

УДК 510.8 + 517.5

DOI 10.46698/i3178-1119-0009-t

ОДНОСТОРОННИЕ СХЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

А. Б. Шишкин¹

¹ Кубанский государственный университет,
Россия, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200

E-mail: shishkin-home@mail.ru

Посвящается 90-летию профессора Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Феномен двойственности наблюдается во всех областях математики и тесно связан с феноменом эквивалентности. Эти феномены дополняют друг друга и используются для переноса различных математических высказываний из одной области математики в другую и наоборот (двойственные и эквивалентные переходы). Основное отличие двойственности от эквивалентности состоит в использовании инволюции. Инволюция объекта — это преобразование объекта с подобным ему обратным преобразованием. Прямую и обратную инволюции принято отождествлять и говорить о повторной инволюции. Повторная инволюция объекта восстанавливает объект. Любая инволюция порождает свою двойственность, которая утверждается соответствующей теоремой двойственности. Теоремы двойственности являются двусторонними. Они позволяют осуществлять двойственные переходы в одну и другую стороны. Ослабим условия на инволюцию и будем считать, что ее повторное действие восстанавливает объект лишь наполовину (вместо равенства получаем неравенство). В этом случае для полного восстановления объекта потребуются уже две такие инволюции. Настоящая статья посвящена ослабленным (односторонним) инволюциям. В качестве таковых рассматриваются вполне изотонные отображения (они определены во втором разделе). Свойства этих отображений и их условно обратных отображений позволяют осуществлять половинчатые двойственные переходы — переходы лишь в одну сторону. Теоремы двойственности, утверждающие возможность таких переходов, мы называем односторонними схемами двойственности. Содержание работы представляет собой попытку подвести под все возможные односторонние схемы двойственности единую математическую базу, позволяющую переформулировать каждую из них в соответствии с единым стандартом. Такую возможность представляет возникшая в условиях теории спектрального синтеза в комплексной области трактовка двойственных переходов как переходов от инъективного (внутреннего) описания одних математических объектов к проективному (внешнему) описанию других. Инволюции, используемые в односторонних схемах двойственности, в свою очередь являются односторонними, и налагаемые на них ограничения существенно слабее. Это приводит к существенному расширению области возможного применения двойственных схем в исследовательской практике.

Ключевые слова: двойственность, теорема двойственности, инъективное описание, проективное описание.

Mathematical Subject Classification (2010): 14A15, 22D35, 32C37, 46B10, 47L50.

Образец цитирования: Шишкин А. Б. Односторонние схемы двойственности // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 124–150. DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

1. Введение

В разных областях математики возникают отдельные предложения или группы предложений, обычно объединяемые в блоки под общим названием *двойственность* (теория топологических сопряженных к локально выпуклым пространствам в функциональном

анализе называется теорией двойственности; такое же название носит теория характеров в теории локально компактных групп и т. д.). Общие наблюдения позволяют сказать, что в основе понятия двойственности лежит понятие *дуальной пары* $\langle X, Y \rangle$ — пары пространств, обладающих зеркальными (двойственными) свойствами. Обнаружение дуальных пар является основной задачей *общей теории двойственности*. При этом теоремы, утверждающие дуальность конкретных пар, называются *теоремами двойственности*. Наличие дуальной пары позволяет осуществлять *двойственные переходы* — переносы конкретных математических высказываний из одной области в другую путем зеркальной (формальной) переформулировки. Эти переформулировки бывают и очень сложными, но сводятся к замене внутренних (инъективных) описаний множеств внешними (проективными) описаниями двойственных им множеств и наоборот. *Инъективное описание* множества — описание множества по какой-либо совокупности его подмножеств. *Проективное описание* множества — описание множества по какой-либо совокупности его надмножеств. Описание множества — композиция из инъективных и проективных описаний. Подобно тому как формула (композиция операций) наследует название последней выполняемой операции, любое описание множества является либо инъективным, либо проективным.

Таким образом, возникает новое понимание двойственных переходов как переходов от инъективных (соотв. проективных) описаний множеств к проективным (соотв. инъективным) описаниям двойственных им множеств. Правила (отображения), используемые при описании множеств, называются *дескрипторами*. Дескрипторы инъективного описания называются *интериоризаторами*, а дескрипторы проективного описания называются *экстериоризаторами*.

В качестве примера рассмотрим произвольные многозначные отображения $F : X \rightarrow Y$ и $G : Z \rightarrow T$. При заданных F и $y_0 \in Y$ задача описания прообраза $F^{-1}(y_0)$ (если отображение F является однозначным, то эта задача совпадает с классической задачей решения уравнения $F(x) = y_0$) является задачей инъективного описания. Ее решение предполагает переход от проективного описания (экстериоризатор — F) к инъективному описанию (интериоризатор — объединение). С другой стороны, пусть $G^{-1} : T \rightarrow Z$ — обратное многозначное отображение. При заданных G^{-1} и $z_0 \in Z$ задача описания образа $G(z_0)$ является задачей проективного описания. Ее решение предполагает переход от инъективного описания (интериоризатор G^{-1}) к проективному описанию (экстериоризатор — пересечение). Если отображения F и G находятся в определенной дуальной зависимости, то и рассмотренные здесь *задача инъективного описания* и *задача проективного описания* находятся в дуальной зависимости. Этот пример показывает, что при новом понимании двойственных переходов центральным объектом выступает уже дуальная пара отображений $\langle F, G^{-1} \rangle$ — *дуальная пара дескрипторов*. Исследование дуальной пары дескрипторов в классическом понимании равносильно исследованию упорядоченной совокупности из двух дуальных пар $\langle X, Y \rangle$ и $\langle Z, T \rangle$ или одной бипары $\langle \langle X, Y \rangle, \langle Z, T \rangle \rangle$.

Теоремы двойственности являются двусторонними. Они позволяют осуществлять двойственные переходы в одну и другую стороны. Наличие такой теоремы создает идеальные условия для применения взаимно обратных двойственных переходов в конкретной исследовательской практике. В этом состоит основное значение теорем двойственности. Основным недостатком теорем двойственности является их неширокая область применения. Предполагаемая возможность прямого и обратного двойственных переходов вынуждает накладывать на дуальные пары значительные ограничения, и это влияет на область их возможного использования.

В настоящей статье утверждается возможность односторонних теорем двойственности, которые предполагают двойственные переходы только в одну сторону. Такие теоремы мы называем *односторонними схемами двойственности*. Дуальные пары, используемые в односторонних схемах двойственности, в свою очередь являются односторонними, и налагаемые на них ограничения существенно слабее. Это приводит к существенному расширению области возможного применения двойственных схем.

В основе односторонней теории двойственности лежит понятие вполне изотонного отображения и условно обратного к нему отображения. Определение и примеры вполне изотонных отображений приведены в разделе 2. Свойства вполне изотонных отображений исследованы в разделе 3. Раздел 4 посвящен строгому определению дескрипторов и дуальных дескрипторов. Здесь же рассмотрена дуальная взаимосвязь интериоризаторов и экстериоризаторов (предложение 4). В разделе 5 определены задачи инъективного и проективного описаний, показана их дуальная взаимосвязь и доказана основная односторонняя схема двойственности (теорема 1). В разделе 6 рассмотрен частный случай, в котором односторонняя схема двойственности допускает взаимно обратные двойственные переходы (теорема 2). Содержание этого раздела наиболее близко к классическому пониманию общей теории двойственности.

Понимание двойственных переходов как переходов от описания одного характера к описанию другого характера возникло в условиях задачи спектрального синтеза в комплексной области [1–4]. Эти исследования опираются на свойства дуальной бипары $\langle\langle H, H^* \rangle, \langle P, P^* \rangle\rangle$, где $H := H(\Omega)$ — пространство аналитических функций, H^* — его сильное сопряженное пространство, $P := P_\Omega$ — интерпретация H^* в терминах оператора Лапласа, P^* — его сильное сопряженное пространство. Двойственные переходы в условиях этой бипары осуществлялись неоднократно и при решении разных задач [5–16].

2. Вполне изотонные отображения

2.1. Терминология и обозначения. Декартово произведение $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ семейства множеств $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ обозначаем X_Λ . Элементы декартова произведения X_Λ обозначаем $x_\Lambda := (x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$. Декартову степень $\prod_{\lambda \in \Lambda} X$ множества X обозначаем X^Λ . Декартово произведение X_Λ частично упорядоченных множеств всегда рассматриваем как частично упорядоченное множество с порядком: $x_\Lambda \leq x'_\Lambda$ тогда и только тогда, когда $x'_\lambda \leq x_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Замечаем, что порядок в декартовом произведении X_Λ является обратным по отношению к порядкам в множествах $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Например, если Λ состоит из одного элемента $\Lambda = \{0\}$, то X_Λ совпадает с множеством X_0 , в котором порядок заменен обратным порядком.

Отображения отождествляем с непустыми однозначными бинарными отношениями. Для обозначения отображения m , действующего из множества X в множество Y , используем обычный символ $m : X \rightarrow Y$. Область определения (соответственно область значений) отображения m обозначаем символом $\text{Dom } m$ (соответственно $\text{Im } m$). Если $\text{Dom } m = X$, то пишем $m : X \mapsto Y$. Сужение $m|_{X_0}$ отображения $m : X \rightarrow Y$ на множество X_0 определяется как отображение $n : X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям: $\text{Dom } n = X_0 \cap \text{Dom } m$ и $n(x) = m(x)$ для любого $x \in \text{Dom } n$. Областью определения (соответственно областью значений) семейства $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ отображений $m_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ называем пересечение $\text{Dom}\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{Dom } m_\lambda$ (соответственно объединение $\text{Im}\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Im } m_\lambda$). Декартовым произведением семейства отображений $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ называется отображение

$$m_\Lambda : X_\Lambda \rightarrow Y_\Lambda \mid (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto (m_\lambda(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda).$$

Область определения декартова произведения m_Λ совпадает с декартовым произведением $\prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Dom } m_\lambda$. Декартовой степенью отображения $m : X \rightarrow Y$ называется отображение

$$m^\Lambda : X^\Lambda \rightarrow Y^\Lambda \mid (x_\lambda : \lambda \in \Lambda) \mapsto (m(x_\lambda) : \lambda \in \Lambda).$$

Область определения отображения m^Λ совпадает с декартовой степенью $(\text{Dom } m)^\Lambda$.

Говорим, что отображения $m : X \rightarrow Y$ и $n : Z \rightarrow T$ совпадают (имеет место функциональное равенство $m = n$), если $\text{Dom } m = \text{Dom } n$ и $m(x) = n(x)$ для любого $x \in \text{Dom } m$. Говорим, что на множестве X_0 имеет место функциональное равенство $m = n$ (отображения m и n совпадают на множестве X_0), если $m|_{X_0} = n|_{X_0}$. Символом $X(m = n)$ (соответственно $X(m \leq n)$) обозначаем множество

$$\begin{aligned} & \{x \in \text{Dom}\{m, n\} : m(x) = n(x)\} \\ & \text{(соотв. } \{x \in \text{Dom}\{m, n\} : m(x) \leq n(x)\}). \end{aligned}$$

При фиксированном $z \in \text{Dom } n$ (соответственно $x \in \text{Dom } m$) символом $X(m(x) \leq n(z))$ (соответственно $Z(m(x) \leq n(z))$) обозначаем множество

$$\begin{aligned} & \{x \in \text{Dom } m : m(x) \leq n(z)\} \\ & \text{(соотв. } \{z \in \text{Dom } n : m(x) \leq n(z)\}) \end{aligned}$$

Композиция $n \circ m$ отображений n и m определяется как отображение $X \rightarrow T \mid x \rightarrow n(m(x))$ с областью определения

$$\text{Dom}(n \circ m) := \{x \in \text{Dom } m : m(x) \in \text{Dom } n\}.$$

При рассмотрении произвольной композиции $n \circ m$ всегда предполагаем, что выполнено условие ее существования $\text{Im } m \cap \text{Dom } n \neq \emptyset$.

