Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 3, С. 89–97

УДК 517.98
DOI 10.46698/y2866-6280-5717-i

ТЕОРЕМА КРЕЙНА — МИЛЬМАНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ#

З. А. Кусраева[1]

[1] Владикавказский научный центр Российской академии наук,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: `zali13@mail.ru`

Аннотация. Настоящая заметка посвящена задаче о восстановлении выпуклого множества однородных полиномов по крайним точкам, т. е. обоснованию полиномиального варианта классической теоремы Крейна — Мильмана. В этом направлении мало, что сделано; имеющиеся работы большей частью посвящены описанию крайних точек единичного шара в пространстве однородных полиномов в разных специальных случаях. Даже в случае линейных операторов классическая теорема Крейна — Мильмана не работает, так как замкнутые выпуклые множества операторов лишь в очень частных случаях оказываются компактными в какой-нибудь естественной топологии. В 1980-х годах был предложен новый подход к изучению экстремальной структуры выпуклых множеств линейных операторов на основе теории пространств Канторовича и получена операторная форма теоремы Крейна — Мильмана. Комбинируя упомянутый подход с методом линеаризации однородных полиномов, в настоящей работе получен вариант теоремы Крейна — Мильмана для однородных полиномов. А именно, показано, что слабо порядково ограниченное, операторно выпуклое и поточечно порядково замкнутое множество однородных полиномов, действующих из векторного пространства в пространство Канторовича, является замыканием относительно поточечной порядковой сходимости операторно выпуклой оболочки своих крайних точек. Получено также мильмановское обращение теоремы Крейна — Мильмана для однородных полиномов: крайние точки наименьшего операторно выпуклого поточечно порядково замкнутого множества, содержащего данное множество A однородных полиномов, представляют собой поточечные равномерные пределы подходящих сетей перемешиваний элементов A. Под перемешиванием семейства полиномов со значениями в пространстве Канторовича понимается (бесконечная) сумма этих полиномов, умноженных на попарно дизъюнктные порядковые проекторы в упомянутом пространстве Каторовича, сумма которых равна тождественному оператору.

Ключевые слова: крайние точки, выпуклое множество, однородный полином, векторная решетка, теорема Крейна — Мильмана.

AMS Subject Classification: 46G25, 47A40, 47H60, 47L07.

Образец цитирования: *Кусраева З. А.* Теорема Крейна — Мильмана для однородных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 89–97. DOI: 10.46698/y2866-6280-5717-i.

1. Введение

Классическая теорема Крейна — Мильмана утверждает, что выпуклое компактное множество в локально выпуклом пространстве совпадает с замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек (см. [1, теоремы 3.6.5 и 10.6.5]). Однако, замкнутые выпуклые множества линейных операторов лишь в очень частных случаях оказываются

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00097, https://rscf.ru/project/22-71-00097/

компактными в какой-нибудь естественной топологии рассматриваемого пространства операторов, и по этой причине редко удается эффективно применить теорему Крейна — Мильмана в задаче восстановления множества операторов по крайним точкам.

В то же время, существуют некомпактные выпуклые множества, которые восстанавливаются по своим крайним точкам. Л. Нахбин обнаружил, что таковыми будут, например, замкнутые выпуклые ограниченные множества в локально выпуклом пространстве, обладающие свойством положительного бинарного пересечения (см. [2]). При этом оказалось, что каждое множество с такими свойствами является единичным шаром подходящей банаховой решетки непрерывных функций $C(K)$ на экстремально несвязном компактном топологическом пространстве K.

Отталкиваясь от этого результата, Д. К. Оутс [3, теорема 2.3] получил вариант теоремы Крейна — Мильмана для множества линейных операторов, действующих из произвольного векторного пространства в векторную решетку $C(K)$ (с экстремально несвязным компактом K) и мажорируемых сублинейным оператором. Аналогичный результат получил А. М. Рубинов [4, теорема 5] в том случае, когда вместо $C(K)$ рассматривается поряково полная векторная решетка с достаточным числом o-непрерывных функционалов. Стоит отметить, что ни один из этих двух результатов не является следствием другого, но в каждом из них ключевую роль играет тот факт, что операторы действуют в пространство Канторовича, т. е. в порядково полную векторную решетку (необходимые сведения из теории векторных решеток см. в [5]).

