Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 1, С. 5–14

УДК 517.968.74
DOI 10.46698/w9450-6663-7209-q

СИСТЕМА НЕОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[#]

С. Н. Асхабов[1,2]

[1] Чеченский государственный педагогический университет,
Россия, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62;
[2] Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Россия, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена система неоднородных интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью, возникающих при описании процессов инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, остывания тел при лучеиспускании, следующему закону Стефана — Больцмана, и др. В связи с указанными и другими приложениями, разыскиваются неотрицательные непрерывные на положительной полуоси решения этой системы. Получены двусторонние априорные оценки решения системы, на основе которых построено полное метрическое пространство и методом весовых метрик (аналог метода А. Белицкого) доказана однозначная разрешимость данной системы в этом пространстве. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа и получена оценка скорости их сходимости. Установлено, что это решение является единственным и во всем классе непрерывных положительных при $x > 0$ функций. В случае соответствующих однородных систем интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью изучен вопрос о существовании нетривиальных решений.

Ключевые слова: система интегральных уравнений, степенная нелинейность, свертка, априорные оценки, последовательные приближения, метод весовых метрик.

AMS Subject Classification: 45G05, 46L05.

Образец цитирования: *Асхабов С. Н.* Система неоднородных интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 5–14. DOI: 10.46698/w9450-6663-7209-q.

1. Введение

В работах [1–3] были изучены однородные системы интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью в различных конусах пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$. Такие уравнения возникают при описании процессов инфильтрации жидкости через стенки цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду [4, 5], распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [6], остывания тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана — Больцмана [7], возбуждения и торможения нейронов в нейронной сети [8] и др. (обзор полученных в этом направлении

[#]Работа выполнена в рамках государственного задания в соответствии с соглашением № 075-03-2021-071.

результатов приведен в [3]). В данной статье рассматриваются вопросы, касающиеся существования, единственности, поиска и свойств решений неоднородной системы нелинейных интегральных уравнений типа свертки вида

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^x k_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt + f_i(x), \quad \alpha > 1,\ x > 0,\ i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где ядро $k(x) = \big\{k_{ij}(x)\big\}_{i,j=1}^n$ и неоднородность $f(x) = \big\{f_i(x)\big\}_{i=1}^n$ удовлетворяют на $[0,\infty)$ условиям:

$$k_{ij}(x) \text{ не убывают и } k_{ij}(0) = p_{ij} > 0; \tag{2}$$

$$f_i \in C[0,\infty),\ f_i(x) \text{ не убывают и } f_i(0) = 0. \tag{3}$$

В связи с указанными выше приложениями, решения системы (1) будем разыскивать в конусе

$$Q_{0,n} = \big\{u : u = \{u_i\}_{i=1}^n,\ u_i \in C[0,\infty),\ u_i(0) = 0 \text{ и } u_i(x) > 0 \text{ при } x > 0\big\}.$$

Исследование основано на методе весовых метрик, являющимся аналогом известного метода А. Белицкого (подробнее см., например, [3, 9, 10]). Получены точные априорные оценки для решений системы (1) в конусе $Q_{0,n}$, на основе которых доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения и показано как его можно найти. При более общих, чем (2), предположениях относительно ядра доказано, что в случае $0 < \alpha < 1$ система (1) при $f_i(x) = 0$ может иметь лишь тривиальное решение $u = 0$.

Следует отметить, что система интегральных уравнений вида (1) при $f_i(x) = 0$ методом весовых метрик ранее исследовалась в работе [1], в которой априорная оценка снизу не отражает в явном виде зависимость решения от n, вопрос об априорной оценке сверху, необходимой для корректности введенной метрики, не рассматривается и фактически накладывается жесткое условие $\alpha > n$ (см. [2, замечания 4, 5 и 7]). Интегральное уравнение вида (1) впервые было изучено этим методом в [4] при $\alpha = 2$. В отличие от данной работы, при построении метрики в [4] использовалась не нижняя априорная оценка, а разность между верхней и нижней априорными оценками решения, причем для корректности введенной метрики потребовалось вместо известной точной априорной оценки сверху использовать более грубую оценку (подробнее см. [3, 5]).