2.2. Вполне изотонные отображения. Отображение $m : X \rightarrow Y$, где X, Y — частично упорядоченные множества, называется *изотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in \text{Dom } m$, удовлетворяющих условию $x_1 \leq x_2$, выполнено неравенство $m(x_1) \leq m(x_2)$. Элемент $y \in Y$ называем *частичной мажорантой* (соответственно *частичной минорантой*) изотонного отображения $m : X \rightarrow Y$, если множество $X(m(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq m(x))$) не является пустым. Согласно этому определению любая точка из области значений $\text{Im } m$ является и частичной мажорантой, и частичной минорантой отображения m . Если элемент $y \in Y$ является частичной мажорантой (соответственно частичной минорантой) изотонного отображения $m : X \rightarrow Y$ и $y \leq y'$ (соответственно $y' \leq y$), то элемент $y' \in Y$ тоже является частичной мажорантой (соответственно частичной минорантой) отображения m .

Изотонное отображение $m : X \rightarrow Y$ называем *инъективным* (соответственно *проективным*), если выполнены условия:

- 1) если $x, x' \in X$, $x \leq x'$ (соответственно $x' \leq x$) и $x \in \text{Dom } m$, то $x' \in \text{Dom } m$;
- 2) для любой частичной мажоранты (соответственно частичной миноранты) $y \in Y$ отображения m множество $X(m(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq m(x))$) обладает наибольшим (соответственно наименьшим) элементом.

Инъективные и проективные отображения называем *вполне изотонными* отображениями. Множество $X_0 \subseteq X$, обладающее свойством

$$x \leq x', x' \in X_0 \Rightarrow x \in X_0 \quad \text{(соотв. } x' \leq x, x' \in X_0 \Rightarrow x \in X_0),$$

принято называть прямым (соответственно обратным) *порядковым идеалом*. Значит, по определению вполне изотонного отображения область его определения является порядковым идеалом. Отмечаем, что при замене порядков в множествах X и Y их обратными порядками инъективное (соответственно проективное) отображение $m : X \rightarrow Y$ становится проективным (соответственно инъективным) отображением.

Понятие вполне изотонного отображения напрямую связано с понятием многозначного отображения (непустого бинарного отношения). Поясним это утверждение. Пусть A, B — множества, $X := (X, \subseteq)$, $Y := (Y, \subseteq)$ — их булеаны соответственно. Многозначное отображение $F : A \mapsto B$ можно рассматривать как однозначное отображение $m : X \rightarrow Y \mid x \mapsto F(x)$, где $F(x) \in Y$ — образ множества $x \subseteq A$. При этом, если $\text{Dom } F = A$, то отображение m является инъективным. Действительно, в этом случае $\text{Dom } m = X$, отображение m является изотонным и для любой частичной мажоранты $y \in Y$ отображения m множество $X(m \leq y)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является прообраз $F^{-1}(y)$ множества $y \subseteq B$.

С другой стороны, всякое многозначное отображение $F : A \rightarrow B$ имеет многозначное обратное отображение $F^{-1} : B \rightarrow A$, которое каждому $b \in \text{Im } F$ ставит в соответствие прообраз $F^{-1}(b)$. Обратное многозначное отображение $F^{-1} : B \rightarrow A$ можно рассматривать как однозначное отображение $n : Y \rightarrow X \mid y \mapsto F^{-1}(y)$, где $F^{-1}(y) \in X$ — прообраз множества $y \subseteq B$. При этом, если $\text{Im } F = B$, то отображение n является проективным. Действительно, в этом случае $\text{Dom } n = Y$, отображение n является изотонным и для любой частичной миноранты $x \in X$ отображения n множество $Y(x \leq n)$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является образ $F(x)$ множества $x \subseteq A$.

2.3. Примеры вполне изотонных отображений. Вполне изотонные отображения встречаются часто. Рассмотрим еще четыре примера вполне изотонных отображений.

ПРИМЕР 1. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества. Порядковый изоморфизм $m : X \mapsto Y$ является инъективным и проективным отображением одновременно. Его условно обратное отображение совпадает с обратным отображением.

ПРИМЕР 2. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}$. Действительная возрастающая функция $m : X \mapsto \mathbf{R}$ осуществляет инъективное (соответственно проективное) отображение $X \mapsto \mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу (соответственно полунепрерывна сверху).

ПРИМЕР 3. Пусть $\langle A, B \rangle$ — дуальная пара векторных пространств над полем \mathbf{R} или \mathbf{C} ; $X := (X, \subseteq)$, $Y := (Y, \supseteq)$ — булеаны множеств A и B соответственно. Полярной x^0 множества $x \in X$ называется абсолютно выпуклое слабо замкнутое множество элементов $b \in B$, для которых $|\langle a, b \rangle| \leq 1$ при любом $a \in x$. Поляр y^0 множества $y \in Y$ определяется симметрично и состоит из элементов $a \in A$, для которых $|\langle a, b \rangle| \leq 1$ при любом $b \in y$. Отметим элементарные свойства поляр:

- 1°. если $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \leq x_2$, то $x_1^0 \leq x_2^0$;
- 2°. если $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \leq y_2$, то $y_1^0 \leq y_2^0$;
- 3°. если $x \in X$ и $x^{00} = (x^0)^0$, то $x \leq x^{00}$;
- 4°. если $y \in Y$ и $y^{00} = (y^0)^0$, то $y^{00} \leq y$.

Рассмотрим отображения $m : X \mapsto Y \mid x \mapsto x^0$ и $n : Y \mapsto X \mid y \mapsto y^0$. По свойствам 1° и 2° отображения m и n являются изотонными. При этом отображение m является инъективным. Действительно, если элемент $y \in Y$ является частичной мажорантой отображения m , то множество $X(m(x) \leq y)$ обладает наибольшим элементом. Этим элементом является поляр y^0 . В самом деле, по свойству 4° $y^{00} \leq y$, значит, $y^0 \in X(m(x) \leq y)$. При этом, если $x \in X(m(x) \leq y)$, то $x^0 \leq y$ и по свойствам 3° и 2° $x \leq x^{00} \leq y^0$.

С другой стороны, отображение n является проективным. Действительно, если элемент $x \in X$ является частичной минорантой отображения n , то множество $Y(x \leq m(y))$ обладает наименьшим элементом. Этим элементом является поляр x^0 . В самом деле, по свойству 3° $x \leq x^{00}$, значит, $x^0 \in Y(x \leq m(y))$. При этом, если $y \in Y(x \leq m(y))$, то $x \leq y^0$, и по свойствам 1° и 4° $x^0 \leq y^{00} \leq y$.

ПРИМЕР 4. Пусть A — топологическая группа, B — группа характеров группы A , x — некоторая замкнутая подгруппа группы A . Множество x^0 всех элементов $b \in B$, для которых $b(a) = 0$ при всяком $a \in x$, называется аннулятором подгруппы x в группе B и представляет собой подгруппу группы B . Далее, пусть y — замкнутая подгруппа группы B . Множество y^0 всех элементов $a \in A$, для которых $b(a) = 0$ при всяком $b \in y$, называется аннулятором подгруппы y в группе A и представляет собой подгруппу группы A . Множества x^0 и y^0 являются замкнутыми подгруппами топологических групп B и A соответственно.

Пусть $X := (X, \subseteq), Y := (Y, \supseteq)$ — совокупность всех замкнутых подгрупп A и B соответственно. Рассмотрим отображения $m : X \mapsto Y | x \mapsto x^0$ и $n : Y \mapsto X | y \mapsto y^0$. Свойства аннуляторов повторяют свойства поляр 1° – 4° , сформулированные в предыдущем примере. Значит, отображение m является инъективным, а отображение n является проективным.

3. Свойства вполне изотонных отображений

3.1. Условно обратные отображения. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества. Всякое инъективное (соответственно проективное) отображение $m : X \rightarrow Y$ обладает *условно обратным* отображением $m^- : Y \rightarrow X$, которое каждой частичной мажоранте (соответственно частичной миноранте) $y \in Y$ отображения m ставит в соответствие наибольший (соответственно наименьший) элемент множества $X(m(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq m(x))$). Согласно этому определению область определения $\text{Dom } m^- \subseteq Y$ условно обратного отображения m^- совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения m . При этом для любого вполне изотонного отображения $m : X \rightarrow Y$ выполняются включения:

$$\text{Im } m \subseteq \text{Dom } m^- \subseteq Y, \quad \text{Im } m^- \subseteq \text{Dom } m \subseteq X, \quad (1)$$

Свойство 1. Если $m : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, то для любого $y \in \text{Dom } m^-$ выполняется неравенство

$$m \circ m^-(y) \leq y \quad (\text{соотв. } y \leq m \circ m^-(y)). \quad (2)$$

\triangleleft Пусть $m : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение. Выберем произвольный элемент $y \in \text{Dom } m^-$. По определению условно обратного отображения элемент $m^-(y)$ принадлежит множеству $X(m(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq m(x))$). Значит, выполняется неравенство $m \circ m^-(y) \leq y$ (соответственно $y \leq m \circ m^-(y)$). \triangleright

Свойство 2. Если $m : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, то для любого $x \in \text{Dom } m$ выполняется неравенство

$$x \leq m^- \circ m(x) \quad (\text{соотв. } m^- \circ m(x) \leq x). \quad (3)$$

\triangleleft Пусть $x \in \text{Dom } m$ и $y := m(x)$. Замечаем, что x принадлежит множеству $X(m(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq m(x))$). Так как $m^-(y)$ — наибольший (соответственно наименьший) элемент этого множества, то справедливы соотношения $x \leq m^-(y) = m^- \circ m(x)$ (соответственно $m^-(y) = m^- \circ m(x) \leq x$). \triangleright

Свойство 3. Если $m : X \rightarrow Y$ — вполне изотонное отображение, то условно обратное отображение $m^- : Y \rightarrow X$ является изотонным.

◁ Действительно, допустим, что исходное отображение $m : X \rightarrow Y$ является инъективным (соответственно проективным). Пусть $y_1, y_2 \in \text{Dom } m^-$ и $y_1 \leq y_2$. Тогда имеет место вложение $X(m(x) \leq y_1) \subseteq X(m(x) \leq y_2)$ (соответственно $X(y_2 \leq m(x)) \subseteq X(y_1 \leq m(x))$). Значит, $m^-(y_1) \in X(m(x) \leq y_2)$ (соответственно $m^-(y_2) \in X(y_1 \leq m(x))$) и по определению условно обратного отображения $m^-(y_1) \leq m^-(y_2)$. ▷

Свойство 4. Если $m : X \rightarrow Y$ — вполне изотонное отображение, то для любого $x \in \text{Im } m^-$ выполняется равенство

$$m^- \circ m(x) = x,$$

а для любого $y \in \text{Im } m$ выполняется равенство

$$m \circ m^-(y) = y.$$

◁ Пусть $m : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение. Во-первых, выберем произвольный элемент $x \in \text{Im } m^-$. Найдется такой элемент $y \in \text{Dom } m^-$, что $x = m^-(y)$. Так как $\text{Im } m^- \subseteq \text{Dom } m$, то $x \in \text{Dom } m$ и по свойству 1 $m(x) = m \circ m^-(y) \leq y$ (соответственно $y \leq m \circ m^-(y) = m(x)$). С другой стороны, $\text{Im } m \subseteq \text{Dom } m^-$, значит, $m(x) \in \text{Dom } m^-$ и по свойству 3 $m^- \circ m(x) \leq m^-(y) = x$ (соответственно $x = m^-(y) \leq m^- \circ m(x)$). Следовательно, по свойству 2 $m^- \circ m(x) = x$.

Во-вторых, выберем произвольный элемент $y \in \text{Im } m$. Найдется такой элемент $x \in \text{Dom } m$, что $y = m(x)$. Так как $\text{Im } m \subseteq \text{Dom } m^-$, то $y \in \text{Dom } m^-$ и по свойству 2 $x \leq m^- \circ m(x) = m^-(y)$ (соответственно $m^-(y) = m^- \circ m(x) \leq x$). С другой стороны, $\text{Im } m^- \subseteq \text{Dom } m$, значит, $m^-(y) \in \text{Dom } m$ и в силу изотонности отображения m имеем $y = m(x) \leq m \circ m^-(y)$ (соответственно $m \circ m^-(y) \leq m(x) = y$). Следовательно, по свойству 1 $m \circ m^-(y) = y$. ▷

Свойство 5. Изотонное отображение $n : X \rightarrow Y$ является инъективным (соответственно проективным) тогда и только тогда, когда существует изотонное отображение $r : Y \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям:

1) $\text{Dom } r$ совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения n ;

2) $n \circ r(y) \leq y$ (соответственно $y \leq n \circ r(y)$) для любого $y \in \text{Dom } r$;

3) $x \leq r \circ n(x)$ (соответственно $r \circ n(x) \leq x$) для любого $x \in \text{Dom } n$.

