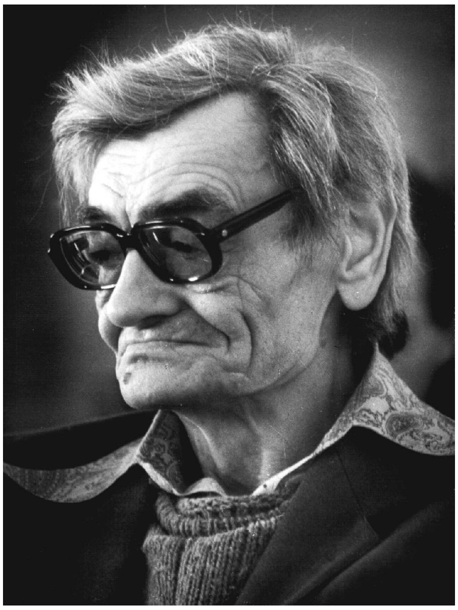
Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 4, С. 119–128

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

О ЖИЗНИ И ТВОРЧЕСТВЕ С. Б. СТЕЧКИНА (1920–1995)

В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев



Основной научной профессией С. Б. Стечкина была теория приближений. Он воспринял идеи и результаты классиков теории аппроксимации — П. Л. Чебышева, С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова — и с успехом продолжал и развивал творчество своих предшественников.

Сергей Борисович Стечкин родился 6 сентября 1920 г. в Москве. Его отец — Борис Сергеевич Стечкин (1891–1969) — один из крупнейших русских ученых-инженеров, работавший в области тепловых и авиационных двигателей, принадлежал к старинному дворянскому роду. Его дядей был Николай Егорович Жуковский, оказавший большое влияние на выбор направления научной деятельности Бориса Сергеевича.

Сын Бориса Сергеевича — Сергей учился в знаменитой 59-й московской школе, которую окончили многие известные ученые — члены академий, доктора наук, профессора университетов. В школе были замечательные преподаватели математики, повлиявшие на выбор профессии юноши.

Отроческие годы С. Б. Стечкина были омрачены репрессиями, которым был подвергнут его отец (в 1930–1931 и 1937–1943 гг).

В 1938 г. С. Б. Стечкин закончил школу с похвальным листом. Он собирался поступить на механико-математический факультет МГУ. Но ему было отказано в приеме по причинам, которые можно не объяснять. Стечкин поступает на физико-математический факультет Горьковского государственного университета. После окончания первого курса он предпринимает попытку перевода в МГУ. Ему активно содействует в этом С. А. Чаплыгин, очень высоко ценивший творчество его отца. В итоге в 1939 г. Стечкин становится студентом второго курса мехмата МГУ.

Очень значимым в жизни С. Б. Стечкина был 1943 г. Весной освобождают отца, а осенью, еще будучи студентом, он начинает преподавать в Военной Ордена Ленина Академии бронетанковых и механизированных войск Красной Армии им. И. В. Сталина. С той поры его преподавательская деятельность продолжалась до последних лет его жизни.

После окончания в 1944 г. Московского университета Стечкин поступает в аспирантуру мехмата. Его научным руководителем в аспирантуре был Дмитрий Евгеньевич Меньшов. Участие в семинаре Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова оказало на Стечкина весьма плодотворное влияние; проблемам теории тригонометрических рядов он посвятил много работ, но основные творческие силы С. Б. Стечкин отдал теории приближений.

Теория приближений родилась в России в трудах П. Л. Чебышева, и на протяжении более столетия Россия, а потом СССР были центрами притяжения научной активности в этой области. Это время в развитии теории приближений можно разделить на три периода, а именно, периоды П. Л. Чебышева, С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова. Основными учителями С. Б. Стечкина в теории приближений были Бернштейн и Колмогоров. Скажем о роли Бернштейна в начальном периоде творчества Стечкина, который он посвятил теме «Гладкость и аппроксимация. Прямые и обратные теоремы».

