Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 3, С. 133–143

УДК 517.53
DOI 10.46698/n0335-8321-3720-b

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ B_ω М. М. ДЖРБАШЯНА

Т. В. Таварацян[1]

[1] Ванадзорский государственный университет имени О. Туманяна,
Армения, 2021, Ванадзор, ул. Тигран Меци, 36

E-mail: `tehmina1@yandex.ru`

Аннотация. В середине 60-х гг. М. М. Джрбашяном был предложен новый метод для определения и факторизации обширных классов функций, мероморфных в единичном круге. Эти классы, которые обозначаются через $N\{\omega\}$, обладают сложной структурой и охватывают все мероморфные в единичном круге функции за счет того, что зависят от функционального параметра $\omega(x)$. Они переходят в классы N_α в случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$, а в специальном случае $\omega(x) \equiv 1$ класс $N\{\omega\}$ совпадает с классом N Неванлинны. Фундаментальную роль в теории факторазации этих классов играют произведения B_ω М. М. Джрбашяна, которые в случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$, превращаются в произведения B_α М. М. Джрбашяна. В специальном случае $\omega(x) \equiv 1$ произведения B_ω превращаются в произведения Бляшке. В. С. Захарян, пользуясь известной теоремой о неотрицательных тригонометрических рядах, получил оценки сверху для модулей функций B_α при $-1 < \alpha < 0$. В этой работе сначала подобным методом доказывается, что $U_\omega(z;\zeta) \geqslant 0$, где U_ω — некоторая вспомогательная функция. Далее, пользуясь этим результатом, приводятся оценки сверху для модулей произведений B_ω, когда $\omega(x) \in \Omega_0$.

Ключевые слова: произведения Джрбашяна, произведения Бляшке, выпуклые последовательности, класс функций Ω_0, ряд Фурье.

AMS Subject Classification: 30J10, 32A35.

Образец цитирования: *Таварацян Т. В.* Об одной оценке для произведения B_ω М. М. Джрбашяна // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 3.—С. 133–143. DOI: 10.46698/n0335-8321-3720-b.

1. Некоторые сведение о произведениях Джрбашяна

М. М. Джрбашяном в [1, 2] предложен метод для определения и факторизации классов функций, мероморфных в единичном круге. Эти классы обозначаются через $N\{\omega\}$. Они переходят в классы N_α в случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$, а в специальном случае $\omega(x) \equiv 1$ класс $N\{\omega\}$ совпадает с классом N Неванлинны.

О поведении мероморфных функций классов N_ω можно прочитать также в книгах [3–6]. Отметим, что в последние годы получены некоторые интересные результаты о поведении функций классов N_ω (см., например, [7–9]).

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, Ω — класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0;1)$;

2) $\omega(0) = 1$, $\int_0^1 \omega(x)\,dx < +\infty$,

Ω_0 — подмножество тех функций из Ω, для которых $\omega(x)$ не убывает на $[0,1)$.

Далее, пусть $\Delta_0 = 1$, $\Delta_k = k\int\limits_0^1 \omega(x)x^{k-1}\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть последовательность $\{a_k\} \in \mathbb{D}$ такая, что удовлетворяется следующее условие Бляшке — Джрбашяна:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{|a_k|}^{1} \omega(x)\,dx < +\infty. \tag{Б-Дж}$$

Произведение М. М. Джрбашяна с нулями на этой последовательности определяется следующим образом (см. [1, 2]):

$$B_\omega(z) \equiv B_\omega(z; \{a_k\}) = \prod_k A_\omega(z; \{a_k\}), \quad \omega(x) \in \Omega,$$

где для $|z| < 1$ и $0 < |\zeta| \leqslant 1$

$$A_\omega(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-W_\omega(z; \zeta)\},$$

$$W_\omega(z, \zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int\limits_0^{|\zeta|} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx - \bar{\zeta}^k \int\limits_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\,x^{-k-1}\,dx \right\} \frac{z^k}{\Delta_k}.$$