Отображение r , удовлетворяющее условиям 1) 2), 3), и условно обратное отображение n^- совпадают.

◁ *Необходимость.* Пусть $n : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, n^- — его условно обратное отображение. По определению условно обратного отображения отображение $r := n^-$ удовлетворяет условию 1). По свойствам 1 и 2 вполне изотонных отображений отображение $r := n^-$ удовлетворяет условиям 2) и 3).

◁ *Достаточность.* Допустим, что существует изотонное отображение $r : Y \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям 1), 2) и 3). Покажем, что отображение n является инъективным (соответственно проективным). Выберем произвольную частичную мажоранту (соответственно частичную миноранту) $y \in Y$ отображения n и рассмотрим множество $X(n(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq n(x))$). Из условий 1) и 2) вытекает, что это множество содержит элемент $r(y)$. При этом, если x принадлежит множеству $X(n(x) \leq y)$ (соответственно $X(y \leq n(x))$), то по условию 1) $n(x) \in \text{Im } n \subseteq \text{Dom } r$. В силу изотонности

отображения r получаем $r \circ n(x) \leq r(y)$ (соответственно $r(y) \leq r \circ n(x)$). Значит, в силу условия 3) имеем $x \leq r \circ n(x) \leq r(y)$ (соответственно $r(y) \leq r \circ n(x) \leq x$). Другими словами, элемент $r(y)$ является наибольшим (соответственно наименьшим) элементом множества $X(n(x) \leq y)$ (соответственно $X(y(x) \leq n)$). Это означает, что $r(y) = n^-(y)$ и отображение n является инъективным (соответственно проективным). Так как $r(y) = n^-(y)$ для любого $y \in \text{Dom } r$, то отображения r и n^- совпадают. \triangleright

Свойство 6. Если отображение $m : X \rightarrow Y$ является инъективным (соответственно проективным), то его условно обратное отображение $m^- : Y \rightarrow X$ является проективным (соответственно инъективным) и второе условно обратное отображение $(m^-)^-$ совпадает с отображением m .

\triangleleft Пусть $m : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, $m^- : Y \rightarrow X$ — его условно обратное отображение. Покажем, что пара отображений $n := m^-$ и $r := m$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3) из формулировки свойства 5. Во-первых, пусть $\text{Dom}(m^-)^-$ — совокупность всех частичных минорант (соответственно частичных мажорант) отображения m^- . Покажем, что $\text{Dom } m = \text{Dom}(m^-)^-$. С одной стороны, если $x \in \text{Dom}(m^-)^-$, то при некотором $y \in \text{Dom } m^-$ выполняется неравенство $x \leq m^-(y)$ (соответственно $m^-(y) \leq x$). При этом y — частичная мажоранта (соответственно частичная миноранта) отображения m , значит, $m(x') \leq y$ (соответственно $y \leq m(x')$) при некотором $x' \in \text{Dom } m$. Можно считать, что $x' := m^-(y)$. Тогда $x' \in \text{Im } m^- \subseteq \text{Dom } m$ и $x \leq x'$ (соотв. $x' \leq x$). Значит, $x \in \text{Dom } m$ и $\text{Dom}(m^-)^- \subseteq \text{Dom } m$. С другой стороны, пусть $x \in \text{Dom } m$ и $y := m(x) \in \text{Dom } m^-$. Так как $x \in X(m(x) \leq y)$ (соответственно $x \in X(y \leq m(x))$), то $x \leq m^-(y) = m^- \circ m(x)$ (соответственно $m^-(y) = m^- \circ m(x) \leq x$), т. е. x — частичная миноранта (соответственно частичная мажоранта) отображения m^- . Значит, $\text{Dom } m \subseteq \text{Dom}(m^-)^-$ и, следовательно, $\text{Dom } m = \text{Dom}(m^-)^-$. Отсюда следует, что пара отображений $n := m^-$ и $r := m$ удовлетворяют условию 1) из свойства 5.

Во-вторых, по свойству 1) для любого $y \in \text{Dom } m^-$ выполняется неравенство (2), а по свойству 2) для любого $x \in \text{Dom } m$ выполняется неравенство (3). Следовательно, пара отображений $n := m^-$ и $r := m$ удовлетворяют условиям 2) и 3) из свойства 5. Это означает, что условно обратное отображение m^- является проективным (соответственно инъективным) и отображение m является условно обратным для отображения m^- . \triangleright

Свойство 7. Если $m : X \rightarrow Y$ — инъективное (соответственно проективное) отображение, то

$$X(m(x) \leq y) = X(x \leq m^-(y)) \quad (\text{соотв. } X(y \leq m(x)) = X(m^-(y) \leq x)).$$

\triangleleft Действительно, если $m : X \rightarrow Y$ — инъективное отображение и при некоторых $x \in \text{Dom } m$, $y \in Y$ имеет место неравенство $m(x) \leq y$, то y — частичная мажоранта отображения m , значит, $y \in \text{Dom } m^-$. Следовательно, $m^- \circ m(x) \leq m^-(y)$ и по свойству 2) $x \leq m^-(y)$. С другой стороны, если при некоторых $x \in X$, $y \in \text{Dom } m^-$ имеет место неравенство $x \leq m^-(y)$, то y — частичная миноранта отображения m^- , значит, $y \in \text{Dom}(m^-)^-$. Но по свойству 6) $(m^-)^- = m$, значит, $y \in \text{Dom } m$. Следовательно, $m(x) \leq m \circ m^-(y)$ и по свойству 1) $m(x) \leq y$. Параллельное утверждение доказывается аналогично. \triangleright

3.2. Композиции вполне изотонных отображений. Продолжим рассмотрение свойств вполне изотонных отображений. Пусть X, Y, Z, T — частично упорядоченные множества.

Свойство 8. Если отображения $m : X \rightarrow Y$ и $n : Y \rightarrow Z$ являются инъективными (соответственно проективными), то композиция $n \circ m$ является инъективным (соответственно проективным) отображением из X в Z и его условно обратное отображение совпадает с композицией $m^- \circ n^-$.

◁ По свойству 3 отображения m , n и их условно обратные отображения являются изотонными, значит, отображения $n \circ m$ и $m^- \circ n^-$ тоже являются изотонными. Осталось убедиться, что отображение $n \circ m$ является инъективным (соответственно проективным) и его условно обратное отображение $(n \circ m)^-$ совпадает с отображением $m^- \circ n^-$. По свойству 5 для этого достаточно показать, что изотонное отображение $m^- \circ n^-$ удовлетворяет условиям:

- 1) $\text{Dom}(m^- \circ n^-)$ совпадает с множеством всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения $n \circ m$;
- 2) $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leq z$ (соответственно $z \leq n \circ m \circ m^- \circ n^-(z)$) для любого $z \in \text{Dom}(m^- \circ n^-)$;
- 3) $x \leq m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$ (соответственно $m^- \circ n^- \circ n \circ m(x) \leq x$) для любого $x \in \text{Dom}(n \circ m)$.

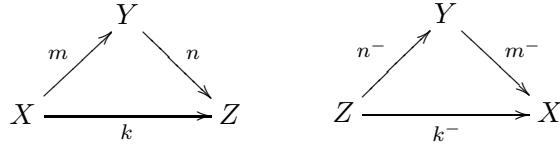
Проверим выполнимость условия 1). Пусть $\text{Dom}(n \circ m)^-$ — множество всех частичных мажорант (соответственно минорант) отображения $n \circ m$ и $z \in \text{Dom}(n \circ m)^-$. Значит, множество $X(n \circ m \leq z)$ (соответственно $X(z \leq n \circ m)$) не является пустым. Выберем произвольный элемент x из этого множества. Тогда по определению композиции $m(x) \in \text{Dom} n$ и $n \circ m(x) \leq z$ (соответственно $z \leq n \circ m(x)$), значит, $z \in \text{Dom} n^-$. Отображение n является инъективным (соответственно проективным), значит, по свойству 2 $m(x) \leq n^- \circ n \circ m(x) \leq n^-(z)$ (соответственно $n^-(z) \leq n^- \circ n \circ m(x) \leq m(x)$), значит, $n^-(z) \in \text{Dom} m^-$. Отсюда следует, что $z \in \text{Dom}(m^- \circ n^-)$. Следовательно, $\text{Dom}(n \circ m)^- \subseteq \text{Dom}(m^- \circ n^-)$. С другой стороны, если $z \in \text{Dom}(m^- \circ n^-)$, то по определению композиции $z \in \text{Dom} n^-$ и $n^-(z) \in \text{Dom} m^-$. Из включения $n^-(z) \in \text{Dom} m^-$ вытекает, что при некотором $x \in \text{Dom} m$ выполняется неравенство $m(x) \leq n^-(z)$ (соответственно $n^-(z) \leq m(x)$). Значит, по свойству 1 из включения $z \in \text{Dom} n^-$ следует, что $n \circ m(x) \leq n \circ n^-(z) \leq z$ (соответственно $z \leq n \circ n^-(z) \leq n \circ m(x)$). Отсюда вытекает, что $z \in \text{Dom}(n \circ m)^-$. Следовательно, $\text{Dom}(m^- \circ n^-) \subseteq \text{Dom}(n \circ m)^-$, т. е. $\text{Dom}(m^- \circ n^-) = \text{Dom}(n \circ m)^-$.

Покажем, что выполняется условие 2). Действительно, пусть $z \in \text{Dom}(m^- \circ n^-)$. Тогда $m^- \circ n^-(z) \in \text{Im} m^- \subseteq \text{Dom} m$ и по определению композиции $n^-(z) \in \text{Dom} m^-$. В силу инъективности (соответственно проективности) отображения m по свойству 1 выполняется неравенство $m \circ m^- \circ n^-(z) \leq n^-(z)$ (соответственно $n^-(z) \leq m \circ m^- \circ n^-(z)$). Аналогично, в силу инъективности (соответственно проективности) отображения n выполняются неравенства $n \circ m \circ m^- \circ n^-(z) \leq n \circ n^-(z) \leq z$ (соответственно $z \leq n \circ n^-(z) \leq n \circ m \circ m^- \circ n^-(z)$).

Далее покажем, что выполняется условие 3). Действительно, пусть $x \in \text{Dom}(n \circ m)$. Тогда $m(x) \in \text{Dom} n$ и $n \circ m(x) \in \text{Im} n \subseteq \text{Dom} n^-$. В силу инъективности (соответственно проективности) отображения n по свойству 2 выполняется неравенство $m(x) \leq n^- \circ n \circ m(x)$ (соответственно $n^- \circ n \circ m(x) \leq m(x)$). Аналогично, в силу инъективности (соответственно проективности) отображения m по свойству 2 выполняются неравенства $x \leq m^- \circ m(x) \leq m^- \circ n^- \circ n \circ m(x)$ (соответственно $m^- \circ n^- \circ n \circ m(x) \leq m^- \circ m(x) \leq x$). ▷

Пусть $m : X \rightarrow Y$, $n : Y \rightarrow Z$, $k : X \rightarrow Z$ — произвольные вполне изотонные

отображения; m^- , n^- , k^- — их условно обратные отображения. Рассмотрим диаграммы

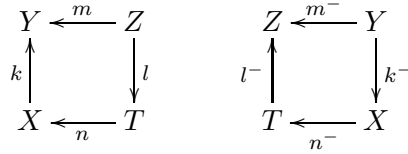


Коммутативность этих диаграмм означает выполнение функциональных равенств $k = n \circ m$ и $k^- = m^- \circ n^-$ соответственно. Справедливо следующее предложение.

Свойство 9. Если отображения m , n являются инъективными (соответственно проетивными), то первая из представленных диаграмм коммутативна тогда и только тогда, когда вторая диаграмма коммутативна.

◁ Предположим, что первая диаграмма коммутативна, т. е. $k = n \circ m$. По свойству 8 условно обратное отображение k^- является вполне изотонным и совпадает с композицией $m^- \circ n^-$. Значит, вторая диаграмма тоже коммутативна. Далее предположим, что вторая диаграмма коммутативна, значит, $k^- = m^- \circ n^-$. По свойству 8 $(k^-)^- = (n^-)^- \circ (m^-)^-$, где $(k^-)^-$, $(n^-)^-$ и $(m^-)^-$ — вторые условно обратные отображения. По свойству 6 отображения $(k^-)^-$, $(n^-)^-$ и $(m^-)^-$ совпадают с отображениями k , n и m соответственно. Значит, $k = n \circ m$. Следовательно, первая диаграмма тоже коммутативна. ▷

Пусть $k : X \rightarrow Y$, $l : Z \rightarrow T$, $m : Z \rightarrow Y$, $n : T \rightarrow X$ — произвольные вполне изотонные отображения; k^- , l^- , m^- , n^- — их условно обратные отображения. Рассмотрим диаграммы



Из свойств 6, 7 и 8 легко вытекает справедливость следующих свойств.