В работе [6] С. С. Кутателадзе предложил новый подход к изучению экстремальной стурктуры выпуклых множеств операторов на основе теории пространств Канторовича. В частности, теорема Крейна — Мильмана и ее обращение установлены в общем виде, а именно, для опорных множеств сублинейных операторов, действующих из произвольного векторного пространства в пространство Канторовича. Точнее в этой статье доказано, что каждое опорное множество (т. е. множество линейных операторов, мажорируемых сублинейным оператором) восстанавливается не только по множеству своих крайних точек, но и по его (как правило, собственному) подмножеству, состоящему из так называемых o-крайних точек.

Цель настоящей заметки — распространить результаты С. С. Кутателадзе на выпуклые множества однородных полиномов, действующих из векторного пространства в порядково полную векторную решетку. Экстремальное строение однородных полиномов в бесконечномерных пространствах мало изучено. Имеющиеся работы большей частью посвящены описанию крайних точек единичного шара в пространстве однородных полиномов в разных специальных случаях, см., например, [7, 8].

Стоит отметить также, что в [9] получены результаты о внутренней характеризации и факторизации операторных шапок конуса положительных полилинейных операторов.

2. Предварительные сведения

Напомним некоторые обозначения. Всюду ниже X — векторное пространство и Y — порядково полная векторная решетка. $\Lambda := \mathrm{Orth}(Y)$ — f-алгебра всех ортоморфизмов в Y и $\mathbb{B} := \mathbb{B}(F)$ — полная булева алгебра порядковых проекторов в Y (с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$), совпадающая с булевой алгеброй всех идемпотентов f-алгебры Y. Разбиением единицы в $\mathbb{B}$ называют семейство $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathbb{B}$ такое, что $\pi_\xi \wedge \pi_\eta = \mathbf{0}$ при $\xi \neq \eta$ и $\bigvee_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = \mathbf{1}$.

Используются обозначения и терминология из книг [10] и [11]. В частности, $\mathscr{P}(^n X, Y)$ обозначает пространство всех n-однородных полиномов из X в Y; при этом $\mathscr{P}(^1 X, Y)$ —

пространство линейных операторов, обозначаемое через $\mathscr{L}(X,Y)$. Векторные пространства $\mathscr{P}(^nX,Y)$ и $\mathscr{L}(X,Y)$ становятся модулями над f-алгеброй Λ, если умножение на элемент $\lambda\in\Lambda$ определить формулой $\lambda P := \lambda\circ P$. Символами $\bigotimes_{n,s} X$ и δ_n обозначаются соответственно n-кратное алгебраическое симметричное тензорное произведение векторного пространство X и n-однородный полином $x\mapsto x\otimes\dots\otimes x$ из X в $\bigotimes_{n,s} X$. Любой n-однородный полином из X в Y представляет собой композицию линейного оператора из $\bigotimes_{n,s} X$ в Y и полинома δ_n. Точнее, имеет место утверждение.

Лемма 1. *Отображение $T\mapsto T\circ\delta_n$ служит Λ-линейным изоморфизмом из $\mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X,Y)$ на $\mathscr{P}(^nX,Y)$.*

$\triangleleft$ Указанные модули изоморфны как векторные пространства (см. [10, предложение 1.3]). Этот изоморфизм очевидным образом сохраняет умножение на $\lambda\in\Lambda$, так как по определению $\lambda(T\circ\delta_n)=(\lambda T)\circ\delta_n$. $\triangleright$

Определение 1. Рассмотрим множество Ω, содержащееся в $\mathscr{P}(^nX,Y)$. Говорят, что Ω *слабо* (*порядково*) *ограничено*, если множество $\Omega(x):=\{P(x):\ P\in\Omega\}$ порядково ограничено в Y для всех $x\in X$; *поточечно o-замкнуто*, если для любой сети (P_i) в Ω и любого полинома $P\in\mathscr{P}(^nX,Y)$ из o-сходимости сети (P_ix) к Px для всех $x\in E$ следует $P\in\Omega$. Если в этом определении o-сходимость заменить на r-сходимость, то говорят о *поточечной r-замкнутости.* Множество Ω называют *операторно выпуклым* (или, точнее, Λ-*выпуклым*), если для любых $\alpha,\beta\in\mathrm{Orth}(Y)_+$ таких, что $\alpha+\beta=I_Y$, выполняется $\alpha\Omega+\beta\Omega\subset\Omega$, где $\alpha\Omega:=\{\alpha\circ P:\ P\in\Omega\}$.

Определение 2. *Сублинейным оператором* называют отображение $\varphi: X\to Y$, если $\varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)$ и $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ для всех $x,y\in X$ и $0\leqslant\lambda\in\mathbb{R}$. Совокупность всех линейных операторов из X в Y, мажорируемых оператором φ, принято называть *опорным множеством* φ (или *субдифференциалом в нуле*) и обозначать символом $\partial\varphi$:

$$\partial\varphi:=\{T\in L(X,Y):\ (\forall x\in X)\ Tx\leqslant\varphi(x)\}.$$

Нам потребуются следующие два вспомогательных результата о внутренней характеризации опорных множеств линейных операторов, полученных в [12].

