Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 3, С. 123–142

УДК 517.957
DOI 10.46698/q2165-6700-0718-r

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Ш. К. Собиров[1]**, У. А. Хоитметов**[1]

[1] Ургенчский государственный университет,
Узбекистан, 220100, Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14
E-mail: `x_umid@mail.ru`, `shexzod1994@mail.ru`

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с зависящими от времени коэффициентами и самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций. Для решения поставленной задачи используется метод обратной задачи теории рассеяния. Найдены пары Лакса, что позволит применить метод обратной задачи рассеяния для решения поставленной задачи Коши. Отметим, что в рассматриваемом случае оператор Дирака не является самосопряженным, поэтому собственные значения могут быть кратными. Найдены уравнения динамики изменения во времени данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с потенциалом, являющимся решением модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с переменными коэффициентами, зависящими от времени и с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций. Рассмотрен особый случай модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с переменными коэффициентами, зависящими от времени, и самосогласованным источником, а именно нагруженное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза с самосогласованным источником. Найдены уравнения динамики изменения во времени данных рассеяния несамосопряженного оператора оператора Дирака с потенциалом, являющимся решением нагруженного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с переменными коэффициентами в классе быстроубывающих функций. Приведены примеры, иллюстрирующие применение полученных результатов.

Ключевые слова: нагруженное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза, решения Йоста, данные рассения, интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко.

AMS Subject Classification: 34L25, 35P25, 47A40, 37K15.

Образец цитирования: *Собиров Ш. К., Хоитметов У. А.* Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с зависящими от времени коэффициентами и с самосогласованным источником // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 123–142. DOI: 10.46698/q2165-6700-0718-r.

1. Введение

В 1965 г. Н. Забуски и М. Крускал [1], экспериментируя с численным решением уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ), открыли солитон и дали ему название. Но действительный «прорыв» произошел в 1967 году, когда американские ученые К. Гарднер, И. Грин, М. Крускал и Р. Миура [2] предложили метод спектрального преобразования, как метод решения задачи Коши для уравнения КдФ. Вскоре после этого П. Лакс [3] показал общий характер этого метода, что очень повлияло на будущие исследования.

Несколько лет спустя В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [4] путем нетривиального распространения методов ГГКМ и Лакса смогли решить задачу Коши для другого важного нелинейного эволюционного уравнения, так называемого нелинейного уравнения Шредингера. Тем самым был открыт путь для поиска и открытия некоторых других нелинейных эволюционных уравнений, разрешаемых этим методом.

Вскоре М. Вадати [5] представил метод решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0,$$

встречающегося при решении некоторых задач физики плазмы.

Уравнение мКдФ используется во многих областях, включая альфвеновские волны в бесстолкновительной плазме [6], тонкие упругие стержни [7] и т. д. Существует также много результатов об уравнении мКдФ [8–15] благодаря его простому выражению и богатым физическим приложениям. При поиске точных решений уравнения мКдФ ученые наряду с методом обратной задачи рассеяния использовали также такие методы, как двухлинейный подход Хироты [16], метод коммутации (связи) [17] и др.

Важно также изучение нелинейных волновых уравнений с переменными коэффициентами. Недавно К. Прадхан и П. К. Паниграхи [18] изучили модифицированное уравнение КдФ с переменными коэффициентами

$$u_t + \alpha(t)u_x - \beta(t)u^2 u_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0.$$

В работе [19] модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (мКдФ) с переменными коэффициентами исследуется с помощью двух подходов и символьных вычислений, а также получены множество типов точных решений с двумя разными бегущими волнообразными переменными.

В данной работе рассматривается следующая система уравнений:

$$\begin{gathered} u_t + p(t)(6u^2 u_x + u_{xxx}) + q(t)u_x = 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^{j}\left(g_{k1}^{j} g_{k1}^{m_k-1-j} - g_{k2}^{j} g_{k2}^{m_k-1-j}\right), \\ L(t)g_k^0 = \xi_k g_k^0, \quad L(t)g_k^j = \xi_k g_k^j + j g_k^{j-1}, \quad \operatorname{Im}\xi_k > 0, \\ g_k^j \in L^2(-\infty,\infty), \quad k = 1,\dots,N,\ j = 0,\dots,m_k-1, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$L(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, \quad g_k^j = \left(g_{k1}^j(x,t),\, g_{k2}^j(x,t)\right), \quad C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!l!},$$

$g_k^0 = \left(g_{k1}^0(x,t), g_{k2}^0(x,t)\right)^T$ — собственная вектор-функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению ξ_k ($\operatorname{Im}\xi_k > 0$) кратности m_k, $k = 1,\dots,N$, а $p(t)$ и $q(t)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_k-1-l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(g_{k1}^{m_k-1} g_{k2}^{m_k-1-l} + g_{k2}^{m_k-1} g_{k1}^{m_k-1-l}\right)dx = A_{m_k-1-l}^{k}(t), \tag{2}$$

где $A_{m_k-1-l}^{k}(t)$ — изначально заданные непрерывные функции, $l = 0,\dots,m_k-1$. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$, $-\infty < x < \infty$, обладает следующими свойствами:

1)
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u_0(x)|dx < \infty. \tag{4}$$

2) Оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_{2N}(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_{2N}(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left((1+|x|)\,|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \tag{5}$$

Основная цель данной работы — получить представления для решения $u(x,t)$, $g_k^j(x,t)$, $k = 1,\ldots,N$, $j = 0,\ldots,m_k - 1$, задачи (1)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

2. Необходимые сведения

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей оси ($-\infty < x < \infty$)

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi v_1 = u(x)v_2, \\ v_{2x} - i\xi v_2 = -u(x)v_1 \end{cases} \tag{6}$$

с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим условию (4). Видно, что с помощью оператора $L = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x) \\ -u(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ и вектор-функций $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ систему (6) можно переписать в виде $L\nu = \xi\nu$. Система уравнений (6) имеет решений Йоста со следующими асимптотиками:

$$\begin{gathered} \varphi(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi\, x}; \quad \overline{\varphi}(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi\, x}, \quad \operatorname{Im}\xi = 0,\ x \to -\infty; \\ \psi(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi\, x}; \quad \overline{\psi}(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi\, x}, \quad \operatorname{Im}\xi = 0,\ x \to \infty. \end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что $\overline{\varphi}\,(\overline{\psi})$ не является комплексным сопряжением к $\varphi\,(\psi)$.

При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi, \overline{\varphi}\}$ и $\{\psi, \overline{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (6). Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= a(\xi)\overline{\psi} + b(\xi)\psi, \\ \bar{\varphi} &= -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\overline{\psi}, \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \psi &= -a(\xi)\overline{\varphi} + \overline{b}(\xi)\varphi, \\ \overline{\psi} &= \overline{a}(\xi)\varphi + b(\xi)\overline{\varphi}, \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где $a(\xi) = W\{\varphi, \psi\}$, $b(\xi) = W\left\{\overline{\psi}, \varphi\right\}$. Верны следующие равенства

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1, \quad \overline{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \overline{b}(\xi) = b(-\xi).$$

Коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$ непрерывны при $\operatorname{Im}\xi = 0$ и удовлетворяют асимптотическим равенствам

$$a(\xi) = 1 + O\left(|\xi|^{-1}\right), \quad b(\xi) = O\left(|\xi|^{-1}\right), \quad |\xi| \to \infty.$$

Невещественные нули $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ функции $a(\xi)$ являются собственными значениями оператора $L(t)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\xi > 0$. Собственные значения оператора $L(t)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\xi < 0$ совпадают с нулями функции $\overline{a}(\xi)$. Итак, множество $\{\xi_k, -\xi_k\}_{k=1}^N$ является собственными значениями оператора $L(t)$, и других собственных значений этот оператор не имеет. Требование отсутствия спектральных особенностей несамосопряженного оператора $L(0)$ означает отсутствие действительных нулей у функции $a(\xi)$, т. е. $a(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Функции

$$\overset{(s)}{\varphi}(x,\xi_k) \equiv \frac{\partial^s}{\partial \xi^s}\varphi(x,\xi)\Big|_{\xi=\xi_k}, \quad s = 1,\ldots,m_k-1,$$

называются *присоединенными функциями* к собственной функции $\varphi(x,\xi_k)$.