Бернштейн впервые получил прямые и обратные теоремы для функций с модулем непрерывности первого порядка. Первая большая публикация С. Б. Стечкина в Известиях РАН с заголовком «О порядке наилучших приближений непрерывных функций» (1951 г.), целиком содержала текст его диссертации. Там выражена благодарность С. Н. Бернштейну. Вот его слова: «Все теоремы этой работы были получены мною в результате занятий на семинаре по теории приближений в Математическом институте Академии Наук СССР, и я приношу глубокую благодарность руководителю семинара С. Н. Бернштейну за внимание к моей работе и ценные замечания». В диссертации Стечкиным были установлены, ставшие теперь классическими, прямые и обратные теоремы теории приближений в терминах модулей непрерывности произвольного порядка.

Расскажем о некоторых темах, которые в дальнейшем активно развивал С. Б. Стечкин. Первые три темы восходят к работам Чебышева.

Первая тема:
Критерии решения

Начнем обсуждение этой темы с одного очень известного результата.

Теорема (об альтернансе). *Полином $\widehat{x}(\cdot)$ степени n наилучшим образом приближающий в пространстве $C([a,b])$ непрерывную функцию $\xi(\cdot)$, существует и единствен. Для того, чтобы он был полиномом наилучшего приближения $\xi(\cdot)$ необходимо и достаточно, чтобы разность $\xi(\cdot)-\widehat{x}(\cdot)$ имела $n+2$-альтернанс, т. е. принимала в $n+2$ последовательных точках отрезка $[a,b]$, попеременно чередуя знаки, свои максимальные и минимальные значения.*

Необходимость была сформулирована Чебышевым в 1859 г. как нечто общеизвестное. Формулировка и доказательство сформулированного здесь результата принадлежат Э. Борелю (1905 г.).

Данное утверждение породило обширный цикл исследований, посвященных критериям экстремальных элементов. Бернштейн обобщил этот результат на так называемые чебышевские пространства, Колмогоров рассматривал приближения комплексных функций, С. М. Никольский изучал приближения элементов нормированного пространства подпространствами данного пространства. Стечкин с соавторами (см., например, С. И. Зуховицкий, С. Б. Стечкин «О приближении абстрактных функций». Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 1 (73). С. 187–191) рассматривал приближения функций, непрерывных на компакте, конечномерными подпространствами.

Все эти результаты формулировались на геометрическом языке и каждый из них доказывался своими методами. Читателям Владикавказского математического журнала быть может будет интересно узнать, что возникающие здесь экстремальные задачи (как и многие другие экстремальные задачи теории приближений) методами выпуклого анализа решаются единообразно. В данном случае все упомянутые результаты суть следствия критерия решения экстремальной задачи

$$\|\xi - x\|_X \to \min, \quad x \in L, \tag{1}$$

где X — нормированное пространство, L — подпространство X и $\xi \in X \setminus L$. Обозначим еще через X^* сопряженное пространство к X, $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$ и $L^\perp$ — аннулятор L. Справедливо следующее утверждение (см. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров «Выпуклый анализ и его приложения». 5-е изд., доп. М.: УРСС, 2020).

Теорема (общий критерий элемента наилучшего приближения)**.** *Элемент $\widehat{x} \in L$ — решение задачи* (1) *в том и только в том случае, если найдется функционал $x^* \in X^*$ такой, что*

$$\|x^*\|_{X^*} = 1, \quad \langle x^*, \xi - \widehat{x}\,\rangle = \|\xi - \widehat{x}\,\|_X, \quad x^* \in L^\perp.$$

Для доказательства этой теоремы надо рассмотреть равносильную (1) задачу минимизации выпуклой функции $f(x) = \|\xi - x\|_X + \delta L(x)$ на X ($\delta L(\cdot)$ — индикаторная функция L, равная нулю на L и бесконечности вне L) и расшифровать критерий минимума f в точке $\widehat{x}$, заключающийся во включении $0 \in \partial f(\widehat{x})$, где $\partial f(\widehat{x})$ — субдифференциал f в точке $\widehat{x}$.

Следствие. *Если $X = C(T)$ — пространство непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве T, то критерий минимума заключается в существовании такой регулярной борелевской меры μ на T с полной вариацией равной единице, сосредоточенной на множестве тех $t \in T$, где $|\xi(t) - \widehat{x}(t)| = \|\xi(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C(T)}$ и $\int_T x(t)\,d\mu = 0$ для всех $x(\cdot) \in L$.*

Если $\dim L = N$, то мера сосредоточена не более, чем в $N + 1$ точке.