Определение 3. Возьмем разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и семейство полиномов $(P_\xi)_{\xi\in\Xi}$ из $\mathscr{P}(^nX,Y)$. Если отображение $P: X\to Y$ таково, что $Px=o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi P_\xi x$ для $x\in X$, то T называют *перемешиванием* $(P_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *с весами* $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Используется также обозначение $P:=\mathrm{mix}\,\pi_\xi P_\xi:=\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}\,\pi_\xi P_\xi$.

Рассмотрим непустое множество $\Omega\subset\mathscr{P}(^nX,Y)$. Пусть $\mathrm{mix}(\Omega)$ (соответственно, $\mathrm{mix}_0(\Omega)$) обозначает множество перемешиваний любых (соответственно, любых конечных) семейств из Ω с любыми весами из $\mathbb{B}$. Точнее, $P\in\mathrm{mix}(\Omega)$ (соответственно, $P\in\mathrm{mix}_0(\Omega)$) в том и только в том случае, когда $P=\mathrm{mix}\,\pi_\xi P_\xi$ для любого (соответственно, любого конечного) семейства (P_ξ) из Ω и любого (соответственно, любого конечного) разбиения единицы (π_ξ) в $\mathbb{B}$. Скажем, что множество Ω mix-*замкнуто*, если $\Omega=\mathrm{mix}(\Omega)$ и *разложимо,* если $\Omega=\mathrm{mix}_0(\Omega)$.

Лемма 2. *Слабо порядково ограниченное множество линейных операторов $\Omega\subset\mathscr{L}(X,Y)$ совпадает с опорным множеством $\partial\varphi$ некоторого сублинейного оператора $\varphi: X\to Y$ в том и только в том случае, когда оно операторно выпукло и поточечно o-замкнуто.*

Лемма 3. *Крайние точки наименьшего операторно выпуклого и поточечно o-замкнутого множества, содержащего данное слабо порядково ограниченное множество $\mathfrak{A}$, представляют собой поточечные r-пределы подходящих сетей перемешиваний $\mathfrak{A}$.*

$\lhd$ Эти два результата анонсированы в [13, теоремы 2, 3, 4] и доказаны в [12]; см. также [11, теоремы 2.4.11, 2.4.12 и 2.4.13]. $\rhd$

3. Вспомогательные факты

Теорема 1. *Пусть E — векторное пространство, F — порядково полная векторная решетка. Множество полиномов $\Omega \subset \mathscr{P}(^nE,F)$ допускает представление $\Omega = (\partial\varphi) \circ \theta_n$ для некоторого сублинейного оператора $\varphi : \bigotimes_{n,s} E \to F$ в том и только в том случае, когда Ω слабо порядково ограничено, операторно выпукло и поточечно o-замкнуто.*

$\lhd$ В силу леммы 2 и изоморфизма векторных пространств $\mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X, Y)$ и $\mathscr{P}(^nE,Y)$ (лемма 1) нужно лишь доказать, что множество полиномов $\Omega \subset \mathscr{P}(^nX,Y)$ операторно выпукло (слабо порядково ограничено, поточечно o-замкнуто) в том и только в том случае, когда таковым является множество линейных операторов

$$\Omega' := \Big\{T \in \mathscr{L}\Big(\bigotimes\nolimits_{n,s} X, Y\Big) :\ T \circ \delta_n \in \mathscr{P}(^nE,F)\Big\}.$$

Утверждение об операторной выпуклости следует из того очевидного утверждения, что пространства $\mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X, Y)$ и $\mathscr{P}(^nE,F)$ служат Λ-модулями, а изморфизм $T \mapsto T \circ \delta_n$ — модульным гомоморфизмом.