Свойство 10. Если отображения k , l , n являются инъективными (соответственно проетивными), то композиция $m := k \circ n \circ l$ является инъективным (соответственно проетивным) отображением и его условно обратное отображение m^- совпадает с композицией $l^- \circ n^- \circ k^-$.

Свойство 11. Если отображения k , l , n являются инъективными (соответственно проетивными), то первая из представленных диаграмм коммутативна тогда и только тогда, когда вторая диаграмма коммутативна.

4. Дескрипторы

4.1. Обозначения. Если высказываемое нами утверждение или определение сохраняет силу и для отображений из X в Y , и для отображений из Y в X , то при его записи будем использовать символ $m : X \rightleftharpoons Y$. Этот символ означает один из двух символов $m : X \rightarrow Y$ или $m : Y \rightarrow X$. Символ $m : X \rightarrow Y$ называем первым значением символа $m : X \rightleftharpoons Y$, а символ $m : Y \rightarrow X$ называем вторым значением символа $m : X \rightleftharpoons Y$. При этом выбор значения символа $m : X \rightleftharpoons Y$ осуществляется только один раз. При повторном использовании символа $m : X \rightleftharpoons Y$ его значение остается прежним.

С символом $m : X \rightleftharpoons Y$ свяжем два символа $m^\pm : X \rightarrow Y$ и $m^\mp : Y \rightarrow X$. Символ $m^\pm : X \rightarrow Y$ означает один из двух символов $m : X \rightarrow Y$ (первое значение) и $m^- : X \rightarrow Y$

(второе значение). При этом символ $m^\pm : X \rightarrow Y$ принимает первое (соответственно второе) значение, если символ $m : X \rightleftharpoons Y$ принимает первое (соответственно второе) значение. Символ $m^\mp : Y \rightarrow X$ означает один из двух символов $m : Y \rightarrow X$ (первое значение) и $m^- : Y \rightarrow X$ (второе значение). При этом символ $m^\mp : Y \rightarrow X$ принимает первое (соответственно второе) значение, если символ $m : X \rightleftharpoons Y$ принимает второе (соответственно первое) значение.

В общем случае символы $m : X \rightleftharpoons Y$ и $m : Y \rightleftharpoons X$ равносильны. Необходимо исключить использование одного из этих символов. Для этого будем предполагать, что множества X и Y являются элементами некоторого простого ориентированного цикла

$$A \dashrightarrow B \dashrightarrow \dots \dashrightarrow Z \dashrightarrow A,$$

содержащего более двух различных элементов. Договоримся использовать символ $m : X \rightleftharpoons Y$ только при условии, что множества X и Y являются соседними элементами этого цикла и X предшествует Y (в обозначениях $X \dashrightarrow Y$). Легко увидеть, что это соглашение исключает совместное использование символов $m : X \rightleftharpoons Y$ и $m : Y \rightleftharpoons X$. Если множества X, Y и Z, T являются соседними элементами одного простого ориентированного цикла и $X \dashrightarrow Y, Z \dashrightarrow T$, то символ

$$(m, n) := (m : X \rightleftharpoons Y, n : Z \rightleftharpoons T)$$

означает один из четырех символов

$$(m : X \rightarrow Y, n : Z \rightarrow T), \quad (m : X \rightarrow Y, n : T \rightarrow Z), \\ (m : Y \rightarrow X, n : Z \rightarrow T), \quad (m : Y \rightarrow X, n : T \rightarrow Z).$$

Выбор значения символа (m, n) осуществляется только один раз и остается прежним в дальнейших построениях. Важно лишь то, что проводимые рассуждения не зависят от сделанного выбора.

4.2. Дуальные пары. Пусть X, Y, Z и T — частично упорядоченные множества. Сформируем из этих множеств простой ориентированный цикл

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Z \dashrightarrow T \dashrightarrow X.$$

Выберем произвольные вполне изотонные отображения $k : X \rightleftharpoons Y$ и $l : Z \rightleftharpoons T$. Пару (k, l) называем *дуальной парой* и обозначаем символом $\langle k, l \rangle$. Дуальную пару $\langle k, l \rangle$ называем *симметричной*, если отображение k действует из X в Y , а отображение l действует из T в Z или, наоборот, отображение k действует из Y в X , а отображение n действует Z в T . Если дуальная пара $\langle k, l \rangle$ является симметричной, то и *зеркальная* дуальная пара $\langle l, k \rangle$ является симметричной. Дуальные пары $\langle k^\pm, k^\mp \rangle$ и $\langle k^\mp, k^\pm \rangle$ тоже являются симметричными. Здесь отображение $k^\pm : X \rightarrow Y$ по определению совпадает с отображением k , если k действует из X в Y и, наоборот, совпадает с условно обратным отображением k^- , если k действует из Y в X . Отображение $k^\mp : Y \rightarrow X$ определяется симметрично. Оно совпадает с отображением k^- , если k действует из X в Y и, наоборот, совпадает с отображением k , если k действует из Y в X .

Отметим, что по свойству 6 условно обратное к отображению k^\pm совпадает с отображением k^\mp и, наоборот, условно обратное к отображению k^\mp совпадает с отображением k^\pm , т. е.

$$(k^\pm)^- = k^\mp, \quad (k^\mp)^- = k^\pm.$$

С другой стороны, используя свойство 6, легко убедиться, что справедливы и следующие соотношения:

$$(k^-)^\pm = k^\pm, \quad (k^-)^\mp = k^\mp.$$

При этом, если отображение k^\pm (соответственно k^\mp) является инъективным, то отображение k^\mp (соответственно k^\pm) является проективным и, наоборот, если отображение k^\pm (соответственно k^\mp) является проективным, то отображение k^\mp (соответственно k^\pm) является инъективным.

4.3. Дуальные отображения. Рассмотрим совокупность из двух ориентированных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightleftharpoons{m} & Z \\ \updownarrow k & & \updownarrow l \\ X & \xrightleftharpoons{n} & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{m^\pm} & Z \\ \uparrow k^\pm & & \uparrow l^\mp \\ X & \xrightarrow{n^\mp} & T \end{array} \quad (4)$$

где $\langle k, l \rangle$ — дуальная пара вполне изотонных отображений $k : X \rightleftharpoons Y$ и $l : Z \rightleftharpoons T$, $\langle m, n \rangle$ — симметричная дуальная пара вполне изотонных отображений $m : Y \rightleftharpoons Z$ и $n : T \rightleftharpoons X$. Вполне изотонное отображение $m : Y \rightleftharpoons Z$ называем *дуальным* к вполне изотонному отображению $n : T \rightleftharpoons X$ относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$, если для любого $x \in \text{Dom } n^\mp$ выполняется неравенство

$$l^\mp \circ n^\mp(x) \leq m^\pm \circ k^\pm(x).$$

Выполнение этого неравенства означает, в частности, что $\text{Im } n^\mp \subseteq \text{Dom } l^\mp$, $\text{Dom } n^\mp \subseteq \text{Dom } k^\pm$ и $k^\pm(\text{Dom } n^\mp) \subseteq \text{Dom } m^\pm$.

Рассмотрим другую совокупность из двух противоположно ориентированных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{n} & T \\ \updownarrow k & & \updownarrow l \\ Y & \xleftarrow{m} & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{n^\mp} & T \\ \uparrow k^\mp & & \uparrow l^\pm \\ Y & \xrightarrow{m^\pm} & Z \end{array} \quad (5)$$

которые получены из диаграмм (4) с помощью горизонтальной симметрии. Вполне изотонное отображение $n : X \rightleftharpoons T$ называем *дуальным* к вполне изотонному отображению $m : Y \rightleftharpoons Z$ относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$, если для любого $y \in \text{Dom } m^\pm$ выполняется неравенство

$$l^\pm \circ m^\pm(y) \leq n^\mp \circ k^\mp(y).$$

Выполнение этого неравенства означает, в частности, что $\text{Im } m^\pm \subseteq \text{Dom } l^\pm$, $\text{Dom } m^\pm \subseteq \text{Dom } k^\mp$ и $k^\mp(\text{Dom } m^\pm) \subseteq \text{Dom } n^\mp$.

При замене симметричной дуальной пары $\langle m, n \rangle$ симметричной дуальной парой $\langle m^-, n^- \rangle$ вторые диаграммы в совокупностях (4) и (5) не меняются, значит, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Вполне изотонное отображение $m : Y \rightleftharpoons Z$ (соответственно $n : T \rightleftharpoons X$) является дуальным к вполне изотонному отображению $n : T \rightleftharpoons X$ (соответственно $m : Y \rightleftharpoons Z$) относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$ тогда и только тогда, когда условно обратное отображение m^- (соответственно n^-) является дуальным к условно обратному отображению n^- (соответственно m^-) относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$.*

Предложение 2. *Если вполне изотонное отображение $m : Y \rightleftharpoons Z$ является дуальным к вполне изотонному отображению $n : T \rightleftharpoons X$ относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$ и*

отображение $m^\pm : Y \rightarrow Z$ является инъективным (соответственно проективным), то для любого $x \in \text{Dom } n^\mp$ выполняется включение

$$Y(y \leq k^\pm(x)) \subseteq \text{Dom } m^\pm \quad (\text{соотв. } Y(k^\pm(x) \leq y) \subseteq \text{Dom } m^\pm).$$

Если вполне изотонное отображение $n : T \rightleftarrows X$ является дуальным к вполне изотонному отображению $m : Y \rightleftarrows Z$ относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$ и отображение $n^\mp : X \rightarrow T$ является инъективным (соответственно проективным), то для любого $y \in \text{Dom } m^\pm$ выполняется включение

$$X(x \leq k^\mp(y)) \subseteq \text{Dom } n^\mp \quad (\text{соотв. } X(k^\mp(y) \leq x) \subseteq \text{Dom } n^\mp).$$

◁ Во-первых, пусть вполне изотонное отображение $m : Y \rightleftarrows Z$ является дуальным к вполне изотонному отображению $n : T \rightleftarrows X$ относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$ и отображение $m^\pm : Y \rightarrow Z$ является инъективным. Выберем произвольное $x \in \text{Dom } n^\mp$. По определению дуального отображения выполняется неравенство

$$l^\mp \circ n^\mp(x) \leq m^\pm \circ k^\pm(x).$$

Значит, $x \in \text{Dom } k^\pm$ и $k^\pm(x) \in \text{Dom } m^\pm$. Если $y \leq k^\pm(x)$, то по определению инъективного отображения $y \in \text{Dom } m^\pm$, значит, $Y(y \leq k^\pm(x)) \subseteq \text{Dom } m^\pm$. С другой стороны, если отображение $m^\pm : Y \rightarrow Z$ является проективным и $k^\pm(x) \leq y$, то по определению проективного отображения тоже $y \in \text{Dom } m^\pm$, значит, $Z(k^\pm(x) \leq y) \subseteq \text{Dom } m^\pm$.

