Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 16–27

УДК 517.968.74
DOI 10.46698/e6476-5914-8893-f

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ[#]

С. Н. Асхабов[1,2]

[1] Чеченский государственный педагогический университет,
Россия, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62;
[2] Чеченский государственный университет,
Россия, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

Посвящается 75-летию профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. Изучается вольтерровское интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью, переменным коэффициентом $a(x)$ и неоднородностью $f(x)$ в линейной части, которое тесно связано с соответствующим нелинейным интегральным уравнением, возникающим при исследовании инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе, в моделях популяционной генетики и других. Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения интегрального уравнения. На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения интегрального уравнения мы строим весовое полное метрическое пространство P_b, инвариантное относительно нелинейного интегрального оператора свертки, порожденного этим уравнением, и, применяя метод весовых метрик (аналог метода Белицкого), доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения изучаемого нелинейного интегро-дифференциального уравнения как в пространстве P_b, так и во всем классе Q_0^1 непрерывно дифференцируемых положительных при $x > 0$ функций. Показано, что решение может быть найдено в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b. В частности, при $f(x) = 0$ из этой теоремы вытекает, что соответствующее однородное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, в отличие от линейного случая, имеет нетривиальное решение. Приведены также примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, степенная нелинейность, переменный коэффициент, априорные оценки, последовательные приближения, метод весовых метрик.

Mathematical Subject Classification (2010): 45G05, 46L05.

Образец цитирования: *Асхабов С. Н.* Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки с переменным коэффициентом и неоднородностью в линейной части // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 16–27. DOI: 10.46698/e6476-5914-8893-f.

1. Введение

Как известно [1, 2], в настоящее время теория линейных уравнений типа свертки достаточно хорошо разработана. В ряде прикладных задач теории переноса излучения, следящих систем (сервомеханизмов), электрических сетей, содержащих нелинейные эле-

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001. Статья публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611.

менты, в моделях популяционной генетики и других возникают нелинейные уравнения типа свертки (подробнее см. [3, 4]). Особенностью исследования нелинейных уравнений типа свертки является, в частности, то, что в отличие от линейного случая, где основные результаты имеют место сразу для целой серии пространств L_p, C, C_0, M и других [2, гл. 3, п. 3.2], здесь картина существенно зависит как от выбора рассматриваемого пространства, в котором разыскиваются решения, так и от характера допускаемой нелинейности.

В ряде работ [5–8] изучалось нелинейное интегральное уравнение типа свертки вида

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{1}$$

возникающее при исследовании инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду, при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом, при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе, в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [3, 4, 9]). Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x>0$ решения интегрального уравнения (1).

В данной работе в конусе Q_0^1, образованном неотрицательными непрерывно дифференцируемыми на полуоси $(0,\infty)$ функциями, удовлетворяющими условию, что $u(0)=0$, изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{2}$$

тесно связанное, как будет показано ниже, с интегральным уравнением вида (1).

Исследование основывается на некоторой *модификации* принципа сжимающих отображений (аналог метода А. Белицкого), *позволяющей* доказывать глобальные теоремы существования и единственности без ограничений на область определения решений (описание метода Белицкого и его преимуществ приведено в [10, гл. 3, п. 3.1.3]).

На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения интегрального уравнения вида (1) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя аналог метода Белицкого, доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения интегро-дифференциального уравнения (2) как в пространстве P_b, так и во всем классе Q_0^1 непрерывно дифференцируемых положительных при $x>0$ функций. Показано, что решение уравнения (2) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b.

2. Свойства неотрицательных решений

Основным объектом исследования в данной работе является уравнение (2), в котором ядро $k(x)$, коэффициент $a(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k\in C^1[0,\infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad k(0)=0 \quad \text{и} \quad k'(0)>0, \tag{3}$$

$$a\in C^1[0,\infty), \quad a(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \quad \text{и} \quad a(x)>0 \text{ при } x>0, \tag{4}$$

$$f \in C^1[0,\infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \quad \text{и} \quad f(0)=0, \tag{5}$$

где $C^1[0,\infty)$ означает пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,\infty)$ функций.