Доказательство первого утверждения сразу следует из описания субдифференциала нормы в $C(T)$. Второе утверждение — следствие теоремы об очистке (см. указанную выше книгу).

Вторая тема:
Единственность элементов наилучшего приближения

Обозначим через $\mathscr{R}_{mn}$ совокупность рациональных функций вида p_m/q_n, где p_m и q_n — вещественные полиномы степени m и n соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема (Чебышева о единственности рационального приближения в вещественном случае)**.** *Существует единственная функция из $\mathscr{R}_{mn}$ наилучшего равномерного приближения функции $x(\cdot) \in C([a, b]) \setminus \mathscr{R}_{mn}$.*

Сформулированный результат замечателен тем, что ни в одном пространстве $L_p([a, b])$, $1 \leqslant p < \infty$, единственности наилучшего приближения рациональными функциями нет. Все это побудило С. Б. Стечкина перевести эту тематику на язык банаховых пространств. Основной вопрос заключается в том, чтобы описать в данном пространстве множества единственности и свойства наилучших приближений. В этом круге вопросов Стечкин имел предшественников, но реально именно он является классиком в области геометрической теории приближений.

Стечкин привлек к своим исследованиям замечательного геометра Н. В. Ефимова. Ими было опубликовано несколько совместных статей, первой из которых была работа: С. Б. Стечкин, Н. В. Ефимов «Чебышевские множества в банаховых пространствах». Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 582–585. Они сделали и совместный доклад на Международном математическом Конгрессе в Стокгольме в 1962 г.

С. Б. Стечкин, совместно с Н. В. Ефимовым, разработал геометрическую теорию приближений в банаховых пространствах. При этом был введен ряд новых аппроксимативных понятий, оказавшихся весьма полезными и в других вопросах.

Под влиянием этих работ сформировалась большая математическая школа учеников Стечкина — А. Р. Алимов, В. С. Балаганский, В. И. Бердышев, Л. П. Власов, В. А. Кощеев, С. В. Конягин, А. В. Маринов, И. Г. Царьков и др. В этой школе были введены яркие геометрические и обще-топологические понятия, такие как аппроксимативная компактность, солнце и др.

Третья тема: Точные решения в теории приближений

Здесь речь пойдет о задачах экстраполяции, интерполяции и неравенствах для производных алгебраических и тригонометрических полиномов. Начнем с одной из первых работ на эти темы.

Теорема (Чебышева об экстраполяции полиномов, 1881 г.)**.** *Среди всех алгебраических полиномов степени не выше n, норма которых в $C([-1,1])$ не превосходит $\delta>0$, наибольшее значение в точке $\tau>1$ принимает полином $\delta T_n(\cdot)$, где $T_n(\cdot)$ — полином Чебышева степени n.*

Этот результат, как легко проверить, равносилен тому, что для всех полиномов степени не выше n справедливо точное неравенство

$$|p(\tau)| \leqslant |T_n(\tau)|\, \|p(\cdot)\|_{C([-1,1])}.$$

Весьма значительная доля работ самого Чебышева и его школы была связана с попытками найти точные решения в тех или иных экстремальных задач теории приближений. Интерес к этой теме не ослабевает и в наши дни. Для С. Б. Стечкина эта тема была также среди основных. Коснемся роли выпуклого анализа и в данной проблематике.

Для исследования широкого класса экстремальных задач с ограничениями (особенно это касается выпуклых задач), разумно использовать так называемый *принцип Лагранжа.* Согласно этому принципу для получения необходимых условий экстремума в данной задаче надо составить ее функцию Лагранжа и применить к задаче минимизации функции Лагранжа необходимое условие экстремума как к задаче без ограничений («как если бы переменные были независимы» по словам самого Лагранжа).

Применение принципа Лагранжа приводит к некоторым соотношениям (уравнениям, неравенствам, тождествам и т. п.). Их явное разрешение, в некотором смысле, равносильно точному решению исходной задачи. Продемонстрируем это на примере доказательства теоремы Чебышева об экстраполяции.