Во-вторых, пусть вполне изотонное отображение $n : T \rightleftarrows X$ является дуальным к вполне изотонному отображению $m : Y \rightleftarrows Z$ относительно дуальной пары $\langle k, l \rangle$ и отображение $n^\mp : X \rightarrow T$ является инъективным. Выберем произвольное $y \in \text{Dom } m^\pm$. По определению дуального отображения выполняется неравенство

$$l^\pm \circ m^\pm(y) \leq n^\mp \circ k^\mp(y).$$

Значит, $y \in \text{Dom } k^\mp$ и $k^\mp(y) \in \text{Dom } n^\mp$. Если $x \leq k^\mp(y)$, то по определению инъективного отображения $x \in \text{Dom } n^\mp$, значит, $X(x \leq k^\mp(y)) \subseteq \text{Dom } n^\mp$. С другой стороны, если отображение $n^\mp : X \rightarrow T$ является проективным и $k^\mp(y) \leq x$, то по определению проективного отображения $x \in \text{Dom } n^\mp$, значит, $X(k^\mp(y) \leq x) \subseteq \text{Dom } n^\mp$. ▷

4.4. Дескрипторы. Пусть Λ — множество; X^Λ, Y^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ символами x^Λ и y^Λ обозначаем элементы $(x : \lambda \in \Lambda) \in X^\Lambda$ и $(y : \lambda \in \Lambda) \in Y^\Lambda$ соответственно. Сформируем из частично упорядоченных множеств $X, X^\Lambda, Y, Y^\Lambda$ простой ориентированный цикл

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Y^\Lambda \dashrightarrow X^\Lambda \dashrightarrow X.$$

Вполне изотонные отображения $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ и $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ называем *дескрипторами* (на множестве X и Y соответственно). Дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftarrows X$ называем *интериоризатором* в точке $x \in X$, если отображение $F^\pm : X^\Lambda \rightarrow X$ является инъективным, $x^\Lambda \in \text{Dom } F^\pm$ и выполняется неравенство

$$F^\pm(x^\Lambda) \leq x.$$

Дескриптор $G : Y \rightleftarrows Y^\Lambda$ называем *экстериоризатором* в точке $y \in Y$, если отображение $G^\mp : Y^\Lambda \rightarrow Y$ является проективным, $y \in \text{Dom } G^\pm$ и выполняется неравенство

$$y^\Lambda \leq G^\pm(y).$$

Из свойства 7 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 3. Если дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является интериоризатором в точке $x \in X$, то $x \in \text{Dom } F^\mp$ и

$$X (F^\pm (x^\Lambda) \leq x) = X (x^\Lambda \leq F^\mp(x)).$$

Если дескриптор $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является экстериоризатором в точке $y \in Y$, то $y^\Lambda \in \text{Dom } G^\mp$ и

$$Y (y^\Lambda \leq G^\pm(y) = Y (G^\mp (y^\Lambda) \leq y).$$

4.5. Дуальные дескрипторы. Пусть $\langle k, l \rangle$ — дуальная пара вполне изотонных отображений $k : X \rightleftharpoons Y$ и $l : X \rightleftharpoons Y$. Декартовы степени $k^\Lambda : Y^\Lambda \rightleftharpoons X^\Lambda$ и $l^\Lambda : Y^\Lambda \rightleftharpoons X^\Lambda$ отображений k и l соответственно являются вполне изотонными. Отображения $(k^\Lambda)^\pm : Y^\Lambda \rightarrow X^\Lambda$, $(k^\Lambda)^\mp : X^\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$, $(l^\Lambda)^\pm : Y^\Lambda \rightarrow X^\Lambda$ и $(l^\Lambda)^\mp : X^\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$ совпадают с декартовыми степенями отображений k^\mp , k^\pm , l^\mp и l^\pm соответственно, т. е.

$$(k^\Lambda)^\pm = (k^\mp)^\Lambda, \quad (k^\Lambda)^\mp = (k^\pm)^\Lambda, \quad (l^\Lambda)^\pm = (l^\mp)^\Lambda, \quad (l^\Lambda)^\mp = (l^\pm)^\Lambda.$$

Рассмотрим дуальные пары $\langle k, l^\Lambda \rangle$, $\langle k^\Lambda, l \rangle$ и ориентированные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightleftharpoons{G} & Y^\Lambda \\ k \updownarrow & & \updownarrow l^\Lambda \\ X & \xrightleftharpoons{F} & X^\Lambda \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{G^\pm} & Y^\Lambda \\ k^\pm \uparrow & & \uparrow (l^\Lambda)^\mp \\ X & \xrightarrow{F^\mp} & X^\Lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y^\Lambda & \xrightleftharpoons{G} & Y \\ k^\Lambda \updownarrow & & \updownarrow l \\ X^\Lambda & \xrightleftharpoons{F} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y^\Lambda & \xrightarrow{G^\mp} & Y \\ (k^\Lambda)^\mp \uparrow & & \uparrow l^\pm \\ X^\Lambda & \xrightarrow{F^\pm} & X \end{array}$$

Если дескриптор $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ относительно дуальной пары $\langle k, l^\Lambda \rangle$ и относительно дуальной пары $\langle k^\Lambda, l \rangle$, то дескриптор G называем *дуальным* к дескриптору F . Согласно этому определению дескриптор G является дуальным к дескриптору F , если для любого $x \in \text{Dom } F^\mp$ и $x_\Lambda \in \text{Dom } F^\pm$ выполняются неравенства:

$$(l^\Lambda)^\mp \circ F^\mp(x) \leq G^\pm \circ k^\pm(x), \quad l^\pm \circ F^\pm(x_\Lambda) \leq G^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda).$$

Если дескриптор $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ и отображение $G^\pm : Y \rightarrow Y^\Lambda$ является проективным, то по предложению 2 для любых $x \in \text{Dom } F^\mp$ и $x_\Lambda \in \text{Dom } F^\pm$ выполняются включения:

$$Y (k^\pm(x) \leq y) \subseteq \text{Dom } G^\pm. \tag{6}$$

Далее рассмотрим дуальные пары $\langle l, k^\Lambda \rangle$, $\langle l^\Lambda, k \rangle$ и ориентированные диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightleftharpoons{F} & X^\Lambda \\
 l \updownarrow & & \updownarrow k^\Lambda \\
 Y & \xrightleftharpoons{G} & Y^\Lambda
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F^\mp} & X^\Lambda \\
 l^\mp \uparrow & & \uparrow (k^\Lambda)^\pm \\
 Y & \xrightarrow{G^\pm} & Y^\Lambda
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X^\Lambda & \xrightleftharpoons{F} & X \\
 l^\Lambda \updownarrow & & \updownarrow k \\
 Y^\Lambda & \xrightleftharpoons{G} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X^\Lambda & \xrightarrow{F^\pm} & X \\
 (l^\Lambda)^\pm \uparrow & & \uparrow k^\mp \\
 Y^\Lambda & \xrightarrow{G^\mp} & Y
 \end{array}$$

Если дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ относительно дуальной пары $\langle l, k^\Lambda \rangle$ и относительно дуальной пары $\langle l^\Lambda, k \rangle$, то дескриптор F называем *дуальным* к дескриптору G . Согласно этому определению дескриптор F является дуальным к дескриптору G , если для любых $y \in \text{Dom } G^\pm$ и $y_\Lambda \in \text{Dom } G^\mp$ выполняются неравенства

$$(k^\Lambda)^\pm \circ G^\pm(y) \leq F^\mp \circ l^\mp(y), \quad k^\mp \circ G^\mp(y_\Lambda) \leq F^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y_\Lambda).$$

Если дескриптор F является дуальным к дескриптору G и отображение $F^\pm : X^\Lambda \rightarrow X$ является инъективным, то по предложению 2 для любого $y \in \text{Dom } G^\pm$ выполняется включение

$$X(l^\mp(y) \leq x) \subseteq \text{Dom } F^\mp. \quad (7)$$

Предложение 4. Если проективный дескриптор $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ и дескриптор F является интериоризатором в точке $x \in \text{Dom}\{k^\pm, l^\mp\}$, то дуальный дескриптор G является экстериоризатором в любой точке $y \in Y$, удовлетворяющей неравенствам $k^\pm(x) \leq y \leq l^\pm(x)$.

Если инъективный дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ и дескриптор G является экстериоризатором в точке $y \in \text{Dom}\{k^\mp, l^\pm\}$, то дуальный дескриптор F является интериоризатором в любой точке $x \in X$, удовлетворяющей неравенствам $l^\mp(y) \leq x \leq k^\mp(y)$.

◁ Во-первых, пусть дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является интериоризатором в точке $x \in \text{Dom}\{k^\pm, l^\mp\}$. Тогда $x^\Lambda \in \text{Dom } F^\pm$ и $F^\pm(x^\Lambda) \leq x$. По предложению 3 $x \in \text{Dom } F^\mp$ и

$$x^\Lambda \leq F^\mp(x).$$

Предположим, что дескриптор G является дуальным к дескриптору F , отображение $G^\mp : Y^\Lambda \rightarrow Y$ является проективным и точка $y \in Y$ удовлетворяет неравенствам $k^\pm(x) \leq y \leq l^\pm(x)$. Отметим, что из неравенства $y \leq l^\mp(x)$ вытекает неравенство

$$y^\Lambda \leq (l^\pm)^\Lambda(x^\Lambda) = (l^\Lambda)^\mp(x^\Lambda),$$

а в силу (6) из неравенства $k^\pm(x) \leq y$ вытекает включение $y \in \text{Dom } G^\pm$. При этом по определению дуального отображения для любого $x \in \text{Dom } F^\mp$ выполняется неравенство

$$(l^\Lambda)^\mp \circ F^\mp(x) \leq G^\pm \circ k^\pm(x).$$

Следовательно,

$$y^\Lambda \leq (l^\Lambda)^\mp(x^\Lambda) \leq (l^\Lambda)^\mp \circ F^\mp(x) \leq G^\pm \circ k^\pm(x) \leq G^\pm(y),$$

т. е. $y^\Lambda \leq G^\pm(y)$. Это означает, что дескриптор G является экстериоризатором в точке y .

Во-вторых, пусть дескриптор $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является экстериоризатором в точке $y \in \text{Dom}\{k^\mp, l^\pm\}$. Тогда $y \in \text{Dom } G^\pm$ и выполняется неравенство

$$y^\Lambda \leq G^\pm(y).$$

Предположим, что дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является дуальным к дескриптору G , отображение $F^\pm : X^\Lambda \rightarrow X$ является инъективным и точка $x \in X$ удовлетворяет неравенствам $l^\mp(y) \leq x \leq k^\mp(y)$. Отметим, что из неравенства $x \leq k^\mp(y)$ вытекает неравенство

$$x^\Lambda \leq (k^\mp)^\Lambda(y^\Lambda) = (k^\Lambda)^\pm(y^\Lambda),$$

а в силу (7) из неравенства $l^\mp(y) \leq x$ вытекает включение $x \in \text{Dom } F^\mp$. При этом по определению дуального отображения для любого $x \subseteq \text{Dom } G^\pm$ выполняется неравенство

$$(k^\Lambda)^\pm \circ G^\pm(y) \leq F^\mp \circ l^\mp(y).$$

Следовательно,

$$x^\Lambda \leq (k^\Lambda)^\pm(y^\Lambda) \leq (k^\Lambda)^\pm \circ G^\pm(x^\Lambda) \leq F^\mp \circ l^\mp(y) \leq F^\mp(x),$$

т. е. $x^\Lambda \leq F^\mp(x)$. По предположению $1 \ x^\Lambda \in \text{Dom } F^\pm$ и $F^\pm(x^\Lambda) \leq x$. Это означает, что дескриптор F является интериоризатором в точке x . \triangleright

5. Односторонняя схема двойственности

5.1. Инъективное и проективное описания. Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольные семейства частично упорядоченных множеств, X_Λ и Y_Λ — декартовы произведения этих семейств соответственно. Из множеств $X, X_\lambda, Y, Y_\lambda$ и $X^\Lambda, X_\Lambda, Y^\Lambda, Y_\Lambda$ сформируем простые ориентированные циклы:

$$X \dashrightarrow Y \dashrightarrow Y_\lambda \dashrightarrow X_\lambda \dashrightarrow X,$$

$$X_\Lambda \dashrightarrow Y_\Lambda \dashrightarrow Y^\Lambda \dashrightarrow X^\Lambda \dashrightarrow X_\Lambda.$$

Выберем произвольное семейство $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ вполне изотонных отображений $m_\lambda : X_\lambda \rightleftharpoons X$. Считаем, что для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $m_\lambda^\pm : X_\lambda \rightarrow X$ является проективными. Значит, для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $m_\lambda^\mp : X \rightarrow X_\lambda$ является инъективным. Символом $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftharpoons X_\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение $m_\Lambda^\pm := (m_\Lambda)^\pm : X^\Lambda \rightarrow X_\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{m_\lambda^\pm : \lambda \in \Lambda\}$ и является проективным, а отображение $m_\Lambda^\mp := (m_\Lambda)^\mp : X_\Lambda \rightarrow X^\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{m_\lambda^\mp : \lambda \in \Lambda\}$ и является инъективным. Если $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ — какой-либо интериоризатор в точке $x \in X$, то равенство

$$x = F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \tag{8}$$

называем *правилом инъективного описания*. Если оно выполнено для какого-либо элемента $x \in X$, то говорим, что элемент x допускает (инъективное) описание по правилу (8). По определению интериоризатора отображение $F^\pm : X_\Lambda \rightarrow X$ является инъективным. Значит, если элемент $x \in X$ допускает описание по правилу (8), то он восстанавливается по множеству $\{m_\lambda^\mp \circ m_\lambda^\pm(x) \in X : \lambda \in \Lambda\}$ с помощью инъективного отображения F^\pm .

