Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 4, С. 50–55

УДК 512.5
DOI 10.46698/o2081-1390-1031-t

О ПОДГРУППАХ, БОГАТЫХ ТРАНСВЕКЦИЯМИ#

Н. А. Джусоева[1], **С. С. Икаев**[1], **В. А. Койбаев**[1, 2]

[1]Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, Ватутина, 46;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

E-mail: `djusoevanonna@rambler.ru`, `ikaev.sar@yandex.ru`, `koibaev-k1@yandex.ru`

Аннотация. Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $G = GL(n, R)$ порядка n над кольцом R богата трансвекциями, если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ на всех позициях (i, j), $i \neq j$ (для некоторых $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$). Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с подгруппами, богатыми трансвекциями. Известно, что если подгруппа H содержит матрицу-перестановку, соответствующую циклу длины n и элементарную трансвекцию позиции (i, j) такую, что $(i - j)$ и n взаимно просты, то подгруппа H богата трансвекциями. В настоящей заметке доказывается, что условие взаимной простоты $(i - j)$ и n является существенным. Мы показываем, что для $n = 2k$, цикла $\pi = (1\ 2\ \ldots n)$ и элементарной трансвекции $t_{31}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$ группа $\langle(\pi), t_{31}(\alpha)\rangle$, порожденная элементарной трансвекцией $t_{31}(\alpha)$ и матрицей-перестановкой (циклом) (π) не является подгруппой, богатой трансвекциями.

Ключевые слова: подгруппы богатые трансвекциями, трансвекция, цикл.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

Образец цитирования: *Джусоева Н. А., Икаев С. С., Койбаев В. А.* О подгруппах, богатых трансвекциями // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 4.—С. 50–55. DOI: 10.46698/o2081-1390-1031-t.

1. Введение

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $G = GL(n, R)$ порядка n над кольцом R богата трансвекциями [1], если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ на всех позициях (i, j), $i \neq j$ (для некоторых $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$). Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с подгруппами, богатыми трансвекциями.

В [2] доказан следующий результат: если подгруппа H содержит матрицу-перестановку, соответствующую циклу длины n и элементарную трансвекцию позиции (i, j) такую, что НОД $(i - j, n) = 1$, то подгруппа H богата трансвекциями.

Мы показываем (теорема 2), что условие НОД $(i - j, n) = 1$ является существенным. Точнее, для $n = 2k$, цикла $\pi = (1\ 2\ \ldots n)$ и элементарной трансвекции $t_{31}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$, группа $\langle(\pi), t_{31}(\alpha)\rangle$, порожденная элементарной трансвекцией $t_{31}(\alpha)$ и матрицей-перестановкой (циклом) (π) не является подгруппой, богатой трансвекциями.

В работе приняты следующие обозначения: R — коммутативное кольцо с 1; если A и B — аддитивные подгруппы кольца R, то через AB обозначается аддитивная подгруппа

#Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-02-2021-1552.

кольца R, порожденная всеми произведениями ab, где $a \in A$, $b \in B$; $e = e_n$ — единичная матрица порядка n; e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит $1 \in R$, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ — элементарная трансвекция, $\xi \in R$, $\xi \neq 0$, $i \neq j$; δ_{ij} — символ Кронекера; всякой перестановке $\pi \in S_n$ порядка n соответствует матрица-перестановка (π) порядка n, элементы которой определяются формулой $(\pi)_{ij} = \delta_{i\pi(j)}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$; так, например, если перестановка $\pi = (1\ 2\ \ldots n)$ является циклом длины n, то матрица-перестановка (π) имеет вид

$$(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Сети, заданные в клеточной форме

Пусть $n = k \cdot m$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть аддитивных подгрупп коммутативного кольца R с 1 порядка n [1]. С разбиением $n = m + \ldots + m$ (k — слагаемых) числа n связана запись сети σ в клеточной форме:

$$\sigma = [\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \ldots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \ldots & \sigma^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \ldots & \sigma^{kk} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\sigma = [\sigma] = (\sigma^{ij})$, σ^{ij} — квадратные $(m \times m)$-таблицы аддитивных подгрупп кольца R, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Ясно, что при $m = 1$, $k = n$, мы получаем сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$.