Пусть $x=(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$ и $p(t,x)=\sum_{k=1}^{n+1}x_kt^{k-1}$. Обозначим $f_0(x)=p(\tau,x)$, $f_1(x)=\|p(\cdot,x)\|_{C([-1,1])}$ и рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$-f_0(x)\to\min,\quad f_1(x)\leqslant\delta,\quad x\in\mathbb{R}^{n+1}. \tag{2}$$

Это выпуклая экстремальная задача (т. е. задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве), и если мы покажем, что ее решение $\widehat{x}$ (которое, очевидно, существует по теореме Вейерштрасса) таково, что $f_0(\widehat{x}) = p(\tau, \widehat{x}) = \delta T_n(\tau)$, то это и будет доказательством теоремы Чебышева.

Воспользуемся принципом Лагранжа. Функция Лагранжа задачи (2) имеет вид $\mathscr{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \lambda f_1(x) = -p(\tau, x) + \lambda \|p(\cdot, x)\|_{C([-1,1])}$ (множитель Лагранжа λ_0 при f_0 отличен от нуля, как легко понять, и поэтому можно считать, что $\lambda_0 = 1$). Принцип Лагранжа в данном случае состоит в том, что $\widehat{x}$ — решение задачи (2) тогда и только тогда, когда $0 \in \partial \mathscr{L}(\widehat{x}, \lambda)$ для некоторого $\lambda > 0$ и $\|p(\cdot, \widehat{x})\|_{C([-1,1])} = \delta$. Расшифровывая эти условия, используя стандартные факты выпуклого анализа, получим, что найдутся $r \leqslant n+1$, точки $\{t_k\}_{k=1}^r$ из $[-1,1]$ и числа $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^r \alpha_k = 1$ такие, что $p(\tau) = \lambda \sum_{k=1}^r \alpha_k \operatorname{sign} p(t_k, \widehat{x}) p(t_k)$ (основное тождество) для любого полинома $p(\cdot)$ степени не выше n и $|p(t_k, \widehat{x})| = \delta$, $k = 1, \ldots, r$.

Покажем, что $r = n+1$. Допустим, что $r \leqslant n$ и рассмотрим полином $p_0(t) = \Pi_{k=1}^r (t - t_k)$. Ясно, что $p_0(\tau) \neq 0$. Подставляя этот полином в основное тождество, получим, что $p_0(\tau) = 0$. Противоречие доказывает, что $r = n+1$. Но в этом случае, как не трудно показать, решение задачи пропорционально полиному Чебышева $T_n(\cdot)$ и тем самым ее значение равно $\delta T_n(\tau)$.

Этот результат послужил истоком для многих исследований, в которых большую роль сыграли работы Стечкина и его школы.

Обратим теперь внимание на важный класс задач (к которому будем неоднократно еще возвращаться), возникающих в математическом анализе и касающийся *точных неравенств*.

Это необозримый мир, который частично освещен в классической монографии Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуда и Г. Пойа с приложением В. И. Левина и Стечкина. (С. Б. Стечкин, В. И. Левин. Дополнение к кн.: Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд и Г. Полиа «Неравенства». М.: ИЛ, 1948. С. 361–441).

Попробуем взглянуть на этот мир как бы «сверху», отталкиваясь прежде всего от точных неравенств в теории приближений. О неравенстве Чебышева говорилось выше. «Точечная» задача о неравенствах для производных алгебраических полиномов ставится так:

$$-p^{(k)}(\tau) \to \min, \quad \|p(\cdot)\|_{C([-1,1])} \leqslant \delta, \quad p(\cdot) \in \mathscr{P}_n,$$

где $\mathscr{P}_n$ — пространство алгебраических полиномов степени не выше n, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Решение этой задачи, проводимое по плану решения чебышевской задачи, приводит к тому, что ответами здесь являются (в зависимости от τ), либо полином Чебышева, либо один из полиномов Золотарева.

Приведем еще один пример, который обобщался Стечкиным (С. Б. Стечкин «Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна». Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511–1514). Обозначим через $\mathscr{T}_n$ пространство тригонометрических полиномов степени не выше n, через $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами.