2. Априорные оценки решения

В этом параграфе приводится существенная для получения основных результатов информация о свойствах решений системы (1) в классе $Q_{0,n}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u \in Q_{0,n}$ *является решением системы* (1), *то* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$.

$\lhd$ Нужно доказать, что $u_i(x_1) \leqslant u_i(x_2)$ при $x_1 < x_2$ для любого $i = 1, \dots, n$. Используя тождество (1), условия (2) и (3), имеем

$$u_i^\alpha(x_2) - u_i^\alpha(x_1) = \sum_{j=1}^{n} \left[\int\limits_0^{x_1} \big(k_{ij}(x_2-t) - k_{ij}(x_1-t)\big)u_j(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} k_{ij}(x_2-t)u_j(t)\,dt \right] + f_i(x_2) - f_i(x_1) \geqslant 0.$$

Следовательно, $u_i(x_1) \leqslant u_i(x_2)$ и, значит, $u_i(x)$ не убывает на $[0,\infty)$. $\rhd$

При доказательстве основных результатов важную роль будет играть следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Если* $u \in Q_{0,n}$ *является решением системы* (1), *то* $L_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant R_n(x)$ *для любых* $x \in [0,\infty)$ *и* $i = 1,\ldots,n$, *где*

$$L_n(x) \equiv \left[\frac{(\alpha-1)\,n\,p}{\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)}, \quad p = \min_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{ij},$$
$$R_n(x) \equiv \left[n\int\limits_0^x \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(t)\,dt + \left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right)^{(\alpha-1)/\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)}. \tag{4}$$

$\lhd$ Обозначим $z_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$, $K_n(x) = \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x)$, $F_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$. Так как $f_i(x) \geqslant 0$ и, в силу условия (2), $p \leqslant k_{ij}(x-t)$ при $t < x$, то из тождества (1) имеем

$$u_i^\alpha(x) \geqslant p\sum_{j=1}^n \int\limits_0^x u_j(t)\,dt + f_i(x) \geqslant p\int\limits_0^x \sum_{j=1}^n u_j(t)\,dt$$

или

$$u_i(x) \geqslant \left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha}. \tag{5}$$

После суммирования из (5) получаем

$$z_n(x) \geqslant n\left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha} \qquad (\forall\, x > 0)$$

или

$$pz_n(t)\left(p\int\limits_0^t z_n(s)\,ds\right)^{-1/\alpha} \geqslant np \quad (\forall\, t > 0).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha} n\,p\,x.$$

Следовательно,

$$\left(p\int\limits_0^x z_n(t)\,dt\right)^{1/\alpha} \geqslant \left[\frac{(\alpha-1)\,n\,p}{\alpha}\,x\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv L_n(x).$$

Таким образом, доказываемая оценка снизу $u_i(x) \geqslant L_n(x)$ вытекает из неравенства (5).

Докажем теперь оценку сверху. Так как для любого $x > 0$

$$u_i^\alpha(x) \equiv \sum_{j=1}^n \int\limits_0^x k_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt + f_i(x), \quad \alpha > 1,\ i = 1,\ldots,n,$$

то в силу леммы 1

$$u_i^\alpha(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} u_j(x) \int_0^x k_{ij}(t)\,dt + f_i(x) \leqslant \int_0^x K_n(t)\,dt \sum_{j=1}^{n} u_j(x) + F_n(x).$$

Значит,

$$u_i(x) \leqslant \left(z_n(x) \int_0^x K_n(t)\,dt + F_n(x) \right)^{1/\alpha}. \tag{6}$$

Из (6), суммируя по i, получаем

$$z_n(x) \leqslant n \left(z_n(x) \int_0^x K_n(t)\,dt + F_n(x) \right)^{1/\alpha}$$

или

$$z_n(x) \int_0^x K_n(t)\,dt + F_n(x) \leqslant n \int_0^x K_n(t)\,dt \left(z_n(x) \int_0^x K_n(t)\,dt + F_n(x) \right)^{1/\alpha} + F_n(x),$$