Возьмем некоторую сеть (T_α) в Ω', линейный оператор $T \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X, F)$ и положим $P_\alpha \circ \delta_n$ и $P = T \circ \delta_n$. Тогда (P_α) — сеть в Ω, причем произвольную сеть в Ω можно представить в таком виде $(T_\alpha) \circ \delta_n$. Как видно, сеть $(P_\alpha(x))$ o-сходится к $P(x)$ в том и только в том случае, когда $(T_\alpha(\delta_n(x))$ o-сходится к $T(\delta_n(x))$. Последнее равносильно тому, что для произвольного элемента $u \in \bigotimes_{n,s} X$ вида $u = \sum_{k=1}^m \delta_n(x_k)$ сеть $(T_\alpha(u))$, где $T_\alpha(u) = \sum_{k=1}^m T_\alpha(\delta_n(x_k))$, o-сходится к $T(u) = \sum_{k=1}^m T(\delta_n(x_k))$. Таким образом, множества Ω и Ω' o-замкнуты или нет одновременно. Аналогично выводится утверждение о слабой порядковой ограниченности, так как семейство $(T_\alpha(u))$ порядково ограничено тогда и только тогда, когда порядково ограничены семейства $(T_\alpha(\delta_n(x_k)))$ для всех $k = 1, \dots, m$. $\rhd$

Замечание 1. Пусть $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ — алгебраическое тензорное произведение векторных пространств $X_1, \dots, X_n$, $\otimes$ — канонический n-линейный оператор из $X_1 \times \dots \times X_n$ в $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$, и обозначим символом $\mathscr{L}(X_1, \dots, X_n; F)$ пространство всех n-линейных операторов из $X_1 \times \dots \times X_n$ в F. Теорема 1 остается в силе, если Ω содержится в $\mathscr{L}(X_1, \dots, X_n; F)$, а $\bigotimes_{n,s} E$ и θ_n заменить соответственно на $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ и $\otimes$ (ср. [9, теорема 4.4]).

Определение 4. Наименьшее (по включению) операторно выпуклое множество в $\mathscr{P}(^nX,Y)$, содержащее Ω, называют *операторно выпуклой оболочкой* (или Λ-выпуклой оболочкой) Ω и обозначают символом $\mathrm{co}_\Lambda(\Omega)$. Наименьшее опорное множество, содержащее множество $\mathscr{U} \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, обозначается $\mathrm{cop}(\mathscr{U})$ и называется *опорной оболочкой* множества $\mathscr{U}$.

Нетрудно убедиться, что $\mathrm{co}_\Lambda(\Omega)$ состоит из всевозможных Λ-выпуклых комбинаций, т. е. имеет место представление:

$$\mathrm{co}_\Lambda(\Omega) = \left\{\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i :\ P_1, \dots, P_k \in \Omega,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda_+,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = I_Y,\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ясно также, что если $\mathscr{U}$ — слабо ограниченное множество в $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, то $\operatorname{cop}(\mathscr{U}) = \partial\varphi$, где сублинейный оператор φ имеет вид $\varphi(x) := \sup\{Tx :\ T \in \mathscr{U}\}$. В случае $F = \mathbb{R}$ операторная выпуклость и операторно выпуклая оболочка совпадают с обычными понятиями выпуклости и выпуклой оболочки.

Лемма 4. *Любое опорное множество совпадает с опорной оболочкой множества своих крайних точек. Иными словами, для любого сублинейного оператора $\varphi : X \to Y$ выполняется равенство $\partial\varphi = \operatorname{cop}(\operatorname{ext}(\partial\varphi))$.*

$\lhd$ Это частный случай теоремы Крейна — Мильмана для опорных множеств, установленной С. С. Кутателадзе в [6]. $\rhd$

Лемма 5. *Если $\mathscr{U}$ — слабо ограниченное множество в $\mathscr{P}(^nX,Y)$, то множество $r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\operatorname{co}(\mathscr{U})))$ поточечно o-замкнуто.*

$\lhd$ Обозначим $\Omega := r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\operatorname{co}(\mathscr{U})))$ и возьмем сеть (P_α) из Ω поточечно o-сходящуюся к $P \in \mathscr{P}(^nX,Y)$. Для любого $x \in X$ положим $\omega(x) := \sup\{|Q(x)| :\ Q \in \mathscr{U}\} + |P(x)|$ и отметим, что $P(x)$ и сеть $(P_\alpha(x))$ содержатся в порядковом идеале, порожденном элементом $\omega(x)$. Воспользуемся критерием порядковой сходимости из [14, теорема 8.1.8]: для любых $m \in \mathbb{N}$ и конечного набора $\{x_1,\dots,x_k\}$ в X существует разбиение единицы (π_α) в $\mathbb{B}$ такое, что

$$\pi_\alpha|P(x_i) - P_\alpha(x_i)| \leqslant \frac{1}{2m}\omega(x_i) \quad (i := 1,\dots,k).$$

Далее, для каждого α подберем разбиение $(\pi_{\alpha\xi})$ элемента π_α и семейство $(Q_{\alpha\xi})$ в $\operatorname{mix}(co(\mathscr{U}))$ такие, что выполняются неравенства

$$\pi_{\alpha\xi}|P_\alpha(x_i) - Q_{\alpha\xi}(x_i)| \leqslant \frac{1}{2m}\omega(x_i) \quad (i := 1,\dots,k).$$