Заметим, что (см. [2, с. 97])

$$W_1(z, \zeta) = W_\omega(z, \zeta)|_{\omega=1} = \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{1}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(\bar{\zeta}\,z)^k = -\ln|\zeta| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{\zeta}\,z)^k}{k}.$$

Так как (см. [2, с. 51])

$$A_1(z; \zeta) = A(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \cdot \frac{|\zeta|}{\zeta}, \qquad |z| < 1,\ 0 < |\zeta| \leqslant 1,$$

то произведение $B_\omega(z; \{a_k\})$-Джрбашяна при $\omega(x) \equiv 1$ совпадает с произведением Бляшке:

$$B_1(z; \{a_k\}) = B(z; \{a_k\}) = B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \cdot \frac{|a_k|}{a_k}.$$

Известно, что (см. [2, с. 56]) если $\omega(x)$ не убывает на $[0, 1)$, то имеет место следующее представление:

$$B_\omega(z; \{a_k\}) = B(z; \{a_k\}) \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\gamma} z; \omega)\,d\mu(\gamma) \right\},$$

где $\mu(\gamma)$ — некоторая неубывающая ограниченная функция на $[0; 2\pi]$, и

$$S(z; \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1,$$

— ядро Джрбашяна типа Шварца.

Если $\omega(x)$ не убывает на $[0,1)$, то $\operatorname{Re} S_\omega(z) \geqslant 0$ (см. [2, с. 28]), и, следовательно, из представления $B_\omega(z;\{a_k\}) = \prod_k A_\omega(z;\{a_k\})$ имеем

$$|B_\omega(z;a_k)| \leqslant |B(z;a_k)|\,.$$

Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ называется *выпуклой*, если, полагая $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}$, $\Delta^2\alpha_k = \Delta\alpha_k - \Delta\alpha_{k+1}$, имеем $\Delta^2\alpha_k \geqslant 0$, $k=0,1,\ldots$ Как известно (см. [10, с. 100]), если $\alpha_k \downarrow 0$ и последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ выпуклая, то ряд $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \cos kx$ сходится всюду, кроме быть может $x \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 2\pi)$, к неотрицательной суммируемой функции $f(x)$ и является рядом Фурье от этой функции.

2. Основные результаты

Пользуясь методом доказательства одной леммы В. С. Захаряна [11], докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\omega(x)$ — неубывающая дифференцируемая функция из класса Ω_0. Тогда для любых z, ζ $(|z|<1,\ 0<|\zeta|\leqslant 1)$ имеет место следующее неравенство:*

$$U_\omega(z;\zeta) \equiv \operatorname{Re}\left[W_\omega(z,\zeta) - W_1(z,\zeta) + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right] \geqslant 0. \tag{1}$$

$\lhd$ Из вида (1) функции $W_\omega(z,\zeta)$ имеет место

$$\begin{aligned}
&W_\omega(z,\zeta) - W_1(z,\zeta) + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx \\
&\quad= \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^\infty \left\{\zeta^{-k}\int\limits_0^{|\zeta|} \omega(x)x^{k-1}\,dx - \bar\zeta^k \int\limits_{|\zeta|}^1 \omega(x)x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{\Delta_k} \\
&\qquad- \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{1}{x}\,dx + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}(\bar\zeta z)^k + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx = \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx \\
&\qquad+ \sum_{k=1}^\infty \left\{\frac{1}{k}(\bar\zeta z)^k - \frac{1}{\Delta_k}\left[\zeta^{-k}z^k\int\limits_0^{|\zeta|} \omega(x)x^{k-1}\,dx - \bar\zeta^k z^k \int\limits_{|\zeta|}^1 \omega(x)x^{-k-1}\,dx\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим $|\zeta| = r$, $l = z\bar\zeta$ $(|l| = r|z|,\ |z|<1))$. Тогда

$$\zeta^{-k}z^k = \zeta^{-k}z^k\bar\zeta^k\bar\zeta^{-k} = z^k\bar\zeta^k\zeta^{-k}\bar\zeta^{-k} = (z\bar\zeta)^k(|\zeta|^2)^{-k} = l^k r^{-2k},$$
$$l^k = |l|^k[\cos(k\arg l) + i\sin(k\arg l)].$$