или

$$\left(z_n(x) \int_0^x K_n(t)\,dt + F_n(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leqslant n \int_0^x K_n(t)\,dt + (F_n(x))^{(\alpha-1)/\alpha},$$

откуда

$$\left(z_n(x) \int_0^x K_n(t)\,dt + F_n(x) \right)^{1/\alpha} \leqslant \left(n \int_0^x K_n(t)\,dt + (F_n(x))^{(\alpha-1)/\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} = R_n(x).$$

Используя это неравенство, из неравенства (6) сразу получаем оценку $u_i(x) \leqslant R_n(x)$. $\triangleright$

Пример 1. Если $k_{ij}(x) = C > 0$ (а тогда $p = C$) и $f_i(x) = 0$, то $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n$, где

$$u_i(x) = L_n(x) \equiv \left[C\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\, n \right]^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)},$$

является решением системы (1), т. е. априорная оценка снизу из леммы 2 неулучшаема.

3. Теорема существования и единственности решения

Запишем систему (1) в операторном виде: $u = Tu$, где $T = \{T_i\}_{i=1}^n$,

$$\big(T_i u\big)(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(x-t) u_j(t)\,dt + f_i(x) \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 1, \ \ x > 0, \ \ i = 1, \dots, n.$$

Из леммы 2 следует, что решение системы (1), т. е. уравнения $u = Tu$, естественно разыскивать в конусном отрезке

$$P_n = \Big\{ u : \ u = \{u_i\}_{i=1}^n, \ u_i(x) \in C[0,\infty) \text{ и } L_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant R_n(x), \ \forall\, i = 1, \dots, n \Big\}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда класс* P_n *инвариантен относительно оператора* T.

$\lhd$ Пусть $u \in P_n$. Очевидно, что свертка $(T_i u)(x)$ есть функция непрерывная на $[0,\infty)$. Далее, поскольку $u_i(x) \geqslant F_n(x)$, $f_i(x) \geqslant 0$ и $k_{ij}(x-t) \geqslant p$ при $t < x$, имеем

$$\big[(T_i u)(x)\big]^{\alpha} \geqslant p \cdot \left[\frac{(\alpha-1)\,p\,n}{\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{n} \int_0^x t^{1/(\alpha-1)} dt \equiv \big[L_n(x)\big]^{\alpha},$$

т. е. $\big(T_i u\big)(x) \geqslant L_n(x)$.

С другой стороны, так как $u_i(t) \leqslant R_n(t) \leqslant R_n(x)$ при $t < x$ и $n \geqslant 1$, имеем

$$\big[(T_i u(x)\big]^{\alpha} \leqslant R_n(x) \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(t)\,dt + F_n(x) = R_n(x) \left[\int_0^x K_n(t)\,dt + \frac{F_n(x)}{R_n(x)}\right]$$
$$\leqslant R_n(x) \left[n \int_0^x K_n(t) dt + (F_n(x))^{(\alpha-1)/\alpha}\right] = R_n(x)\, R_n^{\alpha-1}(x) = R_n^{\alpha}(x),$$

т. е. $\big(T_i u\big)(x) \leqslant R_n(x)$. $\rhd$

Далее к системе (1) мы будем применять принцип сжимающих отображений. Для этого нам понадобится, в частности, построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_{b,n} = \Big\{u : u = \{u_i\}_{i=1}^{n},\ u_i(x) \in C[0,b] \text{ и } L_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant R_n(x),\ \forall\, i = 1,\ldots,n\Big\},$$

где $b > 0$ — произвольное число, а функции $L_n(x)$ и $R_n(x)$ определены в лемме 2.

Из леммы 3, как прямое следствие, получаем, что оператор T действует из $P_{b,n}$ в $P_{b,n}$. Найдем условия, при которых он является сжимающим. Для этого предположим, что ядро системы (1) удовлетворяет дополнительному условию:

$$(\exists\, \eta_{ij} \in (0,b)) \ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\eta_{ij}) < \alpha\, p\, n. \tag{7}$$

Замечание 1. В случае $k_{ij}(x) = C > 0$ условие (7) означает, что $\alpha > 1$.

