Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 4, С. 28–34

УДК 512.552.1
DOI 10.46698/g1659-3294-1306-k

О СЛАБО ДОПОЛНЯЕМЫХ КОВРАХ ЛИЕВА ТИПА НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ#

П. С. Бадин[1], Я. Н. Нужин[1], Е. Н. Троянская[1]

[1] Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: pbadin@sfu-kras.ru, nuzhin2008@rambler.ru,
troyanskaya.elizaveta@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются связи двух гипотетических условий замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами. Результаты А. К. Гутновой и В. А. Койбаева (Вестник СПбГУ, Математика. Механика. Астрономия, 2020 г.) о разделении классов слабо дополняемых и дополняемых матричных ковров над полями характеристики 0 и 2 перенесены на ковры любого лиева типа над коммутативными кольцами четной характеристики. Установлено, что эти классы ковров разделяют также примеры неприводимых замкнутых ковров типа B_l и C_l над несовершенными полями характеристики 2, параметризуемые двумя аддитивными подгруппами, которые построены в работе Я. Н. Нужина и А. В. Степанова (Алгебра и анализ, 2019 г.) для получения нестандартных групп между группами Шевалле над полем и его подполем.

Ключевые слова: группа Шевалле, ковер аддитивных подгрупп, ковровая подгруппа, коммутативное кольцо.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

Образец цитирования: *Бадин П. С., Нужин Я. Н., Троянская Е. Н.* О слабо дополняемых коврах лиева типа над коммутативными кольцами // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 4.—С. 28–34. DOI: 10.46698/g1659-3294-1306-k.

Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней ранга $l, E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1}$$

Следуя В. М. Левчуку [1], назовем (*элементарным*) *ковром типа* Φ *ранга* l *над* K всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ поля K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi,\ i>0,\ j>0, \tag{2}$$

#Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ, соглашение № 075-02-2021-1388, и Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 19-01-00566.

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \,|\, a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm1, \pm2, \pm3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$\big[x_s(u), x_r(t)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\big), \quad r, s, ir+js \in \Phi. \tag{3}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу $\Phi(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \,|\, r \in \Phi\rangle$ группы $\Phi(K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. если $\Phi(K) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$.

В работе [2] Я. Н. Нужин определил по ковру $\mathfrak{A}$ ковровое кольцо Ли $L(\Phi, \mathfrak{A})$ и, в частности, доказал, что кольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда инвариантно относительно ковровой подгруппы $\Phi(\mathfrak{A})$, когда выполняются включения

$$\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi. \tag{4}$$

По определению кольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ порождается (относительно обеих операций — сложения и лиева умножения) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$, где $\{e_r, r \in \Phi;\, h_s, s \in \Pi\}$ — базис Шевалле соответствующей алгебры Ли, Π — фундаментальная система корней для Φ. В [2] был также сформулирован следующий вопрос, записанный позднее в Коуровской тетради [3, вопрос 19.63]:

Верно ли, что включения (4) *являются достаточными для замкнутости элементарного ковра* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \,|\, r \in \Phi\}$?

Для ковров типа A_{n-1} в матричной терминологии условие (4) запишется так:

$$\mathfrak{A}_{ij}^2 \mathfrak{A}_{ji} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad i \neq j,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Напомним, что набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \,|\, i, j = 1, \ldots, n\}$ коммутативного кольца K с условиями

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

называется полным матричным ковром степени n над кольцом K. Ковер, рассматриваемый без диагонали, $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \,|\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$ называется элементарным. Всякий элементарный ковер $\mathfrak{A}$ определяет элементарную ковровую подгруппу $E(\mathfrak{A})$ специальной линейной группы $SL(n, K)$, порождаемую трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in \mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Хорошо известно, что элементарный ковер $\mathfrak{A}$ над коммутативным кольцом K допускает дополнение до ковра степени n над K тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j. \tag{6}$$

Очевидно, условия (5) являются ослаблением включений (6). По этой причине А. К. Гутнова и В. А. Койбаев в статье [4] называют элементарный матричный ковер с условиями (5) *слабо дополняемым* и строят примеры замкнутых слабо дополняемых ковров, не дополняемых до полных ковров, над полями характеристики 0 и 2.

По аналогии с матричным случаем мы называем произвольный ковер лиева типа $\mathfrak{A}$ *дополняемым*, если выполняются включения

$$\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_{-r} \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi, \tag{7}$$

и *слабо дополняемым*, если справедливы включения (4), хотя в общем случае ни о каком реальном дополнении речи не идет — это только терминология. Всякий дополняемый элементарный матричный ковер, т. е. ковер типа A_l, замкнут. Однако, для всех других типов пока это только гипотеза.