В связи с указанными во введении приложениями, будем искать решения уравнения (2) в классе

$$Q_0^1 = \{u(x):\ u \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Наряду с уравнением (2) будет рассматриваться также интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = a(x)\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad x>0,\ \alpha>1, \tag{6}$$

в конусе пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$:

$$Q_0 = \{u(x):\ u \in C[0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения* (6), *то функция $u(x)$ не убывает и непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, т. е. $u \in C^1(0,\infty)$.*

$\lhd$ Пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6) и $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ — любые числа такие, что $x_1 < x_2$. Так как $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то свертка $(k' * u)(x) = \int_0^x k'(x-t)u(t)dt$ также не убывает, поскольку

$$(k' * u)(x_2) - (k' * u)(x_1) = \int_0^{x_1} \left[k'(x_2-t) - k'(x_1-t)\right] u(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} k'(x_2-t)u(t)\,dt \geqslant 0.$$

Так как $a(x)$ и $f(x)$ не убывают, то $u^\alpha(x)$ также не убывает на $[0,\infty)$. Следовательно, сама функция $u(x)$ не убывает и поэтому почти всюду дифференцируема на $[0,\infty)$.

Докажем теперь, что решение $u \in C^1(0,\infty)$. Так как по условию $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то по теореме Лебега (см., например, [3, теорема 17.7]) почти всюду на $[0,\infty)$ существует вторая производная $k''(x)$, которая по теореме об интегрировании производной [3, теорема 17.8] локально суммируема. Следовательно, правая часть тождества (6) дифференцируема и в силу свойства коммутативности свертки [3, §17]

$$\left(\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)' = \int_0^x k''(x-t)u(t)\,dt + k'(0)u(x) = \int_0^x k''(t)u(x-t)\,dt + k'(0)u(x). \tag{7}$$

Поскольку функция $u(x)$ не убывает, а функция $k''(x)$ локально суммируема на $[0,\infty)$, то в силу теоремы о непрерывности свертки [3, теорема 17.9] производная (7) непрерывна на $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (6), что влечет за собой существование и непрерывность производной $u'(x)$ при $x>0$. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Если $u \in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения* (2), *то $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения* (6). *Обратно, если уравнение* (6) *имеет решение $u \in Q_0$, то $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения* (2).

$\lhd$ Пусть $u \in Q_0^1$ является решением уравнения (2). Поскольку $Q_0^1 \subset Q_0$, то $u \in Q_0$. Так как $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, то, вычисляя интеграл в (2) по частям, получаем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int\limits_0^x k(x-t)\, du(t) + f(x) = a(x) \int\limits_0^x u(t) k'(x-t)\, dt + f(x), \tag{8}$$

т. е. $u(x)$ является решением уравнения (6).

Обратно, пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6). Тогда согласно лемме 1 функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^1(0,\infty)$, а значит, $u \in Q_0^1$. Используя дважды свойство коммутативности свертки, формулу интегрирования по частям, равенства $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, из уравнения (6) имеем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int\limits_0^x k'(t) u(x-t)\, dt + f(x) = a(x) \int\limits_0^x k(x-t) u'(t)\, dt + f(x),$$

т. е. $u(x)$ является решением уравнения (2). $\rhd$

Из леммы 2 вытекает, что для доказательства существования в классе Q_0^1 решения интегро-дифференциального уравнения (2) достаточно доказать существование в классе Q_0 решения интегрального уравнения (6). Кроме того, из леммы 2 следует, что уравнения (2) и (6) имеют одно и то же множество решений.

Далее предполагается, что выполнено дополнительное условие

$$g(0) = 0, \quad \text{где} \quad g(x) = \frac{f(x)}{a(x)}. \tag{9}$$

Доказательство основных результатов данной статьи будет базироваться на априорных оценках решений уравнения (6). При доказательстве верхней априорной оценки нам понадобится неравенство Чебышева (см., например, [3, лемма 17.1]):

$$\int\limits_0^x v(x-t)\, w(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^x v(t)\, w(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{10}$$

справедливое для любых неубывающих на $[0,\infty)$ функций $v(x)$ и $w(x)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (3)–(5) *и* (9). *Если $u \in Q_0$ является решением интегрального уравнения* (6), *то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x), \tag{11}$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\, k'(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$G(x) = a^{\frac{1}{\alpha}}(x) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t) k'(t)\, dt + \left(\frac{f(x)}{a(x)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

$\lhd$ Пусть $u \in Q_0$ — решение уравнения (6). Так как при $x = 0$ неравенства (11) обращаются в очевидные равенства, то будем считать далее, что $x > 0$.