Следующая лемма доказывается аналогично [4, лемма 7].

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (7). *Тогда для любого* $x \in [0,b]$ *и любых* $i,j = 1,\ldots,n$ *справедливо неравенство*

$$k_{ij}(x)\, e^{-\beta_{ij}\, x} \leqslant k_{ij}(\eta_{ij}), \quad \beta_{ij} = \frac{1}{p} \sup_{\eta_{ij}\leqslant x\leqslant b} \frac{k_{ij}(x) - p}{x}.$$

$\lhd$ 1) Пусть $0 \leqslant x \leqslant \eta_{ij}$. Тогда, учитывая, что $k_{ij}(x)$ не убывает и $\beta_{ij} \geqslant 0$, имеем $k_{ij}(x) e^{-\beta_{ij} x} \leqslant k_{ij}(x) \leqslant k_{ij}(\eta_{ij})$. Что и требовалось доказать.

2) Пусть, наконец, $\eta_{ij} \leqslant x \leqslant b$. В этом случае

$$k_{ij}(x) = p + p\,x\,\frac{1}{p}\,\frac{k_{ij}(x) - p}{x} \leqslant p\,[1 + x\beta_{ij}] \leqslant p\, e^{\beta_{ij} x}.$$

Следовательно, $k_{ij}(x) \leqslant p\, e^{\beta_{ij}x} \leqslant k_{ij}(\eta_{ij})e^{\beta_{ij}x}$, откуда $k_{ij}(x)e^{-\beta_{ij}x} \leqslant k_{ij}(\eta_{ij})$. $\rhd$

Обозначим

$$\beta = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \beta_{ij}. \tag{8}$$

Тогда из леммы 4 вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (7). *Тогда для любого* $x \in [0, b]$ *и любых* $i, j = 1, \ldots, n$ *справедливо неравенство*

$$k_{ij}(x)\, e^{-\beta\, x} \leqslant k_{ij}(\eta_{ij}). \tag{9}$$

Далее нам понадобится следующее дополнительное условие на неоднородность:

$$\sup_{0<x\leqslant b} \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} < \infty. \tag{10}$$

Введем теперь в классе $P_{b,n}$ расстояние ϱ_b, положив

$$\varrho_b(u, v) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_i(x) - v_i(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}\, e^{\beta\, x}}, \tag{11}$$

где $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n$, $v(x) = \{v_i(x)\}_{i=1}^n$, а число β определено равенством (8).

Так как

$$\frac{|u_i(x) - v_i(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}\, e^{\beta\, x}} \leqslant \left[n \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(x) + \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \right]^{1/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} np \right]^{1/(\alpha-1)},$$

то, в силу условия (10), величина (11) конечна.

Выполнимость аксиом метрики для ϱ_b очевидна. Докажем полноту пространства $P_{b,n}$. Пусть $\{u^{[n]}\}$ есть произвольная *фундаментальная последовательность* из $P_{b,n}$. Тогда, $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, N = N(\varepsilon) > 0)$ $(\forall\, m, n \geqslant N)$ выполняется неравенство $\rho_b(u^{[m]}, u^{[n]}) < \varepsilon$, т. е.

$$\frac{\left| u_i^{[m]}(x) - u_i^{[n]}(x) \right|}{x^{1/(\alpha-1)}\, e^{\beta x}} < \varepsilon \quad (\forall\, m, n \geqslant N,\ \forall\, x \in (0, b],\ \forall\, i = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Так как $x^{1/(\alpha-1)}\, e^{\beta x} \leqslant b^{1/(\alpha-1)}\, e^{\beta b} \equiv M$, то из (12) имеем $|u_i^{[m]}(x) - u_i^{[n]}(x)| \leqslant M\varepsilon$ $(\forall\, m, n \geqslant N, \forall\, x \in [0, b])$ (здесь учли, что $u_i^{[m]}(0) = u_i^{[n]}(0) = 0$) и для любого $i = 1, \ldots, n$, т. е. $\{u^{[n]}\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0, b]$. В силу полноты метрического пространства $C[0, b]$ существует функция $u = \{u_i\}_{i=1}^n$, $u_i \in C[0, b]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_i^{[n]}(x) = u_i(x). \tag{13}$$