Выберем другое семейство $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ вполне изотонных отображений $n_\lambda : Y \rightleftharpoons Y_\lambda$. Считаем, что для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $n_\lambda^\pm : Y \rightarrow Y_\lambda$ является инъективными. Значит, для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $n_\lambda^\mp : Y_\lambda \rightarrow Y$ является проективным. Символом $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftharpoons Y^\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение $n_\Lambda^\pm := (n_\Lambda)^\pm : Y_\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{n_\lambda^\pm : \lambda \in \Lambda\}$ и является инъективным, а отображение $n_\Lambda^\mp := (n_\Lambda)^\mp : Y^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ совпадает с декартовым произведением семейства $\{n_\lambda^\mp : \lambda \in \Lambda\}$ и является проективным. Если $G : Y \rightarrow Y^\Lambda$ — какой-либо экстериоризатор в точке $y \in Y$, то равенство

$$y = G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \quad (9)$$

называем *правилом проективного описания*. Если оно выполнено для какого-либо элемента $y \in Y$, то говорим, что элемент y допускает (проективное) описание по правилу (9). По определению экстериоризатора отображение $G^\mp : Y_\Lambda \rightarrow Y$ является проективным. Значит, если элемент $y \in Y$ допускает описание по правилу (9), то он восстанавливается по множеству $\{n_\lambda^\pm \circ n_\lambda^\mp(y) \in Y : \lambda \in \Lambda\}$ с помощью проективного отображения G^\mp .

Предложение 5. Если вполне изотонное отображение $m_\Lambda^\pm : X^\Lambda \rightarrow X_\Lambda$ является проективным, то для любого $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\pm$ выполняется неравенство

$$m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x_\Lambda) \leq x_\Lambda.$$

Если вполне изотонное отображение $n_\Lambda^\pm : Y_\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$ является инъективным, то для любого $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\mp$ выполняется неравенство

$$n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y_\Lambda) \leq y_\Lambda.$$

◁ Во-первых, предположим, что вполне изотонное отображение $m_\Lambda^\pm : X^\Lambda \rightarrow X_\Lambda$ является проективным. Условно обратное к отображению $m_\Lambda^\pm : X^\Lambda \rightarrow X_\Lambda$ совпадает с отображением $(m_\Lambda^\pm)^- = m_\Lambda^\mp : X_\Lambda \rightarrow X^\Lambda$ и является инъективным. В свою очередь, условно обратное к отображению $m_\Lambda^\mp : X_\Lambda \rightarrow X^\Lambda$ совпадает с отображением $m_\Lambda^\pm : X^\Lambda \rightarrow X_\Lambda$. Значит, по свойству 1 вполне изотонных отображений для любого $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\pm$ выполняется неравенство $m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x_\Lambda) = m_\Lambda^\mp \circ (m_\Lambda^\mp)^-(x_\Lambda) \leq x_\Lambda$.

Во-вторых, предположим, что вполне изотонное отображение $n_\Lambda^\pm : Y_\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$ является инъективным. Условно обратное к отображению $n_\Lambda^\pm : Y_\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$ совпадает с отображением $(n_\Lambda^\pm)^- = n_\Lambda^\mp : Y^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ и является проективным. В свою очередь, условно обратное к отображению $n_\Lambda^\mp : Y^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ совпадает с отображением $n_\Lambda^\pm : Y_\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$. Значит, по свойству 2 вполне изотонных отображений для любого $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\mp$ выполняется неравенство $n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y_\Lambda) = (n_\Lambda^\mp)^- \circ n_\Lambda^\mp(y_\Lambda) \leq y_\Lambda$. ▷

5.2. Дуальные описания. Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство вполне изотонных отображений $h_\lambda : Y_\lambda \rightleftharpoons X_\lambda$, $h_\Lambda : X_\Lambda \rightleftharpoons Y_\Lambda$ — декартово произведение этого семейства. Рассмотрим дуальную пару $\langle h_\Lambda, k^\Lambda \rangle$, ее зеркальную дуальную пару $\langle k^\Lambda, h_\Lambda \rangle$

и систему из четырех ориентированных диаграмм

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{ccc}
 Y_\Lambda & \xrightleftharpoons{n_\Lambda} & Y^\Lambda \\
 h_\Lambda \updownarrow & & \updownarrow k^\Lambda \\
 X_\Lambda & \xrightleftharpoons{m_\Lambda} & X^\Lambda
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 Y_\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda^\pm} & Y^\Lambda \\
 h_\Lambda^\pm \updownarrow & & \updownarrow (k^\Lambda)^\mp \\
 X_\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda^\mp} & X^\Lambda
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 Y^\Lambda & \xrightleftharpoons{n^\Lambda} & Y_\Lambda \\
 k^\Lambda \updownarrow & & \updownarrow h_\Lambda \\
 X^\Lambda & \xrightleftharpoons{m_\Lambda} & X_\Lambda
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 Y^\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda^\mp} & Y_\Lambda \\
 (k^\Lambda)^\mp \updownarrow & & \updownarrow h_\Lambda^\pm \\
 X^\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda^\pm} & X_\Lambda
 \end{array}
 \end{array}$$

Если вполне изотонное отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ относительно дуальной пары $\langle h_\Lambda, k^\Lambda \rangle$ и относительно зеркальной дуальной пары $\langle k^\Lambda, h_\Lambda \rangle$, то отображение n_Λ называем *дуальным* к отображению m_Λ . Отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ , если для любых $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\mp \subseteq X_\Lambda$ и $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\pm \subseteq X^\Lambda$ соответственно выполняются неравенства:

$$(k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp(x_\Lambda) \leq n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm(x_\Lambda), \quad h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x_\Lambda) \leq n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda). \quad (10)$$

Далее рассмотрим систему из четырех ориентированных диаграмм

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{ccc}
 X_\Lambda & \xrightleftharpoons{m_\Lambda} & X^\Lambda \\
 h_\Lambda \updownarrow & & \updownarrow l^\Lambda \\
 Y_\Lambda & \xrightleftharpoons{n_\Lambda} & Y^\Lambda
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 X_\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda^\mp} & X^\Lambda \\
 h_\Lambda^\mp \updownarrow & & \updownarrow (l^\Lambda)^\pm \\
 Y_\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda^\pm} & Y^\Lambda
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 X^\Lambda & \xrightleftharpoons{m_\Lambda} & X_\Lambda \\
 l^\Lambda \updownarrow & & \updownarrow h_\Lambda \\
 Y^\Lambda & \xrightleftharpoons{n_\Lambda} & Y_\Lambda
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 X^\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda^\pm} & X_\Lambda \\
 (l^\Lambda)^\pm \updownarrow & & \updownarrow h_\Lambda^\mp \\
 Y^\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda^\mp} & Y_\Lambda
 \end{array}
 \end{array}$$

полученных с помощью горизонтальной симметрии и замены отображения k^Λ отображением l^Λ . Если вполне изотонное отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ относительно дуальной пары $\langle h_\Lambda, l^\Lambda \rangle$ и относительно зеркальной дуальной пара $\langle l^\Lambda, h_\Lambda \rangle$, то отображение m_Λ называем *дуальным* к отображению n_Λ . Отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ , если для любых $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\mp \subseteq Y^\Lambda$ и $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\pm \subseteq Y_\Lambda$ соответственно выполняются неравенства

$$h_\Lambda^\mp \circ n_\Lambda^\mp(y_\Lambda) \leq m_\Lambda^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y_\Lambda), \quad (l^\Lambda)^\pm \circ n_\Lambda^\pm(y_\Lambda) \leq m_\Lambda^\mp \circ h_\Lambda^\mp(y_\Lambda). \quad (11)$$

Если дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является дуальным к дескриптору $G : X \rightleftharpoons X^\Lambda$ и отображение $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftharpoons X_\Lambda$ является дуальным к отображению $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftharpoons Y^\Lambda$, то правило описания (8) называем *дуальным* к правилу (9). С другой стороны, если дескриптор $G : X \rightleftharpoons X^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ и отображение $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является дуальным к отображению $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftharpoons X_\Lambda$, то правило описания (9) называем *дуальным* к правилу (8).

5.3. Односторонняя схема двойственности. Рассмотрим ориентированные диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightleftharpoons{G} & Y^\Lambda \\
 \downarrow k & & \downarrow l^\Lambda \\
 X & \xrightleftharpoons{F} & X^\Lambda \\
 \uparrow l & & \uparrow k^\Lambda
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y_\Lambda & \xrightleftharpoons{n_\Lambda} & Y^\Lambda \\
 \downarrow h_\Lambda & & \downarrow k^\Lambda \\
 X_\Lambda & \xrightleftharpoons{m_\Lambda} & X^\Lambda \\
 \uparrow h_\Lambda & & \uparrow l^\Lambda
 \end{array}$$

где F, G — дескрипторы; $m_\Lambda, n_\Lambda, h_\Lambda$ — декартовы произведения семейств вполне изотонных отображений; k^Λ — декартова степень вполне изотонного отображения k ; l^Λ — декартова степень вполне изотонного отображения l . Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (односторонняя схема двойственности). *Если элемент $x \in \text{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$ допускает инъективное описание по правилу (8), то любой элемент $y \in Y$, удовлетворяющий неравенствам $k^\pm(x) \leq y \leq l^\pm(x)$, допускает проективное описание по дуальному правилу (9).*

Если элемент $y \in \text{Dom}\{k^\mp, l^\mp\}$ допускает проективное описание по правилу (9), то любой элемент $x \in X$, удовлетворяющий неравенствам $l^\mp(y) \leq x \leq k^\mp(y)$, допускает инъективное описание по дуальному правилу (8).

◁ Во-первых, пусть дескриптор $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является дуальным по отношению к дескриптору $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ и элемент $x \in \text{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$ допускает инъективное описание по правилу (8). Тогда дескриптор F является интериоризатором в точке x и

$$x = F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda). \quad (12)$$

Предположим, что вполне изотонное отображение $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftharpoons Y^\Lambda$ является дуальным к вполне изотонному отображению $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftharpoons X_\Lambda$. Тогда в силу (10) для любого $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\pm$ выполняется неравенство $h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x_\Lambda) \leq n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda)$. В силу (12) $x^\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\pm$, значит,

$$h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \leq n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x^\Lambda). \quad (13)$$

Кроме того, в силу (10) для любых $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^\mp$ выполняется неравенство $(k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp(x_\Lambda) \leq n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm(x_\Lambda)$. При этом в силу (1) выполняются включения $m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \in \text{Im } m_\Lambda^\pm \subseteq \text{Dom } m_\Lambda^\mp$, значит,

$$(k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \leq n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda). \quad (14)$$

По предложению 4 дескриптор G является экстериоризатором в любой точке $y \in \text{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$, удовлетворяющей неравенствам $k^\pm(x) \leq y \leq l^\pm(x)$. Выберем произвольный элемент $y \in \text{Dom}\{k^\pm, l^\pm\}$, удовлетворяющий этим неравенствам и отметим, что из неравенства $k^\pm(x) \leq y$ вытекает неравенство $(k^\Lambda)^\mp(x^\Lambda) \leq y^\Lambda$. По определению дуального отображения для любого $x_\Lambda \in \text{Dom } F^\pm$ выполняется неравенство $l^\pm \circ F^\pm(x_\Lambda) \leq G^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x_\Lambda)$. Из равенства (12) следует, что $m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \in \text{Dom } F^\pm$, значит, в силу (12), (14) и (13) имеем

$$\begin{aligned}
 y &\leq l^\pm(x) = l^\pm \circ F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \\
 &\leq G^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \leq G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ h_\Lambda^\pm \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \\
 &\leq G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp \circ (k^\Lambda)^\mp(x^\Lambda) \leq G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda),
 \end{aligned}$$

т. е. $y \leq G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda)$. Но по предложению 4 дескриптор G является экстериоризатором в точке y , значит, по определению экстериоризатора и по предложению 5 выполняются неравенства $G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \leq G^\pm(y^\Lambda) \leq y$. Следовательно, $G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) = y$, т. е. элемент y допускает проективное описание по дуальному правилу (9).