Используя идеи статьи [4], в параграфе 2 мы строим слабо дополняемые недополняемые ковры любого лиева типа над коммутативными кольцами четной характеристики. Для колец нечетной характеристики условия (4) и (7) эквивалентны, см. § 1. В параграфе 2 установлено, что классы дополняемых и слабо дополняемых ковров разделяют также примеры неприводимых замкнутых ковров типа B_l и C_l над несовершенными полями характеристики 2, параметризуемые двумя аддитивными подгруппами, которые появлялись в работе Я. Н. Нужина и А. В. Степанова [5] для получения нестандартных групп между группами Шевалле над полем и его подполем.

1. Обозначения и предварительные результаты

Под характеристикой коммутативного кольца K мы понимаем наименьшее натуральное число p такое, что сумма $k + k + \dots + k$ из p слагаемых равна нулю для любого $k \in K$. Если такого числа не существует, то по определению характеристика кольца K равна 0. Далее для любых подмножеств U и V кольца K по определению $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$, $U^2 = \{u^2 \mid u \in U\}$ и аддитивная подгруппа кольца K есть любая подгруппа всей его группы относительно операции сложения.

Лемма 1. *Пусть U — аддитивная подгруппа коммутативного кольца K, а V — его произвольное подмножество. Тогда если характеристика p кольца K нечетна, то включение $U^2V \subseteq U$ влечет включение $UVU \subseteq U$.*

$\lhd$ Пусть $U^2V \subseteq U$. Тогда для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $v \in V$ элементы $(u_1+u_2)^2v$, u_1^2v и u_2^2v лежат в U. Следовательно,

$$2u_1vu_2 = (u_1+u_2)^2v - u_1^2v - u_2^2v \in U.$$

Сейчас, учитывая, что p нечетно, получаем

$$u_1vu_2 = \frac{p+1}{2}\, 2u_1vu_2 \in U.$$

Таким образом, $UVU \subseteq U$. $\rhd$

Следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Над кольцом нечетной характеристики условия дополняемости* (7) *и слабой дополняемости* (4) *эквивалентны.*

Хорошо известно, что всякий дополняемый элементарный матричный ковер, т. е. ковер типа A_l, замкнут. Поэтому из леммы 2 вытекает

Следствие 1. *Для ковров типа A_l над кольцами нечетной характеристики ответ на указанный во введении вопрос является положительным.*

2. Слабо дополняемые ковры над коммутативными кольцами четной характеристики

Далее $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо вычетов по модулю p и по определению $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$. В силу леммы 2 для колец нечетной характеристики условия дополняемости и слабой дополняемости ковров совпадают. Следующая теорема разделяет эти понятия над кольцами четной характеристики. Ее доказательство состоит в переносе на все лиевы типы соответствующего примера матричного ковра, который указан в статье [4].

Теорема 1. *Над кольцом полиномов $\mathbb{Z}_p[x,y,z]$ при четном p существует неприводимый слабо дополняемый ковер произвольного лиева типа, не являющийся дополняемым.*

$\lhd$ Пусть A — идеал кольца $\mathbb{Z}_p[x,y,z]$, состоящий из всех полиномов, степень которых по совокупности всех трех переменных больше или равна четырем. Аддитивная подгруппа B кольца $\mathbb{Z}_p[x,y,z]$ определяется равенством

$$B = \mathbb{Z}_p x + \mathbb{Z}_p y + \mathbb{Z}_p z + \mathbb{Z}_p xy^2 + \mathbb{Z}_p xz^2 + \mathbb{Z}_p yx^2 + \mathbb{Z}_p yz^2$$
$$+ \mathbb{Z}_p zx^2 + \mathbb{Z}_p zy^2 + \mathbb{Z}_p x^3 + \mathbb{Z}_p y^3 + \mathbb{Z}_p z^3 + 2\mathbb{Z}_p xyz + A.$$

Другими словами, подгруппа B состоит из всех полиномов с нулевым свободным членом, нулевыми коэфициентами при квадратах переменных и четным коэффициентом при произведении xyz. Очевидно, справедливо включение $A \subseteq B$.

