*Владикавказский математический журнал*
*2021, Том 23, Выпуск 2, С. 87–103*

**УДК** 517.958
**DOI** 10.46698/u2193-3754-6534-u

# ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

**Ж. Д. Тотиева**[1]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

**Аннотация.** Представлена линеаризованная обратная задача определения двумерного ядра для системы уравнений линейной динамической вязкоупругости с сосредоточенным источником возмущений на свободной поверхности. Искомой величиной в поставленной задаче является ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти, которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах. Прямая начально-краевая задача для вектор-функции смещения содержит нулевые начальные данные и граничное условие Неймана на дневной поверхности специального вида. Для линеаризации искомое ядро разлагается на две составляющие, одна из которых малая по абсолютной величине неизвестная добавка. В качестве дополнительной информации задается отклик линеаризованного поля смещений точек среды на свободной поверхности. В предположении, что коэффициенты системы зависят от одной пространственной переменной, прямая задача сводится к начально-краевой задаче для одного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа второго порядка. Доказывается, что поставленная линеаризованная задача определения сверточного ядра эквивалента некоторой системе линейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. К последней применяется обобщенный принцип сжатых отображений. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости в пространстве непрерывных функций и устойчивости решения обратной задачи. Приводится теорема о сходимости регуляризованного семейства задач к решению исходной (некорректной) задачи.

**Ключевые слова:** линейная вязкоупругость, обратная задача, дельта-функция, преобразование Фурье, ядро, устойчивость.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 35L20, 35R30, 35Q99.

**Образец цитирования:** *Тотиева Ж. Д.* Линеаризованная двумерная обратная задача определения ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 2.—С. 87–103. DOI: 10.46698/u2193-3754-6534-u.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$, $t \in R$, $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_i|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.2}$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = -\frac{\delta_{1j}\delta(t)}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; $T_{ij}$ — тензор напряжений:

$$T_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}[u](x,t) + \int\limits_0^t k(x_2, t-\tau)\sigma_{ij}[u](x,\tau)\,d\tau, \tag{1.4}$$

$$\sigma_{ij}[u](x,t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\,\mathrm{div}\,u. \tag{1.5}$$

Здесь $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Предполагается, что $\rho = \rho(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, $\lambda = \lambda(x_3)$ являются функциями одной переменной, удовлетворяющими условиям $\rho(x_3) \geqslant m > 0$, $\mu(x_3) \geqslant m > 0$, $\lambda(x_3) \geqslant m > 0$, причем $\rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0$.

*Прямая задача* заключается в отыскании вектор-функции $u(x,t)$ из системы уравнений (1.1) при соответствующих начальных и граничных условиях (1.2), (1.3).

При сделанных предположениях из равенств (1.1)–(1.5) следует, что решение прямой задачи $u(x,t)$ не зависит от переменной $x_1$: $u(x,t) \equiv u(x_2,x_3,t)$ [1].

Предполагаем, что ядро $k(x_2,t)$ можно представить в следующем виде [2]:

$$k(x_2,t) = k_0(x_2,t) + k_1(x_2,t),$$

где функция $k_0(x_2,t)$ является заданной, а $k_1(x_2,t)$ — неизвестная, малая по абсолютной величине, добавка. Требование малости добавочного ядра понимается как малость по норме, содержащей производные ядра до некоторого порядка. Суть метода линеаризации заключается в следующем. Формально вводится параметр $\varepsilon$:

$$k(x_2,t) = k_0(x_2,t) + \varepsilon k_1(x_2,t). \tag{1.6}$$

В рамках данного исследования положим $k_0(x_2,t) \equiv k_0(t)$.

Решение прямой задачи (1.1)–(1.5) в предположении (1.6) будем искать в виде ряда по степеням $\varepsilon$:

$$u(x_2,x_3,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x_2,x_3,t). \tag{1.7}$$

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.1) и приравнивая члены, стоящие при $\varepsilon^j$, $j = 0, 1$, получаем две прямые задачи:

(i) Задача определения $u_0(x_2,x_3,t) = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)(x_2,x_3,t)$ из равенств

$$\rho\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}^0}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.8}$$

$$u_i^0|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.9}$$

$$T_{3j}^0|_{x_3=+0} = -\delta_{1j}\delta(t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.10}$$

где

$$T_{ij}^0(x_2,x_3,t) = \sigma_{ij}[u_0](x,t) + \int\limits_0^t k_0(t-\tau)\sigma_{ij}[u_0](x,\tau)\,d\tau.$$

(ii) Задача определения $u_1(x_2,x_3,t)=(u_1^1,u_2^1,u_3^1)(x_2,x_3,t)$ из равенств

$$\rho\frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}^1}{\partial x_j},\quad i=1,2,3, \tag{1.11}$$

$$u_i^1|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.12}$$

$$T_{3i}^1|_{x_3=+0}=0,\quad i=1,2,3, \tag{1.13}$$

где

$$T_{ij}^1(x_2,x_3,t)=\sigma_{ij}[u_1](x,t)+\int\limits_0^t\Big[k_1(x_2,t-\tau)\sigma_{ij}[u_0](x,\tau)+k_0(t-\tau)\sigma_{ij}[u_1](x,\tau)\Big]\,d\tau. \tag{1.14}$$

*Обратная задача* заключается в определении ядра $k_1(x_2,t)$, $t>0$, входящего в (1.13) посредством формулы (1.14), если относительно решения линеаризованной задачи (1.11)–(1.13) известна дополнительная информация

$$u_1^1\big|_{x_3=+0}=g(x_2,t), \tag{1.15}$$

где $g(x_2,t)$ — заданная функция.

Определение. Функция $k_1(x_2,t)$ из класса непрерывных функций $C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ называется *решением обратной задачи* (1.11)–(1.15), если соответствующее ей решение прямой задачи (1.11)–(1.14) $u(x,t)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R}_+^3\times\mathbb{R})$ удовлетворяет (1.15) для $g(x_2,t)$, принадлежащей классу обобщенных функций $D'(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.

Данное исследование представляет обратную задачу линейной динамической вязкоупругости. Искомой величиной в поставленной задаче является ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти, которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах.

Задачи определения ядра (зависящего от временной и пространственных переменных) интегрального оператора — направление в теории обратных задач, возникшее в конце прошлого столетия [3–9]. Более подробный анализ источников по данному направлению представлен в монографии [10], которая является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с памятью (или с последействием). В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с последействием по измерениям волнового поля в доступных областях. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленных обратных задач, а также получены оценки непрерывной зависимости решений этих задач от входных данных.