Во-вторых, пусть дескриптор $F : X^\Lambda \rightleftharpoons X$ является дуальным по отношению к дескриптору $G : Y \rightleftharpoons Y^\Lambda$ и элемент $y \in \text{Dom}\{k^\mp, l^\mp\}$ допускает проективное описание по правилу (9). Тогда дескриптор G является экстериоризатором в точке y и

$$y = G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda). \quad (15)$$

Предположим, что вполне изотонное отображение $m_\Lambda : X^\Lambda \rightleftharpoons X_\Lambda$ является дуальным к вполне изотонному отображению $n_\Lambda : Y_\Lambda \rightleftharpoons Y^\Lambda$. Тогда в силу (11) для любого $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\pm$ выполняется неравенство $h_\Lambda^\mp \circ n_\Lambda^\mp(y_\Lambda) \leq m_\Lambda^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y_\Lambda)$. В силу (15) $y^\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\mp$, значит,

$$h_\Lambda^\mp \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \leq m_\Lambda^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y^\Lambda). \quad (16)$$

Кроме того, в силу (11) для любых $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^\pm$ выполняется неравенство $(l^\Lambda)^\pm \circ n_\Lambda^\pm(y_\Lambda) \leq m_\Lambda^\mp \circ h_\Lambda^\mp(y_\Lambda)$. При этом в силу (1) выполняются включения $n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \in \text{Im } n_\Lambda^\mp \subseteq \text{Dom } n_\Lambda^\pm$, значит,

$$(l^\Lambda)^\pm \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \leq m_\Lambda^\mp \circ h_\Lambda^\mp \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda). \quad (17)$$

По предложению 4 дескриптор F является интериоризатором в любой точке $x \in \text{Dom}\{k^\mp, l^\mp\}$, удовлетворяющей неравенствам $l^\mp(y) \leq x \leq k^\mp(y)$. Выберем произвольный элемент $x \in \text{Dom}\{k^\mp, l^\mp\}$, удовлетворяющий этим неравенствам и отметим, что из неравенства $l^\mp(y) \leq x$ вытекает неравенство $(l^\Lambda)^\pm(y^\Lambda) \leq x^\Lambda$. По определению дуального отображения для любого $y_\Lambda \in \text{Dom } G^\mp$ выполняется неравенство $k^\mp \circ G^\mp(y_\Lambda) \leq F^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y_\Lambda)$. Из равенства (15) следует, что $n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \in \text{Dom } G^\mp$, значит, в силу (15), (17) и (16) имеем

$$\begin{aligned} x &\leq k^\mp(y) = k^\mp \circ G^\mp \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \\ &\leq F^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm \circ n_\Lambda^\pm \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \leq F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ h_\Lambda^\mp \circ n_\Lambda^\mp(y^\Lambda) \\ &\leq F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm \circ (l^\Lambda)^\pm(y^\Lambda) \leq F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda), \end{aligned}$$

т. е. $x \leq F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda)$. Но по предложению 4 дескриптор F является интериоризатором в точке x , значит, по определению интериоризатора и по предложению 5 выполняются неравенства $F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) \leq F^\pm(x^\Lambda) \leq x$. Следовательно, $F^\pm \circ m_\Lambda^\mp \circ m_\Lambda^\pm(x^\Lambda) = x$, т. е. элемент x допускает инъективное описание по дуальному правилу (8). \triangleright

6. Двусторонняя схема двойственности

В исследовательской практике, как правило, двойственные переходы осуществляются по упрощенной схеме. Будем называть ее *двусторонней схемой двойственности*. Упрощение достигается путем отождествления вполне изотонных отображений $k : X \rightleftharpoons Y$ и $l : X \rightleftharpoons Y$. При переходе к упрощенной схеме число рассматриваемых параллельно ситуаций резко сокращается и введенное нами обозначение $k : X \rightleftharpoons Y$ теряет актуальность. В этих ситуациях вполне достаточно стандартное обозначение $k : X \rightarrow Y$. При этом частично упорядоченные множества X и Y выбираются произвольно, значит, можно считать, что вполне изотонное отображение $k : X \rightarrow Y$ является инъективным. В противном случае можно пару (X, Y) заменить парой (Y, X) , а отображение $k : X \rightarrow Y$ заменить условно обратным отображением $k^- : Y \rightarrow X$. Таким образом, двусторонняя

схема двойственности предполагает лишь две зеркальные ситуации, которые легко сводятся одна к другой. Это позволяет исследовать лишь одну из этих ситуаций.

6.1. Принцип двойственности. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества, $k : X \rightarrow Y$ — инъективное отображение, $k^- : Y \rightarrow X$ — условно обратное отображение. По свойству 6 отображение k^- является проективным. Символом X_0 обозначим полный образ $\text{Im } k^-$, а символом Y_0 обозначим полный образ $\text{Im } k$.

Предложение 6 (принцип двойственности). *Между элементами $x \in X_0$ и $y \in Y_0$ можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу:*

$$y = k(x), \quad x = k^-(y).$$

◁ Во-первых, убедимся, что образ $k(X_0)$ совпадает с Y_0 . Действительно, $k(X_0) \subseteq k(X) = \text{Im } k =: Y_0$. С другой стороны, если $y \in Y_0$, то по свойству 4 $y = k \circ k^-(y) = k(x)$, где $x := k^-(y) \in X_0$, значит, $y \in k(X_0)$, т. е. $Y_0 \subseteq k(X_0)$. Следовательно, $k(X_0) = Y_0$. Во-вторых, убедимся, что образ $k^-(Y_0)$ совпадает с X_0 . Действительно, $k^-(Y_0) \subseteq k^-(Y) = \text{Im } k^- =: X_0$. С другой стороны, если $x \in X_0$, то по свойству 4 $x = k^- \circ k(x) = k^-(y)$, где $y := k(x) \in Y_0$, значит, $x \in k^-(Y_0)$, т. е. $X_0 \subseteq k^-(Y_0)$. Следовательно, $k^-(Y_0) = X_0$. Таким образом, из свойства 4 вытекает, что сужение отображения k^- на образ Y_0 и сужение отображения k на образ X_0 являются взаимно обратными отображениями. ▷

Символом k_0 обозначим отображение $X_0 \mapsto Y_0 \mid x \mapsto k(x)$, а символом k_0^- обозначим отображение $Y_0 \mapsto X_0 \mid y \mapsto k^-(y)$. Из доказанного принципа двойственности следует, что отображение k_0 является порядковым изоморфизмом X_0 на Y_0 , а отображение k_0^- совпадает с обратным отображением и является порядковым изоморфизмом Y_0 на X_0 . Отображения k_0 и k_0^- являются инъективными и проективными одновременно, и условно обратное отображение $(k_0)^-$ совпадает с отображением k_0^- , а условно обратное отображение $(k_0^-)^-$ совпадает с отображением k_0 .

6.2. Дуальные дескрипторы. Пусть Λ — множество и $0 \notin \Lambda$; X^Λ, Y^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X и Y соответственно; $k^\Lambda : X^\Lambda \rightarrow Y^\Lambda$ — декартова степень отображения $k : X \rightarrow Y$. Отображение k^Λ является проективным. Его условно обратное отображение $(k^\Lambda)^- : Y^\Lambda \rightarrow X^\Lambda$ совпадает с декартовой степенью условно обратного отображения $k^- : Y \rightarrow X$ и является инъективным. Рассмотрим диаграммы, в ориентировании которых нет необходимости

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{G} & Y^\Lambda \\ k \uparrow & & \uparrow k^\Lambda \\ X & \xrightarrow{F^-} & X^\Lambda \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y^\Lambda & \xrightarrow{G^-} & Y \\ k^\Lambda \uparrow & & \uparrow k \\ X^\Lambda & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F^-} & X^\Lambda \\ k^- \uparrow & & \uparrow (k^\Lambda)^- \\ Y & \xrightarrow{G} & Y^\Lambda \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X^\Lambda & \xrightarrow{F} & X \\ (k^\Lambda)^- \uparrow & & \uparrow k^- \\ Y^\Lambda & \xrightarrow{G^-} & Y \end{array}$$

Дескриптор $G : Y \rightarrow Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightarrow X$, если согласно определению для любого $x \in \text{Dom } F^-$ и $x_\Lambda \in \text{Dom } F$ соответственно выполняются неравенства:

$$k^\Lambda \circ F^-(x) \leq G \circ k(x), \quad k \circ F(x_\Lambda) \leq G^- \circ k^\Lambda(x_\Lambda).$$

Дескриптор $F : X^\Lambda \rightarrow X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \rightarrow Y^\Lambda$, если для любых $y \in \text{Dom } G$ и $y_\Lambda \in \text{Dom } G^-$ соответственно выполняются неравенства:

$$(k^\Lambda)^- \circ G(y) \leq F^- \circ k^-(y), \quad k^- \circ G^-(y_\Lambda) \leq F \circ (k^\Lambda)^-(y_\Lambda).$$

Из предложения 4 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 7. Если проективный дескриптор $G : Y \rightarrow Y^\Lambda$ является дуальным к дескриптору $F : X^\Lambda \rightarrow X$ и дескриптор F является интериоризатором в точке $x \in X_0$, то дуальный дескриптор G является экстериоризатором в точке $y = k(x) \in Y_0$.

Если инъективный дескриптор $F : X^\Lambda \rightarrow X$ является дуальным к дескриптору $G : Y \rightarrow Y^\Lambda$ и дескриптор G является экстериоризатором в точке $y \in Y_0$, то дуальный дескриптор F является интериоризатором в точке $x = k^-(y) \in X_0$.

6.3. Взаимно дуальные дескрипторы. Пусть X_0^Λ, Y_0^Λ — декартовы степени частично упорядоченных множеств X_0 и Y_0 соответственно; $k_0^\Lambda : X_0^\Lambda \rightarrow Y_0^\Lambda$ — декартова степень отображения $k_0 : X_0 \rightarrow Y_0$. Отображение k_0^Λ является порядковым изоморфизмом X_0^Λ на Y_0^Λ и является инъективным отображением и проективным отображением одновременно. Его условно обратное отображение $(k_0^\Lambda)^- : Y_0^\Lambda \rightarrow X_0^\Lambda$ совпадает с обратным отображением и является порядковым изоморфизмом Y_0^Λ на X_0^Λ . Рассмотрим диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{G_0} & Y_0^\Lambda \\ k_0^- \downarrow & & \uparrow k_0^\Lambda \\ X_0 & \xrightarrow{F_0^-} & X_0^\Lambda \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_0 & \xleftarrow{F_0} & X_0^\Lambda \\ k_0^- \uparrow & & \downarrow k_0^\Lambda \\ Y_0 & \xleftarrow{G_0^-} & Y_0^\Lambda \end{array}$$

где $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ — инъективный дескриптор, $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ — проективный дескриптор. Дескрипторы F_0 и G_0 называем *взаимно дуальными*, если

$$G_0 = k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-, \quad F_0 = k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda.$$

Предложение 8. Если дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными, то дескриптор F_0 является дуальным к дескриптору G_0 , а дескриптор G_0 является дуальным к дескриптору F_0 .

◁ Предположим, что дескрипторы $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ и $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ являются взаимно дуальными. Отображения $k_0^-, G_0^-, k_0^\Lambda$ являются инъективными, значит, по свойству 10 вполне изотонных отображений условно обратное отображение F_0^- представляется в виде композиции $(k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0$. Отображения $k_0^\Lambda, F_0^-, k_0^-$ являются проективными, значит, по свойству 10 условно обратное отображение G_0^- представляется в виде композиции $k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-$. При этом для любого $x \in \text{Dom } F_0^-$ имеем

$$k_0^\Lambda \circ F_0^-(x) = k_0^\Lambda \circ (k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0(x) = G_0 \circ k_0(x),$$

а для любого $x_\Lambda \in \text{Dom } F_0$ имеем

$$k_0 \circ F_0(x_\Lambda) = k_0 \circ k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda) = G_0^- \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda).$$

Значит, дескриптор F_0 является дуальным к дескриптору G_0 . С другой стороны, для любого $y \in \text{Dom } G_0$ имеем

$$(k_0^\Lambda)^- \circ G_0(y) = (k_0^\Lambda)^- \circ k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-(y) = F_0^- \circ k_0^-(y),$$

а для любого $y_\Lambda \in \text{Dom } G_0^-$ имеем

$$k_0^- \circ G_0^-(y_\Lambda) = k_0^- \circ k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda) = F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda).$$

Значит, дескриптор G_0 является дуальным к дескриптору F_0 . \triangleright

Существует простой способ построения пар (F_0, G_0) взаимно дуальных дескрипторов. Он описан в следующем предложении.