Следовательно, из (2) будем иметь

$$\begin{aligned}
&W_\omega(z,\zeta) - W_1(z,\zeta) + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx \\
&= \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx + \sum_{k=1}^\infty \left\{\frac{l^k}{k} - \frac{1}{\Delta_k}\left[l^k r^{-2k}\int\limits_0^r \omega(x)x^{k-1}\,dx - l^k\int\limits_r^1 \omega(x)x^{-k-1}\,dx\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|l|^k}{k}[\cos(k\cdot\arg l)+i\sin(k\arg l)]\right.$$

$$-\frac{1}{\Delta_k}\left[|l|^k[(\cos(k\arg l)+i\sin(k\arg l)]\cdot r^{-2k}\int\limits_0^r\omega(x)x^{k-1}\,dx\right.$$

$$\left.\left.-|l|^k[\cos(k\arg l)+i\sin(k\arg l)]\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}\,dx\right]\right\}$$

$$= \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|l|^k}{k}\cos(k\cdot\arg l)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta_k}\left[|l|^k\cos(k\arg l)\cdot r^{-2k}\int\limits_0^r\omega(x)x^{k-1}\,dx-|l|^k\cos(k\arg l)\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}\,dx\right]\right\}$$

$$+\,i\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sin(k\arg l)-\frac{1}{\Delta_k}\left[|l|^k\sin(k\arg l)r^{-2k}\int\limits_0^r\omega(x)x^{k-1}\,dx\right.\right.$$

$$\left.\left.-|l|^k\sin(k\arg l)\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}\,dx\right]\right\}.$$

Далее,

$$U_\omega(z;\zeta)\equiv\operatorname{Re}\left[W_\omega(z,\zeta)-W_1(z,\zeta)+\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}-1\right)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right]$$

$$=\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|l|^k}{k}\cos(k\cdot\arg l)-\frac{1}{\Delta_k}\left[|l|^k\cos(k\arg l)\cdot r^{-2k}\int\limits_0^r\omega(x)x^{k-1}\,dx\right.\right.$$

$$\left.\left.-|l|^k\cos(k\arg l)\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}\,dx\right]\right\}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|l|^k\cos(k\cdot\arg l)\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{\Delta_k}\left(r^{-2k}\int\limits_0^r\omega(x)x^{k-1}\,dx-\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}\,dx\right)\right].$$

Пусть

$$U_\omega(z;\zeta)\equiv\operatorname{Re}\left[W_\omega(z,\zeta)-W_1(z,\zeta)+\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}-1\right)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right]$$

$$=\frac{a_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(r)\cdot|l|^k\cos(k\arg l),$$

где

$$a_0(r) = \frac{2\Delta_2}{\Delta_1^2} \int\limits_r^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx,$$

$$a_k(r) = \frac{1}{k} - \frac{1}{\Delta_k}\left\{r^{-2k}\int\limits_0^r \omega(x)x^{k-1}\,dx - \int\limits_r^1 \omega(x)x^{-k-1}\,dx\right\}, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

Для того чтобы установить справедливость неравенства (1), сначала установим выпуклость последовательности $\{a_k(r)\}_0^\infty$, т. е. справедливость неравенств

$$\varphi_k(r) \equiv \Delta^2 a_k(r) = a_k(r) - 2a_{k+1}(r) + a_{k+2}(r) \geqslant 0, \quad 0 < r < 1,\ k \geqslant 0. \tag{3}$$

Покажем справедливость неравенства (3) в случае $k = 0$, т. е. докажем, что

$$\varphi_0(r) \equiv \Delta^2 a_0(r) = a_0(r) - 2a_1(r) + a_2(r) \geqslant 0. \tag{4}$$