Аналогично определяются присоединенные функции к собственной функции $\psi(x,\xi_k)$.

Собственные и присоединенные функции удовлетворяют уравнениям

$$L\overset{(s)}{\varphi}(x,\xi_k) = \xi_k\overset{(s)}{\varphi}(x,\xi_k) + s\overset{(s-1)}{\varphi}(x,\xi_k); \quad \overset{(0)}{\varphi}(x,\xi_k) \equiv \varphi(x,\xi_k),$$
$$k = 1,\ldots,N, \quad s = 0,\ldots,m_k-1.$$

Существует такая цепочка чисел $\left\{\chi_0^k, \chi_1^k, \ldots, \chi_{m_k-1}^k\right\}$, что имеют место соотношения [20]

$$\overset{(l)}{\varphi}(x,\xi_k) = \sum_{\nu=0}^{l}\chi_{l-\nu}^k\frac{l!}{\nu!}\overset{(\nu)}{\psi}(x,\xi_k), \quad k = 1,\ldots,N,\ l = 0,\ldots,m_k-1.$$

Последовательность чисел $\left\{\chi_0^k,\ \chi_1^k,\ldots,\ \chi_{m_k-1}^k\right\}$ будем называть нормировочной цепочкой оператора L.

Для функции $\psi(x,\xi)$ справедливо (см. [21, с. 33]) следующее интегральное представление:

$$\psi(x,\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty \mathbf{K}\,(x,s)\,e^{i\xi\, s}ds, \tag{9}$$

где $\mathbf{K}\,(x,s) = (K_1(x,s), K_2(x,s))^T$. В представлении (9) ядро $\mathbf{K}\,(x,y)$ не зависит от ξ и имеет место равенство

$$u\,(x) = -2K_1\,(x,x)\,. \tag{10}$$

Компоненты ядра $\mathbf{K}\,(x,y)$ представлении (9) при $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко

$$\begin{aligned} K_2(x,y) + \int_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)\,ds = 0,\\ -K_1(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)\,ds = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi - i\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_k-1}\chi_{m_k-\nu-1}^k\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\frac{(z-\xi_k)^{m_k}}{a(z)}e^{izx}\right]\Big|_{z=\xi_k},$$

$a(z)$ — аналитическое продолжение функции $a(\xi)$ ($\operatorname{Im}\xi = 0$) в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, которое определяется по формуле

$$a(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left(1+|r^{+}(\xi)|\right)}{\xi - z}\,d\xi\right\}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\xi-\xi_j}{\xi-\bar{\xi}_j}\right)^{m_j}.$$

Теперь потенциал $u(x)$ определяется из равенства (10).

Определение 2. Набор величин

$$\left\{r^{+}(\xi),\, \xi\in\mathbb{R};\;\; \xi_k,\, \operatorname{Im}\xi_k > 0;\;\; \chi_j^k,\, k = 1,\ldots,N,\, j = 0,\ldots,m_k-1\right\}$$

называется *данными рассеяния* для системы (6).

Справедлива следующая теорема (см. [22, § 6.2]).

Теорема 1. *Данные рассеяния оператора L однозначно определяют L.*

Лемма 1. *Пусть вектор-функции $\varphi(x,\xi)$, $g_k^s(x,t)$, $s = 0,\ldots,m_k-1$, являются решениями следующих уравнений:*

$$L(t)\varphi = \xi\varphi, \quad L(t)g_k^s = \xi_k g_k^s + s g_k^{s-1}, \quad s = 0,\ldots,m_k-1,$$

тогда справедливы равенства

$$\frac{d}{dx}\left(g_{k1}^s\varphi_2 - g_{k2}^s\varphi_1\right) = i(\xi-\xi_k)\left(g_{k1}^s\varphi_2 + g_{k2}^s\varphi_1\right) - is\left(g_{k1}^{s-1}\varphi_2 + g_{k2}^{s-1}\varphi_1\right),$$

$$\frac{d}{dx}(g_{k1}^s\varphi_1 + g_{k2}^s\varphi_2) = -i(\xi+\xi_k)(g_{k1}^s\varphi_1 - g_{k2}^s\varphi_2) - is\left(g_{k1}^{s-1}\varphi_1 - g_{k2}^{s-1}\varphi_2\right),$$
$$s = 0,\ldots,m_k-1.$$

Эта лемма доказывается непосредственной проверкой.

Следствие 1. *При выполнении условий леммы* 1 *справедливы следующие равенства:*

$$g_{k1}^s\varphi_1 - g_{k2}^s\varphi_2 = i\sum_{l=0}^{s}\frac{1}{(\xi+\xi_k)^{l+1}}\frac{s\,!}{(s-l)\,!}\frac{d}{dx}V\left\{g_k^{s-l},\varphi\right\}, \tag{12}$$

а при $\xi \neq \xi_k$

$$g_{k1}^s\varphi_2 + g_{k2}^s\varphi_1 = -i\sum_{l=0}^{s}\frac{1}{(\xi-\xi_k)^{l+1}}\frac{s\,!}{(s-l)\,!}\frac{d}{dx}W\left\{g_k^{s-l},\varphi\right\}, \quad s = 0,\ldots,m_k-1, \tag{13}$$

где $V\{f,g\} \equiv f_1g_1 + f_2g_2$.

Следствие 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$g_{k1}^{s-1}\overset{(n)}{\varphi}_2(x,\xi_k) + g_{k2}^{s-1}\overset{(n)}{\varphi}_1(x,\xi_k) = \frac{n}{s}\left(g_{k1}^{s}\overset{(n-1)}{\varphi_2}(x,\xi_k) + g_{k2}^{s}\overset{(n-1)}{\varphi_1}(x,\xi_k)\right)$$
$$[4pt] + \frac{i}{s}\frac{d}{dx}W\left\{g_k^s,\overset{(n)}{\varphi}(x,\xi_k)\right\}, \quad s = 1,2,\ldots,m_k-1.$$

3. Эволюция данных рассеяния

Пусть потенциал $u(x,t)$ в системе уравнений $LY=\xi Y$ является решением уравнения

$$u_t + p(t)(u_{xxx}+6u^2u_x) = G(x,t), \tag{14}$$

где

$$G(x,t) = -q(t)u_x(x,t) + 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^{j}\left(g_{k1}^{j}g_{k1}^{m_k-1-j} - g_{k2}^{j}g_{k2}^{m_k-1-j}\right).$$

Оператор

$$A = p(t)\begin{pmatrix} -4i\xi^3+2iu^2\xi & 4u\xi^2+2iu_x\xi-2u^3-u_{xx} \\ -4u\xi^2+2iu_x\xi+2u^3+u_{xx} & 4i\xi^3-2iu^2\xi \end{pmatrix} \tag{15}$$

удовлетворяет соотношению Лакса

$$[L,A] \equiv LA-AL = ip(t)\begin{pmatrix} 0 & (-6u^2u_x-u_{xxx}) \\ (-6u^2u_x-u_{xxx}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение (14) можно переписать в виде

$$L_t + [L,A] = iR, \tag{16}$$

где $R = \begin{pmatrix} 0 & -G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$. Дифференцируя равенство $L\varphi=\xi\varphi$ относительно t, учитывая (16), имеем $(L-\xi)(\varphi_t - A\varphi) = -iR\varphi$. Используя метод вариации постоянных, можно записать

$$\varphi_t - A\varphi = B(x)\psi + D(x)\varphi. \tag{17}$$

Тогда для определения $B(x)$ и $D(x)$ получаем

$$MB_x\psi + MD_x\varphi = -R\varphi, \tag{18}$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для решения уравнения (18) вводим следующие обозначения: $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_2 & \varphi_1 \end{pmatrix}^T$, $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}^T$. Согласно (15) и определению вронскиана справедливы следующие равенства:

$$\hat{\psi}^T M\varphi = -\hat{\varphi}^T M\psi = a, \quad \hat{\psi}^T M\psi = \hat{\varphi}^T M\varphi = 0.$$

