19. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи.—М.: Наука, 1997.—204 с.
20. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. 2-е изд., исправ.—М.: Физматлит, 2003.—688 с.

Статья поступила 18 августа 2022 г.

Уринов Ахмаджон Кушакович
Ферганский государственный университет,
профессор кафедры матем. анализа и дифференц. уравнений
УЗБЕКИСТАН, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19
E-mail: `urinovak@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-9586-1799

Каримов Камолиддин Туйчибоевич
Ферганский государственный университет,
доцент кафедры матем. анализа и дифференц. уравнений
УЗБЕКИСТАН, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19
E-mail: `karimovk80@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-9098-4116

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 120–134

THE TRICOMI-NEYMANN PROBLEM FOR A THREE-DIMENSIONAL MIXED-TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Urinov, A. K.[1] and Karimov, K. T.[1]

[1] Ferghana State University,
19 Murabbiylar St., Ferghana 150100, Uzbekistan
E-mail: urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the Tricomi-Neumann problem for a three-dimensional mixed-type equation with three singular coefficients in a mixed domain, for which the elliptic part consists of a quarter of a cylinder, and the hyperbolic part of a rectangular prism. The unique solvability of the formulated problem in the class of regular solutions is proved. In this case, the Fourier method based on the separation of variables was used. After the separation of variables in the hyperbolic part of the mixed domain, eigenvalue problems for one-dimensional and two-dimensional equations appear. By solving these problems, the eigenfunctions of the corresponding problems are found. To solve the two-dimensional problem, the formula that gives the solution to the Cauchy–Goursat problem is used. As a result, solutions of eigenvalue problems for the three-dimensional equation in the hyperbolic part are found. With the help of these eigenfunctions and the gluing condition, a non-local problem appears in the elliptic part of the mixed domain. To solve the problem in the elliptic part, the problem was reflected in the cylindrical coordinate system, and then, by separating the variables, the eigenvalue problems for two ordinary differential equations were obtained. Based on the property of completeness of systems of eigenfunctions of these problems, a uniqueness theorem is proved. The solution of the problem under study is constructed as the sum of a double series. When substantiating the uniform convergence of the constructed series, asymptotic estimates for the Bessel functions of the real and imaginary arguments were used. Based on them, estimates were obtained for each member of the series, which made it possible to prove the convergence of the resulting series and its derivatives up to the second order inclusive, as well as the existence theorem in the class of regular solutions.

Keywords: Tricomi–Neumann problem, Cauchy–Goursat problem, singular coefficient, Bessel function, hypergeometric Gauss and Humbert function.

AMS Subject Classification: 35M10, 35M12.

For citation: *Urinov, A. K. and Karimov, K. T.* The Tricomi–Neymann Problem for a Three-Dimensional Mixed-Type Equation with Singular Coefficients, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 120–134 (in Russian). DOI: 10.46698/n1128-9779-9257-d.

References

1. *Frankl, F. I. Izbranyie trudy po gazovoy dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics], Moscow, Nauka, 1973, 712 p. (in Russian).
2. *Vekua, I. N. Obobshennye analiticheskiy funksii* [Generalized Analytic Functions], Moscow, GIFML, 1959, 628 p. (in Russian).
3. *Bitsadze, A. V.* On a Three-Dimensional Analogue of the Tricomi Problem, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 1962, vol. 3, no. 5, pp. 642–644 (in Russian).
4. *Ezhov, A. M. and Pulkin, S. P.* Estimation of the Solution of the Tricomi Problem for a Class of Equations of Mixed Type, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 193, no. 5, pp. 978–980 (in Russian).
5. *Nakhushev, A. M.* On a Three-Dimensional Analogue of the Gellerstedt Problem, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 52–62 (in Russian).
6. *Ponomarev, S. M.* On the Theory of Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type in Three-Dimensional Domains, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 246, no. 6, pp. 1303–1306 (in Russian).
7. *Salakhiddinov, M. S. and Islomov, B.* Boundary Value Problems for an Equation of Mixed Elliptic-Hyperbolic Type in Space, *Uzbek Mathematical Journal*, 1993, no. 3, pp. 13–20 (in Russian).
8. *Urinov, A. K. and Karimov, K. T.* Tricomi Problem for a Three-Dimensional Mixed-Type Equation with Three Singular Coefficients, *ACTA NUUz*, 2016, no. 2/1, pp. 14–25 (in Russian).

9. *Urinov, A. K. and Karimov, K. T.* The Dirichlet Problem for a Three-Dimensional Equation of Mixed Type with Three Singular Coefficients, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 665–683 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1559.
10. *Nazipov, I. T.* Solution of the Spatial Tricomi Problem for a Singular Mixed-Type Equation by the Method of Integral Equations, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 61–76. DOI: 10.3103/S1066369X1103008X.
11. *Sabitov, K. B. and Karamova, A. A.* Spectral Properties of Solutions of the Tricomi Problem for a Mixed-Type Equation with Two Lines of Type Change and their Applications, *Izvestiya: Mathematics*, 2001, vol. 65, no. 4, pp. 133–150. DOI: 10.1070/IM2001v065n04ABEH000351.
12. *Karimov, K. T.* Keldysh Problem for a Three-Dimensional Equation of Mixed Type with Three Singular Coefficients in a Semi-Infinite Parallelepiped, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 31–48. DOI: 10.35634/vm200103.
13. *Kapilevich, M. B.* On One Class of Horn's Hypergeometric Functions, *Differentsial'nye uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 8, pp. 1465–1483 (in Russian).
14. *Bateman, G. and Erdeyi, A. Vysshie transtsendentnye funksii* [Higher Transcendental Functions], Moscow, Nauka, 1973, 296 p. (in Russian).
15. *Watson, G. N. Teoriya Besselevyx funksii* [Theory of Bessel Functions], Moscow, Ed. IL., 1949, 798 p. (in Russian).
16. *Salakhitdinov, M. S. and Urinov, A. K. K spektralnoy teorii uravneniy smeshannogo tipa* [On the Spectral Theory of Equations of Mixed Type], Tashkent, Mumtoz So'z, 2010, 355 p. (in Russian).
17. *Mamedov, Ya. N.* On an Eigenvalue Problem for Equations of Mixed Type, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 95–103 (in Russian).
18. *Moiseev, E. I.* On the basis of sines and cosines, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1984, vol. 275, no. 4, pp. 794–798 (in Russian).
19. *Kipriyanov, I. A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary Value Problems], Moscow, Nauka, 1997, 204 p. (in Russian).
20. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. Integraly i ryady. Spetsialnye funktsii. T.* 3 [Integrals and Series. Special Features. Vol. 3.], Moscow, FizmatLit, 2003, 688 p. (in Russian).

Received August 18, 2022

Akhmadzhon K. Urinov
Ferghana State University,
19 Murabbiylar St., Ferghana 150100, Uzbekistan,
Professor
E-mail: `urinovak@mail.ru`
http://orcid.org/0000-0002-9586-1799

Kamoliddin T. Karimov
Ferghana State University,
19 Murabbiylar St., Ferghana 150100, Uzbekistan,
Associate Professor
E-mail: `karimovk80@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-9098-4116