Докажем сначала первое неравенство из (11). Так как $a(x) \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ и $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то из тождества (6) имеем

$$u(x) \geqslant \big(k'(0)a(x)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int\limits_0^x u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall\, x>0), \tag{12}$$

или, что то же самое, поскольку $k'(0)>0$ и $u(x)>0$ при $x>0$,

$$u(t)\left(\int\limits_0^t u(s)ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \geqslant \big(k'(0)a(t)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall\, t>0).$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получим

$$\left(\int\limits_0^x u(t)\,dt\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\,(k'(0))^{\frac{1}{\alpha}} \int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt \quad (\forall\, x>0),$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^x u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} (k'(0))^{\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}} \left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{13}$$

Таким образом, первое неравенство из (11) вытекает из неравенств (12) и (13).

Докажем теперь второе неравенство из (11). Так как в силу условия (3) и леммы 1 функции $k'(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то вследствие неравенства Чебышева (10) из тождества (6) вытекает неравенство

$$u^{\alpha}(x) \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt + f(x) \quad (\forall\, x>0),$$

т. е.

$$u(x) \leqslant a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt + g(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\forall\, x>0), \tag{14}$$

или, поскольку $k'(t)>0$,

$$k'(t)u(t)+g'(t) \leqslant k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\left(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds + g(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}} + g'(t) \quad (\forall\, t>0),$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds + g(t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \big(k'(t)u(t)+g'(t)\big) \leqslant k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t) + I(t), \tag{15}$$

где

$$I(t) = g'(t)\left(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds + g(t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Точно так же, как и при доказательстве неравенства (13) из [11], проверяется, что

$$\int_0^x I(t)\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}\, g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x). \tag{16}$$

Интегрируя неравенство (15) в пределах от 0 до x, с учетом условия (9) и неравенства (16), будем иметь

$$\left(\int_0^x k'(s)u(s)\,ds + g(x)\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int_0^x k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1}\, g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right) \quad (\forall\, x>0),$$

откуда

$$\left(\int_0^x k'(t)u(t)\,dt + g(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x k'(t)a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt + g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{17}$$

Таким образом, второе неравенство в (11) вытекает из неравенств (14) и (17). $\triangleright$

Из леммы 3 следует, что решения уравнения (6) естественно искать в классе

$$P = \bigl\{u(x) :\ u \in C[0,\infty) \text{ и } F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\bigr\}.$$

Пример 1. Непосредственно проверяется, что функция

$$u^*(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\, p\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

является решением интегрального уравнения (6) при $k(x) = px$ и $f(x) = 0$, где $p > 0$ — любое число. Следовательно, если $k(x) = p\cdot x$ и $f(x) = 0$, то справедливы равенства $F(x) = u^*(x) = G(x)$ для любого $x \in [0,\infty)$, которые показывают, что в определенном смысле априорные оценки решения интегрального уравнения (6), доказанные в лемме 3, точные.

3. Теоремы существования и единственности решения

Определим нелинейный интегральный оператор свертки T равенством

$$(Tu)(x) = \left(a(x)\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt + f(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x>0,\ \alpha>1.$$

Прежде чем доказать следующую теорему заметим, что так как

$$G(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\, a^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)k'(t)\,dt + f^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

то функция $G(x)$ в силу условий (3)–(5) не убывает на $[0,\infty)$ и $G(0)=0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5) *и* (9). *Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T, т. е. $T : P \to P$.*

◁ Пусть $u \in P$. Нужно доказать, что $Tu \in C[0,\infty)$ и $F(x) \leqslant (Tu)(x) \leqslant G(x)$.

1. Так как функции $k'(x)$, $a(x)$, $f(x)$ неотрицательны и принадлежат пространству $C[0,\infty)$, а $1/\alpha > 0$, то очевидно, что оператор T на классе функций $u \in P$ определен корректно и $Tu \in C[0,\infty)$.