Если $S = (s_{ij})$, $L = (l_{ij})$ — две квадратные $(m \times m)$-таблицы аддитивных подгрупп s_{ij}, l_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, кольца R, то мы определяем их сумму и произведение естественным способом:

$$(S + L)_{ij} = (s_{ij} + l_{ij})), \quad (S \cdot L)_{ij} = \sum_{r=1}^{m} s_{ir} \cdot l_{rj}.$$

Определим произведение двух $(k \times k)$-таблиц $[\sigma] = (\sigma^{ij})$ и $[\tau] = (\tau^{ij})$ вида (1) следующим естественным способом:

$$([\sigma][\tau])^{ij} = \sum_{r=1}^{k} \sigma^{ir} \tau^{rj}.$$

В частности, при $m = 1$, $k = n$, мы получаем произведение двух сетей $\sigma = (\sigma_{ij})$ и $\tau = (\tau_{ij})$ аддитивных подгрупп порядка n:

$$(\sigma\tau)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \sigma_{ir} \tau_{rj}.$$

Таблица (1) $\sigma = [\sigma] = (\sigma^{ij})$ является сетью, если $\sigma^{ir}\sigma^{rj} \subseteq \sigma^{ij}$ для всех $1 \leqslant i, r, j \leqslant k$. Ясно, что $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть $\Longleftrightarrow$ $\sigma \cdot \sigma \subseteq \sigma$. Далее, $\sigma = [\sigma] = (\sigma^{ij})$ — сеть $\Longleftrightarrow$ $[\sigma] \cdot [\sigma] \subseteq [\sigma]$.

Из формулы $[\sigma \cdot \sigma] = [\sigma] \cdot [\sigma]$ (см. [3, гл. 1, § 1]) вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца R порядка n является сетью тогда и только тогда, когда система*

$$[\sigma] = ([\sigma]_{rs}) = (\sigma^{rs}), \quad 1 \leqslant r, s \leqslant k,$$

квадратных $(m \times m)$-таблиц σ^{ij} является сетью порядка k (см. (1)).

3. Слабо насыщенные сети

Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* (*ковром*) над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарный ковер*).

Приступим теперь к определению блочных матриц, которые мы будем рассматривать в нашей работе.

Итак, пусть $n = km$, $k, m \geqslant 2$. Представим таблицу $\tau = (\tau_{ij})$ аддитивных подгрупп τ_{ij} кольца R порядка n в виде блочной таблицы порядка k вида (1), на каждой позиции которой стоит квадратная таблица порядка m, в которой на диагонали стоит R, а на остальных местах 0.

Предложение 1. *Построенная таблица τ является сетью порядка n, которую мы называем слабо насыщенной.*

$\lhd$ Доказательство вытекает из леммы 1. Действительно, таблица τ имеет клеточный вид $[\tau] = (\tau^{ij})$: это квадратная таблица порядка k, у которой на каждой позиции (i, j) стоит $(m \times m)$-таблица τ^{ij}, в которой на диагонали стоит кольцо R, а на остальных местах 0. Ясно тогда, что для любых i, r, j мы имеем $\tau^{ir}\tau^{rj} = \tau^{ij}$. Следовательно, клеточная таблица $[\tau] = (\tau^{ij})$ является сетью, а потому по лемме 1 $\tau = (\tau_{ij})$ является сетью порядка n. $\rhd$

Рассмотрим пример этой конструкции для $n = 6$, $m = 2$, $k = 3$:

$$\tau = \begin{pmatrix} R & 0 & R & 0 & R & 0 \\ 0 & R & 0 & R & 0 & R \\ R & 0 & R & 0 & R & 0 \\ 0 & R & 0 & R & 0 & R \\ R & 0 & R & 0 & R & 0 \\ 0 & R & 0 & R & 0 & R \end{pmatrix}.$$

Прокомментируем слабо насыщенную сеть τ. Очевидно, что она симметрична, и на всех позициях главной диагонали стоит кольцо R. Далее, через d_s обозначим s-ю строку сети τ, параллельную главной диагонали (и в силу симметричности сети τ достаточно рассматривать строки, лежащие ниже главной диагонали). По построению строки $d_2, d_3, \ldots, d_m$ — нулевые, а строка d_{m+1} состоит из кольца R; строки $d_{m+2}, d_{m+3}, \ldots, d_{2m}$ — нулевые, а строка d_{2m+1} состоит из кольца R.

В общем виде строки d_{lm+q}, $2 \leqslant q \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant k-1$, — нулевые (номер строки при делении на m дает в остатке $0, 2, \ldots, m-1$), а строки d_{lm+1}, $1 \leqslant l \leqslant k-1$, состоят из кольца R (номер строки при делении на m дает в остатке 1).