Теорема (Бернштейн, 1912 г.)**.** *Справедливо следующее точное неравенство:*

$$\|\dot{y}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant n \|y(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} \quad (\forall\, y(\cdot) \in \mathscr{T}_n).$$

Равенство достигается на функции $t \mapsto \sin nt$.

Аналогично предыдущему, чтобы доказать это неравенство, достаточно найти решение следующей «точечной» (ввиду инвариантности нормы относительно сдвига) выпуклой экстремальной задачи:

$$-\dot{y}(0,x) \to \min, \quad \|y(\cdot,x)\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant 1, \quad y(\cdot) \in \mathscr{T}_n,$$

где $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и $y(t,x) = \frac{x_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(x_k \cos kt + x_{n+k} \sin kt)$.

Применяя принцип Лагранжа, находим на том же пути, что и в чебышевском случае, решение данной задачи. По нашему убеждению, весьма высока доля подобных точных неравенств, которые можно доказать с помощью принципа Лагранжа. Среди исключений укажем неравенство из работы С. Б. Стечкина «Одна экстремальная задача для многочленов». Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 765–774.

Особенно много явных решений экстремальных задач, а также точных или асимптотически точных результатов было получено Стечкиным и его учениками под влиянием творчества А. Н. Колмогорова.

Четвертая тема: **Методы Фурье и Тейлора**

Эта тема о том чем приближать? Чебышев, Бернштейн и их последователи приближали функции алгебраическими и тригонометрическими полиномами и рациональными дробями. Но еще в восемнадцатом веке у Эйлера, Лапласа и Лежандра появлялись специальные функции, по которым можно раскладывть функции на окружности, прямой и полупрямой.

В двадцатом веке был выделен один общий класс специальных функций — это классические ортогональные системы на группах и однородных пространствах (многообразиях, на которых транзитивно действует некоторая группа). Общий взгляд на такие системы стал возможен с развитием теории представлений. Центральная роль в оформлении этой идеи принадлежит И. М. Гельфанду.

Простейший пример — окружность $\mathbb{T}$, где представление группы вращений и отражений приводит к ортогональной системе синусов и косинусов. На компактном однородном пространстве существует конечное число дифференциальных операторов 2-го порядка, инвариантных относительно сдвига (на $\mathbb{T}$ — это оператор взятия 2-й производной). Собственные функции этих операторов порождают классические ортогональные системы. Существенно более сложным, но подобным образом, дело обстоит на некомпактных многообразиях. Таким образом, в теорию приближений вносится необозримое число классических ортогональных систем, как аппарат приближения функций на многомерных торах, сферах и т. п., и одновременно возникают соответствующие методы приближения — суммы и интегралы Фурье.

Так что, *если речь идет о многообразии с определенной инвариантностью, то одним из возможных средств приближения является метод Фурье.*

В своей первой работе по теории приближений Колмогоров ставит вопрос о приближении тригонометрическими полиномами класса $W^r_\infty(\mathbb{T})$ (совокупность 2π-периодических функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а норма r-й производной в $L_\infty(\mathbb{T})$ не превосходит единицы). Колмогоров нашел сильную асимптотику величины $\varphi(W^r_\infty(\mathbb{T}), S_n, C(\mathbb{T})) = \sup\{\, \|x(\cdot) - S_n(x(\cdot))(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} : x(\cdot) \in W^r_\infty(\mathbb{T})\,\}$, характеризующую приближение класса $W^r_\infty(\mathbb{T})$ n-тыми суммами Фурье S_n в метрике $C(\mathbb{T})$.

Теорема (Колмогоров, 1935 г.).

$$\varphi\big(W^r_\infty(\mathbb{T}),\, S_{n-1},\, C(\mathbb{T})\big) = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{\ln n}{n^r} + O\bigg(\frac{1}{n^r}\bigg). \tag{3}$$

В 1958 г. С. Б. Стечкин защитил докторскую диссертацию, и одним из важных ее результатов было вычисление асимптотики величины приближения n-тыми суммами ряда Тейлора класса $H^r_\infty(D)$ аналитических функций, непрерывных на единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ комплексной плоскости, аналитических внутри D и у которых r-я производная по модулю не превосходит единицы.