2. Покажем, что $(Tu)(x) \geqslant F(x)$. Поскольку $k'(x)$, $a(x)$, $f(x)$ неотрицательны, $k'(x)$ не убывает и $u(x) \geqslant F(x)$, то

$$\big[(Tu)(x)\big]^\alpha \geqslant a(x)\int_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \geqslant a(x)\int_0^x k'(x-t)F(t)\,dt \geqslant k'(0)a(x)\int_0^x F(t)\,dt$$

$$= k'(0)a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,k'(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\left(\int_0^t a^{\frac{1}{\alpha}}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}dt = \big[F(x)\big]^\alpha,$$

т. е. $(Tu)(x) \geqslant F(x)$.

3. Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leqslant G(x)$. Так как $a(x)$, $k'(x)$ неотрицательны и $u(x) \leqslant G(x)$, а функции $k'(x)$ и $G(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то в силу неравенства Чебышева (10) и условия (9), получаем

$$\big[(Tu)(x)\big]^\alpha \leqslant a(x)\int_0^x k'(x-t)\,G(t)\,dt + f(x) \leqslant a(x)\left(\int_0^x k'(t)\,G(t)\,dt + \int_0^x g'(t)\,dt\right)$$

$$= a(x)\int_0^x G(t)\left[k'(t) + \frac{g'(t)}{G(t)}\right]dt \leqslant a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)$$

$$\times\left[\int_0^t a^{\frac{1}{\alpha}}(s)k'(s)\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1}\,g^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(s)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[k'(t) + \frac{g'(t)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)g^{\frac{1}{\alpha}}(t)}\right]dt = G^\alpha(x),$$

т. е. $(Tu)(x) \leqslant G_(x)$. ▷

Введем следующий класс функций:

$$P_b = \big\{u(x) : u \in C[0,b] \text{ и } F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\big\},$$

где $b > 0$ — произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если выполнены условия* (3)–(5) *и* (9), *то класс P_b инвариантен относительно интегрального оператора T.*

Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$D = \sup_{0<x\leqslant b}\left(\frac{f(x)}{a(x)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{-1} < \infty. \tag{18}$$

Заметим, что выполнение условия (18) обеспечивает выполнение условия (9) и условие (18) совпадает с условием (16) из [11] при $a(x) = 1$.

Зададим на прямом произведении $P_b \times P_b$ функцию ρ_b формулой

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b}\frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}e^{\beta x}}, \quad \beta > 0. \tag{19}$$

Поскольку $e^{\beta x} \geqslant 1$ и $|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant G(x) - F(x)$ для любых $u_1, u_2 \in P_b$, то

$$\rho_b(u_1, u_2) \leqslant \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\, k'(b) + D\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\, k'(0)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} < \infty.$$

Лемма 4. *Множество P_b с метрикой ρ_b является полным метрическим пространством.*

$\triangleleft$ Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту пространства P_b. Пусть $\{u_n\}$ есть любая *фундаментальная последовательность* из P_b. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такой, что для любых $m, n \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m, u_n) < \varepsilon$, т. е.

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} < \varepsilon \qquad (\forall\, m, n \geqslant N,\ \ \forall\, x \in (0, b]). \tag{20}$$

Так как

$$a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{\beta x} \leqslant a^{\frac{1}{\alpha}}(b)\left(\int\limits_0^b a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta b} \equiv M,$$

то

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)dt\right)^{\frac{1}{(\alpha-1)}} e^{\beta x}} \geqslant \frac{1}{M}\big|u_m(x) - u_n(x)\big|.$$

Поэтому из (20) имеем $|u_m(x) - u_n(x)| \leqslant M\varepsilon$ для любых $m, n \geqslant N$ и для любого $x \in [0, b]$ (здесь учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$), т. е. $\{u_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0, b]$. В силу полноты пространства $C[0, b]$ существует функция $u \in C[0, b]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x). \tag{21}$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $\{u_n\} \in P_b$, то для любого n и для любого $x \in [0, b]$, имеем $F(x) \leqslant u_n(x) \leqslant G(x)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, с учетом равенства (21), получаем $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, т. е. $u \in P_b$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u(x)$ по метрике ρ_b. Переходя в неравенстве (20) к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\frac{|u(x) - u_n(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} < \varepsilon$$