Из первых результатов по обратным задачам линейной вязкоупругости, близким к данной, можно отметить [11–13]. Дальнейшее развитие исследований отражено, например, в работах [14–20]. Особый интерес представляют многомерные обратные задачи по определению ядер, когда искомая функция зависит от двух и более переменных. Многомерная обратная задача для (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3), дополнительной информацией (1.15) исследована в [21]. В этой работе на основе метода шкал банаховых пространств получена локальная однозначная разрешимость задачи определения ядра $k(x_2,t)$ в классе функций, аналитических по переменной $x_2$ и гладких по переменной $t$.

Из результатов по численному исследованию обратных задач для сред с памятью можно отметить работы [22–25].

В работах [26, 27] рассмотрены задачи определения двумерного ядра интегро-дифференциального уравнения со слабо горизонтальной однородностью.

Прямая задача (1.8)–(1.10) изучена в работе [1]. Показано, что она распадается на две независимо решаемые задачи по определению $u_1^0(x_2,x_3,t)$ и $(u_2^0,u_3^0)(x_2,x_3,t)$ соответственно. Причем для второй задачи получаем однородную систему уравнений с однородными граничными условиями и нулевыми начальными данными. Поэтому $u_2^0\equiv u_3^0\equiv 0$. Кроме того, $u_1^0(x_2,x_3,t)\equiv u_1^0(x_3,t)$. Его структура имеет вид

$$u_1^0(\psi^{-1}(y),t)=s(y)\left[V^0(y,t)+\int\limits_0^t r_0(t-\tau)V^0(y,\tau)\,d\tau\right],$$

$$V^0(y,t)=\theta(t-|y|)\left[\frac{a}{2}+v(y,t)\right],$$

где

$$y=\phi(x_3):=\int\limits_0^{x_3}\frac{d\xi}{c(\xi)},\quad c(x_3):=\sqrt{\frac{\mu(x_3)}{\rho(x_3)}},\quad s(y):=\sqrt{\frac{c(+0)\rho(+0)}{c\left(\phi^{-1}(y)\right)\rho\left(\phi^{-1}(y)\right)}},$$

$$r_0(t)=-k_0(t)-\int\limits_0^t k_0(t-\tau)r_0(\tau)\,d\tau,\quad a=\left[\mu(+0)\rho(+0)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\theta(t)=1,\ t\geqslant 0,\quad \theta(t)=0,\ t<0.$$

Функция $v(y,t)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода в области $D_T=\{(y,t):\,|y|\leqslant t\leqslant T-|y|\}$ для фиксированного $T>0$

$$v(y,t)=\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|\xi-y|}\left(q(\xi)-r_0'(t-|y-\xi|-\tau)\right)\left(\frac{a_0}{2}+v(\xi,\tau)\right)d\tau d\xi,\tag{1.16}$$

$q(y):=\frac{s''(y)}{s(y)}-2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2.$

При предположении $k_0(t)\in C^3[0,T]$ с помощью дифференцирования по параметру можно показать, что $v(y,t)\in C^2$ $(t\geqslant|y|)$. Из (1.16) следует, что $v|_{t=|y|}=0$.

В работе [28] для системы уравнений (1.8)–(1.10) изучена обратная задача определения $k_0(t)$. В дальнейшем будем считать функции $k_0(t)$ и $u^0(x_3,t)$ известными величинами и допустим, что $k_0(0)=0$. Это условие существенно облегчает выкладки и не меняет сути исследования.

Основная цель представленной работы — построение метода нахождения $k_1(x_2,t)$.

Результатами исследования являются теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

## 2. Задача определения функций $k_1$ и $u_1$

Определим билинейный интегральный оператор $L$ по формуле

$$L[k_0(t),u(x_2,x_3,t)]=u(x_2,x_3,t)+\int\limits_0^t k_0(t-\tau)u(x_2,x_3,\tau)\,d\tau,$$

где $u$ — скалярная функция. В дальнейшем для сокращения записи иногда не будем в операторе $L$ указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой функции от переменной $t$, а второй — от $x_2$, $x_3$, $t$.

Из (1.11)–(1.15) следует, что компонента вектор-функции $u_1^1 = u_1^1(x_2, x_3, t)$ при $x_3 > 0$, $(x_2, t) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяет следующим равенствам:

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_1^1(x_2,x_3,t)}{\partial t^2} = L\left[k_0, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)\frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}\right) + \mu(x_3)\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x_2^2}\right] + \int_0^t k_1(x_2, t-\tau)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)\frac{\partial u_1^0(x_3,\tau)}{\partial x_3}\right) d\tau, \quad (2.1)$$

$$u_1^1\big|_{t<0} \equiv 0, \quad (2.2)$$

$$\left(L\left[k_0, \mu(x_3)\frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}\right] + \int_0^t k_1(x_2, t-\tau)\mu(x_3)\frac{\partial u_1^0(x_3,\tau)}{\partial x_3}\, d\tau\right)\Bigg|_{x_3=+0} = 0, \quad (2.3)$$

$$u_1^1(x_2, 0, t) = g(x_2, t). \quad (2.4)$$

Перейдем от функции $u_1^1(x_2, x_3, t)$ к ее образу Фурье $\tilde{u}_1^1(\nu, x_3, t) := F_{x_2}[u_1^1](\nu, x_3, t)$, причем $\operatorname{supp}\tilde{u}_1^1(\nu, x_3, t) \subset [-\lambda, \lambda]$, где $\lambda$ — фиксированное положительное число.

Будем считать, что $\tilde{k}_1(\nu, t) = F_{x_2}[k_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{k}_1(\nu, t) \in C_t^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\operatorname{supp}\tilde{k}_1(\nu, t) \subset [-\lambda, \lambda]$. Соответственно, $k_1(x_2, t) \in \Lambda(\lambda, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{k}_1(\nu, t) = F_{x_2}[k_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}(\lambda, T)$.