Положим $Q_\alpha := \operatorname{mix}_\xi \pi_{\alpha\xi}Q_{\alpha\xi}$ и заметим, что $Q_\alpha \in \operatorname{mix}(\operatorname{co}(\pi_\alpha\mathscr{U}))$. Из последних двух неравенств следует, что $\pi_{\alpha\xi}|P(x_i) - Q_{\alpha\xi}(x_i)| \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)\omega(x_1)$ и суммирование по ξ приводит к оценке $\pi_\alpha|P(x_i) - Q_\alpha(x_i)| \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)\omega(x_1)$. Рассмотрим теперь упорядоченное множество $(\Gamma,\leqslant)$, где $\Gamma := \Theta \times \mathbb{N}$ и Θ — множество всех конечных подмножеств E, а $\leqslant$ — покоординатное упорядочение, т. е. $\gamma_1 = (\theta_1 n_1) \leqslant \gamma_2 = (\theta_2, n_2)$ означает, что $\theta_1 \subset \theta_2$ и $n_1 \leqslant n_2$. Доказанное выше теперь можно сформулировать так: для любого $\gamma = (\theta, m) \in \Gamma$ существует $Q_\gamma := \operatorname{mix}_\alpha Q_\alpha$ такой, что $|P(x) - Q_\gamma(x)| \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)\omega(x)$ для всех $x \in \theta$. При этом $Q_\gamma \in \operatorname{mix}(\operatorname{co}(\pi_\alpha\mathscr{U}))$ и Γ направленно вверх. Это означает, что сеть $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ сходится к P с регулятором, следовательно, $P \in \Omega$. Таким образом, множество $r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\operatorname{co}(\Omega)))$ поточечно o-замкнуто. $\rhd$

Лемма 6. *Для слабо ограниченного множества $\Omega \subset \mathscr{P}(^nX,Y)$ выполняется*

$$\operatorname{cop}(\Omega) = o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{co}_\Lambda(\Omega)) = o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}_0(\operatorname{co}(\Omega))) = r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\operatorname{co}(\Omega))).$$

$\lhd$ Сначала проверим включения справа налево. Поскольку $\operatorname{mix}(\mathscr{U}) \subset o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}_0(\mathscr{U}))$ для любого множества $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(^nX,Y)$, то $r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\operatorname{co}(\Omega))$ содержится в $o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}_0(\operatorname{co}(\Omega)))$. Далее, операторно выпуклое множество, очевидно, выпукло и разложимо, поэтому $\operatorname{co}(\Omega)) \subset \operatorname{co}_\Lambda(\Omega))$ и $\operatorname{mix}_0(\operatorname{co}_\Lambda(\Omega)) \subset \operatorname{co}_\Lambda(\Omega))$, значит, верно также включение $\operatorname{mix}_0(\operatorname{co}(\Omega)) \subset \operatorname{co}_\Lambda(\Omega))$, следовательно, $o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}_0(\operatorname{co}(\Omega))) \subset o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{co}_\Lambda(\Omega))$. Наконец, включение $o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{co}_\Lambda(\Omega)) \subset \operatorname{cop}(\Omega)$ следует из леммы 2. Остается заметить, что $o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{co}_\Lambda(\Omega))$ содержится в $r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\operatorname{co}(\Omega)))$ в силу леммы 5. $\rhd$

4. Основные результаты

Теперь все готово, чтобы сформулировать основные результаты настоящей заметки. Сначала сформулируем и докажем теорему Крейна — Мильмана для однородных полиномов: слабо порядково ограниченное, операторно выпуклое и поточечно порядково замкнутое множество однородных полиномов, действующих из векторного пространства в пространство Канторовича, является замыканием относительно поточечной порядковой сходимости операторно выпуклой оболочки своих крайних точек.