для любого $n \geqslant N$ и для любого $x \in (0, b]$, т. е. $\rho_b(u_n, u) < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$. $\triangleright$

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0, b)$ такое, что выполняется неравенство

$$k'(c) < \alpha k'(0). \tag{22}$$

Положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)} \sup_{c\leqslant x\leqslant b} \frac{k'(x) - k'(0)}{x}. \tag{23}$$

Справедлива следующая лемма (подробное доказательство см. [11, лемма 5], ср. [12]).

Лемма 5. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда для любого $x \in [0,b]$ справедливо неравенство*

$$k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c), \tag{24}$$

где числа c и β определяются из условия (22) и формулы (23), соответственно.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3)–(5) и (18). Тогда оператор $T : P_b \to P_b$ и является сжимающим, при этом для любых $u_1, u_2 \in P_b$ выполняется неравенство*

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\rho_b(u_2, u_1), \tag{25}$$

где число c определяется из условия (22).

$\lhd$ То, что оператор $T : P_b \to P_b$ вытекает из следствия 1. Докажем неравенство (25), т. е., что оператор T в силу неравенства (22) является сжимающим. Пусть $u_1, u_2 \in P_b$ и $x \in (0,b]$. По теореме Лагранжа для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{\frac{1}{\alpha}} - z_2^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\,\Theta^{\frac{1}{\alpha}-1}(z_1 - z_2),$$

где Θ лежит между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta > z_0$ и

$$\left|z_1^{\frac{1}{\alpha}} - z_2^{\frac{1}{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{|z_1 - z_2|}{\{z_0\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}.$$

Используя это неравенство и то, что $(Tu_1)(x) \geqslant F(x)$, $(Tu_2)(x) \geqslant F(x)$ для всех $x \in (0,b]$, имеем

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)\big| \\
&= \left|\left(a(x)\int_0^x k'(x-t)u_2(t)\,dt + f(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(a(x)\int_0^x k'(x-t)u_1(t)\,dt + f(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,\left(F^{\alpha}(x)\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left|a(x)\int_0^x k'(x-t)\big[u_2(t) - u_1(t)\big]\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\,k'(0)\right)^{-1} a^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(x)\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{-1} a(x)\int_0^x k'(x-t)\big|u_2(t) - u_1(t)\big|\,dt.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\big|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)\big| \leqslant \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)}{(\alpha-1)k'(0)\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt}\int_0^x k'(x-t)\big|u_2(t) - u_1(t)\big|\,dt. \tag{26}$$

Поскольку для любого $x \in (0,b)$

$$\begin{aligned}
\big|u_2(x) - u_1(x)\big| &= a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}\frac{|u_2(x) - u_1(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}} \\
&\leqslant a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\beta x}\rho_b(u_2, u_1),
\end{aligned}$$

то из (26) с учетом леммы 5 получим

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)\big| \\
&\quad\leqslant \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt}\int\limits_0^x k'(x-t)e^{-\beta(x-t)}a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\left(\int\limits_0^t a^{\frac{1}{\alpha}}(s)ds\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}dt \\
&\qquad\leqslant \frac{k'(c)a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt}\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(s)\,ds\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
&\qquad\qquad= \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\,a^{\frac{1}{\alpha}}(x)e^{\beta x}\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\rho_b(u_2,u_1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)|}{a^{\frac{1}{\alpha}}(x)\left(\int\limits_0^x a^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}e^{\beta x}} \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha\,k'(0)}\,\rho_b(u_2,u_1) \quad (\forall\, x\in(0,b]),$$

что равносильно неравенству (25). Поскольку в силу неравенства (22) коэффициент в неравенстве (25) $k'(c)/[\alpha\,k'(0)]<1$, то оператор T является сжимающим. $\rhd$

Теорема 3. *Если выполнены условия* (3)–(5) *и* (18), *то интегральное уравнение* (6) *имеет в* Q_0 (*и в* P_b *при любом* $b>0$) *единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике* (19) *при любом* $b<\infty$.