Тогда обратная задача (2.1)–(2.4) в терминах функции $\tilde{u}_1^1$ перепишется в виде

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 \tilde{u}_1^1(\nu,x_3,t)}{\partial t^2} = L\left[k_0, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_1^1}{\partial x_3}\right) - \nu^2\mu(x_3)\tilde{u}_1^1\right] + \int_0^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)\frac{\partial u_1^0(x_3,\tau)}{\partial x_3}\right) d\tau, \quad (2.5)$$

$$u_1^1\big|_{t<0} \equiv 0, \quad (2.6)$$

$$\mu(+0)\left(L\left[k_0, \frac{\partial \tilde{u}_1^1}{\partial x_3}\right] + \int_0^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\frac{\partial u_1^0(\nu, x_3,\tau)}{\partial x_3} d\tau\right)\Bigg|_{x_3=+0} = 0, \quad (2.7)$$

$$\tilde{u}_1^1(\nu, 0, t) = F_{x_2}[g](\nu, t) := \tilde{g}(\nu, t). \quad (2.8)$$

Пусть

$$V_1(\nu, y, t) := L\left[k_0, \frac{\tilde{u}_1^1(\nu, \phi^{-1}(y), t)}{s(y)}\right], \quad L[r_0, V_0(y,t)] = \frac{u_1^0(\phi^{-1}(y), t)}{s(y)}.$$

Тогда (2.5)–(2.8) для $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ примут вид

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + H(\nu, y)V_1 - \int_0^t r_0''(t-\tau)V_1(\nu, y, \tau)\, d\tau + \int_0^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\left[\frac{\partial^2 L\big[r_0, V_0(y,\tau)\big]}{\partial y^2} + q(y)L\big[r_0, V_0(y,\tau)\big]\right] d\tau, \quad (2.9)$$

$$V_1\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \int\limits_0^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\frac{\partial L\big[r_0, V_0(y,\tau)\big]}{\partial y}\, d\tau\right)\Bigg|_{y=+0} = 0, \tag{2.11}$$

$$V\;|_{y=0} = L\left[k_0, \tilde{g}(\nu, t)\right], \tag{2.12}$$

где

$$H(y,\nu) := q(y) - \nu^2 c^2(\psi^{-1}(y)).$$

Имеем

$$L\big[r_0, V_0(y,t)\big] = \theta(t-y)\left[\frac{a}{2} + v(y,t)\right] + \int\limits_0^t r_0(t-\tau)\theta(\tau - y)\left[\frac{a}{2} + v(y,\tau)\right] d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\frac{\partial L\big[r_0, V_0(y,\tau)\big]}{\partial y}\, d\tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\left\{\frac{a}{2} + v(y,\tau) + \int\limits_y^\tau r_0(\tau-\eta)\left[\frac{a}{2} + v(y,\eta)\right] d\eta\right\} d\tau \tag{2.13}$$

$$= -\frac{a}{2}\tilde{k}_1(\nu, t-y) + \int\limits_y^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\left\{L_0\left[r_0, \frac{\partial v}{\partial y}(y,\tau)\right] - \frac{a}{2} r_0(\tau - y)\right\} d\tau.$$

Поступая аналогично,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\frac{\partial^2 L\big[r_0, V_0(y,\tau)\big]}{\partial y^2}\, d\tau &= \frac{a}{2}\,\tilde{k}_1'(\nu, t-y) + \tilde{k}_1(\nu, t-y) L_0\left[r_0, \frac{\partial v}{\partial y}(y,y)\right] \\ &+ \int\limits_y^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)\left\{L_0\left[r_0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y,\tau)\right] + \frac{a}{2} r_0'(\tau - y)\right\} d\tau.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь и далее, к примеру, $\tilde{k}_1'$, $\tilde{g}''$ означают операции однократного и двукратного дифференцирования по переменной $t$ соответствующих функций.

С учетом (2.13), (2.14) задача (2.9)–(2.12) перепишется в следующем виде для $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} &+ H(y,\nu)V_1 + \frac{a}{2}\tilde{k}_1'(\nu, t-y) + \tilde{k}_1(\nu, t-y) L_0\left[r_0, \frac{\partial v}{\partial y}(y,y)\right] \\ &- \int\limits_y^t r_0''(t-\tau)V_1(\nu, y, \tau)\, d\tau + \int\limits_y^t \tilde{k}_1(\nu, t-\tau)p(y,\tau)\, d\tau,\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}\bigg|_{y=+0} = \frac{a}{2} L\left[r_0, \tilde{k}_1(\nu, t)\right], \tag{2.16}$$

$$V_1\big|_{y=0} = L\left[k_0, \tilde{g}(\nu, t)\right], \tag{2.17}$$

$$V_1\big|_{t=y} = 0, \tag{2.18}$$

где

$$p(y,t) := L_0\left[r_0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y,\tau) + q(y)\left(\frac{a}{2} + v(y,\tau)\right)\right] + \frac{a}{2}\, r_0'(\tau - y).$$

В равенстве для $p(y,t)$ оператор $L_0$ отличается от оператора $L$ тем, что нижний индекс в интеграле оператора заменен на $y$.

С помощью формулы Даламбера получаем

$$\begin{aligned} V_1(\nu,y,t) &= \frac{1}{2}\Big(L\big[k_0, \tilde{g}(\nu, t-y)\big] + L\big[k_0, \tilde{g}(\nu, t+y)\big]\Big) + \frac{a}{4}\int\limits_{t-y}^{t+y} L\big[r_0, \tilde{k}_1(\nu,\tau)\big]\, d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^y \int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \Bigg\{\frac{a}{2}\,\tilde{k}_1'(\nu,\tau-\xi) + \tilde{k}_1(\nu,\tau-\xi) L_0\left[r_0, \frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\right] + H(\nu,\xi)V_1(\nu,\xi,\tau) \\ &\qquad + \int\limits_\xi^\tau \Big(\tilde{k}_1(\nu,\tau-\eta)p(\xi,\eta) - r_0''(\tau-\eta)V_1(\nu,\xi,\eta)\Big)d\eta\Bigg\}\, d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Переходя в равенстве (2.19) к пределу $t \to y + 0$ с учетом (2.18) и $\tilde{g}(\nu, 0) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} -L\big[k_0, \tilde{g}(\nu, 2y)\big] &= \frac{a}{2}\int\limits_0^{2y} L\big[r_0, \tilde{k}_1(\nu,\tau)\big]\, d\tau \\ &+ \int\limits_0^y \int\limits_\xi^{2y-\xi} \Bigg\{\frac{a}{2}\,\tilde{k}_1'(\nu,\tau-\xi) + \tilde{k}_1(\nu,\tau-\xi) L_0\left[r_0, \frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\right] + H(\nu,\xi)V_1(\nu,\xi,\tau) \\ &\qquad + \int\limits_\xi^\tau \Big(\tilde{k}_1(\nu,\tau-\eta)p(\xi,\eta) - r_0''(\tau-\eta)V_1(\nu,\xi,\eta)\Big)\, d\eta\Bigg\} d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Заменяя $2y$ на $t$ и дифференцируя (2.20) по $t$, получаем