Как рассказывал первому автору сам Сергей Борисович его обращение к тематике приближений рядами Тейлора было связано с влиянием Андрея Николаевича Колмогорова. Во время одной из бесед со Стечкиным Колмогоров сказал, что существует большой цикл проблем приближения аналитических функций, аналогичный проблемам приближения гладких функций. Он указал на то, что в параллель его теореме 1935 г., где дифференцируемые функции приближались суммами Фурье, можно изучать приближения аналитических в круге функций суммами Тейлора. Это обстоятельство и подвигло Стечкина на доказательство одного из основных результатов его докторской диссертации.

А. Н. Колмогоров высоко оценивал творчество Стечкина в теории приближений. С. М. Никольский как-то говорил В. М. Тихомирову, что однажды Колмогоров назвал Стечкина возможным конкурентом Никольского в теории приближений. Колмогоров взял Стечкина в соавторы статьи с обзором творчества Никольского (А. Н. Колмогоров, С. Б. Стечкин «С. М. Никольский (к 50-летию со дня рождения)». Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 2 (68). С. 239–244).

Пятая тема:
Поперечники

Вторая работа А. Н. Колмогорова по теории приближений была опубликована в 1936 г. В ней Колмогоров ввел понятие, получившее потом название *n-поперечника по Колмогорову.* Впервые понятие поперечника было введено П. С. Урысоном в топологии. Урысоновский n-поперечник характеризует уклонение компакта в метрическом пространстве от n-мерного множества, а n-поперечник по Колмогорову характеризует уклонение множества в нормированном пространстве от n-мерного подпространства. Напомним это понятие. Пусть X — нормированное пространство, C — подмножество X и $n \in \mathbb{N}$. Величина

$$d_n(C, X) = \inf_{L_n} \sup_{x\in C} \inf_{y\in L_n} \|x - y\|_X,$$

где первая нижняя грань берется по всем подпространством L_n в X размерности не выше n и называется n-поперечником по Колмогорову множества C в X.

Начнем с теоремы о поперечнике правильного октаэдра в N-мерном евклидовом пространстве l_2^N. Правильный октаэдр $\mathscr{O}^N$ в l_2^N — это выпуклая оболочка векторов $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_N\}$, где $\{e_k\}_{k=1}^N$ — канонический базис в l_2^N.

В заметке С. Б. Стечкина «О приближении заданных классов любыми полиномами» (Успехи мат. наук. 1954. Т. 9, № 1. С. 133–134) был приведен следующий результат:

$$d_n\bigl(\mathscr{O}^N, l_2^N\bigr) = \sqrt{\frac{N-n}{N}},$$

который Стечкин назвал теоремой А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова и А. И. Мальцева.

Несколько слов об истории этой теоремы. В 1947 г. появился в печати третий результат Колмогорова (в соавторстве с Петровым и Смирновым), посвященный теории приближений. Речь шла о приближении правильного N-мерного октаэдра в N-мерном евклидовом пространстве n-мерными плоскостями. Работа была связана с одной формулой Гаусса, относящейся к статистике. Авторы получили оценку сверху, но об n-поперечниках в этой работе не было сказано ни слова. Оценку снизу, по просьбе авторов, доказал Мальцев и опубликовал ее в том же году в отдельной заметке. Стечкин в упомянутой работе 1954 г. показал, что результат Колмогорова, Петрова, Смирнова и Мальцева, на самом деле, представляет собой n-поперечник по Колмогорову правильного N-мерного октаэдра. В шутку этот результат обычно называют теоремой КПСС(М). Он послужил истоком для целого научного направления о точном вычислении n-поперечников по Колмогорову конечномерных множеств.

Перейдем к поперечникам классов *гладких функций*. Напомним, что $W_p^r([-1,1])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — это совокупность функций на $[-1,1]$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а норма r-й производной в $L_p([-1,1])$ не превосходит единицы.