Для системы корней Φ ранга l определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\} \tag{8}$$

следующим образом. Фиксируем корень $r_1 \in \Phi$ и полагаем

$$\mathfrak{A}_{r_1} = \mathfrak{A}_{-r_1} = B,$$

а если $l > 1$, то

$$\mathfrak{A}_r = A, \quad r \in \Phi \setminus \{r_1, -r_1\}.$$

В нашем случае для подходящих $n, m, c \in \{1,2,3\}$ условия ковровости (2) имеют вид

$$cA^n X^m \subseteq Y,$$

где X и Y есть A или B. Они выполняются только в силу того, что A — идеал и он лежит в подгруппе B. Таким образом, набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}$ является ковром.

Условия слабой дополняемости (4) в нашем случае будут состоять из двух включений $A^2A \subseteq A$ и $B^2B \subseteq B$, а при $l = 1$ только из второго. Первое включение выполняется, так как A — идеал. Второе включение тоже справедливо, это непосредственно следует из вида аддитивной подгруппы B.

Очевидно, моном xyz лежит в произведении BBB, но не содержится в подгруппе B по определению, т. е. одно из включений (7) не выполняется.

Таким образом, ковер $\mathfrak{A}$ является слабо дополняемым, но не дополняемым. $\rhd$

3. Примеры замкнутых недополняемых ковров типа B_l и C_l над несовершенными полями характеристики 2

В статье [5, с. 215] приведены примеры групп лежащих между группами $E(\Phi, K)$ и $E(\Phi, F)$, где F — алгебраическое расширение несовершенного поля K характеристики 2, которые являются ковровыми, и они параметризуются двумя аддитивными подгруппами P и Q и одна из них не является полем, а при $\Phi = B_2 = C_2$ обе аддитивные подгрупппы не являются полями. Эти примеры дают следующий результат.

Теорема 2. *Над несовершенными полями характеристики 2 существуют неприводимые замкнутые слабо дополняемые ковры типа B_l и C_l при $l \geqslant 2$, не являющиеся дополняемыми.*

◁ Пусть n — натуральное число больше 1 и $x_1, \dots, x_n$ — независимые коммутативные переменные, т. е. трансцендентные элементы над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$. Рассмотрим поле рациональных функций $F = \mathbb{F}_2(x_1, \dots, x_n)$ и его подполе $K = \mathbb{F}_2(x_1^2, \dots, x_n^2)$, порожденное квадратами этих переменных. Очевидно, что F — алгебраическое расширение степени 2^n поля K и в качестве базиса линейного пространства F над K можно взять множество мономов

$$\bigl\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m} \bigm| i_1 < \dots < i_m,\ \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Далее в зависимости от типа системы корней определим аддитивные подгруппы P и Q поля K.

Тип B_l, $l \geqslant 3$. Пусть $Q = K$, а P есть K-модуль с базисом $\{1, x_1, x_2,\}$. Следующие свойства проверяются непосредственно: 1) $PQ \subseteq P$; 2) $P^2Q \subseteq Q$; 3) $\dim_K P = 3$ и, следовательно, аддитивная подгруппа P не является полем, так как 3 не делит 2^n.

Тип C_l, $l \geqslant 3$. Пусть $P = F$, а Q есть K-модуль с базисом $\{1, x_1, x_2,\}$. Свойства 1)–3) из предыдущего пункта выполняются и в этом случае, только в свойстве 3) нужно заменить P на Q. Далее так же, как и для типа B_l.

Тип $B_2 = C_2$. Пусть в этом случае $n \geqslant 4$. Аддитивные подгруппы P и Q поля F определим следующим образом. Пусть P есть K-модуль с базисом

$$\{1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_1x_2x_3,\ x_1x_2x_4\},$$

Q есть K-модуль с базисом $\{1, x_1, x_2,\}$. Следующие свойства проверяются непосредственно: 1) $PQ \subseteq P$; 2) $P^2Q \subseteq Q$; 3) $\dim_K P = 12$, $\dim_K Q = 3$ и, следовательно, обе аддитивная подгруппа P и Q не являются полями, так как 3 и 12 не делят 2^n.

Для каждого из указанных выше трех типов по определению полагаем

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\},$$

где

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень,} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень.} \end{cases}$$

В [5] установлено, что набор $\mathfrak{A}$ является замкнутым ковром.

Условия слабой дополняемости (4) в нашем случае будут состоять только из двух включений $P^2P \subseteq P$ и $Q^2Q \subseteq Q$. Они справедливы, поскольку для каждого из указанных выше трех типов $1 \in P \cap Q$ и $P^2, Q^2 \subseteq K$, а P и Q являются K-модулями.