Покажем, что $u \in P_{b,n}$. Так как $\{u_i^{[n]}\} \in P_{b,n}$, то для любого n и всех $x \in [0, b]$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$L_n(x) \leqslant u_i^{[n]}(x) \leqslant R_n(x).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, с учетом равенства (13), получаем $L_n(x) \leqslant u_i(x) \leqslant R_n(x)$, т. е. $u \in P_{b,n}$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u^{[n]}\}$ к u по метрике $\rho_{b,n}$. Переходя в неравенстве (12) к пределу при $m \to \infty$, с учетом равенства (13), имеем

$$\frac{|u_i(x) - u_i^{[n]}(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}} < \varepsilon \quad (\forall\, n \geqslant N,\ \forall\, x \in (0,b],\ i = 1,\dots,n),$$

т. е. $\rho_b(u^{[n]}, u) < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$. Что и требовалось.

Приступим теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2), (3), (7) *и* (10). *Тогда система нелинейных интегральных уравнений типа свертки* (1) *имеет в конусе* $Q_{0,n}$ (*и в пространстве* $P_{b,n}$ *при любом* $b > 0$) *единственное решение* u^*. *Это решение может быть найдено в пространстве* $P_{b,n}$ *методом последовательных приближений по итерационной формуле* $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *которые сходятся к точному решению по метрике* ϱ_b *при любом* $b > 0$, *причем справедлива оценка скорости их сходимости*

$$\rho_b(u_n, u^*) \leqslant \frac{\mu^n}{1-\mu}\,\rho_b(Tu_0, u_0), \tag{14}$$

где

$$\mu = (\alpha\, p\, n)^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(\eta_{ij})\right] < 1, \tag{15}$$

а $u_0 \in P_{b,n}$ *есть произвольная функция* (*начальное приближение*).

$\lhd$ Запишем систему (1) в операторном виде $u = Tu$.

1) Покажем сначала, что система (1) имеет единственное решение в $P_{b,n}$ при любом $b > 0$ и что это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Для этого достаточно, в силу леммы 3, показать, что T — сжимающий оператор. Докажем это. По теореме Лагранжа, для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\,\Theta^{1/\alpha - 1}\,(z_1 - z_2), \tag{16}$$

где Θ лежит между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta \geqslant z_0$ и

$$\left|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\,\frac{|z_1 - z_2|}{\{z_0\}^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Пусть $u, v \in P_{b,n}$ — произвольные функции. Применяя последнее неравенство, в котором роль z_0 играет $L_n^\alpha(x)$, с учетом, что в силу леммы 3 $(T_i u)(x) \geqslant L_n(x)$ и $(T_i v)(x) \geqslant L_n(x)$, для любого $i = 1,\dots,n$ имеем

$$\begin{aligned}
&\bigl|(T_i u)(x) - (T_i v)(x)\bigr| \\
&= \left|\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt + f_i(x)\right)^{1/\alpha} - \left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)v_j(t)\,dt + f_i(x)\right)^{1/\alpha}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,(L_n^\alpha(x))^{(1-\alpha)/\alpha}\left|\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)u_j(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)v_j(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)\,p\,n\,x}\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)\,\bigl|u_j(t) - v_j(t)\bigr|\,dt.
\end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку, в силу неравенства (9),

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{x} k_{ij}(x-t)\big|u_j(t)-v_j(t)\big|\,dt \leqslant \rho_b(u,v)\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{x} k_{ij}(x-t)\,e^{\beta\,t}\,t^{1/(\alpha-1)}dt$$

$$= \rho_b(u,v)e^{\beta\,x}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{x} k_{ij}(x-t)e^{-\beta\,(x-t)}t^{1/(\alpha-1)}dt \leqslant \rho_b(u,v)\frac{\alpha-1}{\alpha}e^{\beta\,x}x^{\alpha/(\alpha-1)}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(\eta_{ij}),$$