Так как

$$a_1(r) = 1 - \frac{1}{\Delta_1}\left(r^{-2}\int\limits_0^r \omega(x)\,dx - \int\limits_r^1 \omega(x)x^{-2}\,dx\right),$$

$$a_2(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta_2}\left(r^{-4}\int\limits_0^r \omega(x)x\,dx - \int\limits_r^1 \omega(x)x^{-3}\,dx\right),$$

то

$$\varphi_0(r) = 2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_r^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx - 2\left\{1 - \frac{1}{\Delta_1}\left(r^{-2}\int\limits_0^r \omega(x)\,dx - \int\limits_r^1 \omega(x)x^{-2}\,dx\right)\right\}$$
$$+ \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta_2}\left(r^{-4}\int\limits_0^r \omega(x)x\,dx - \int\limits_r^1 \omega(x)x^{-3}\,dx\right)\right\}.$$

Значит

$$\varphi_0'(r) = -2\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\left(\frac{\omega(r)-1}{r}\right) + \frac{4}{\Delta_1}\left\{-r^{-3}\int\limits_0^r \omega(x)dx + r^{-2}\omega(r)\right\}$$
$$- \frac{2}{\Delta_2}\left\{-2r^{-5}\int\limits_0^r \omega(x)x\,dx + r^{-3}\omega(r)\right\}. \tag{5}$$

Имея ввиду, что

$$\omega(r)-1=\int\limits_0^r d(\omega(x)),$$

$$\int\limits_0^r \omega(x)\,dx = r\omega(r)-\int\limits_0^r x\,d(\omega(x)),$$

$$2\int\limits_0^r \omega(x)\cdot x\,dx = r^2\omega(r)-\int\limits_0^r x^2\,d(\omega(x)),$$

из (5) получаем

$$\begin{aligned}\varphi_0'(r) &= -\frac{2}{r}\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_0^r d(\omega(x))+\frac{2}{\Delta_1}\left\{-2r^{-3}\left[r\omega(r)-\int\limits_0^r x\,d(\omega(x))\right]+2r^{-2}\omega(r)\right\}\\ &\quad-\frac{2}{\Delta_2}\left\{-r^{-5}\left[r^2\omega(r)-\int\limits_0^r x^2\,d(\omega(x))\right]+r^{-3}\omega(r)\right\}\\ &= -\frac{2}{r}\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2}\int\limits_0^r d(\omega(x))+\frac{2}{r}\frac{2}{\Delta_1}r^{-2}\int\limits_0^r x\,d(\omega(x))-\frac{2}{r}\frac{1}{\Delta_2}r^{-4}\int\limits_0^r x^2\,d(\omega(x))\\ &= -\frac{2\Delta_2}{r}\int\limits_0^r\left(\frac{1}{\Delta_1^2}-\frac{2}{\Delta_2\Delta_1}r^{-2}x+\frac{1}{\Delta_2^2}r^{-4}x^2\right)d(\omega(x)).\end{aligned}\tag{6}$$

Таким образом,

$$\varphi_0'(r)=-\frac{2\Delta_2}{r}\int\limits_0^r\left(\frac{1}{\Delta_1}-\frac{1}{\Delta_2}xr^{-2}\right)^2 d(\omega(x)).$$

Так как $\omega(x)$ не убывает на $[0,1)$, то из (6) следует, что $\varphi_0'(r)\leqslant 0$. Это означает, что на $[0,1]$ функция $\varphi_0(r)$ не возрастает, и, следовательно, $\varphi_0(r)\geqslant\varphi_0(1)$, $0<r<1$. Отсюда, так как $\varphi_0(1)=0$, следует справедливость неравенства (3) в случае $k=0$.