$$\begin{aligned} -L\left[k_0, \tilde{g}'(\nu, t)\right] &= \frac{a}{2} L\big[r_0, \tilde{k}_1(\nu,t)\big] \\ &+ \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \Bigg\{\frac{a}{2}\tilde{k}_1'(\nu,t-2\xi) + \tilde{k}_1(\nu,t-2\xi) L_0\left[r_0, \frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\right] + H(\nu,\xi)V_1(\nu,\xi,t-\xi) \\ &\qquad + \int\limits_\xi^{t-\xi} \Big(\tilde{k}_1(\nu,t-\xi-\tau)p(\xi,\tau) - r_0''(t-\xi-\tau)V_1(\nu,\xi,\tau)\Big)\, d\tau\Bigg\}\, d\xi. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Дифференцируя по $t$ (2.21) (предварительно сделав замену переменной во втором интеграле $t-2\xi=\tau$), получаем

$$\tilde{k}_1'(\nu,t)=-\frac{4}{3a}\Big(L\left[k_0,\tilde{g}''(\nu,t)\right]+k_0(t)\tilde{g}'(\nu,0)\Big)-\frac{2}{3}\int\limits_0^t r_0(t-\tau)\tilde{k}_1(\nu,\tau)\,d\tau$$
$$-\frac{4}{3a}\int\limits_0^{\frac{t}{2}}\Bigg\{\tilde{k}_1(\nu,\tau-\xi)L_0\left[r_0,\frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\right]+H(\nu,\xi)\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,\xi,t-\xi)$$
$$+\tilde{k}_1(\nu,0)p(\xi,t-\xi)-r_0''(0)V_1(\nu,\xi,t-\xi)$$
$$+\int\limits_{\xi}^{t-\xi}\tilde{k}_1'(\nu,t-\xi-\tau)p(\xi,\tau)\,d\tau-\int\limits_0^{t-2\xi}r_0''(\tau)\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg\}\,d\xi. \tag{2.22}$$

Уравнение для $\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,y,t)$ получается дифференцированием по $t$ уравнения (2.19)

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,y,t)=\frac{1}{2}\Big(L\big[k_0,\tilde{g}'(\nu,t-y)\big]+L\big[k_0,\tilde{g}'(\nu,t+y)\big]\Big)$$
$$+\frac{a}{4}\Big(L\big[r_0,\tilde{k}_1(\nu,t+y)\big]-L\big[r_0,\tilde{k}_1(\nu,t-y)\big]\Big)+\frac{a}{4}y\tilde{k}_1'(\nu,t-y)$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\Bigg\{\frac{a}{2}\tilde{k}_1'(\nu,t+y-2\xi)+\Big(\tilde{k}_1(\nu,t+y-2\xi)-\tilde{k}_1(t-y)\Big)L_0\left[r_0,\frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\right]$$
$$+H(\nu,\xi)\Big(V_1(\nu,\xi,t+y-\xi)-V_1(\nu,\xi,t-y+\xi)\Big)$$
$$+\int\limits_{\xi}^{t+y-\xi}\Big(\tilde{k}_1(\nu,t+y-\xi-\eta)p(\xi,\eta)-r_0''(t+y-\xi-\eta)V_1(\nu,\xi,\eta)\Big)d\eta$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t-y+\xi}\Big(\tilde{k}_1(\nu,t-y+\xi-\eta)p(\xi,\eta)-r_0''(t-y+\xi-\eta)V_1(\nu,\xi,\eta)\Big)\,d\eta\Bigg\}\,d\xi. \tag{2.23}$$

Добавляя к уравнениям нижеприведенное

$$\tilde{k}_1(\nu,t)=\tilde{k}_1(\nu,0)+\int\limits_0^t(t-\tau)\tilde{k}_1'(\nu,\tau)d\tau, \tag{2.24}$$

получаем замкнутую линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода (2.19), (2.22)–(2.24) в области $D_T$ относительно $V_1(\nu,y,t)$, $\tilde{k}_1'(\nu,t)$, $\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,y,t)$, $\tilde{k}_1(\nu,t)$.

Так как в данную систему входит неизвестная величина $\tilde{k}_1(\nu,0)$, то ее можно найти из уравнения (2.21) при $t=0$:

$$\tilde{k}_1(\nu,0)=-\frac{2}{a}\,\tilde{g}'(\nu,0).$$

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $\tilde{k}_1(\nu,t)$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\lambda$, $T$ — фиксированные положительные числа. Для существования и единственности решения обратной задачи (1.11)–(1.15) $k_1(x_2,t)\in\Lambda(\lambda,T)$, необходимо и достаточно, чтобы $k_0(t)\in C^3[0,T]$, $\tilde g(\nu,t)\in C_t^2(\mathbb{R}\times[0,T])$, $\tilde g(\nu,0)=0$, и для любого фиксированного $t\in[0,T]$ $\operatorname{supp}\tilde g(\nu,t)\subset[-\lambda,\lambda]$.*

**Теорема 2.2.** *Пусть $k_1^{(1)}(x_2,t),k_1^{(2)}(x_2,t)\in\Lambda(\lambda,T)$ — решения обратной задачи (1.11)–(1.15), отвечающие информациям $g^{(1)}(x_2,t)$, $g^{(2)}(x_2,t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 2.1 имеет оценка устойчивости*

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\big\|k_1^{(1)}-k_1^{(2)}\big\|^2_{C[0,T]}\,dx_2\leqslant C\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\big\|\tilde g^{(1)}-\tilde g^{(2)}\big\|^2_{C^2[0,T]}\,d\nu, \tag{2.25}$$

*где $C$ — некоторая константа, зависящая от величин $\lambda$, $T$ и значений функций $\mu(x_3)$, $\rho(x_3)$, $k_0(t)$.*

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.1. Обратная задача (1.11)–(1.15) эквивалентна системе интегральных уравнений (2.19), (2.22)–(2.24). Данная система является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области $D_T$ при $\nu\in\mathbb{R}$. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщенного принципа сжатых отображений. Запишем систему (2.19), (2.22)–(2.24) в виде операторного уравнения

$$\psi=B\psi, \tag{2.26}$$

$$\psi=\big[\psi_1(\nu,y,t),\ \psi_2(\nu,t),\ \psi_3(\nu,y,t),\ \psi_4(\nu,t)\big]:=\Big[V_1(\nu,y,t),\ \tilde k_1'(\nu,t),$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,y,t)-\frac{a}{4}\big(\tilde k_1(\nu,t+y)-\tilde k_1(\nu,t-y)\big)-\frac{a}{4}y\tilde k_1'(\nu,t-y),\ \tilde k_1(\nu,t)\Big].$$