то из (17) вытекает, что

$$\big|(T_iu)(x)-(T_iv)(x)\big| \leqslant \frac{1}{\alpha\,p\,n}\,e^{\beta\,x}\,x^{1/(\alpha-1)}\,\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(\eta_{ij})\,\rho_b(u,v),$$

откуда

$$\varrho_b(Tu,Tv) \leqslant \mu\,\varrho_b(u,v), \tag{18}$$

где число μ определено равенством (15) и $\mu \in (0,1)$, в силу условия (7), т. е. оператор T является сжимающим. Следовательно, в силу принципа сжимающих отображений, система (1) имеет единственное решение $u^* \in P_{b,n}$ и это решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа (по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$), для которых справедлива оценка скорости сходимости (16).

2) Осталось показать, что система (1) имеет единственное решение во всем классе $Q_{0,n}$. Положим $P_{\infty,n} = \bigcup_{b>0} P_{b,n}$, т. е. $P_{\infty,n}$ есть множество функций, определенных на полуоси $[0,\infty)$, сужения которых на отрезок $[0,b]$ принадлежат $P_{b,n}$. Так как система (1) имеет единственное решение в $P_{b,n}$ при любом $b > 0$ и коэффициент сжатия в (18) не зависит от b, то система (1) имеет единственное решение $u^*(x)$ в $P_{\infty,n}$. Поскольку всякое решение системы (1) из $Q_{0,n}$ удовлетворяет априорным оценкам, полученным в лемме 2, то решение $u^*(x)$ будет единственным решением уравнения системы (1) и в $Q_{0,n}$. $\rhd$

Замечание 2. Пример 1 показывает, что при $\alpha > 1$ однородная система (1) может иметь нетривиальное решение. Если же $0 < \alpha < 1$ и ядра $k_{ij}(x)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ непрерывны и неотрицательны на $[0,\infty)$, то согласно [3, лемма 24.6] система (1) при $f_{ij}(x) \equiv 0$ имеет лишь тривиальное решение $u \equiv 0$ в классе всех неотрицательных непрерывных на $[0,\infty)$ функций.

В заключение отметим, что следуя работам [9, 10], аналогично можно исследовать системы соответствующих интегро-дифференциальных уравнений и системы интегральных уравнений с переменными коэффициентами.

Литература

1. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 5.—С. 1035–1039.
2. *Асхабов С. Н., Бетилгириев М. А.* Нелинейные интегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // Диф. уравнения.—1991.—Т. 27, № 2.—С. 321–330.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
4. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math.—1979.—Vol. 36, № 1.—P. 61–72. DOI: 10.4064/ap-36-1-61-72.
5. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math.—1989.—Vol. 4, № 2.—P. 51–80.
6. *Keller J. J.* Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys.—1981.—Vol. 32, № 2.—P. 170–181. DOI: 10.1007/BF00946746.

7. *Тихонов А. Н.* Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана — Больцмана // Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики.—1937.—№ 3.—С. 461–479.
8. *Ermentrout G. B., Cowan J. D.* Secondary bifurcation in neuronal nets // SIAM J. Appl. Math.—1980.—Vol. 39, № 2.—P. 323–340.
9. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Диф. уравнения.—2020.—Т. 56, № 6.—С. 786–795. DOI: 10.1134/S0374064120060102.
10. *Askhabov S. N.* Nonlinear convolution integro-differential equation with variable coefficient // Fract. Calc. Appl. Anal.—2021.—Vol. 24, № 3.—P. 848–864. DOI: 10.1515/fca-2021-0036.