Условия дополняемости (7) в нашем случае также будут состоять только из двух включений $PPP \subseteq P$ и $QQQ \subseteq Q$. Для типа B_l, $l \geqslant 3$, не выполняется первое включение, поскольку произведение $x_1 1 x_2$ лежит в PPP, но не лежит в P. Для типа C_l, $l \geqslant 3$, подобным образом нарушается второе включение $QQQ \subseteq Q$. Для типа $B_2 = C_2$ нарушаются оба включения, так как произведение $x_3 1 x_4$ не лежит в P, а произведение $x_1 1 x_2$ не лежит Q.

Таким образом, ковер $\mathfrak{A}$ является слабо дополняемым, но не дополняемым. ▷

Литература

1. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 4.—С. 509–525.
2. *Нужин Я. Н.* Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Тр. ИММ УрО РАН.—2012.—Т. 18, № 3.—С. 195–200.

3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 19-е изд.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2018.
4. *Гутнова А. К., Койбаев В. А.* О достаточных условиях замкнутости элементарной сети // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2020.—Т. 65, № 2.—С. 230–235.
5. *Нужин Я. Н., Степанов А. В.* Подгруппы групп Шевалле типов B_l и C_l, содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры // Алгебра и анализ.—2019.—Т. 31, № 4.—С. 198–224.

Статья поступила 6 июля 2021 г.

Бадин Павел Сергеевич
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
аспирант
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: pbadin@sfu-kras.ru

Нужин Яков Нифантьевич
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
профессор
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Троянская Елизавета Николаевна
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ,
магистрант
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: troyanskaya.elizaveta@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 4, P. 28–34

ON WEAKLY SUPPLEMENTED CARPETS OF LIE TYPE OVER COMMUTATIVE RINGS

Badin, P. S.[1], Nuzhin, Ya. N.[1] and Troyanskaya, E. N.[1]

[1] Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, 79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia

E-mail: pbadin@sfu-kras.ru, nuzhin2008@rambler.ru, troyanskaya.elizaveta@yandex.ru

Abstract. Relationships between two hypothetical conditions for the closedness of carpets of Lie type over commutative rings are considered. The results of A. K. Gutnova and V. A. Koibaev (Vestnik of Saint Petersburg University, Mathematics. Mechanics. Astronomy, 2020) on the separation of classes of weakly supplemented and supplemented matrix carpets over fields of characteristic 0 and 2 are carried over to carpets of any Lie type over commutative rings even characteristic. It is established that these classes of carpets are also separated by examples of irreducible closed carpets of type B_l and C_l over nonperfect fields of characteristic 2, parametrized by two additive subgroups, which were constructed in the work of Ya. N. Nuzhin and A. V. Stepanov (Algebra and Analysis, 2019) to obtain non-standard groups between Chevalley groups over a field and its subfield.

Key words: Chevalley group, carpet of additive subgroups, carpet subgroup, commutative ring.

Mathematical Subject Classification (2010): 20G15.

For citation: *Badin, P. S., Nuzhin, Ya. N. and Troyanskaya, E. N.* On Weakly Supplemented Carpets of Lie Type over Commutative Rings, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 28–34 (in Russian). DOI: 10.46698/g1659-3294-1306-k.

References

1. *Levchuk, V. M.* Parabolic Subgroups of Certain ABA-Groups, *Mathematical Notes*, 1982, vol. 31, no. 4, pp. 259–267. DOI: 10.1007/BF01138934.
2. *Nuzhin Ya. N.* Lie rings defined by the root system and family of additive subgroups of the initial ring, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* (*Supplementary Issues*), 2013, vol. 283, suppl. 1, pp. 119–125. DOI: 10.1134/S0081543813090125.
3. *The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2018, no. 19.
4. *Gutnova, A. K. and Koibaev, V. A.* On Sufficient Conditions for Closure Elementary Network, *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), no. 2, pp. 230–235 (in Russian). DOI: 10.21638/11701.
5. *Nuzhin, Ya. N. and Stepanov, A. V.* Subgroups of Chevalley Groups of Type B_l and C_l Contaning the Group over a Subring, and the Corresponding Carpets, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2020, vol. 31, no. 4, pp. 719–737. DOI: 10.1090/spmj/1620.

Received Jule 6, 2021

Pavel S. Badin
Institute of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
PhD Student
E-mail: pbadin@sfu-kras.ru

Yakov N. Nuzhin
Institute of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
Professor
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Elizaveta N. Troyanskaya
Institute of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia,
Master's Student
E-mail: troyanskaya.elizaveta@yandex.ru