Теорема 2 (Крейна — Мильмана для однородных полиномов)**.** *Пусть X — векторное пространство, F — порядково полная векторная решетка и $\Lambda := \mathrm{Orth}(F)$. Предположим, что множество $\Omega \subset \mathscr{P}(^nX, F)$ слабо порядково ограничено, операторно выпукло и поточечно o-замкнуто. Тогда имеет место представление*

$$\Omega = o\text{-}\mathrm{cl}(\mathrm{co}_\Lambda(\mathrm{ext}(\Omega))).$$

$\lhd$ Если множество $\Omega \subset \mathscr{P}(^nX, F)$ удовлетворяет указанным условиям, то по теореме 1 имеем представление $\Omega = (\partial\varphi) \circ \delta_n$ для некоторого сублинейного оператора $\varphi : \bigotimes_{n,s} E \to F$. В ходе доказательства теоремы 1 было установлено, что для произвольного множества $\mathscr{U} \subset \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X, Y)$ выполняется

$$o\text{-}\mathrm{cl}(\mathscr{U} \circ \delta_n) = o\text{-}\mathrm{cl}(\mathscr{U}) \circ \delta_n.$$

Изоморфизм из леммы 1 является аффинной биекцией из $\partial\varphi$ на Ω, сохраняющие Λ-выпуклые комбинации, следовательно, верны также равенства

$$\mathrm{ext}(\Omega) = \mathrm{ext}(\partial\varphi) \circ \circ\delta_n,$$
$$\mathrm{co}_\Lambda(\mathrm{ext}\,\Omega) = (\mathrm{co}_\Lambda(\mathrm{ext}\,\partial\varphi)) \circ \delta_n.$$

Применив теперь операцию $o\text{-}\mathrm{cl}(\cdot)$ к последнему равенству, а затем воспользовавшись последовательно формулой $o\text{-}\mathrm{cl}(\cdot \circ \delta_n) = o\text{-}\mathrm{cl}(\cdot) \circ \delta_n$, леммой 6 и леммой 4, выводим

$$o\text{-}\mathrm{cl}(\mathrm{co}_\Lambda(\mathrm{ext}\,\Omega)) = o\text{-}\mathrm{cl}((\mathrm{co}_\Lambda(\mathrm{ext}\,\partial\varphi)) \circ \delta_n) = \mathrm{cop}(\mathrm{ext}\,\partial\varphi)) \circ \delta_n = \partial\varphi \circ \delta_n = \Omega,$$

что и требовалось. $\rhd$

Замечание 2. Согласно лемме 6 для слабо ограниченного поточечно o-замкнутого операторно выпуклого множества Ω верны также представления

$$\Omega = o\text{-}\mathrm{cl}(\mathrm{mix}_0(\mathrm{ext}(\mathrm{co}(\Omega)))), \quad \Omega = r\text{-}\mathrm{cl}(\mathrm{mix}(\mathrm{ext}(\mathrm{co}(\Omega)))).$$

Замечание 3. Обозначим символом $\mathrm{ext}_0(\partial\varphi)$ множество o-крайних точек опорного множества $\partial\varphi$ и пусть $\mathrm{ext}_0(\Omega)$ — множество элементов Ω, соответствующее $\mathrm{ext}_0(\partial\varphi)$ в силу представления $\Omega = (\partial\varphi)\circ\delta_n$ и изоморфизма из леммы 1. Теорема С. С. Кутателадзе из [6] утверждает, что $\partial\varphi = \mathrm{cop}(\mathrm{ext}_0(\partial\varphi))$ (ср. с леммой 4). Таким образом, теорему 2 можно усилить, если в ней $\mathrm{ext}_0(\partial\varphi)$ заменить на $\mathrm{ext}_0(\partial\varphi)$. Однако, неясно, как определить элементы $\mathrm{ext}_0(\partial\varphi))$, не прибегая к представлению $\Omega = (\partial\varphi) \circ \delta_n$.

Далее сформулируем и докажем мильмановское обращение теоремы Крейна — Мильмана: Крайние точки наименьшего операторно выпуклого поточечно порядково замкнутого множества, содержащего данное множество A однородных полиномов, представляют собой поточечные равномерные пределы подходящей сети перемешиваний элементов A.

Теорема 3 (Теорема Мильмана для однородных полиномов)**.** *Пусть* $\mathfrak{A} \subset \mathscr{P}({}^nX, F)$ — *слабо порядково ограниченное множество, а* Ω — *наименьшее операторно выпуклое поточечно* o*-замкнутое множество, содержащее* $\mathfrak{A}$*. Тогда крайние точки множества* Ω *представляют собой поточечные* r*-пределы подходящей сети перемешиваний элементов* $\mathfrak{A}$*; символически,*

$$\operatorname{ext}(\Omega) \subset o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\mathfrak{A})) = r\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\mathfrak{A})).$$