$\lhd$ Запишем уравнение (6) в операторном виде: $u=Tu$. Из леммы 6 и теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (6) имеет единственное решение в пространстве P_b при любом $b>0$, и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (19) при любом $b<\infty$.

То, что уравнение (6) имеет единственное решение во всем классе Q_0 доказывается точно так же, как в теореме 3 из [11]. $\rhd$

Таким образом, на основании теоремы 3, используя связь между решениями уравнений (6) и (2), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (3), (4), (5) *и* (18), *то интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью* (2) *имеет в конусе* Q_0^1 (*и в классе* P_b *при любом* $b>0$) *единственное решение* $u^*(x)$. *Это решение удовлетворяет неравенствам* (11) *и его можно найти в полном метрическом пространстве* P_b *методом последовательных приближений по формуле* $u_n=Tu_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике* (19), *в которой числа* c *и* β *определяются условием* (22) *и формулой* (23). *При этом справедлива оценка погрешности:*

$$\rho_b(u_n,u^*)\leqslant\frac{q^n}{1-q}\,\rho_b(Tu_0,u_0), \quad n\in\mathbb{N},$$

где $q=k'(c)/(\alpha\,k'(0))<1$, *а* $u_0(x)\in P_b$ — *начальное приближение.*

Из теорем 3 и 4 вытекает, в частности, что при $f(x) = 0$ нелинейные уравнения (2) и (6) имеют, в отличие от линейного случая ($\alpha = 1$), нетривиальное решение и, таким образом, нелинейные уравнения типа свертки обладают особенностями, существенно отличающими их от соответствующих линейных уравнений.

Литература

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.—М.: Наука, 1978.—296 с.
2. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Мир, 1979.—496 с.
3. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
4. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.—387 p. DOI: 10.1017/9781316162491.
5. *Асхабов С. Н., Карапетянц Н. К., Якубов А. Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 5.—С. 1035–1039.
6. *Askhabov S. N., Betilgiriev M. A.* A-priori estimates for the solutions of a class of nonlinear convolution equations // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen.—1991.—Vol. 10, № 2.—P. 201–204. DOI: 10.4171/ZAA/442.
7. *Kilbas A. A., Saigo M.* On solution of nonlinear Abel–Volterra integral equations // J. Math. Anal. Appl.—1999.—Vol. 229, № 1.—P. 41–60. DOI: 10.1006/jmaa.1998.6139.
8. *Karapetiants N. K., Kilbas A. A., Saigo M., Samko S. G.* Upper and lower bounds for solutions of nonlinear Volterra convolution integral equations with power nonlinearity // J. Integr. Equat. Appl.—2001.—Vol. 12, № 4.—P. 421–448. DOI: 10.1216/jiea/1020282237.
9. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math.—1989.—Vol. 4, № 2.—P. 51–74.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ: теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
11. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Диф. уравнения.—2020.—Т. 56, № 6.—С. 786–795. DOI: 1134/S0374064120060102.
12. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math. —1979.—Vol. 36, № 1.—P. 61–72.

Статья поступила 6 сентября 2020 г.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный педагогический университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62;
Чеченский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии
РОССИЯ, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 16–27

A CONVOLUTION TYPE NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT AND AN INHOMOGENEITY IN THE LINEAR PART

Askhabov, S. N. [1,2]

[1] Chechen State Pedagogical University, 62 Isaev Ave., Grozny 364068, Russian;
[2] Chechen State University, 32 Sheripov St., Grozny 364024, Russian