Оператор $B=(B_1,B_2,B_3,B_4)$ определен на множестве функций $\psi\in C(\mathbb{R}\times D_T)$, где

$$B_1\psi=\psi_{01}(\nu,y,t)+\frac{a}{2}\int\limits_0^y L\big[r_0,\psi_4(\nu,2\xi+t-y)\big]\,d\xi$$
$$+\frac12\int\limits_0^y\int\limits_{t-y+\xi}^{t+y-\xi}\bigg\{\frac{a}{2}\,\psi_2(\nu,\tau-\xi)+\psi_4(\nu,\tau-\xi)L_0\Big[r_0,\frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\Big]+H(\nu,\xi)\psi_1(\nu,\xi,\tau)$$
$$+\int\limits_{\xi}^{\tau}\Big(\psi_4(\nu,\tau-\eta)p(\xi,\eta)-r_0''(\tau-\eta)\psi_1(\nu,\xi,\eta)\Big)d\eta\bigg\}\,d\tau d\xi,$$

$$B_2\psi=\psi_{02}(\nu,t)-\frac43\int\limits_0^{\frac t2}r_0(t-2\xi)\psi_4(\nu,2\xi)\,d\xi$$
$$-\frac{4}{3a}\int\limits_0^{\frac t2}\bigg\{\psi_4(\nu,\tau-\xi)L_0\Big[r_0,\frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\Big]+H(\nu,\xi)\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,\xi,t-\xi)+\psi_4(\nu,0)p(\xi,t-\xi)$$
$$-r_0''(0)\psi_1(\nu,\xi,t-\xi)+\int\limits_{\xi}^{t-\xi}\psi_2(\nu,t-\xi-\tau)p(\xi,\tau)d\tau-\int\limits_0^{t-2\xi}r_0''(\tau)\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau\bigg\}\,d\xi,$$

$$B_3\psi = \psi_{03}(\nu,y,t) + \frac{a}{4}\int\limits_0^t r_0(t-\tau)\big[\psi_4(\nu,\tau+y) - \psi_4(\nu,\tau-y)\big]\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \Bigg\{\frac{a}{2}\,\psi_2(\nu,t+y-2\xi) + \big(\psi_4(\nu,t+y-2\xi) - \psi_4(t-y)\big)L_0\Big[r_0,\frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\xi)\Big]$$

$$+H(\nu,\xi)\Big(\psi_1(\nu,\xi,t+y-\xi) - \psi_1(\nu,\xi,t-y+\xi)\Big)$$

$$+\int\limits_\xi^{t+y-\xi}\Big(\psi_4(\nu,t+y-\xi-\eta)p(\xi,\eta) - r_0''(t+y-\xi-\eta)\psi_1(\nu,\xi,\eta)\Big)\,d\eta$$

$$-\int\limits_\xi^{t-y+\xi}\Big(\psi_4(\nu,t-y+\xi-\eta)p(\xi,\eta) - r_0''(t-y+\xi-\eta)\psi_1(\nu,\xi,\eta)\Big)d\eta\Bigg\}\,d\xi,$$

$$B_4\psi = \psi_{04}(\nu) + \int\limits_0^{\frac{t}{2}}(t-2\xi)\psi_2(\nu,2\xi)\,d\xi,$$

где

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,y,t) = \psi_3(\nu,y,t) + \frac{a}{4}\big(\psi_4(\nu,t+y) - \psi_4(\nu,t-y) + y\psi_2(\nu,t-y)\big),$$

$$\psi_{01}(\nu,y,t) = \frac{1}{2}\Big(L\big[k_0,\tilde g(\nu,t-y)\big] + L\big[k_0,\tilde g(\nu,t+y)\big]\Big),$$

$$\psi_{02}(t) = -\frac{4}{3a}\Big(L\left[k_0,\tilde g''(\nu,t)\right] + k_0(t)\tilde g'(\nu,0)\Big),$$

$$\psi_{03}(\nu,y,t) = \frac{1}{2}\Big(L\big[k_0,\tilde g'(\nu,t-y)\big] + L\big[k_0,\tilde g'(\nu,t+y)\big]\Big),$$

$$\psi_{04}(\nu,y,t) = \tilde k_1(\nu,0).$$

Покажем теперь, что некоторая степень $n$ ($n$ — натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим

$$\|\psi\|(\nu) = \max\left\{\max_{(y,t)\in D_T}|\psi_{1,3}(\nu,y,t))|,\ \max_{(t)\in[0,T]}|\psi_{2,4}(\nu,t)|\right\}.$$

Пусть $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ — две непрерывные вектор-функции в $\mathbb{R}\times D_T$, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (2.26). Обозначим

$$\Delta(y,t) = \Big\{(\xi,\tau):\ 0\leqslant\xi\leqslant y,\ t-y+\xi\leqslant\tau\leqslant t+y-\xi\Big\},$$

$$\Sigma(y,t,\xi) = \big\{\tau:\ (\xi,\tau)\in\Delta(y,t)\big\}.$$

Тогда для $(\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T$ имеем (в оценках используем факт, что в уравнениях (2.22), (2.24) $t = 2y$)

$$\Big|B_1\psi^{(1)} - B_1\psi^{(2)}\Big|(\nu, y, t)$$

$$\leqslant \mu_1 \int\limits_0^y \max\left\{ \max_{\tau\in\Sigma(y,t,\xi)} \Big|\psi_1^{(1)}(\nu,\xi,\tau) - \psi_1^{(2)}(\nu,\xi,\tau)\Big|, \Big|\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)\Big| \right\} d\xi$$

$$\leqslant \mu_1 \int\limits_0^y \max\left\{ \max_{(\xi,\tau)\in D_T} \Big|\psi_1^{(1)}(\nu,\xi,\tau) - \psi_1^{(2)}(\nu,\xi,\tau)\Big|, \max_{\xi\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \Big|\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)\Big| \right\} d\xi$$

$$\leqslant \mu_1 y \Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\|,$$

далее

$$\Big|B_2\psi^{(1)} - B_2\psi^{(2)}\Big|(2y)$$

$$\leqslant \mu_2 \int\limits_0^y \max\left\{ \max_{\xi\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \Big|\psi_3^{(1)}(\xi, T-\xi,\nu) - \psi_3^{(2)}(\xi,T-\xi,\nu)\Big|, \max_{\xi\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \Big|\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)\Big| \right\} d\xi$$