$\lhd$ Пусть $\mathfrak{A}, \Omega \subset \mathscr{P}({}^nX, F)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда в соответствие с теоремой 2 имеем $\Omega = (\partial\varphi)\circ\theta_n$ для некоторого сублинейного оператора $\varphi : \bigotimes_{n,s} E \to F$. Обозначим $\mathfrak{A}' := \{T \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} E, F) : \ T \circ \theta_n \in \mathfrak{A}\}$ и заметим, что $\mathfrak{A}'$ — слабо порядково ограниченное множество в $\mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} E, F)$. Отсюда следует, что соотношение

$$\psi(u) := \sup\left\{Tu : \ T \in \mathfrak{A}'\right\} \quad \Big(u \in \bigotimes\nolimits_{n,s} E\Big)$$

корректно определяет сублинейный оператор $\psi : \bigotimes_{n,s} E \to F$, причем $\mathfrak{A}' \subset \partial\psi$. Заметим далее, что $\partial\varphi$ — наименьшее операторно выпуклое поточечно o-замкнутое множество в $\mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} E, F)$, содержащее $\mathfrak{A}'$, ввиду определяющего свойства множества Ω. Тем самым $\partial\varphi \subset \partial\psi$ или, равносильно, $\varphi \leqslant \psi$, т. е. $\varphi(u) \leqslant \psi(u)$ для всех $u \in \bigotimes_{n,s} E$. В то же время, непосредственно из определений φ и ψ вытекает $\psi \leqslant \varphi$, значит, $\varphi = \psi$. Как видно, $\partial\varphi$ — наименьшее операторно выпуклое и поточечное o-замкнутое множество, содержащее $\mathfrak{A}'$, следовательно, по теореме 1 будет $\operatorname{ext}(\partial\varphi) \subset o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\mathfrak{A}))$. Так как изоморфизм между пространствами $\mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X, F)$ и $\mathscr{P}({}^nE, F)$ сохраняет перемещивания и поточечные порядковые пределы, то приходим к требуемому включению $\operatorname{ext}(\Omega) \subset o\text{-}\operatorname{cl}(\operatorname{mix}(\mathfrak{A}))$. $\rhd$

Замечание 4. В соответствии с замечанием 1, результаты, аналогичные теоремам 2 и 3, имеют место и для выпуклых множеств n-линейных операторов. В то же время, результаты о факторизации операторных шапок конуса положительных n-линейных операторов из [9, § 5] не допускают прямого переноса на конус положительных n-однородных полиномов ввиду существенно разного строения n-кратного фремлиновского тензорного произведения и n-кратного симметричного фремлиновского тензорного произведения векторной решетки. Операторные шапки конуса линейных положительных операторов между векторными решетками ввел и изучил С. С. Кутателадзе [15].

Замечание 5. Стоит отметить, что основное отличие этих результатов от классической теоремы Крейна — Мильмана и ее мильмановского обращения состоит в том, что, во-первых, вместо выпуклой оболочки нужно использовать операторно выпуклую оболочку, и, во-вторых, на роль топологического замыкания нужно брать смешанное порядково-топологическое замыкание.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие существенному улучшению текста.

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.— Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Nachbin L.* Sur l'abondance des points extremaux d'un ensemble convexé borne et fermé // Anais Acad. Brasileira Ciên.—1962.—Vol. 34.—P. 445–448.
3. *Oates D. K.* A non-compact Kreĭn–Mil'man theorem // Pacific J. Math.—1971.—Vol. 36, № 3.—P. 781–788.
4. *Рубинов А. М.* Сублинейные операторы и операторно-выпуклые множества // Сиб. матем. журн.—1976.—Т. 17, № 2.—С. 370–380.
5. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.

6. *Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. матем. журн.—1980.—Т. 21, № 1.—С. 130–138.
7. *Boyd C., Lassalle S.* Extreme and exposed points of spaces of integral polynomials // Proc. Amer. Math. Soc.—2010.—Vol. 138, № 4.—P. 1415–1420. DOI: 10.1090/S0002-9939-09-10158-2.
8. *Boyd C., Ryan R. A., Snigireva N.* Geometry of spaces of orthogonally additive polynomials on $C(K)$ // J. Geom. Anal.—2020.—Vol. 30, № 4.—P. 4211–4239. DOI:10.1007/s12220-019-00240-0.
9. *Кусраев А. Г.* Экстремальное строение выпуклых множеств полилинейных операторов // Сиб. матем. журн.—2020.—Т. 61, № 5.—С. 1041–1059. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.506.
10. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.
11. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление: теория и приложения.—М.: Наука, 2007.
12. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.—1983.—Т. 24, № 5.—С. 109–122.
13. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 5.—С. 1061–164.
14. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.
15. *Кутателадзе С. С.* Шапки и грани множеств операторов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 280, № 2.—С. 285–288.