Умножая (18) на $\hat{\varphi}^T$ и $\hat{\psi}^T$, получаем

$$B_x = \frac{\hat{\varphi}^T R\varphi}{a}, \quad D_x = -\frac{\hat{\psi}^T R\varphi}{a}. \tag{19}$$

Согласно (15), при $x\to-\infty$ имеем

$$\varphi_t - A\varphi \to \begin{pmatrix} 4i\xi^3 p(t) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x},$$

поэтому, на основании (17), имеем $D(x) \to 4i\xi^3 p(t)$, $B(x) \to 0$ при $x \to -\infty$. Следовательно, из (19) можно определить

$$D(x) = -\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi\,dx + 4i\xi^3 p(t), \quad B(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi\,dx.$$

Таким образом, равенство (17) имеет следующий вид:

$$\varphi_t - A\varphi = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi\,dx\,\psi + \left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi\,dx + 4i\xi^3 p(t)\right)\varphi. \tag{20}$$

Предположим, что справедливо равенство

$$M(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) = \sum_{k=1}^{N}(M_{k1} + M_{k2}), \tag{21}$$

где

$$M = 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1}\left(g^j_{k1}g^{m_k-1-j}_{k1} - g^j_{k2}g^{m_k-1-j}_{k2}\right).$$

Сделаем следующие вычисления:

$$2\left(g^j_{k1}g^{m_k-1-j}_{k1} - g^j_{k2}g^{m_k-1-j}_{k2}\right)(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2)$$

$$= 2g^j_{k_1}g^{m_k-1-j}_{k_1}\varphi_1\psi_1 - 2g^j_{k_2}g^{m_k-1-j}_{k_2}\varphi_2\psi_2 - 2g^j_{k_2}g^{m_k-1-j}_{k_2}\varphi_1\psi_1 + 2g^j_{k_1}g^{m_k-1-j}_{k_1}\varphi_2\psi_2$$

$$= \left(g^j_{k1}\varphi_1 + g^j_{k2}\varphi_2\right)\left(g^{m_k-1-j}_{k1}\psi_1 - g^{m_k-1-j}_{k2}\psi_2\right) + \left(g^j_{k1}\varphi_1 - g^j_{k2}\varphi_2\right)\left(g^{m_k-1-j}_{k1}\psi_1 + g^{m_k-1-j}_{k2}\psi_2\right)$$

$$+ \left(g^j_{k1}\varphi_2 + g^j_{k2}\varphi_1\right)\left(g^{m_k-1-j}_{k1}\psi_2 - g^{m_k-1-j}_{k2}\psi_1\right) + \left(g^j_{k1}\varphi_2 - g^j_{k2}\varphi_1\right)\left(g^{m_k-1-j}_{k1}\psi_2 + g^{m_k-1-j}_{k2}\psi_1\right).$$

Откуда имеем

$$M_{k1} = \sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1}\left(g^j_{k1}\varphi_1 + g^j_{k2}\varphi_2\right)\left(g^{m_k-1-j}_{k1}\psi_1 - g^{m_k-1-j}_{k2}\psi_2\right)$$
$$+ \sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1}\left(g^j_{k1}\varphi_1 - g^j_{k2}\varphi_2\right)\left(g^{m_k-1-j}_{k1}\psi_1 + g^{m_k-1-j}_{k2}\psi_2\right).$$

Это равенство, исходя из равенства (13), можно записать в следующем виде:

$$M_{k1} = \sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1}\left[V\{g^j_k,\varphi\}\sum_{s=0}^{m_k-1-j}\frac{(-1)^s i}{(\xi+\xi_k)^{s+1}}\frac{(m_k-1-j)!}{(m_k-1-j-s)!}\frac{d}{dx}V\left\{g^{m_k-1-j-s}_k,\psi\right\}\right]$$
$$+ \sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1}\left[V\left\{g^{m_k-1-j}_k,\psi\right\}\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^l i}{(\xi+\xi_k)^{l+1}}\frac{j!}{(j-l)\,!}\frac{d}{dx}V\left\{g^{j-l}_k,\varphi\right\}\right].$$

Легко показать, что в правой части последнего равенства коэффициенты при $V\{g^q_k,\varphi\}\frac{d}{dx}V\{g^r_k,\psi\}$ и $V\{g^r_k,\psi\}\frac{d}{dx}V\{g^q_k,\varphi\}$, $0 \leqslant r+q \leqslant m_k-1$, одинаковые, поэтому M_{k1}

есть линейная комбинация выражений вида $\frac{d}{dx}\left(V\left\{f_k^r,\psi\right\}V\left\{f_k^q,\varphi\right\}\right)$, $0\leqslant r+q\leqslant m_k-1$, т. е. справедливо следующее:

$$M_{k1}=\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{s=0}^{m_k-1-j}\frac{(-1)^s iC_{m_k-1}^j}{(\xi+\xi_k)^{s+1}}\frac{(m_k-1-j)\,!}{(m_k-1-j-s)\,!}\frac{d}{dx}\left(V\left\{g_k^{m_k-1-j-s},\psi\right\}V\left\{g_k^j,\varphi\right\}\right). \quad (22)$$

Аналогичном образом можно показать справедливость следующего тождества для M_{k2}:

$$M_{k2}=\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{s=0}^{m_k-1-j}\frac{(-1)^s iC_{m_k-1}^j}{(\xi_k-\xi)^{s+1}}\frac{(m_k-1-j)!}{(m_k-1-j-s)!}\frac{d}{dx}\left(W\left\{g_k^{m_k-1-j-s},\psi\right\}W\left\{g_k^j,\varphi\right\}\right). \quad (23)$$

Точно так же, если снова воспользуемся вышеуказанным методом, получим равенство

$$M\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)=\sum_{k=1}^{N}(H_{k1}+H_{k2}),$$

где

$$H_{k1}=\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{s=0}^{m_k-1-j}C_{m_k-1}^j\frac{(-1)^s i}{(\xi+\xi_k)^{s+1}}\frac{(m_k-1-j)!}{(m_k-1-j-s)!}\frac{d}{dx}\left(V\left\{g_k^{m_k-1-j-s},\varphi\right\}V\left\{g_k^j,\varphi\right\}\right),$$

$$H_{k2}=\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{s=0}^{m_k-1-j}C_{m_k-1}^j\frac{(-1)^s i}{(\xi_k-\xi)^{s+1}}\frac{(m_k-1-j)!}{(m_k-1-j-s)!}\frac{d}{dx}\left(W\left\{g_k^{m_k-1-j-s},\varphi\right\}W\left\{g_k^j,\varphi\right\}\right).$$

Лемма 2. *Если вектор-функции* $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\xi)\\ \varphi_2(x,\xi)\end{pmatrix}$ *и* $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1(x,\xi)\\ \psi_2(x,\xi)\end{pmatrix}$ *являются решениями уравнения* (6), *то для их компонент выполняются равенства*

$$\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)dx=0, \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)dx=2i\,\xi q(t)a(\xi)b(\xi). \quad (25)$$

$\lhd$ Для доказательства справедливости тождество (24) нам требуется вычислить следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)dx=-q(t)\int_{-\infty}^{+\infty}u_x\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}M\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)dx.$$