Теперь докажем неравенство (3) для $k\geqslant 1$. Для этого запишем функции $a_k(r)$ ($k\geqslant 1$) в виде

$$a_k(r)=b_k(r)+d_k(r),\tag{7}$$

где

$$b_k(r)=\frac{1}{k}-\frac{1}{\Delta_k}r^{-2k}\int\limits_0^{r^2}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx,\tag{8}$$

$$d_k(r)=\frac{1}{\Delta_k}\left\{\int\limits_r^1\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx-r^{-2k}\int\limits_{r^2}^r\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}.\tag{9}$$

В отдельности установим выпуклость последовательностей $\{b_k(r)\}_1^\infty$, $\{d_k(r)\}_1^\infty$ путем проведения непосредственных оценок. Для этого сначала покажем что эти последовательности неотрицательны. Из (8) имеем

$$b_k'(r) = -\frac{2}{\Delta_k}\left(r^{-1}\omega(r^2) - kr^{-2k-1}\int\limits_0^{r^2}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right).$$

Так как $\omega(x)$ — неубывающая функция на $[0,1)$, то

$$\int\limits_0^{r^2}\omega(x)x^{k-1}dx < \omega(r^2)\,\frac{r^{2k}}{k}, \quad 0<r<1.$$

Следовательно, $b_k'(r) \leqslant 0$, когда $r \in (0,1)$. Значит функция $b_k(r)$ $(k=1,2,\ldots)$ является невозрастающей функцией на $[0,1]$. Но $b_k(1)=0$, $k=1,2,\ldots$ Следовательно, для любого натурального числа k имеем

$$b_k(r) \geqslant 0, \quad 0<r<1. \tag{10}$$

Далее, так как $\omega(x)$ — неубывающая функция на $[0,1)$, то

$$\int\limits_r^1 \omega(x)\,x^{-k-1}\,dx \geqslant \frac{\omega(r)}{k}[r^{-k}-1],$$

$$r^{-2k}\int\limits_{r^2}^{r}\omega(x)x^{k-1}\,dx \leqslant r^{-2k}\omega(r)\int\limits_{r^2}^{r}x^{k-1}\,dx = \frac{\omega(r)}{k}(r^{-k}-1).$$

Значит для любого натурального числа k и для любого $r\in(0,1)$

$$d_k(r) \geqslant 0. \tag{11}$$

Теперь, записав формулу (8) в виде $b_k(r) = \frac{1}{k} - \frac{1}{\Delta_k}\int_0^1 \omega(r^2x)\,x^{k-1}\,dx$, имеем

$$\begin{aligned}
\Delta^2 b_k(r) &= b_k(r) - 2b_{k+1}(r) + b_{k+2}(r) = \frac{1}{k} - \frac{1}{\Delta_k}\int\limits_0^1 \omega(r^2x)x^{k-1}dx - \frac{2}{k+1}\\
&+\frac{2}{\Delta_{k+1}}\int\limits_0^1\omega(r^2x)x^k dx + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{\Delta_{k+2}}\int\limits_0^1\omega(r^2x)x^{k+1}dx = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}\\
&-\frac{1}{\Delta_k}\int\limits_0^1\omega(r^2x)x^{k-1}dx + \frac{2}{\Delta_{k+1}}\int\limits_0^1\omega(r^2x)x^k dx - \frac{1}{\Delta_{k+2}}\int\limits_0^1\omega(r^2x)x^{k+1}dx\\
&= \frac{2}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{\Delta_k}\int\limits_0^1\omega(r^2x)x^{k-1}\left\{1 - 2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}x + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+2}}x^2\right\}dx.
\end{aligned} \tag{12}$$

Для любого x имеем (см. [2, с. 30–31])

$$1 - 2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}x + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+2}}x^2 \geqslant \left(1 - \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}x\right)^2 \geqslant 0. \tag{13}$$

Поскольку при $\omega(x)\in\Omega_0$, $\omega(r^2x)$, $0<r<1$, $0\leqslant x<1$, является возрастающей функцией от r, то из (12) и (13) получим неравенство

$$\Delta^2 b_k(r)\geqslant\Delta^2 b_k(1)=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{\Delta_k}\int\limits_0^1\omega(x)x^{k-1}dx$$
$$+\frac{2}{\Delta_{k+1}}\int\limits_0^1\omega(x)x^k dx-\frac{1}{\Delta_{k+2}}\int\limits_0^1\omega(x)x^{k+1}dx=\frac{2}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{k}+\frac{2}{k}-\frac{1}{k+2}=0.$$