$$\leqslant \mu_2 y \Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\|,$$

$$\Big|B_3\psi^{(1)} - B_3\psi^{(2)}\Big|(\nu, y, t)$$

$$\leqslant \mu_3 \int\limits_0^y \max\left\{ \max_{\tau\in\Sigma(y,t,\xi)} \Big|\psi_1^{(1)}(\nu,\xi,\tau) - \psi_1^{(2)}(\nu,\xi,\tau)\Big|, \Big|\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)\Big| \right\} d\xi$$

$$\leqslant \mu_3 y \Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\|,$$

$$\Big|B_4\psi^{(1)} - B_4\psi^{(2)}\Big|(2y) \leqslant \mu_4 \int\limits_0^y \max_{\xi\in\left[0,\frac{T}{2}\right]} \Big|\psi_2^{(1)}(2\xi) - \psi_2^{(2)}(2\xi)\Big| \, d\xi \leqslant \mu_4 y \Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\|,$$

где $\mu_j$ — константы, зависящие от величин, входящих в $C$ (теорема 2.2).

Полагая $M = \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, получаем, что

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 4} \Big|B_j\psi^{(1)} - B_j\psi^{(2)}\Big|(\nu, y, t) \leqslant My\Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T.$$

Далее,

$$\Big|B_1^2\psi^{(1)} - B_1^2\psi^{(2)}\Big|(\nu, y, t)$$

$$\leqslant \mu_1 \int\limits_0^y \max\left\{ \max_{\xi\in\Sigma(y,t,\tau)} \Big|B_1\psi^{(1)}(\nu,\xi,\tau) - B_1\psi^{(2)}(\nu,\xi,\tau)\Big|, \Big|B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)\Big| \right\} d\xi$$

$$\leqslant \mu_1 M \int\limits_0^y \xi \Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\| \, d\xi \leqslant \mu_1 M \frac{y^2}{2!} \Big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\Big\|,$$

$$\Big|B_2^2\psi^{(1)}-B_2^2\psi^{(2)}\Big|(2y)$$

$$\leqslant \mu_2\int\limits_0^y \max\Big\{\max_{\tau\in[\xi,2y-\xi]}\Big|B_3\psi^{(1)}(\nu,\xi,\tau)-B_3\psi^{(2)}(\nu,\xi,\tau)\Big|,\Big|B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi)-B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)\Big|\Big\}\,d\xi$$

$$\leqslant \mu_2 M\int\limits_0^y \xi\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|\,d\xi\leqslant \mu_2 M\frac{y^2}{2!}\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|,$$

$$\Big|B_3^2\psi^{(1)}-B_3^2\psi^{(2)}\Big|(\nu,y,t)$$

$$\leqslant \mu_3\int\limits_0^y \max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(y,t,\xi)}\Big|B_1\psi^{(1)}(\nu,\xi,\tau)-B_1\psi^{(2)}(\nu,\xi,\tau)\Big|,\Big|B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi)-B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)\Big|\Big\}\,d\xi$$

$$\leqslant \mu_3 M\int\limits_0^y \xi\,\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|\,d\xi\leqslant \mu_3 M\frac{y^2}{2!}\,\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|,$$

$$\Big|B_4^2\psi^{(1)}-B_4^2\psi^{(2)}\Big|\,(2y)\leqslant \mu_4\int\limits_0^y \max\Big|B_2\psi^{(1)}(2\xi)-B_2\psi^{(2)}(2\xi)\Big|\,d\xi$$

$$\leqslant \mu_4 M\int\limits_0^y \xi\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|\,d\xi\leqslant \mu_4 M\frac{y^2}{2!}\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|.$$

Отсюда

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\Big|B_j^2\psi^{(1)}-B_j^2\psi^{(2)}\Big|\,(\nu,y,t)\leqslant M^2\frac{y^2}{2!}\,\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|,\quad (\nu,y,t)\in\mathbb{R}\times D_T.$$

и, вообще,

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\Big|B_j^n\psi^{(1)}-B_j^n\psi^{(2)}\Big|(\nu,y,t)\leqslant M^n\frac{y^n}{n!}\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|,\quad (\nu,y,t)\in\mathbb{R}\times D_T,$$

$$\Big\|B^n\psi^{(1)}-B^n\psi^{(2)}\Big\|\leqslant M^n\frac{\left(\frac{T}{2}\right)^n}{n!}\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|.$$

При любом фиксированном $T$ число $n$ можно выбрать настолько большим, что

$$M^n\frac{\left(\frac{T}{2}\right)^n}{n!}:=\alpha<1.$$

Тогда отображение $B^n$ является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi=\psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее $C(\mathbb{R}\times D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.2. Пусть $\psi^{(j)}$ — вектор-функции, которые являются решениями (2.26), т. е. справедливы уравнения $\psi^{(j)}=B\psi^{(j)}$.

Переходя в этом выражении к разностям $\psi^{(1)}-\psi^{(2)}$, $\tilde g^{(1)}-\tilde g^{(2)}$, из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3.1, получим оценку

$$\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|\,(\nu)\leqslant\alpha\Big\|\tilde g^{(1)}-\tilde g^{(2)}\Big\|_{C^2[0,T]}(\nu)+\beta\int\limits_0^y\Big\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\Big\|\,(\nu,\xi)\,d\xi,\qquad(2.27)$$

где постоянные $\alpha$, $\beta$ зависят от величин, входящих в $C$. Из неравенства (2.27) следует, что

$$\left\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\right\|(\nu) \leqslant C\left\|\tilde g^{(1)} - \tilde g^{(2)}\right\|_{C^2[0,T]}(\nu).$$

Неравенство (2.25) вытекает из следующего свойства изометричности оператора преобразования Фурье $F_{x_2}$:

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} |\tilde k_1^{(1)}(\nu,t) - \tilde k_1^{(2)}(\nu,t)|^2\,d\nu = \int\limits_{\mathbb{R}} |k_1^{(1)}(x_2,t) - k_1^{(2)}(x_2,t)|^2\,dx_2. \rhd$$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости последовательности решений некоторого семейства задач к искомому решению. Пусть существует решение $k_1(x_2,t) \in L_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, отвечающее информации $\tilde g(\nu,t)$.

Определим множество функций $\tilde g_\lambda(\nu,t)$ по правилу $\tilde g_\lambda(\nu,t) := \theta(\lambda - |\nu|)\tilde g(\nu,t)$.