Теорема (А. Н. Колмогоров, 1936 г.).

$$d_n\big(W_2^r([-1,1]),\, L_2([-1,1])\big) = \begin{cases} +\infty, & \textit{если } 0 \leqslant n \leqslant r-1; \\ \lambda_{nr22}, & \textit{если } n \geqslant r, \end{cases}$$

где λ_{nr22} *— спектральное число следующей изопериметрической задачи:*

$$\int\limits_{-1}^{1} x^2(t)\,dt \to \max, \quad \int\limits_{-1}^{1} \big(x^{(n)}\big)^2(t)\,dt = 1, \quad \int\limits_{-1}^{1} t^k x(t)\,dt = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Эта теорема Колмогорова в течение 18 лет не была востребована. Первый и существенный отклик на нее был получен Стечкиным, который доказал следующий результат: $d_n\big(W_\infty^r(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})\big) \asymp n^{-r}$, опубликованный лишь в упомянутой выше в маленькой заметке в журнале «Успехи математических наук» в 1954 г., но этот результат послужил отправным пунктом для многих исследований, продолжавшихся целые десятилетия.

Шестая тема:
Приближение неограниченных операторов ограниченными и неравенства Ландау — Колмогорова

Шестидесятые годы следует отнести к самым плодотворным в жизни и творчестве Сергея Борисовича. Он организует новый научный центр в Свердловске, формирует свердловскую ветвь своей математической школы, начинает разработку новых научных направлений. Укажем на две работы Стечкина, лежащие в основе этих направлений: С. Б. Стечкин «Наилучшее приближение линейных операторов» (Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148) и С. Б. Стечкин «О неравенствах между верхними гранями производных произвольной функции на полупрямой» (Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 6. С. 665–674).

В первой из этих работ ставится следующая задача. Пусть X и Y — банаховы пространства, $A\colon X \to Y$ — некоторый оператор с областью определения $D(A)$ и Q — некоторый класс элементов из $D(A)$. Обозначим через $\mathscr{L}(N)$ множество линейных непрерывных операторов из X в Y, норма которых не превосходит N. Стечкин определил следующую величину:

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf_{\Lambda \in \mathscr{L}(N)} \sup_{x \in Q} \|Ax - \Lambda x\|_Y,$$

которая характеризует наилучшее приближение оператора A ограниченными операторами из $\mathscr{L}(N)$ на классе Q.

Эта задача оказалась тесно связанной с задачей о неравенствах для производных типа Ландау — Колмогорова. Нахождение точной константы в таком неравенству, фактически, равносильно решению соответствующей задачи Стечкина. Напомним, что под неравенствами Ландау — Колмогорова понимают неравенства вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K \|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)} \|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}, \tag{4}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $T = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$, справедливые для всех функций $x(\cdot) \in L_p(T)$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на T и $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(T)$. Это пространство функций обозначим через $\mathscr{W}^n_{p,r}(T)$.

При фиксированном T неравенство (4) зависит от пяти параметров k, n, p, q, r (числа α и β определяются ими однозначно). Первое точное (т. е. с наименьшей возможной константой K) неравенство подобного вида для случая, когда $T = \mathbb{R}_+$, $k = 1$, $n = 2$ и $p = q = r = \infty$ было доказано Эдмундом Ландау в 1913 г. В 1938 г. А. Н. Колмогоров доказал точное неравенство для любых $1 \leqslant k < n$ и $p = q = r = \infty$. До сих пор этот результат является одним из самых ярких в этой тематике.

Нахождение точной константы в неравенстве (4) равносильно нахождению значения следующей экстремальной задачи:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leqslant a, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leqslant b \tag{5}$$

для каких-нибудь $a > 0$ и $b > 0$. Как уже было сказано, С. Б. Стечкин показал тесную связь задачи о приближении неограниченного оператора ограниченными на прямой или полупрямой с соответствующей ей задачей вида (5). К разработке этой проблематики он подключил своих свердловских (екатеринбургских) учеников. Назовем некоторых из них: В. В. Арестов, В. И. Бердышев, В. Н. Габушин, Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков, Н. И. Черных. Ими было получено много ярких результаты, обогативших современную теорию приближений.