Сначала вычислим первый интеграл в правой части последнего равенства. Действительно, используя формулы (5), (6), (7) и (8), можем выполнить следующие вычисления:

$$-q(t)\int_{-\infty}^{+\infty}u_x(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)\,dx=-\lim_{R\to\infty}q(t)\left[u(x,t)\left(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2\right)\right]\Big|_{-R}^{R}$$

$$+\,q(t)\int_{-\infty}^{\infty}u\left(\varphi_1'\psi_1+\varphi_1\psi_1'+\varphi_2'\psi_2+\varphi_2\psi_2'\right)dx=-\lim_{R\to\infty}q(t)\left[u(x,t)(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)\right]\Big|_{-R}^{R}$$

$$+\,q(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[\varphi_1'(-\psi_2'+i\xi\psi_2)+\psi_1'(-\varphi_2'+i\xi\varphi_2)+\varphi_2'(\psi_1'+\,i\xi\psi_1)+\psi_2'(\varphi_1'+i\xi\varphi_1)\big]\,dx$$

$$=-\lim_{R\to\infty}q(t)\,\big[u(x,t)\,(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)\,\big]\big|_{-R}^{R}+i\xi q(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\varphi_1\psi_2+\varphi_2\psi_1)'\,dx=0.$$

Теперь нам нужно вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M\,(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)\,dx.$$

Используя равенства (21), (22) и (23), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M\,(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)\,dx=0.$$

Согласно последним тождествам, мы можем получить следующее равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G\,(\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2)\,dx=0.$$

Для доказательства справедливости тождества (25) требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,dx=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q(t)u_x\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,dx.$$

Сначала вычислим первый интеграл в правой части последнего равенства

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(t)u_x\,\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,dx=-q(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,du=-\,q(t)u\,\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\,q(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\,\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)'\,dx=2q(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(u\varphi_1\varphi_1'+u\varphi_2\varphi_2'\big)\,dx$$

$$=2q(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[\big(-\varphi_2'+i\xi\varphi_2\big)\,\varphi_1'+\big(\varphi_1'+i\xi\varphi_1\big)\,\varphi_2'\big]\,dx=2i\,\xi q(t)\lim_{R\to\infty}(\varphi_1\varphi_2)\big|_{-R}^{R}=2i\,\xi q(t)a(\xi)b(\xi).$$

Справедливость равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}M\,\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,dx=0$$

показывается так же, как и выше. Таким образом, получим равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\,\big(\varphi_1^2+\varphi_2^2\big)\,dx=2i\,\xi q(t)a(\xi)b(\xi).\ \triangleright$$

Перейдем к нахождению эволюции нормировочной цепочки $\left\{\chi_0^n, \chi_1^n\ \ldots, \chi_{m_k-1}^n\right\}$, соответствующей собственному значению ξ_n, $n = 1, \ldots, N$. Для этого перепишем равенство (20) в виде

$$\varphi_t - A\varphi = \frac{1}{a}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} G\left(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2\right) dx\varphi - \int\limits_{-\infty}^{x} G\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) dx\,\psi\right) + 4i\,\xi^3 p(t)\varphi. \tag{26}$$

Учитывая вид $a(\xi)$ и равенство (12), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{x} M_{k1}\,dx\varphi - \int\limits_{-\infty}^{x} H_{k1}\,dx\,\psi = a(\xi)\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \int\limits_{-\infty}^{x}\left(g_{k1}^{m_k-1-j}\varphi_1 - g_{k2}^{m_k-1-j}\varphi_2\right) dx\,\tilde{g}_k^j,$$

где $\tilde{g}_k^j = \left(g_{k2}^j,\ -g_{k1}^j\right)^T$. Точно так же, применяя равенство (13), получим равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{x} M_{k2}\,dx\varphi - \int\limits_{-\infty}^{x} H_{k2}\,dx\,\psi = a(\xi)\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \int\limits_{-\infty}^{x}\left(g_{k1}^{m_k-1-j}\varphi_2 + g_{k2}^{m_k-1-j}\varphi_1\right) dx\,g_k^j.$$

На основании вышеизложенного, равенство (26) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\varphi_t - A\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \int\limits_{-\infty}^{x}\left(g_{k1}^{m_k-1-j}\varphi_1 - g_{k2}^{m_k-1-j}\varphi_2\right) dx\,\tilde{g}_k^j \\
+\frac{1}{a}\left(-q(t)\int\limits_{-\infty}^{x} u_x(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2)\,dx\varphi - q(t)\int\limits_{-\infty}^{x} u_x(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,dx\,\psi\right) \\
+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \int\limits_{-\infty}^{x}\left(g_{k1}^{m_k-1-j}\varphi_2 + g_{k2}^{m_k-1-j}\varphi_1\right) dx\,g_k^j + 4i\,\xi^3 p(t)\varphi.
\end{gathered}$$

Дифференцируя это равенство $m_n - 1$ раз по ξ и полагая $\xi = \xi_n$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overset{(m_n-1)}{\varphi_n}}{\partial t} - A_0 \overset{(m_n-1)}{\varphi_n} - (m_n-1)A_1 \overset{(m_n-2)}{\varphi_n} - \frac{(m_n-1)(m_n-2)}{2}A_2 \overset{(m_n-3)}{\varphi_n} \\
-\frac{(m_n-1)(m_n-2)(m_n-3)}{6}A_3 \overset{(m_n-4)}{\varphi_n} = R_1(x) + R_2(x) \\
+\sum_{j=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^j \int\limits_{-\infty}^{x}\left(g_{n1}^{m_n-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_n-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n1}}\right) dx\,g_n^j + 4i\,\xi_n^3 p(t) \overset{(m_n-1)}{\varphi_n} \\
+12i\xi_n^2(m_n-1)p(t) \overset{(m_n-2)}{\varphi_n} + 12i\,\xi_n(m_n-1)(m_n-2)p(t) \overset{(m_n-3)}{\varphi_n} \\
+4i(m_n-1)(m_n-2)(m_n-3)p(t) \overset{(m_n-4)}{\varphi_n} \\
+q(t)\begin{pmatrix} -\overset{(m_n-1)}{\varphi_{2n}} \\ \overset{(m_n-1)}{\varphi_{1n}} \end{pmatrix} - 2i\xi_n q(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \overset{(m_n-1)}{\varphi_{2n}} \end{pmatrix} - 2i(m_n-1)q(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \overset{(m_n-2)}{\varphi_{2n}} \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{27}$$

где $A_l = \frac{d^l}{d\xi^l}A\Big|_{\xi=\xi_n}$, $l = 0, 1, 2, 3,$

$$R_1(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{k1}^{m_k-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n1}} - g_{k2}^{m_k-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n2}} \right) dx \, \tilde{g}^j_k,$$

$$R_2(x) = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq 1}}^{N} \sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{k1}^{m_k-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n2}} + g_{k2}^{m_k-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n1}} \right) dx \, g^j_k.$$

Заметим, что согласно (12) и (13)

$$\lim_{x\to\infty} R_1(x) = \lim_{x\to\infty} R_2(x) = 0.$$

Используя следствие 1 леммы 1, можно показать, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m_n-1} C^j_{m_n-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_k-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_k-1-j} \overset{(m_n-1)}{\varphi_{n1}} \right) dx \, g^j_n \\
&= \sum_{j=0}^{m_n-1} C^j_{m_n-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n1}} \right) dx \, g^j_n + \sum_{j=1}^{m_n-1} E_j(x) g^j_n,
\end{aligned} \tag{28}$$

где $E_j(x)$ есть линейная комбинация выражений вида $W\{g^r_n, \overset{(q)}{\varphi_n}\}$ $(r-q=j)$, и поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} E_j(x) = 0$. Согласно определению функций g^s_n и $\overset{(s)}{\varphi_n}$, $s = 0,\ldots,m_n-1$, существуют числа $d_0, d_1, \ldots, d_{m_n-1}$ такие, что

$$g^j_n = \sum_{s=0}^{j} C^s_j \, d_{j-s} \overset{(s)}{\varphi_n}, \quad j = 0,\ldots,m_n-1.$$