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $k_1^\lambda(x_2,t) = F_\nu^{-1}[\tilde{k^\lambda}(\nu,t)]$ по информации $\tilde g_\lambda(\nu,t)$.

**Теорема 2.3.** *Данное семейство является регуляризованным, т. е.*

1) *для каждого $\lambda > 0$ обратная задача корректна;*

2) *если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\lambda\to\infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.*

$\lhd$ Теоремы 2.1 и 2.2, доказанные ранее, утверждают о корректности обратной задачи. Теперь покажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|k_1^\lambda(x_2,t) - k_1(x_2,t)\right|^2 dx_2 = 0.$$

Действительно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|k_1^\lambda(x_2,t) - k_1(x_2,t)\right|^2 dx_2 = \lim_{\lambda\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\left|\tilde k_1^\lambda(\nu,t) - \tilde k_1(\nu,t)\right|^2 d\nu\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{-\lambda}\left|\tilde k_1(\nu,t)\right|^2 d\nu + \int\limits_{\lambda}^{+\infty}\left|\tilde k_1(\nu,t)\right|^2 d\nu\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\lambda}\left|\tilde k_1(\nu,t)\right|^2 d\nu + \int\limits_{\lambda}^{+\infty}\left|\tilde k_1(\nu,t)\right|^2 d\nu\right) = 0.$$

Тем самым теорема 2.3 доказана. $\rhd$

## Литература

1. *Туаева Ж. Д.* Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Исслед. по диф. ур-ям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 294–303.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.
3. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory // Nonlinear Anal. TMA.—1988.—Vol. 12, № 12.—P. 1317–1335. DOI: 10.1016/0362-546X(88)90080-6.
4. *Lorenzi A.* An inverse problem in the theory of materials with memory II // J. Semigroup Theory and Applications. Ser. Pure and Appl. Math.—1989.—Vol. 116.—P. 261–290.
5. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Мат. анализ и дискретная математика.—Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1989.—С. 19–27.
6. *Lorenzi A., Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.—1992.—Vol. 87.—P. 105–138.
7. *Bukhgeym A. L.* Inverse problems of memory reconstruction // J. of Inverse and Ill-posed Problems.—1993.—Vol. 1, № 3.—P. 193–205. DOI: 10.1515/jiip.1993.1.3.193.
8. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 3.—С. 574–582.
9. *Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V.* Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Fool.—1998.—Vol. 1, № 2.—P. 1–17.
10. *Дурдиев Д. К.* Обратные задачи для сред с последействием.—Ташкент: Турон-Икбол, 2014.
11. *Lorenzi A., Ulekova J. Sh., Yakhno V. G.* An inverse problem in viscoelasticity // J. of Inverse and Ill-posed Problems.—1994.—Vol. 2, № 2.—P. 131–164. DOI: doi.org/10.1515/jiip.1994.2.2.131.
12. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods in Appl. Sciences.—1997.—Vol. 20, № 4.—P. 291–314. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W.
13. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Problems.—2001.—Vol. 17, № 1.—P. 13–24. DOI: 10.1088/0266-5611/17/1/302.
14. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Applicable Analysis.—2007.—Vol. 86, № 11.—P. 1375–1395. DOI: 10.1080/00036810701675183.
15. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Applicable Analysis.—2010.—Vol. 89, № 3.—P. 377–390. DOI: 10.1080/00036810903518975.
16. *Lorenzi A., Romanov V. G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // Inverse Probl. Imaging.—2011.—Vol. 5, № 2.—P. 431–464. DOI: 10.3934/ipi.2011.5.431.
17. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 6.—С. 1401–1412.
18. *Romanov V. G.* Inverse problems for differential equations with memory // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications.—2014.—Vol. 2, № 4.—P. 51–80.
19. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 553–572. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.307.
20. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теор. и мат. физика.—2018.—Т. 195, № 3.—С. 491–506. DOI: 10.4213/tmf9480.
21. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 4.—С. 18–43. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5969.
22. *Карчевский А. Л., Фатьянов А. Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. матем.—2001.—Т. 4, № 3.—С. 259–268.
23. *Дурдиев У. Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сиб. электрон. мат. изв.—2020.—Т. 17.—С. 179–189. DOI: 10.33048/semi.2020.17.013.
24. *Bozorov Z. R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications.—2020.—Vol. 8, № 2.—P. 4–16.
25. *Kabanikhin S. I., Karchevsky A. L., Lorenzi A.* Lavrent'ev regularization of solutions to linear integro-differential inverse problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems.—1993.—Vol. 1, № 2.—P. 115–140. DOI: 10.1515/jiip.1993.1.3.193.

26. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневост. мат. журн.—2013.—Т. 13, № 2.—С. 209–221.
27. *Тотиева Ж. Д.* Определение ядра уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Сиб. мат. журн.—2020.—Т. 61, № 2.—С. 453–475. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.217.
28. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем.—2013.—Т. 16, № 2.—С. 72–82.

*Статья поступила 11 января 2021 г.*

Тотиева Жанна Дмитриевна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
*старший научный сотрудник отдела математического моделирования*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2021, Volume 23, Issue 2, P. 87–103*

# LINEARIZED TWO-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE KERNEL OF THE VISCOELASTICITY EQUATION

Totieva, Zh. D.[1]

[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: `jannatuaeva@inbox.ru`

**Abstract.** A linearized inverse problem of determining the 2D convolutional kernel of the integral term in an integro-differential viscoelasticity equation is considered. The direct problem is represented by a generalized initial-boundary value problem for this equation with zero initial data and the Neumann boundary condition in the form of the Dirac delta-function. The unknown kernel is decomposed into two components, one of which is a small in absolute value unknown additive. For solving the inverse problem, the traces of the solution to the direct problem on the domain boundary are given as an additional condition. It is proved that the linearized problem of determining the convolutional kernel is equivalent to a system of linear Volterra type integral equations. The generalized contraction mapping principle is applied. The main result of the article is the theorem of global unique solvability of the inverse problem in the class of continuous functions. A theorem on the convergence of a regularized family of problems to the solution of the original (ill-posed) problem is presented.

**Key words:** linear viscoelasticity, inverse problem, delta function, Fourier transform, kernel, stability.

**Mathematical Subject Classification (2010):** 35L20, 35R30, 35Q99.

**For citation:** *Totieva, Zh. D.* Linearized Two-Dimensional Inverse Problem of Determining the Kernel of the Viscoelasticity Equation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 87–103 (in Russian). DOI: 10.46698/u2193-3754-6534-u.