Статья поступила 25 октября 2021 г.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный педагогический университет,
профессор кафедры математического анализа
Россия, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62;

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
Россия, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: `askhabov@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0001-6691-9587

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 1, P. 5–14

SYSTEM OF INHOMOGENEOUS INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH POWER NONLINEARITY

Askhabov, S. N.[1,2]

[1] Chechen State Pedagogical University, 62 Kh. Isaev Ave., Grozny 364068, Russia;
[2] Kadyrov Chechen State University, 32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia

E-mail: `askhabov@yandex.ru`

Abstract. We consider a system of inhomogeneous integral equations of convolution type with power nonlinearity arising in the description of the processes of fluid infiltration from a cylindrical reservoir into an isotropic homogeneous porous medium, propagation of shock waves in pipes filled with gas, cooling of bodies under radiation, following the Stefan-Boltzmann law, etc. Keeping in mind the indicated and other applications, nonnegative solutions of this system, continuous on the positive semiaxis, are of interest. Two-sided a priori estimates for the solution of the system are obtained, on the basis of which a complete metric space is constructed, and the unique solvability of this system in this space is proved by the method of weight metrics (an analogue of A. Belitsky's method). It is shown that the solution can be found by successive approximations of the Picard type; an estimate of the rate of their convergence is obtained. It is established that this solution is unique in the entire class of continuous positive functions. In the case of the corresponding homogeneous systems of integral equations of convolution type with power nonlinearity, the question of the existence of nontrivial solutions is also studied.

Key words: system of integral equations, power nonlinearity, convolution, a priori estimates, successive approximation, weight metrics method.

AMS Subject Classification: 45G05, 46L05.

For citation: *Askhabov, S. N.* System of Inhomogeneous Integral Equations of Convolution Type with Power Nonlinearity, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 5–14 (in Russian). DOI: 10.46698/w9450-6663-7209-q.

References

1. *Askhabov, S. N., Karapetyants, N. K. and Yakubov, A. Ya.* Integral Equations of Convolution Type with Power Nonlinearity and Systems of Such Equations, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1990, vol. 311, no. 5, pp. 1035–1039 (in Russian).
2. *Askhabov, S. N. and Betilgiriev, M. A.* Nonlinear Integral Equations of Convolution Type with Almost Increasing Kernels in Cones, *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 234–242.
3. *Askhabov, S. N. Nelineinye uravneniya tipa svertki* [Nonlinear Equations of Convolution Type], Moscow, Fizmatlit, 2009, 304 p. (in Russian).
4. *Okrasinski, W.* On the Existence and Uniqueness of Nonnegative Solutions of a Certain Nonlinear Convolution Equation, *Annales Polonici Mathematici*, 1979, vol. 36, no. 1, pp. 61–72. DOI: 10.4064/ap-36-1-61-72.
5. *Okrasinski, W.* Nonlinear Volterra Equations and Physical Applications, *Extracta mathematicae*, 1989, vol. 4, no. 2, pp. 51–80.
6. *Keller, J. J.* Propagation of simple Nonlinear Waves in Gas Filled Tubes with Friction, *Journal of Applied Mathematics and Physics* (*ZAMP*), 1981, vol. 32, no. 2, pp. 170–181. DOI: 10.1007/BF00946746.
7. *Tikhonov, A. N.* On the Cooling of Bodies During Radiation, Following the Law of Stefan'a–Boltzmann'a. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Geogr. Geophiz.*, 1937, no. 3, pp. 461–479 (in Russian).
8. *Ermentrout, G. B. and Cowan, J. D.* Secondary Bifurcation in Neuronal Nets, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1980, vol. 39, no. 2, pp. 323–340.
9. *Askhabov, S. N.* Integro-Differential Equation of the Convolution Type with a Power Nonlinearity and Inhomogeneity in the Linear Part, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 775–784. DOI: 10.1134/S0012266120060105.
10. *Askhabov, S. N.* Nonlinear Convolution Integro-Differential Equation with Variable Coefficient, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2021, vol. 24, no. 3, pp. 848–864. DOI: 10.1515/fca-2021-0036.

Received October 25, 2021

Sultan N. Askhabov
Chechen State Pedagogical University,
62 Kh. Isaev Ave., Grozny 364068, Russia,
Professor;

Kadyrov Chechen State University,
32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia,
Professor
E-mail: askhabov@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-6691-9587