Поэтому мы можем выполнить следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m_n-1} C^j_{m_n-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n1}} \right) dx \, g^j_n \\
&= \sum_{j=0}^{m_n-1} C^j_{m_n-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n1}} \right) dx \sum_{s=0}^{j} C^s_j \, d_{j-s} \overset{(s)}{\varphi_n} \\
&= \sum_{s=0}^{m_n-1} \sum_{j=s}^{m_n-1} C^j_{m_n-1} C^s_j \, d_{j-s} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_n-1} \overset{(m_n-1-j)}{\varphi_{n1}} \right) dx \, \overset{(s)}{\varphi_n} \\
&= \sum_{s=0}^{m_n-1} C^s_{m_n-1} \left(\sum_{k=0}^{m_n-1-s} C^k_{m_n-1-s} \, d_{m_n-1-k-s} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} \overset{(k)}{\varphi_{n2}} + g_{n2}^{m_n-1} \overset{(k)}{\varphi_{n1}} \right) dx \right) \overset{(s)}{\varphi_n} \\
&= \sum_{s=0}^{m_n-1} C^s_{m_n-1} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} g_{n2}^{m_n-1-s} + g_{n2}^{m_n-1} g_{n1}^{m_n-1-s} \right) dx \, \overset{(s)}{\varphi_n} .
\end{aligned}$$

Таким образом, согласно (27) равенство (28) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \overset{(m_n-1)}{\varphi_n}}{\partial t} - A_0 \overset{(m_n-1)}{\varphi_n} -(m_n-1)A_1 \overset{(m_n-2)}{\varphi_n} - \frac{(m_n-1)(m_n-2)}{2} A_2 \overset{(m_n-3)}{\varphi_n}$$
$$- \frac{(m_n-1)(m_n-2)(m_n-3)}{6} A_3 \overset{(m_n-4)}{\varphi_n}$$
$$= \sum_{s=0}^{m_n-1} C^s_{m_n-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \left(g_{n1}^{m_n-1} g_{n2}^{m_n-1-s} + g_{n2}^{m_n-1} g_{n1}^{m_n-1-s}\right) dx \overset{(s)}{\varphi_n} + 4i\,\xi_n^3 p(t) \overset{(m_n-1)}{\varphi_n}$$
$$+ 12i\,\xi_n^2 (m_n-1)p(t) \overset{(m_n-2)}{\varphi_n} + 12i\,\xi_n (m_n-1)(m_n-2)p(t) \overset{(m_n-3)}{\varphi_n}$$
$$+ 4i(m_n-1)(m_n-2)(m_n-3)p(t) \overset{(m_n-4)}{\varphi_n} + R_1(x) + R_2(x) + \sum_{j=1}^{m_n-1} Q_j(x) g_n^j$$
$$+ q(t)\begin{pmatrix} -\overset{(m_n-1)}{\varphi_{2n}} \\ \overset{(m_n-1)}{\varphi_{1n}} \end{pmatrix} - 2i\xi_n q(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{(m_n-1)}{\varphi_{2n}} \end{pmatrix} - 2i(m_n-1)q(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{(m_n-2)}{\varphi_{2n}} \end{pmatrix}.$$

Используя (5), (2), (27), (28), перейдем в последнем равенстве к переделу при $x \to \infty$. Приравнивая коэффициенты при $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(ix)^l \cdot e^{i\xi_n x}$, $l = m_n - 1, m_n - 2, \ldots, 0$, получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + A_0^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + A_0^n(t)\right)\chi_1^n + \left(24i\xi_n^2 p(t) - 2iq(t) + A_1^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + A_0^n(t)\right)\chi_2^n + \left(24i\xi_n^2 p(t) - 2iq(t) + A_1^n(t)\right)\chi_1^n$$
$$+ \left(24i\xi_n p(t) + A_2^n(t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + A_0^n(t)\right)\chi_3^n + \left(24i\xi_n^2 p(t) - 2iq(t) + A_1^n(t)\right)\chi_2^n$$
$$+ \left(24i\xi_n p(t) + A_2^n(t)\right)\chi_1^n + \left(8ip(t) + A_3^n(t)\right)\chi_0^n,$$
$$\frac{d\chi_l^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 p(t) - 2i\xi_n q(t) + A_0^n(t)\right)\chi_l^n + \left(24i\xi_n^2 p(t) - 2i\xi_n q(t) + A_1^n(t)\right)\chi_{l-1}^n \tag{29}$$
$$+ \left(24i\xi_n p(t) + A_2^n(t)\right)\chi_{l-2}^n + \left(8ip(t) + A_3^n(t)\right)\chi_{l-3}^n + \sum_{s=0}^{l-4} A_{l-s}^n(t)\chi_s^n,$$
$$n = 1, 2, \ldots, N, \quad l = 4, 5, \ldots, m_n - 1.$$

Теперь приступим к вычислению эволюций $r^+(\xi)$ и ξ_j, $j = 1, \ldots, N$. Согласно (8), равенство (20) можно переписать виде

$$a_t\overline{\psi} + b_t\psi - A\left(a\overline{\psi} + b\psi\right) = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi\,dx\,\psi + \left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi\,dx + 4i\,\xi^3 p(t)\right)\left(a\overline{\psi} + b\psi\right).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $x \to +\infty$ и учитывая (15), можем вывести следующие равенства:

$$a_t = -\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\varphi\, dx, \quad b_t = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}^T R\varphi\, dx - \frac{b}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\varphi\, dx + 8i\,\xi^3 p(t) b. \tag{30}$$

Следовательно, при $\operatorname{Im}\xi = 0$ можем вывести выражение

$$\frac{dr^+}{dt} = 8i\,\xi^3 p(t) r^+ - \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} G\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) dx. \tag{31}$$

Лемма 3. *Собственные значения и функция рассеяния оператора L меняются по t следующим образом:*

$$m_k(t) = m_k(0), \;\; \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{32}$$

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(8i\xi^3 p(t) - 2i\xi q(t)\right) r^+, \quad \operatorname{Im}\xi = 0. \tag{33}$$

$\lhd$ Согласно равенствам (30) и (24) имеем $a_t = 0$. Поэтому справедливы следующие выражения: $m_k(t) = m_k(0)$, $\xi_k(t) = \xi_k(0)$, $k = 1, \ldots, N$. Учитывая (25), из (31) легко получаем тождество (33). $\rhd$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если система функций $u(x,t)$, $g_k^j(x,t)$, $k = 1, \ldots, N$, $j = 0, \ldots, m_k - 1$, является решением задачи* (1)–(5), *то данные рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (29), (32) *и* (33).

Замечание 1. Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(5).

Пусть задана функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (4). Тогда решение задачи (1)–(5) находится по следующему алгоритму.

• Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ и получаем данные рассеяния

$$\left\{r^+(\xi, 0), \xi \in \mathbb{R};\;\; \xi_k(0), \operatorname{Im}\xi_k > 0;\;\; \chi_j^k(0), k = 1, \ldots, N, \; j = 0, \ldots, m_k - 1\right\}$$

для оператора $L(0)$.

• Используя результаты теоремы 2, находим данные рассеяния при $t > 0$:

$$\left\{r^+(\xi, t), \xi \in \mathbb{R};\;\; \xi_k(t), \operatorname{Im}\xi_k > 0;\;\; \chi_j^k(t), k = 1, \ldots, N, j = 0, \ldots, m_k - 1\right\}.$$

• Методом, основанным на интегральном уравнении Гельфанда — Левитана — Марченко, решается обратная задача рассеяния, т. е. находим единственную (согласно теореме 1) $u(x,t)$ по данным рассеяния при $t > 0$, полученным на предыдущем шаге.

• После этого решаем прямую задачу для оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ и находим функции $g_k^j(x,t)$, $k = 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, m_j - 1$.