Итак, отсюда и из (10) при $0<r<1$ получим

$$b_k(r)\geqslant 0,\quad \Delta^2 b_k(r)\geqslant 0,\quad k=1,2,3,\dots \tag{14}$$

Далее, из (9) имеем

$$\begin{aligned}\Delta^2 d_k(r)&=d_k(r)-2d_{k+1}(r)+d_{k+2}(r)\\ &=\frac{1}{\Delta_k}\left\{\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}dx-r^{-2k}\int\limits_{r^2}^r\omega(x)x^{k-1}dx\right\}\\ &-2\frac{1}{\Delta_{k+1}}\left\{\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-2}dx+r^{-2k-2}\int\limits_{r^2}^r\omega(x)x^{k}dx\right\}\\ &+\frac{1}{\Delta_{k+2}}\left\{\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-3}dx-r^{-2k-4}\int\limits_{r^2}^r\omega(x)x^{k+1}dx\right\}\\ &=\frac{1}{\Delta_k}\int\limits_r^1\omega(x)x^{-k-1}\left[1-2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}\frac{1}{x}+\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+2}}\frac{1}{x^2}\right]dx\\ &\qquad-\frac{1}{\Delta_k}r^{-2k}\int\limits_{r^2}^r\omega(x)x^{k-1}\left[1-2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}\frac{x}{r^2}+\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+2}}\frac{x^2}{r^4}\right]dx.\end{aligned} \tag{15}$$

Но выражения, стоящие в подинтегральных квадратных скобках справа в (15), неотрицательны в силу неравенства (13). Поэтому, учитывая еще, что функция $\omega(x)$ при $\omega(x)\in\Omega_0$ не убывает на $[0,1)$, из (15) получаем следующую оценку:

$$\Delta^2 d_k(r)\geqslant\omega(r)\frac{1}{\Delta_k}\left\{\int\limits_r^1 x^{-k-1}\left[1-2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}\frac{1}{x}+\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+2}}\frac{1}{x^2}\right]dx\right.$$
$$\left.-r^{-2k}\int\limits_{r^2}^r x^{k-1}\left[1-2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}\frac{x}{r^2}+\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+2}}\frac{x^2}{r^4}\right]dx\right\}.$$

Стоящее в правой части этого неравенства выражение равно нулю. Это можно проверить непосредственным подсчетом. Из этого значения и из (11) при $0<r<1$ получим

$$d_k(r)\geqslant 0,\quad \Delta^2 d_k(r)\geqslant 0,\quad k=1,2,3,\dots \tag{16}$$

Из (4) и из (14), (16) заключаем, что при $0 < r < 1$,

$$a_k(r) \geqslant 0, \quad \varphi_k(r) \equiv \Delta^2 a_k(r) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Неравенства (17) и (3) означают, что последовательность $\{a_k(r)\}_0^\infty$ неотрицательна и выпукла при $0 < r < 1$.

Теперь докажем, что $a_k(r) \downarrow 0$.

$$a_k'(r) = -\frac{1}{\Delta_k}\left(-2kr^{-2k-1}\int\limits_0^r \omega(x)x^{k-1}dx + r^{-2k}\omega(r)r^{k-1} + \omega(r)r^{-k-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\Delta_k}\left(-2kr^{-2k-1}\int\limits_0^r \omega(x)x^{k-1}dx + 2\omega(r)r^{-k-1}\right).$$

Так как $\omega(x)$ — неубывающая функция на $[0,1)$, то $\int_0^r \omega(x)x^{k-1}dx \leqslant \frac{\omega(r)\,r^k}{k}$.