Статья поступила 28 июля 2023 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Владикавказский научный центр Российской академии наук,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 3, P. 89–97

KREĬN–MIL'MAN THEOREM FOR HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

Kusraeva, Z. A.[1]

[1] Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhailovskoye village 363110, Russia

E-mail: zali13@mail.ru

Abstract. This note is devoted to the problem of recovering a convex set of homogeneous polynomials from the subset of its extreme points, i. e. to the justification of a polynomial version of the classical Kreĭn–Mil'man theorem. Not much was done in this direction. The existing papers are mostly devoted to the description of the extreme points of the unit ball in the space of homogeneous polynomials in various special cases. Even in the case of linear operators, the classical Kreĭn–Mil'man theorem does not work, since closed convex sets of operators turn out to be compact in some natural topology only in very special cases. In the 1980s, a new approach to the study of the extremal structure of convex sets of linear operators was proposed on the basis of the theory of Kantorovich spaces and an operator form of the Kreĭn–Mil'man theorem was obtained. Combining the mentioned approach with the homogeneous polynomials linearization, in this paper we obtain a version of the Kreĭn–Mil'man theorem for homogeneous polynomials. Namely, a weakly order bounded, operator convex and pointwise order closed set of homogeneous polynomials acting from an arbitrary vector space into Kantorovich space is the closure under pointwise order convergence of the operator convex hull of its extreme points. The Mil'man's inverse of the Kreĭn–Mil'man theorem for homogeneous polynomials is also established: The extreme points of the smallest operator convex pointwise order closed set containing a given set A of homogeneous polynomials are pointwise uniform limits of appropriate mixings nets in A. The mixing of a family of polynomials with values in a Kantorovich space is understood as the (infinite) sum of these polynomials, multiplied by pairwise disjoint band projections with identity sum.

Keywords: extreme points, convex set, homogeneous polynomial, vector lattice, Kreĭn–Mil'man theorem.

AMS Subject Classification: 46G25, 47A40, 47H60, 47L07.

For citation: *Kusraeva, Z. A.* Kreĭn–Mil'man Theorem for Homogeneous Polynomials, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 89–97 (in Russian). DOI: 10.46698/y2866-6280-5717-i.

References

1. *Kutateledze, S. S. Osnovy funkcional'nogo analiza* [Fundamentals of Functional Analysis], Novosibirsk, Nauka, 1983 (in Russian).
2. *Nachbin, L.* Sur L'abondance des Points Extremaux d'un Ensemble Convexé Borne et Fermé, *Anais da Academia Brasileira de Ciȇncias*, 1962, vol. 34, pp. 445–448.
3. *Oates, D. K.* A non-Compact Kreĭn–Mil'man Theorem, *Pacific Journal of Mathematics*, 1971, vol. 36, no. 3, pp. 781–788.
4. *Rubinov, A. M.* Sublinear Operators and Operator-Convex Sets, *Siberian Mathematical Journal*, 1976, vol. 17, no. 2, pp. 289–296. DOI: 10.1007/BF00967575.
5. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, London etc., Academic Press, 1985, 367 p.
6. *Kutateladze, S. S.* The Kreĭn–Mil'man Theorem and Its Inverse, *Siberian Mathematical Journal*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 97–103. DOI: 10.1007/BF00970127.
7. *Boyd, C. and Lassalle, S.* Extreme and Exposed Points of Spaces of Integral Polynomials, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2010, vol. 138, no. 4, pp. 1415–1420. DOI: 10.1090/S0002-9939-09-10158-2.
8. *Boyd, C., Ryan, R. A. and Snigireva, N.* Geometry of Spaces of Orthogonally Additive Polynomials on $C(K)$, *The Journal of Geometric Analysis*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 4211–4239. DOI: 10.1007/s12220-019-00240-0.
9. *Kusraev, A. G.* The Extremal Structure of Convex Sets of Multilinear Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2020, vol. 61, no. 5, pp. 830–843. DOI: 10.1134/S0037446620050067.
10. *Dineen, S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Berlin, Springer, 1999.
11. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. Subdifferentials: Theory and Applications*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995.
12. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S.* Subdifferentials in Boolean-Valued Models of Set Theory, *Siberian Mathematical Journal*, 1983, vol. 24, no. 5, pp. 735–746. DOI: 10.1007/BF00969600.
13. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S.* Analysis of Subdifferentials with the Aid of Boolean-Valued Models, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1061–1064 (in Russian).
14. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, Dordrecht, Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
15. *Kutateladze, S. S.* Caps and Faces of Sets of Operators, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1985, vol. 31, no. 1, pp. 66–68.

Received July 28, 2023

Zalina A. Kusraeva
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhailovskoye village 363110, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `zali13@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888