Приведем пример, иллюстрирующий применение этого алгоритма.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + p(t)(6u^2 u_x + u_{xxx}) + q(t)u_x = 2\left(g_{11}^2 - g_{12}^2\right), \\ Lg_1 = \xi_1 g_1; \quad u(x,0) = -\dfrac{2}{\operatorname{ch} 2x}, \end{cases} \tag{34}$$

где

$$p(t) = 1 - \frac{e^{-2t(t+4)}}{32}, \quad q(t) = 2t - \frac{e^{-2t(t+4)}}{8}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{11} g_{12}\, dx = A_0^1(t) = \frac{e^{-8t-2t^2}}{4}.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0) : \{r^+(0) = 0,\ \xi_1(0) = i,\ \chi_0^1(0) = 2i\}$. Согласно теореме 2, эволюция данных теории рассеяния выглядит следующим образом:

$$\xi_1(t) = \xi_1(0) = i, \quad r^+(t) = 0, \quad \chi_0^1(t) = 2ie^{-8t-2t^2}.$$

Следовательно, $F(x) = 2e^{-x-8t-2t^2}$. Решая систему интегральных уравнений (11), получим

$$K_1(x,y) = \frac{2e^{-x-y+8t+2t^2}}{1+e^{-4x+16t+4t^2}}.$$

Откуда находим решение задачи Коши (34):

$$u\,(x,t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}\left(2x - 8t - 2t^2\right)}, \quad g_{11}(x,t) = \frac{e^{-3x+8t+2t^2}}{1+e^{-4x+16t+4t^2}}, \quad g_{12}(x,t) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-4x+16t+4t^2}}.$$

4. Нагруженное уравнение мКФ с источником

В работах А. М. Нахушева [23] дается наиболее общее определение нагруженных уравнений и проводится подробная классификация различных нагруженных уравнений. Среди работ, посвященных нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы [24–31].

Перейдем теперь к рассмотрению особого случая уравнения (1), а именно, рассмотрим нагруженное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза с источником:

$$\begin{aligned} u_t + P(u(x_0,t))\left(6u^2 u_x + u_{xxx}\right) &+ Q(u(x_1,t))u_x \\ &= 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \left(g_{k1}^j g_{k1}^{m_k-1-j} - g_{k2}^j g_{k2}^{m_k-1-j}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

где $P(y)$ и $Q(z)$ полиномы от y и z соответственно. Уравнение (35) не является частным случаем уравнения (1), так как в уравнении (35) коэффициенты зависят от значения решения на многообразии меньшей размерности. Если в задаче (1)–(5) вместо уравнении (1) рассмотрим уравнение (35), то справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если система функций $u(x,t)$, $g_k^j(x,t)$, $k = 1,\ldots,N$, $j = 0,\ldots,m_k-1$, является решением задачи (35)+(2)–(5), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:*

$$m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = 1,\ldots,N,$$

$$\frac{dr^+}{dt} = \big[8i\xi^3 P(u(x_0,t)) - 2i\xi Q(u(x_1,t))\big] r^+, \quad \operatorname{Im}\xi = 0,$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = \big[8i\xi_n^3 P(u(x_0,t)) - 2i\xi_n Q(u(x_1,t)) + A_0^n(t)\big]\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = \big[8i\xi_n^3 P(u(x_0,t)) - 2i\xi_n Q(u(x_1,t)) + A_0^n(t)\big]\chi_1^n$$
$$+\big[24i\xi_n^2 P(u(x_0,t)) - 2iQ(u(x_1,t)) + A_1^n(t)\big]\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = \big[8i\xi_n^3 P(u(x_0,t)) - 2i\xi_n Q(u(x_1,t)) + A_0^n(t)\big]\chi_2^n$$
$$+\big[24i\xi_n^2 P(u(x_0,t)) - 2iQ(u(x_1,t)) + A_1^n(t)\big]\chi_1^n + \big[24i\xi_n P(u(x_0,t)) + A_2^n(t)\big]\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = \big[8i\xi_n^3 P(u(x_0,t)) - 2i\xi_n Q(u(x_1,t)) + A_0^n(t)\big]\chi_3^n$$
$$+\big[24i\xi_n^2 P(u(x_0,t)) - 2iQ(u(x_1,t)) + A_1^n(t)\big]\chi_2^n$$
$$+\big[24i\xi_n P(u(x_0,t)) + A_2^n(t)\big]\chi_1^n + \big[8iP(u(x_0,t)) + A_3^n(t)\big]\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_l^n}{dt} = \big[8i\xi_n^3 P(u(x_0,t)) - 2i\xi_n Q(u(x_1,t)) + A_0^n(t)\big]\chi_l^n$$
$$+\big[24i\xi_n^2 P(u(x_0,t)) - 2i\xi_n Q(u(x_1,t)) + A_1^n(t)\big]\chi_{l-1}^n + \big[24i\xi_n P(u(x_0,t)) + A_2^n(t)\big]\chi_{l-2}^n$$
$$+\big[8iP(u(x_0,t)) + A_3^n(t)\big]\chi_{l-3}^n + \sum_{s=0}^{l-4} A_{l-s}^n(t)\chi_s^n, \quad n=1,\dots,N,\ l=4,\dots,m_n-1.$$

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих справедливость полученных результатов для нагруженного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с источником.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 2\left(g_{11}^2 - g_{12}^2\right), \\ Lg_1 = \xi_1 g_1; \quad u(x,0) = -\dfrac{2}{\operatorname{ch} 2x}, \end{cases}$$

где

$$\gamma(t) = \left(\frac{e^{-9t}-2}{8}\right)\operatorname{ch} 9t, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{11}\, g_{12}\, dx = A_0^1(t) = \frac{1}{4}e^{-9t}. \tag{36}$$

Как и в примере 1, данные рассеяния оператора $L(0)$ имеют вид: $\{r^+(0)=0,\ \xi_1(0)=i,\ \chi_0^1(0)=2i\}$. Согласно теореме 3, имеем $\xi_1(t)=\xi_1(0)=i$, $r^+(t)=0$, $\chi_0^1(t)=2ie^{\mu(t)}$, где

$$\mu(t) = 8t + 2\int\limits_0^t \gamma(\tau)u(0,\tau)\,d\tau + 2\int\limits_0^t A_0^1(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

Следовательно, $F(x) = 2e^{-x+\mu(t)}$. Решая систему интегральных уравнений (11), можно получить

$$K_1(x,y) = \frac{2e^{-x-y+\mu(t)}}{1+e^{-4x+2\mu(t)}}.$$

Используя последнее равенство и формулу (10), получаем

$$u(x,t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}(2x-\mu(t))}.$$

Если в последнем равенстве подставим $x = 0$, то, учитывая (37), имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} \mu'(t) = -\dfrac{8\gamma(t)e^{\mu(t)}}{1+e^{2\mu(t)}} + 8 + 2A_0^1(t), \\ \mu(0) = 0. \end{cases}$$

Учитывая (36), находим решение этой задачи $\mu(t) = 9t$. В результате решение рассматриваемой задачи выражается следующим образом:

$$u\,(x,t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}(2x-9t)}, \quad g_{11}(x,t) = \frac{e^{-3x+9t}}{1+e^{-4x+18t}}, \quad g_{12}(x,t) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-4x+18t}}.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + \beta(t)u(1,t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + \gamma(t)u(0,t)u_x = 2\left(g_{11}^2 - g_{12}^2\right), \\ Lg_1 = \xi_1 g_1; \;\; u(x,0) = -\dfrac{2}{\operatorname{ch} 2x}, \end{cases}$$

где

$$A_0^1(t) = \frac{1}{4}e^{\frac{3t}{2t+4}}, \quad \beta(t) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{7t+8}{2t+4}\right)}{16(t+2)^2}, \quad \gamma(t) = \frac{\left(4+(t+2)^2 e^{\frac{3t}{2t+4}}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{3t}{2t+4}\right)}{8(t+2)^2}.$$