Следовательно, $a_k(r)$ не возрастает. Это означает, что справедливость неравенства (1) вытекает из известной теоремы о неотрицательных тригонометрических рядах (см. [10, с. 100]). Этим и завершается доказательство леммы. $\rhd$

Имея ввиду представление $A_\omega(z;\zeta)$, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\omega(x)$ — неубывающая дифференцируемая функция из класса Ω_0. Тогда*

$$|A_\omega(z;\zeta)| \leqslant \exp\left\{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\int\limits_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right\}|A_1(z;\zeta)|\,. \tag{18}$$

$\lhd$ Из определения $A_\omega(z;\zeta)$ имеем

$$\frac{|A_\omega(z;\zeta)|}{|A_1(z;\zeta)|} = \frac{\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\,e^{-W_\omega(z;\zeta)}\right|}{\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\,e^{-W_1(z;\zeta)}\right|} = \frac{\left|e^{-W_\omega(z;\zeta)}\right|}{\left|e^{-W_1(z;\zeta)}\right|} = e^{|-W_\omega(z;\zeta)+W_1(z;\zeta)|}$$

$$\leqslant \exp\left\{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\int\limits_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right\}. \ \rhd$$

Отсюда, согласно $B_\omega(z;\{a_k\}) = \prod_k A_\omega(z;\{a_k\})$, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\omega(x)$ — неубывающая дифференцируемая функция из класса Ω_0 и последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условию* (Б-Дж). *Тогда*

$$|B_\omega(z;\{a_k\})| \leqslant \exp\left\{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\sum_{k=1}^\infty\int\limits_{|a_k|}^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right\}|B_1(z;\{a_k\})|\,, \tag{19}$$

$$\left|B_\omega(e^{i\varphi};\{a_k\})\right| \leqslant \exp\left\{\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} - 1\right)\sum_{k=1}^\infty\int\limits_{|a_k|}^1 \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx\right\}, \quad 0 < \varphi \leqslant 2\pi. \tag{20}$$

Замечание 1. Из неравенства (19) следует, что

$$|B_\omega(z;\{a_k\})| \leqslant |B_1(z;\{a_k\})|\,, \quad \omega(x) \in \Omega_0.$$

Литература

1. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 157, № 5.—С. 1024–1027.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге.—М.: Наука, 1993.—223 с.
3. *Nevanlinna R.* Einduetige Analytische Funktionen.—Berlin: Springer, 1937.
4. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.—М.–Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1950.—337 с.
5. *Duren P. L.* Theory of H^p Spaces.—N. Y.–London: Academic Press, 1970.—260 p.
6. *Jerbashian A. M.* Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane.—Springer Sience+Business Media, ins,—2005. DOI: 10.1007/b102102.
7. *Захарян В. С., Даллакян Р. В.* О граничных значениях функций классов A_ω // Докл. НАН Армении.—2012.—Т. 112, № 2.—С. 135–140.
8. *Захарян В. С., Даллакян Р. В., Джрбашян А. М.* Об ω-характеристиках аналитических в единичном круге функций // Докл. НАН Армении.—2013.—Т. 113, № 1.—С. 22–29.
9. *Даллакян Р. В.* О C-росте ω-характеристик аналитических в единичном круге функций // Докл. НАН Армении.—2013.—Т. 113, № 2.—С. 142–149.
10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.—М.: Физматгиз, 1951.
11. *Захарян В. С.* Об одной оценке для произведения М. М. Джрбашяна // Изв. АН Арм. ССР.—1988.—Т. 23, № 2.—С. 189–192.

Статья поступила 17 августа 2021 г.