## References

1. *Tuaeva, Zh. D.* Multidimensional Mathematical Model of Seismic Memory, *Issledovaniya po differencial'nym uravneniyam i matematicheskomu modelirovaniyu* [Research on Differential Equations and Mathematical Modeling], Vladikavkaz, VNC RAN, 2008, p. 297–306 (in Russian).
2. *Romanov, V. G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki*, Moskva, Nauka, 1984 (in Russian).
3. *Lorenzi, A. and Sinestrari, E.* An Inverse Problem in the Theory of Materials with Memory I, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1988, vol. 12, no. 12, pp. 1217–1335. DOI: 10.1016/0362-546X(88)90080-6.

4. *Lorenzi, A.* An inverse Problem in the Theory of Materials with Memory II, *Journal of Semigroup Theory and Applications, Series on Pure and Applied Mathematics*, 1989, vol. 116, pp. 261–290.
5. *Durdiev, D. K.* The Inverse Problem for a Three-Dimensional Wave Equation in a Memory Environmentu, *Matematicheskij analiz i diskretnaya matematika*, Novosibirsk, Izd-vo Novosibirskogo Universiteta, 1989, pp. 19–27 (in Russian).
6. *Lorenzi, A. and Paparoni, E.* Direct and Inverse Problems in the Theory of Materials with Memory, *The Mathematical Journal of the University of Padua*, 1992, vol. 87, pp. 105–138.
7. *Bukhgeym, A. L.* Inverse Problems of Memory Reconstruction, *Journal Inverse Ill-Posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 3, pp. 193–206.
8. *Durdiev, D. K.* A Multidimensional Inverse Problem for an Equation with Memory, *Siberian Mathematical Journal*, 1994, vol. 35, pp. 514–521. DOI: 10.1007/BF02104815.
9. *Bukhgeim, A. L. and Dyatlov, G. V.* Inverse Problems for Equations with Memory, *SIAM J. Math. Fool.*, 1998, vol. 1, no. 2, pp. 1–17.
10. *Durdiev, D. K. Obratnye zadachi dlya sred s posledejstviem*, Tashkent, Turon-Ikbol, 2014.
11. *Lorenzi, A., Ulekova, J. Sh. and Yakhno, V. G.* An Inverse Problem in Viscoelasticity, *Journal Inverse Ill-Posed Problems*, 1994, vol. 2, no. 2, pp. 131–165. DOI: doi.org/10.1515/jiip.1994.2.2.131.
12. *Janno, J. and Von Wolfersdorf, L.* Inverse Problems for Identification of Memory Kernels in Viscoelasticity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1997, vol. 20, no. 4, pp. 291–314. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W.
13. *Janno, J. and Von Wolfersdorf, L.* An Inverse Problem for Identification of a Time- and Space-Dependent Memory Kernel in Viscoelasticity, *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, no. 1, pp. 13–24. DOI: 10.1088/0266-5611/17/1/302.
14. *Lorenzi, A., Messina, F. and Romanov, V. G.* Recovering a Lamé Kernel in a Viscoelastic System, *Applicable Analysis*, 2007, vol. 86, no. 11, pp. 1375–1395. DOI: 10.1080/00036810701675183.
15. *Romanov, V. G. and Yamamoto M.* Recovering a Lamé Kernel in a Viscoelastic Equation by a Single Boundary Measurement, *Applicable Analysis*, 2010, vol. 89, no. 3, pp. 377–390. DOI: 10.1080/00036810701675183.
16. *Lorenzi, A. and Romanov, V. G.* Recovering Two Lamé Kernels in a Viscoelastic System, *Inverse Problems and Imaging*, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 431–464. DOI: 10.3934/ipi.2011.5.431.
17. *Romanov, V. G.* A Two-Dimensional Inverse Problem for the Viscoelasticity Equationi, *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, pp. 1128–1138. DOI: 10.1134/S0037446612060171.
18. *Romanov, V. G.* Inverse Problems for Differential Equations with Memory, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2014, vol. 2, no. 4, pp. 51–80
19. *Durdiev, D. K. and Totieva, Z. D.* The Problem Of Determining The One-Dimensional Kernel of the Electroviscoelasticity Equation, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 427–444. DOI: 10.1134/S0037446617030077.
20. *Durdiev, D. K. and Rahmonov, A. A.* Inverse Problem for a System of Integro-Differential Equations for SH Waves in a Visco-Elastic Porous Medium: Global Solvability, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2018, vol. 195, pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0040577918060090.
21. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the Multidimensional Kernel of Viscoelasticity Equation, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 17, no. 4, pp. 18–43 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5969.
22. *Karchevsky, A. L. and Fatianov, A. G.* Numerical Solution of the Inverse Problem for a System of Elasticity with the Aftereffect for a Vertically Inhomogeneous Medium, *Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki* [Numerical Analysis and Applications], 2001, vol. 4, no. 3, pp. 259–268 (in Russian).
23. *Durdiev, U. D.* Numerical Method for Determining the Dependence of the Dielectric Permittivity on the Frequency in the Equation of Electrodynamics with Memory, *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2020, vol. 17, pp. 179–189 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2020.17.013.
24. *Bozorov, Z. R.* Numerical Determining a Memory Function of a Horizontally-Stratified Elastic Medium with Aftereffect, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 2020, vol. 8, no. 2, pp. 4–16.
25. *Kabanikhin, S. I., Karchevsky, A. L. and Lorenzi, A.* Lavrent'ev Regularization of Solutions to Linear Integro-Differential Inverse Problems, *Journal Inverse Ill-Posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 2, pp. 115–140. DOI: 10.1515/jiip.1993.1.3.193.
26. *Durdiev, D. K. and Bozorov, Z. R.* A Problem of Determining the Kernel of Integrodifferential Wave Equation with Weak Horizontal Properties, *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 209–221 (in Russian).

27. *Totieva, Z. D.* Determining The Kernel of the Viscoelasticity Equation in a Medium with Slightly Horizontal Homogeneity, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 2020, vol. 61, no. 2, pp. 359–378 (in Russian). DOI: 10.33048/smzh.2020.61.217.
28. *Durdiev, D. K. and Totieva, Zh. D.* The Problem of Determining the One-Dimensional Kernel of the Viscoelasticity Equation, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2013, vol. 16, no. 2, pp. 72–82 (in Russian).

*Received January 11, 2021*

Zhanna D. Totieva
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
*Senior Researcher of the Department of Math. Modeling*
E-mail: jannatuaeva@inbox.ru