Решение данной задачи имеет вид

$$u\,(x,t) = -\frac{2}{\operatorname{ch}\left(2x+\frac{3t}{2t+4}\right)}, \quad g_{11}(x,t) = \frac{e^{-3x-\frac{3t}{2t+4}}}{1+e^{-4x-\frac{3t}{t+2}}}, \quad g_{12}(x,t) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-4x-\frac{3t}{t+2}}}.$$

Литература

1. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collislontess plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett.—1965.—Vol. 15, № 6.—P. 240–243.
2. *Gardner C. S., Greene I. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett.—1967.—Vol. 19.—P. 1095–1097.
3. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math.—1968.—Vol. 21, № 5.—P. 467–490. DOI: 10.1002/cpa.3160210503.
4. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперим. и теор. физики.—1971.—Т. 61.—С. 118–134.
5. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan.—1972.—Vol. 32.—P. 1681. DOI: 10.1143/JPSJ.32.1681.
6. *Khater A. H., El-Kalaawy O. H., Callebaut D. K.* Backlund transformations and exact solutions for Alfven solitons in a relativistic electron–positron plasma // Physica Scripta.—1998.—Vol. 58, № 6.—P. 545–548. DOI: 10.1088/0031-8949/58/6/001.
7. *Tappert F. D., Varma C. M.* Asymptotic theory of self-trapping of heat pulses in solids // Phys. Rev. Lett.—1970.—Vol. 25.—P. 1108–1111. DOI: 10.1103/PhysRevLett.25.1108.
8. *Mamedov K. A.* Integration of mKdV equation with a self-consistent source in the class of finite density functions in the case of moving eigenvalues // Russian Mathematics.—2020.—Vol. 64.—P. 66–78. DOI: 10.3103/S1066369X20100072.

9. *Wu J., Geng X.* Inverse scattering transform and soliton classification of the coupled modified Korteweg–de Vries equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.—2017.—Vol. 53.—P. 83–93. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.03.022.
10. *Khasanov A. B., Hoitmetov U. A.* On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions // The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Math.—2021.—Vol. 38.—P. 19–35. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.38.19.
11. *Vaneeva O.* Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: an equivalence based approach // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.—2012.—Vol. 17, № 2.—P. 611–618. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.06.038.
12. *Das S., Ghosh D.* AKNS formalism and exact solutions of KdV and modified KdV equations with variable-coefficients // International Journal of Advanced Research in Mathematics.—2016.—Vol. 6.—P. 32–41. DOI: 10.18052/www.scipress.com/IJARM.6.32.
13. *Zheng X., Shang Y., Huang Y.* Abundant Explicit and Exact Solutions for the variable Coefficient mKdV Equations // Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis.—2013.—7 p.—Article ID 109690. DOI: 10.1155/2013/109690.
14. *Демонтис Ф.* Точные решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза // Теоретическая и математическая физика.—2011.—Т. 168, № 1.—С. 35–48.
15. *Zhang D.-J., Zhao S.-L., Sun Y.-Y., Zhou J.* Solutions to the modified Korteweg–de Vries equation // Reviews in Math. Phys.—2014.—Vol. 26, № 7, 1430006.—42 p. DOI: 10.1142/S0129055X14300064.
16. *Hirota R.* Exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons // J. Phys. Soc. Jpn.—1972.—Vol. 33.—P. 1456–1458. DOI: 10.1143/JPSJ.33.1456.
17. *Gesztesy T., Schweiger W., Simon B.* Commutation methods applied to the mKdV-equation // Trans. Amer. Math. Soc.—1991.—Vol. 324.—P. 465–525. DOI: 10.2307/2001730.
18. *Pradhan K., Panigrahi P. K.* Parametrically controlling solitary wave dynamics in the modified Korteweg–de Vries equation // J. Phys. A: Math. Gen.—2006.—Vol. 39.—P. 343–348. DOI: 10.1088/0305-4470/39/20/L08.
19. *Yan Z.* The modified KdV equation with variable coefficients:Exact uni/bi-variable travelling wave-like solutions // Applied Mathematics and Computation.—2008.—Vol. 203.—P. 106–112. DOI: 10.1016/j.amc.2008.04.006.
20. *Хасанов А. Б.* Об обратной задачи теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 277, № 3.—С. 559–562.
21. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи.—М.: Мир, 1987.—479 с.
22. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения.—М.: Мир, 1988.—697 с.
23. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—304 с.
24. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифф. ур-я.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 86–94.
25. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2004.—Т. 44, № 4.—С. 694–716.
26. *Hasanov A. B., Hoitmetov U. A.* On integration of the loaded Korteweg–de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions // Proc. Inst. Math. Mech. NAS Azer.—2021.—Vol. 47, № 2.—P. 250–261. DOI: 10.30546/2409-4994.47.2.250.
27. *Hoitmetov U. A.* Integration of the loaded KdV equation with a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Siberian Adv. Math.—2022.—Vol. 33, № 2.—P. 102–114. DOI: 10.1134/S1055134422020043.
28. *Хасанов А. Б., Хоитметов У. А.* Интегрирование общего нагруженного уравнения Кортевега — де Фриза с интегральным источником в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Изв. вузов. Мат.—2021.—№ 7.—С. 52–66.
29. *Khasanov A. B., Hoitmetov U. A.* On complex-valued solutions of the general loaded Korteweg–de Vries equation with a source // Diff. Equat.—2022.—Vol. 58, № 3.—P. 381–391. DOI: 10.1134/S0012266122030089.
30. *Hoitmetov U. A.* Integration of the loaded general Korteweg–de Vries equation in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Eurasian Math. J.—2022.—Vol. 13, № 2.—P. 43–54. DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-2-43-54.
31. *Babajanov B., Abdikarimov F.* The Application of the functional variable method for solving the loaded non-linear evaluation equations // Front. Appl. Math. Stat.—2022.—Vol. 8, 912674. DOI: 10.3389/fams.2022.912674.

Статья поступила 17 августа 2022 г.

Собиров Шехзод Кучкарбой Угли
Ургенчский государственный университет,
аспирант кафедры прикладная математика и математическая физика
УЗБЕКИСТАН, 220100, Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14
E-mail: shexzod1994@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-0405-3591

Хоитметов Умид Азадович
Ургенчский государственный университет,
доцент кафедры прикладная математика и математическая физика
УЗБЕКИСТАН, 220100, Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14
E-mail: x_umid@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5974-6603

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 3, P. 123–142

INTEGRATION OF THE MODIFIED KORTEWEG–DE VRIES EQUATION WITH TIME-DEPENDENT COEFFICIENTS AND WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

Sobirov, Sh. K.[1] and Hoitmetov, U. A.[1]

[1] Urgench State University, 14 Kh. Alimdjan St., Urgench 220100, Uzbekistan
E-mail: x_umid@mail.ru, shexzod1994@mail.ru

Abstract. In this paper, we consider the Cauchy problem for the modified Korteweg–de Vries equation with time-dependent coefficients and a self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions. To solve the stated problem, the inverse scattering method is used. Lax pairs are found, which will make it possible to apply the inverse scattering method to solve the stated Cauchy problem. Note that in the case under consideration the Dirac operator is not self-adjoint, so the eigenvalues can be multiple. Equations are found for the dynamics of change in time of the scattering data of a non-self-adjoint operator of the Dirac operator with a potential that is a solution of the modified Korteweg–de Vries equation with variable time-dependent coefficients and with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions. A special case of a modified Korteweg–de Vries equation with time-dependent variable coefficients and a self-consistent source, namely, a loaded modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source, is considered. Equations are found for the dynamics of change in time of the scattering data of a non-self-adjoint operator of the Dirac operator with a potential that is a solution of the loaded modified Korteweg–de Vries equation with variable coefficients in the class of rapidly decreasing functions. Examples are given to illustrate the application of the obtained results.