Теорема 1. *Пусть $\pi = (1\ 2\ \ldots n)$ — цикл длины $n = km$ и $\tau = (\tau_{ij})$ — слабо насыщенная сеть порядка n, построенная выше (см. предложение 1), $G(\tau)$ — сетевая группа* [4]. *Тогда циклическая матрица-перестановка (π) нормализует построенную сетевую группу $G(\tau)$, а потому произведение $\langle(\pi)\rangle G(\tau)$ является группой. В частности, группа $\langle(\pi)\rangle G(\tau)$ содержится в нормализаторе $N(\tau)$ сетевой группы $G(\tau)$.*

$\lhd$ Согласно предложению 1 [4] матрица-перестановка (π) нормализует построенную сетевую группу $G(\tau)$ тогда и только тогда, когда $\tau^{\pi} = \tau$, где сеть τ^{π} определяется формулой $(\tau^{\pi})_{ij} = \tau_{\pi(i),\pi(j)}$. Таким образом, для доказательства предложения нам нужно показать, что $\tau_{\pi(i),\pi(j)} = \tau_{i,j}$ для любых i, j. В силу симметричности сети τ достаточно доказать последнее равенство для $i > j$.

Рассмотрим τ_{ij}, $i > j$, которая лежит в одной из строк d_s сети τ. Рассмотрим два случая:

(a) τ_{ij} лежит в нулевой строке d_{lm+q}, $2 \leqslant q \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant k-1$. Эта строка имеет вид

$$\tau_{lm+q,1} = \tau_{lm+q+1,2} = \ldots = \tau_{n-1,n-lm-q} = \tau_{n,n-lm-q+1} = 0.$$

Имеем тогда (напомним, что $\pi = (1\ 2\ \ldots n)$ — цикл длины $n = km$)

$$\tau_{\pi(lm+q),\pi(1)} = \tau_{lm+q+1,2} = 0, \ldots, \tau_{\pi(n-1),\pi(n-lm-q)} = \tau_{n,n-lm-q+1} = 0.$$

Далее, $\tau_{\pi(n),\pi(n-lm-q+1)} = \tau_{1,n-lm-q+2}$. В силу симметричности сети τ имеем $\tau_{1,n-lm-q+2} = \tau_{n-lm-q+2,1}$. Последний элемент лежит в строке $d_{n-lm-q+2} = d_{m(k-l)-q+2}$, но так как $2 \leqslant q \leqslant m$, то номер строки $m(k-l)-q+2$ при делении на m не равен 1, а потому $d_{m(k-l)-q+2}$ — нулевая строка. Поэтому $\tau_{\pi(n),\pi(n-lm-q+1)} = 0$.

Таким образом, мы показали, что если τ_{ij} принадлежит нулевой строке d_{lm+q}, $2 \leqslant q \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant k-1$, то $\tau_{\pi(i),\pi(j)} = 0 = \tau_{ij}$.

(b) τ_{ij} лежит в «единичной» строке d_{lm+1}, $1 \leqslant l \leqslant k-1$. Эта строка имеет вид

$$\tau_{lm+1,1} = \tau_{lm+2,2} = \ldots = \tau_{n-1,n-lm-1} = \tau_{n,n-lm} = R.$$

Имеем тогда ($\pi = (1\ 2\ \ldots n)$ — цикл длины $n = km$)

$$\tau_{\pi(lm+1),\pi(1)} = \tau_{lm+2,2} = R, \ldots, \tau_{\pi(n-1),\pi(n-lm-1)} = \tau_{n,n-lm} = R.$$

Далее, $\tau_{\pi(n),\pi(n-lm)} = \tau_{1,n-lm+1}$. В силу симметричности сети τ имеем $\tau_{1,n-lm+1} = \tau_{n-lm+1,1}$. Последний элемент лежит в строке $d_{n-lm+1} = d_{m(r-l)+1}$, но эта строка (а ее номер при делении на m дает в остатке 1) состоит из колец R. Поэтому $\tau_{n-lm+1,1} = R$, откуда $\tau_{\pi(n),\pi(n-lm)} = R$.