Седьмая тема:
Сплайны и всплески

В середине прошлого века в теорию приближений появились новые средства аппроксимации, сначала сплайны, а потом вейвлеты. Эти понятия пришли к нам из-за рубежа. Сергей Борисович Стечкин самым активным образом стал пропагандировать новые идеи, открывшиеся с появлением этих аппаратов приближения. Совместно с Ю. Н. Субботиным он написал первую на русском языке монографию по приближению функций сплайнами (С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин «Сплайны в вычислительной математике». М.: Наука, 1976), способствовавшую развитию в СССР исследований по сплайнам и внедрению их в практику вычислительной математики. В конце жизни Сергей Борисович стал готовить обзоры по вейвлетам. По предложению К. И. Осколкова французское слово «вейвлет» (волночка) было заменено на русское «всплеск». Обзор И. Я. Новикова, С. Б. Стечкина «Основы теории всплесков» (Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, № 6 (324). С. 53–128) был опубликован уже после его смерти.

В последние полвека случились огромные перемены во всем мире. Колоссальные изменения произошли и в науке, в частности, в математике. В определенном смысле можно историю нашей науки разделить на два этапа. Первый — от древнейших времен до третьей четверти прошлого века, и второй, наступивший полвека тому назад, когда произошел невиданный по масштабам технологический и информационный взрыв, и были созданы суперкомпьютеры. В первый период теории приближений лидерами были Чебышев и Бернштейн. В 30-е–40-е годы их исследования продолжил Колмогоров, его ученики и последователи Никольский и Стечкин. В эти времена рассматривались функции одного переменного. Цели, которые ставил перед собой Чебышев, скажем, замены деления сложением с умножением, в новые времена утратила свою целесообразность.

В 50-е гг. прошлого века А. Н. Колмогоров предпринял попытку воссоединить на базе идей теории информации случайность и сложность. В теории приближений, в качестве отражения этих идей, возникла проблема аппроксимативной сложности гладких и аналитических функций многих переменных. Эти идеи воспринял К. И. Бабенко, желая построить вычислительные методы для функций многих переменных на базе колмогоровской концепции ε-энтропии и n-поперечников. Подобные методы затем развивали А. Г. Витушкин, Б. С. Стечкин и многие другие. Но в последние полвека начался еще один период теории приближений. Наступила эра суперкомпьютеров, когда стали решаться проблемы с огромным числом переменных, такие как прогноз погоды, исследования полезных ископаемых на больших территориях, рассчеты обдувания предметов воздухом на высоких скоростях и др. Россия при этом утратила свое лидирующее положение. Лидерские позиции в теории приближений заняли школы Добеши и ДеВора.

С. Б. Стечкин был безусловным классиком первого (одномерного) периода теории аппроксимации. Он почувствовал приближение новых времен и вместе со своим учеником, как уже говорилось, написал монографию о сплайнах. Ему не хватило времени чтобы принять активное участие в третьем периоде, к которому, конечно, относится упомянутая статья о всплесках, опубликованная, к сожалению, уже после его смерти.

Сергей Борисович Стечкин прожил плодотворную и вполне благополучную жизнь. Он был замечательным математиком и выдающимся организатором науки. В конце 50-х гг. началось важнейшее дело его жизни — строительство и организация СОМИ (Свердловского отделения МИАН). С 1957 г. по 1967 г. С. Б. Стечкин был заместителем директора СОМИ. Он активно занимался подбором кадров, вопросами строительства (проект был продуман настолько, что почти полвека спустя, здание вполне отвечает своему назначению), оснащением отделения вычислительной техникой (с регулярной заменой на более совершенные образцы), созданием первоклассной научной библиотеки. С. Б. Стечкин обеспечил микрофильмирование всех книжных фондов МИАН, и к открытию института библиотека уже имела более 20 тысяч книг. Впоследствии свою личную библиотеку он завещал СОМИ.

К возвращению из Свердловска в Москву у Сергея Борисовича образовалось новое дело, а именно, журнал «Математические заметки», первый номер которого вышел в начале 1967 г.

С. Б. Стечкин был замечательным учителем, основоположником математических школ в Москве и Екатеринбурге. Он пользовался любовью и признанием своих многочисленных учеников. Память о нем сохранится в сердцах всех людей, которые были с ним связаны.