Keywords: loaded modified Korteweg–de Vries equation, Jost solutions, scattering data, Gelfand–Levitan–Marchenko integral equation.

AMS Subject Classification: 34L25, 35P25, 47A40, 37K15.

For citation: *Sobirov, Sh. K. and Hoitmetov, U. A.* Integration of the Modified Korteweg–De Vries Equation with Time-Dependent Coefficients and with a Self-Consistent Source, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 123–142 (in Russian). DOI: 10.46698/q2165-6700-0718-r.

References

1. *Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D.* Interaction of Solitons in a Collislontess Plasma and the Recurrence of Initial States, *Physical Review Letters*, 1965, vol. 15, no. 6. pp. 240–243.
2. *Gardner, C. S., Greene, I. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M.* Method for Solving the Korteweg–de Vries Equation, *Physical Review Letters*, 1967, vol. 19, pp. 1095–1097.

3. *Lax, P. D.* Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1968, vol. 21, no. 5, pp. 467–490. DOI: 10.1002/cpa.3160210503.
4. *Zakharov, V. E. and Shabat, A. B.* Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1972, vol. 34, no. 1, pp. 62–69.
5. *Wadati, M.* The Exact Solution of the Modified Korteweg–de Vries Equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, vol. 32, pp. 1681. DOI: 10.1143/JPSJ.32.1681.
6. *Khater, A. H., El-Kalaawy, O. H. and Callebaut, D. K.* Backlund Transformations and Exact Solutions for Alfven Solitons in a Relativistic Electron–Positron Plasma, *Physica Scripta*, 1998, vol. 58, no. 6, pp. 545–548. DOI: 10.1088/0031-8949/58/6/001.
7. *Tappert, F. D. and Varma, C. M.* Asymptotic Theory of Self-trapping of Heat Pulses in Solids, *Physical Review Letters*, 1970, vol. 25, pp. 1108–1111. DOI: 10.1103/PhysRevLett.25.1108.
8. *Mamedov, K. A.* Integration of mKdV Equation with a Self-Consistent Source in the Class of Finite Density Functions in the Case of Moving Eigenvalues, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, pp. 66–78. DOI: 10.3103/S1066369X20100072.
9. *Wu, J. and Geng, X.* Inverse Scattering Transform and Soliton Classification of the Coupled Modified Korteweg–de Vries Equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, vol. 53, pp. 83–93. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.03.022.
10. *Khasanov, A. B. and Hoitmetov, U. A.* On Integration of the Loaded mKdV Equation in the Class of Rapidly Decreasing Functions, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 38, pp. 19–35. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.38.19.
11. *Vaneeva, O.* Lie Symmetries and Exact Solutions of Variable Coefficient mKdV Equations: an Equivalence Based Approach, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 611–618. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.06.038.
12. *Das, S. and Ghosh, D.* AKNS Formalism and Exact Solutions of KdV and Modified KdV Equations with Variable-Coefficients, *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 2016, vol. 6, pp. 32–41. DOI: 10.18052/www.scipress.com/IJARM.6.32.
13. *Zheng, X., Shang, Y. and Huang, Y.* Abundant Explicit and Exact Solutions for the variable Coefficient mKdV Equations, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, 2013, 7 p., Article ID 109690. DOI: 10.1155/2013/109690.
14. *Demontis, F.* Exact Solutions of the Modified Korteweg–de Vries Equation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2011, vol. 168, no. 1, pp. 886–897. DOI: 10.1007/s11232-011-0072-4.
15. *Zhang, D.-J., Zhao, S.-L., Sun, Y.-Y. and Zhou, J.* Solutions to the Modified Korteweg–de Vries Equation, *Reviews in Mathematical Physics*, 2014, vol. 26, no. 7, 1430006, 42 p. DOI: 10.1142/S0129055X14300064.
16. *Hirota, R.* Exact Solution of the modified Korteweg–de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, vol. 33, pp. 1456–1458. DOI: 10.1143/JPSJ.33.1456.
17. *Gesztesy, T., Schweiger, W. and Simon, B.* Commutation Methods Applied to the mKdV-Equation, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 324, pp. 465–525. DOI: 10.2307/2001730.
18. *Pradhan, K. and Panigrahi, P. K.* Parametrically Controlling Solitary Wave Dynamics in the Modified Korteweg–de Vries Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, vol. 39, pp. 343–348. DOI: 10.1088/0305-4470/39/20/L08.
19. *Yan, Z.* The Modified KdV Equation with Variable Coefficients: Exact uni/bi-variable Travelling Wave-like Solutions, *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 203, pp. 106–112. DOI: 10.1016/j.amc.2008.04.006.
20. *Khasanov, A. B.* On the Inverse Problem of Scattering Theory for a System of Two Non-Self-Adjoint Differential Equations of the First Order, *Doklady akademii nauk SSSR* [Soviet Mathematics — Doklady], 1984, vol. 277, no. 3, pp. 559–562 (in Russian).
21. *Ablowitz, M. J. and Segur, H. Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Philadelphia, SIAM, 1987, 438 p.
22. *Dodd, R., Eilbeck, J., Gibbon, J. and Morris, H. Solitons and Nonlinear Wave Equations*, London at al, Academic Press, 1982, 630 p.
23. *Nakhushev, A. M. Equations of Mathematical Biology*, Moscow, Visshaya Shkola, 1995, 304 p. (in Russian).
24. *Nakhushev, A. M.* Loaded Equations and Their Applications, *Differencial'nye uravnenija* [Differential Equations], 1983, vol. 19, no. 1, pp. 86–94 (in Russian).
25. *Kozhanov, A. I.* Nonlinear Loaded Equations and Inverse Problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 657–675.

26. *Hasanov, A. B. and Hoitmetov, U. A.* On Integration of the Loaded Korteweg–de Vries Equation in the Class of Rapidly Decreasing Functions, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 2021, vol. 47, no. 2, pp. 250–261. DOI: 10.30546/2409-4994.47.2.250.
27. *Hoitmetov, U. A.* Integration of the Loaded KdV Equation with a Self-consistent Source of Integral Type in the Class of Rapidly Decreasing Complex-valued Functions, *Siberian Advances in Mathematics*, 2022, vol. 33, no. 2, pp. 102–114. DOI: 10.1134/S1055134422020043.
28. *Khasanov, A. B. and Hoitmetov, U. A.* Integration of the General Loaded Korteweg–de Vries Equation with an Integral Type Source in the Class of Rapidly Decreasing Complex-Valued Functions, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65 no. 7 pp. 43–57. DOI: 10.3103/S1066369X21070069.
29. *Khasanov, A. B. and Hoitmetov, U. A.* On Complex-Valued Solutions of the General Loaded Korteweg–de Vries Equation with a Source, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 381–391. DOI: 10.1134/S0012266122030089.
30. *Hoitmetov, U. A.* Integration of the Loaded General Korteweg–de Vries Equation in the Class of Rapidly Decreasing Complex-valued Functions, *Eurasian Mathematical Journal*, 2022, vol. 13, no. 2, pp. 43–54. DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-2-43-54.
31. *Babajanov, B. and Abdikarimov, F.* The Application of the Functional Variable Method for Solving the Loaded Non-Linear Evaluation Equations, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 2022, vol. 8, 912674. DOI: 10.3389/fams.2022.912674.

Received August 17, 2022

Shekhzod K. Sobirov
Urgench State University,
14 Kh. Alimdjan St., Urgench 220100, Uzbekistan,
PhD Student
E-mail: `shexzod1994@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-0405-3591

Umid A. Hoitmetov
Urgench State University,
14 Kh. Alimdjan St., Urgench 220100, Uzbekistan,
Associate Professor of the Department
of Applied Mathematics and Mathematical Physics
E-mail: `x_umid@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5974-6603