Таварацян Теймине Ваниковна
Ванадзорский государственный университет им. О. Туманяна,
преподаватель и старший методист кафедры математики и информатики,
АРМЕНИЯ, 2021, Ванадзор, ул. Тигран Мец, 36
E-mail: tehmina1@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-2309-9261

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 133–143

ON AN ESTIMATE OF M. M. DJRBASHYAN'S PRODUCT B_ω

Tavaratsyan, T. V.[1]

[1] Vanadzor State University after H. Toumanyan,
36 Tigran Mec St., Vanadzor 2021, Armenia
E-mail: tehmina1@yandex.ru

Abstract. In the mid-60s, by M. M. Djrbashyan proposed a new method for the definition and factorization of wide classes of functions meromorphic in the unit circle. These classes, which are denoted by $N\{\omega\}$, have a complex structure and cover all meromorphic functions in the unit circle due to the fact that they depend on a functional parameter $\omega(x)$. They go to classes N_α in case $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$, and in special case $\omega(x) \equiv 1$, the class $N\{\omega\}$ is the same as Nevanlinna's class. The fundamental role in the theory of factorization of these classes is played by the products B_ω of M. M. Djrbashyan, which in the case $\omega(x) = (1-x)^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$, turn into the products B_α of M. M. Djrbashyan. In a special case $\omega(x) \equiv 1$, products B_ω are transformed into products by Blaschke. Using the well-known theorem on nonnegative trigonometric series, V. S. Zakaryan, obtained upper estimations for the modules of functions B_α, for $-1 < \alpha < 0$. In this work, using a similar method, it is proved that $U_\omega(z;\zeta) \geqslant 0$, where U_ω is some auxiliary function. Next, using this result, upper estimations are given for the modules of products B_ω when $\omega(x) \in \Omega_0$.

Key words: Djrbashyan products, Blaschke products, convex sequences, class of functions Ω_0, Fourier series.

AMS Subject Classification: 30J10, 32A35.

For citation: *Tavaratsyan, T. V.* On an Estimate of M. M. Djrbashyan's Product B_ω, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 133–143 (in Russian). DOI: 10.46698/n0335-8321-3720-b.

References

1. *Djrbashyan, M. M.* The Parametric Representation of Some General Classes of Meromorphic Functions in the Unit Circle, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1964, vol. 157, no. 5, pp. 1024–1027 (in Russian).
2. *Djrbashyan, M. M. and Zakaryan, V. S. Klassy i granichnye svojstva funkcij meromorfnyh v kruge* [Classes and Boundary Properties of Meromorphic Functions in a Circle], Moscow, Nauka, 1993 (in Russian).
3. *Nevanlinna, R. Einduetige Analytische Funktionen*, Berlin, Springer, 1937.
4. *Privalov, I. I. Granichnye svojstva analiticheskih funkcij* [Boundary Properties of Analytic Functions], Moscow, Leningrad, State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, 1950 (in Russian).
5. *Duren, P. L. Theory of H^p Spaces*, New York and London, Academic Press, 1970, 260 p.
6. *Jerbashian, A. M. Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane*, Springer Sience+Business Media, Ins, 2005. DOI: 10.1007/b102102.
7. *Zakaryan, V. S. and Dallakyan, R. V.* On the Boundary Values of Functions of A_ω Classes, *Reports of the National Academy of Sciences of Armenia*, 2012, vol. 112, no. 2, pp. 135–140 (in Russian).
8. *Zakaryan, V. S., Dallakyan, R. V. and Djrbashyan, A. M.* About the ω-Characteristics of Analytic Functions in the Unit Circle, *Reports of the National Academy of Sciences of Armenia*, 2013, vol. 113, no. 1, pp. 22–29 (in Russian).
9. *Dallakyan, R. V.* On C-Growth of ω-Characteristics of Analytic Functions in the Unit Circle, *Reports of the National Academy of Sciences of Armenia*, 2013, vol. 113, no. 2, pp. 142–149 (in Russian).
10. *Bari, N. K. Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series], Moscow, Fizmatgiz, 1951 (in Russian).
11. *Zakaryan, V. S. About one Estimate for the Product of M. M. Djrbashyan*, Izvestia AN Arm. SSR, 1988, vol. 23, no. 2, p. 189–192. (in Russian).

Received August 17, 2021

Tehmine V. Tavaratsyan
Vanadzor State University after H. Toumanyan,
36 Tigran Mec St., Vanadzor 2021, Armenia,
Lecturer and Senior Methodist
of the Department of Mathematics and Informatics
E-mail: `tehmina1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2309-9261