Таким образом, мы показали, что если τ_{ij} принадлежит «единичной» строке, то $\tau_{\pi(i),\pi(j)} = R = \tau_{ij}$. $\triangleright$

4. Группа, порожденная циклом и трансвекцией

В группе $G = GL(2k, R)$, $n = 2k \geqslant 4$, рассмотрим подгруппу $\langle t_{31}(\alpha), (\pi)\rangle$, где $\pi = (1\ 2\ 3\ \ldots 2k)$ — цикл длины $n = 2k$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Далее, рассмотрим матрицу-перестановку (π) и слабо насыщенную сеть τ порядка n для $n = 2 \cdot k$ ($m = 2$, см. (1)):

$$\tau = \begin{pmatrix} R & 0 & \ldots & R & 0 \\ 0 & R & \ldots & 0 & R \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R & 0 & \ldots & R & 0 \\ 0 & R & \ldots & 0 & R \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с 1, в котором существует обратимый элемент θ такой, что элемент $\theta - 1$ также обратим (это так, например, если R — произвольное поле, отличное от поля $\mathbb{F}_2$ из двух элементов), $n = 2k$. Тогда группа $\langle G(\tau), (\pi)\rangle$ не богата трансвекциями. В частности, группа $\langle (\pi), t_{31}(\alpha)\rangle$ не богата трансвекциями.*

$\triangleleft$ В силу теоремы 1 мы имеем $\langle G(\tau), (\pi)\rangle = \langle (\pi)\rangle \cdot G(\tau) \subseteq N(\tau)$. Пусть $t_{12}(\xi) \in \langle (\pi)\rangle \cdot G(\tau) \subseteq N(\tau)$ для некоторого $\xi \neq 0$. Тогда согласно предложению 5 [4] мы имеем $\xi \in \sigma_{12} = 0$. $\triangleright$

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А.* Элементарные трансвекции в надгруппах нерасщепимого максимального тора // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, вып. 4.—С. 11–17. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5968.
3. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.—СПб: Лань, 2009.—736 с.
4. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.

Статья поступила 10 августа 2021 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
заведующая кафедрой
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 46
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Икаев Сармат Сосланович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
аспирант
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 46
E-mail: ikaev.sar@yandex.ru

Койбаев Владимир Амурханович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры алгебры и анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, Ватутина, 46
E-mail: koibaev-k1@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 4, P. 50–55

ABOUT SUBGROUPS RICH IN TRANSVECTIONS

Dzhusoeva, N. A.[1], Ikaev, S. S.[1] and Koibaev, V. A.[1,2]

[1]North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2]Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: djusoevanonna@rambler.ru, ikaev.sar@yandex.ru,
koibaev-k1@yandex.ru

Abstract. A subgroup H of the full linear group $G = GL(n, R)$ of order n over the ring R is said to be rich in transvections if it contains elementary transvections $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ at all positions (i, j), $i \neq j$ (for some $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$). This work is devoted to some questions associated with subgroups rich in transvections. It is known that if a subgroup H contains a permutation matrix corresponding to a cycle of length n and an elementary transvection of position (i, j) such that $(i - j)$ and n are mutually simple, then the subgroup

H is rich in transvections. In this note, it is proved that the condition of mutual simplicity of $(i-j)$ and n is essential. We show that for $n = 2k$, the cycle $\pi = (1\ 2\ \dots n)$ and the elementary transvection $t_{31}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$, the group $\langle(\pi), t_{31}(\alpha)\rangle$ generated by the elementary transvection $t_{31}(\alpha)$ and the permutation matrix (cycle) (π) is not a subgroup rich in transvections.

Key words: subgroups rich in transvections, transvection, cycle.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

For citation: *Dzhusoeva, N. A., Ikaev, S. S. and Koibaev, V. A.* About Subgroups Rich in Transvections, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 50–55 (in Russian). DOI: 10.46698/o2081-1390-1031-t.

References

1. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, p. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
2. *Dryaeva, R. Y. and Koibaev, V. A.* Elementary Transvections in the Overgroups of a Non-Split Maximal Torus, *Vladikavkaz Math. J.*, vol. 17, no. 4, pp. 11–17. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5968.
3. *Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N. Computational Methods of Linear Algebra*, St. Petersburg, Lan, 2009.
4. *Borevich, Z. I.* A Description of the Subgroups of the Complete Linear Group that Contain the Group of Diagonal Matrices, *Journal of Soviet Mathematics*, 1981, vol. 17, pp. 1718–1730.

Received August 10, 2021

Nonna A. Dzhusoeva
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Head of Department
E-mail: `djusoevanonna@rambler.ru`

Sarmat S. Ikaev
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Graduate Student
E-mail: `ikaev.sar@yandex.ru`

Vladimir A. Koibaev
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher;
North-Ossetian State University after K. L. Khetagurov,
44 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Analysis
E-mail: `koibaev-k1@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-5142-2612