E-mail: askhabov@yandex.ru

Abstract. We study a Volterra integro-differential equation of convolution type with a power nonlinearity, variable coefficient $a(x)$ and an inhomogeneity $f(x)$ in the linear part, which is closely related to the corresponding nonlinear integral equation, arising in the study of fluid infiltration from a cylindrical reservoir into an isotropic homogeneous porous medium, when describing the process of propagation of shock waves in gas-filled pipes, when solving the problem about heating a half-infinite body in a nonlinear heat-transfer process, in models of population genetics, and others. It is important to note that in relation to the above-mentioned and other applications, of special interest are continuous positive (for x $>$ 0) solutions of the integral equation. Based on the obtained exact lower and upper a priori estimates for the solution of the integral equation, we construct a weighted complete metric space P_b, invariant with respect to the nonlinear integral convolution operator generated by this equation, and, using the method of weighted metrics (an analogue of Belitsky's method), we prove the global existence theorem and the uniqueness of the solution of the nonlinear integro-differential equation under study both in the space P_b and in the whole class Q_0^1 of continuously differentiable functions positive for $x > 0$. It is shown that the solution can be found in the P_b space by a successive approximation method of the Picard type. Estimates for the rate of convergence of the successive approximations to the exact solution in terms of the weight metric of the space P_b are derived. In particular, for $f(x) = 0$, this theorem implies that the corresponding homogeneous nonlinear integro-differential equation, in contrast to the linear case, has a nontrivial solution. Examples are also given to illustrate the results obtained.

Key words: integro-differential equation, power nonlinearity, variable coefficient, a priori estimates, successive approximation, weight metrics method.

Mathematical Subject Classification (2010): 45G05, 46L05.

For citation: *Askhabov, S. N.* A Convolution Type Nonlinear Integro-Differential Equation with a Variable Coefficient and an Inhomogeneity in the Linear Part, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 16–27 (in Russian). DOI: 10.46698/e6476-5914-8893-f.

References

1. *Gakhov, F. D. and Cherskii, Yu. I. Uravneniya tipa svertki* [Equations of Convolution Type], Moscow, Nauka, 1978, 296 p. (in Russian).
2. *Prossdorf, S. Einige Klassen Singularer Gleichungen*, Berlin, Akademie-Verlag, 1974, 369 p.
3. *Askhabov, S. N. Nelineinye uravneniya tipa svertki* [Nonlinear Equations of Convolution Type], Moscow, Fizmatlit, 2009, 304 p. (in Russian).
4. *Brunner, H. Volterra Integral Equations: an Introduction to the Theory and Applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 2017, 387 p. DOI: 10.1017/9781316162491.
5. *Askhabov, S. N., Karapetyants, N. K. and Yakubov, A. Ya.* Integral Equations of Convolution Type with a Power Nonlinearity and their Systems, *Soviet Mathematics Doklady*, 1990, vol. 41, no. 2, pp. 323–327.
6. *Askhabov, S. N. and Betilgiriev, M. A.* A-Priori Estimates for the Solutions of a Class of Nonlinear Convolution Equations, *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 1991, vol. 10, no. 2, pp. 201–204. DOI: 10.4171/ZAA/442.
7. *Kilbas, A. A. and Saigo, M.* On Solution of Nonlinear Abel–Volterra Integral Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, vol. 229, no. 1, pp. 41–60. DOI: 10.1006/jmaa.1998.6139.
8. *Karapetiants, N. K., Kilbas, A. A., Saigo, M. and Samko, S. G.* Upper and Lower Bounds for Solutions of Nonlinear Volterra Convolution Integral Equations with Power Nonlinearity, *Journal of Integral Equations and Applications*, 2001, vol. 12, no. 4, pp. 421–448. DOI: 10.1216/jiea/1020282237.
9. *Okrasinski, W.* Nonlinear Volterra Equations and Physical Applications, *Extracta Mathematicae*, 1989, vol. 4, no. 2, pp. 51–74.
10. *Edwards, R. E. Functional Analysis: Theory and Applications*, New York, Holt, Rinehart, and Winston, 1965, 1072 p.
11. *Askhabov, S. N.* Integro-Differential Equation of the Convolution Type with a Power Nonlinearity and Inhomogeneity in the Linear Part, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 775–784. DOI: 10.1134/S0012266120060105.
12. *Okrasinski, W.* On the Existence and Uniqueness of Nonnegative Solutions of a Certain Nonlinear Convolution Equation, *Annales Polonici Mathematici*, 1979, vol. 36, no. 1, pp. 61–72.

Received September 6, 2020

Sultan N. Askhabov
Chechen State Pedagogical University,
62 Isaev Ave., Grozny 364068, Russia, *Professor*;
Chechen State University,
32 Sheripov St., Grozny 364024, Russia, *Professor*
E-mail: `askhabov@yandex.ru`