Предложение 9. *Если дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ является инъективным и дескриптор $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ совпадает с композицией $k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-$, то дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными.*

Если дескриптор $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ является проективным и дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ совпадает с композицией $k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda$, то дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными.

\triangleleft Во-первых, предположим, что дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ является инъективным и дескриптор $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ совпадает с композицией $k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^-$. По свойству 10 дескриптор G_0 является проективным и его условно обратное отображение G_0^- представляется в виде композиции $k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^-$. Значит,

$$k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda = k_0^- \circ k_0 \circ F_0 \circ (k_0^\Lambda)^- \circ k_0^\Lambda = F_0,$$

а это означает, что дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными. Во-вторых, предположим, что дескриптор $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ является проективным и дескриптор $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ совпадает с композицией $k_0^- \circ G_0^- \circ k_0^\Lambda$. По свойству 10 дескриптор F_0 является инъективным и его условно обратное отображение F_0^- представляется в виде композиции $(k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0$. Значит,

$$k_0^\Lambda \circ F_0^- \circ k_0^- = k_0^\Lambda \circ (k_0^\Lambda)^- \circ G_0 \circ k_0 \circ k_0^- = G_0,$$

а это означает, что дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными. \triangleright

Из предложений 7 и 8 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 10. *Если дескрипторы F_0 и G_0 являются взаимно дуальными, то дескриптор F_0 является интериоризатором в точке $x \in X_0$ тогда и только тогда, когда дескриптор G_0 является экстериоризатором в точке $y = k(x) \in Y_0$.*

6.4. Взаимно дуальные описания. Выберем произвольное семейство $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ проективных отображений $m_\lambda : X_\lambda \rightarrow X_0$. Символом $m_\Lambda : X_\Lambda \rightarrow X_0^\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение m_Λ является инъективным. Если $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ — какой-либо интериоризатор в точке $x \in X_0$, то правило инъективного описания имеет следующий вид:

$$x = F_0 \circ m_\Lambda \circ m_\Lambda^-(x^\Lambda). \quad (18)$$

Выберем семейство $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ инъективных отображений $n_\lambda : Y_0 \rightarrow Y_\lambda$. Символом $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ обозначим декартово произведение семейства $\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Отображение n_Λ является проективным. Если $G_0 : Y_0 \rightarrow Y_0^\Lambda$ — какой-либо экстериоризатор в точке $y \in Y_0$, то правило проективного описания имеет следующий вид:

$$y = G_0^- \circ n_\Lambda^- \circ n_\Lambda(y^\Lambda). \quad (19)$$

Пусть $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство порядковых изоморфизмов $h_\lambda : Y_\lambda \rightarrow X_\lambda$, $h_\Lambda : Y_\Lambda \rightarrow X_\Lambda$ — декартово произведение этого семейства. Отображение h_Λ является порядковым изоморфизмом, значит, оно является инъективным отображением и проективным отображением одновременно. Рассмотрим систему из двух диаграмм:

$$\begin{array}{ccc}
 Y_\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda^-} & Y_0^\Lambda \\
 h_\Lambda^- \uparrow & & \uparrow k_0^\Lambda \\
 X_\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda} & X_0^\Lambda \\
 \\
 X_0^\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda^-} & X_\Lambda \\
 (k_0^\Lambda)^- \uparrow & & \uparrow h_\Lambda \\
 Y_0^\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda} & Y_\Lambda
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y_0^\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda} & Y_\Lambda \\
 k_0^\Lambda \uparrow & & \uparrow h_\Lambda^- \\
 X_0^\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda^-} & X_\Lambda \\
 \\
 X_\Lambda & \xrightarrow{m_\Lambda} & X_0^\Lambda \\
 h_\Lambda \uparrow & & \uparrow (k_0^\Lambda)^- \\
 Y_\Lambda & \xrightarrow{n_\Lambda} & Y_0^\Lambda
 \end{array}$$

Согласно определению отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ , если для любых $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda \subseteq X_\Lambda$ и $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^- \subseteq X_0^\Lambda$ соответственно выполняются неравенства

$$k_0^\Lambda \circ m_\Lambda(x_\Lambda) \leq n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(x_\Lambda), \quad h_\Lambda^- \circ m_\Lambda^-(x_\Lambda) \leq n_\Lambda \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda).$$

Отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ , если для любых $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda \subseteq Y_0^\Lambda$ и $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^- \subseteq Y_\Lambda$ соответственно выполняются неравенства

$$h_\Lambda \circ n_\Lambda(y_\Lambda) \leq m_\Lambda^- \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda), \quad (k_0^\Lambda)^- \circ n_\Lambda^-(y_\Lambda) \leq m_\Lambda \circ h_\Lambda(y_\Lambda).$$

Говорим, что вполне изотонные отображения n_Λ и m_Λ являются *взаимно дуальными*, если

$$n_\Lambda = h_\Lambda^- \circ m_\Lambda^- \circ (k_0^\Lambda)^-, \quad m_\Lambda = (k_0^\Lambda)^- \circ n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-.$$

Если дескрипторы $F_0 : X_0^\Lambda \rightarrow X_0$ и $G_0 : X_0 \rightarrow X_0^\Lambda$ являются взаимно дуальными и вполне изотонные отображения $m_\Lambda : X_\Lambda \rightarrow X_0^\Lambda$ и $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ являются взаимно дуальными, то правила описания (18) и (19) называем *взаимно дуальными*.

Предложение 11. *Если вполне изотонные отображения $m_\Lambda : X_\Lambda \rightarrow X_0^\Lambda$ и $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ являются взаимно дуальными, то отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ и отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ .*

◁ Предположим, что вполне изотонные отображения $m_\Lambda : X_\Lambda \rightarrow X_0^\Lambda$ и $n_\Lambda : Y_0^\Lambda \rightarrow Y_\Lambda$ являются взаимно дуальными. По свойству 11 вполне изотонных отображений условно обратные отображения представляются в виде следующих композиций:

$$n_\Lambda^- = k_0^\Lambda \circ m_\Lambda \circ h_\Lambda, \quad m_\Lambda^- = h_\Lambda \circ n_\Lambda \circ k_0^\Lambda.$$

Значит, для любого $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda$ и $x_\Lambda \in \text{Dom } m_\Lambda^-$ соответственно выполняются равенства

$$\begin{aligned}
 k_0^\Lambda \circ m_\Lambda(x_\Lambda) &= k_0^\Lambda \circ (k_0^\Lambda)^- \circ n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(x_\Lambda) = n_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(x_\Lambda), \\
 h_\Lambda^- \circ m_\Lambda^-(x_\Lambda) &= h_\Lambda^- \circ h_\Lambda \circ n_\Lambda \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda) = n_\Lambda \circ k_0^\Lambda(x_\Lambda).
 \end{aligned}$$

Следовательно, отображение n_Λ является дуальным к отображению m_Λ . С другой стороны, для любых $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda \subseteq Y_0^\Lambda$ и $y_\Lambda \in \text{Dom } n_\Lambda^- \subseteq Y_\Lambda$ соответственно выполняются равенства

$$h_\Lambda^- \circ n_\Lambda^-(y_\Lambda) = h_\Lambda^- \circ k_0^\Lambda \circ m_\Lambda \circ h_\Lambda^-(y_\Lambda) = m_\Lambda \circ k_0^\Lambda(y_\Lambda),$$

$$k^\Lambda \circ n_\Lambda(y_\Lambda) = k^\Lambda \circ h_\Lambda \circ m_\Lambda^- \circ (k_0^\Lambda)^-(y_\Lambda) = m_\Lambda^- \circ h_\Lambda^-(y_\Lambda).$$

Значит, отображение m_Λ является дуальным к отображению n_Λ . \triangleright

Из предложения 11 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 12. *Если правила описания (18) и (19) являются взаимно дуальными, то правило (18) является дуальным к правилу (19), а правило (19) является дуальным к правилу (18).*

6.5. Двусторонняя схема двойственности. Из предложений 10, 12 и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2 (двусторонняя схема двойственности). *Если правила описания (18) и (19) являются взаимно дуальными, то элемент $x \in X_0$ допускает инъективное описание по правилу (18) тогда и только тогда, когда элемент $y = k(x) \in Y_0$ допускает проективное описание по правилу (19).*

Теорема 2 (двусторонняя схема двойственности) обобщает «схему двойственности» из статьи [1] и теорему 1 из статьи [4]. Аналогичные теоремы есть и в статье [2] и в монографии [3] (многомерная ситуация). Эти теоремы являются основой для решения задач спектрального синтеза в комплексной плоскости. Они позволяют свести задачу спектрального синтеза к двойственной задаче локального описания. Теорема 2 придает теоремам двойственности общий вид и может быть использована при решении других задач. Однако, эти задачи должны относиться к рефлексивному случаю (т. е. задача должна быть сформулирована в условиях рефлексивного локально выпуклого пространства). Доказанная выше теорема 1 (односторонняя схема двойственности) допускает ее использование при решении задач в условиях нерефлексивного локально выпуклого пространства. Конкретного опыта в этом направлении в открытой печати пока нет.

Литература

1. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Мат. сб.—1998.—Т. 189, № 9.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm355.
2. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 12.—С. 123–160. DOI: 10.4213/sm789.
3. Шишкин А. Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Спектральный синтез и локальное описание аналитических функций.—Славянск-на-Кубани: Издательский центр филиала ФГБОУ ВПО «КубГУ», 2013.—304 с.
4. Шишкин А. Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Матем. Механика. Информатика.—2014.—Т. 14, № 1.—С. 47–65. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-47-65.
5. Ehrenpreis L. Mean periodic functions I // Amer. J. Math.—1955.—Vol. 77.—P. 293–328.
6. Красичков И. Ф. О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1967.—Т. 31, № 1.—С. 37–60.
7. Красичков И. Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1968.—Т. 32, № 5.—С. 1024–1032.
8. Ehrenpreis L. Fourier Analysis in Several Complex Variables.—New York–London–Sydney: John Wiley & Sons Inc., 1970.—(Pure and Applied Monograph; Vol. 17).
9. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 4.—С. 459–489.
10. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 88 (130), № 1 (5).—С. 3–30.
11. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
12. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1 (217).—С. 73–126.

13. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 70–84.
14. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 12.—С. 123–156. DOI: 10.4213/sm789.
15. Трутнев В. М. Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа // Итоги науки и техники. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз.—2006.—Т. 108.—С. 158–180.
16. Шишкин А. Б. Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. научн. сем. ПОМИ.—2016.—Т. 447, № 1.—С. 129–170.

Статья поступила 11 мая 2020 г.

Шишкин Андрей Борисович

Кубанский государственный университет,

заведующий кафедрой МИЕОД

РОССИЯ, 353560, Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200

E-mail: shishkin-home@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 124–150

ONE-SIDED DUAL SCHEMES

Shishkin, A. B.¹

¹Kuban State University,

200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia

E-mail: shishkin-home@mail.ru

Abstract. The phenomenon of duality appears in all areas of mathematics and is closely related to the phenomenon of equivalence. These phenomena complement each other and are used to transfer various mathematical statements from one area of mathematics to another and vice versa (dual and equivalent transitions). The main difference between duality and equivalence is the use of involution. An involution of an object is a transformation of an object whose action is eliminated by an inverse transformation, that is, an inverse transformation restores an object. Any involution generates its duality, which is affirmed by the corresponding duality theorem. Duality theorems are two-sided. They allow for dual transitions to one and the other. Weaken the conditions for involution and assume that its repeated action restores the object only by half (instead of equality, we obtain inequality). In this case, for such a complete restoration of an object, two such involutions are required. This article is about weakened (one-sided) involutions. As such, completely isotonic mappings are considered (they are defined in the second section). The properties of these mappings and their conditionally inverse mappings allow half-dual transitions — transitions in only one direction. Duality theorems claiming the possibility of such transitions are called one-sided duality schemes. The content of the work is an attempt to bring a unified mathematical base for all possible one-sided schemes of duality, which allows us to reformulate each of them in accordance with a single standard. This possibility is presented by the interpretation of dual transitions that arose under the conditions of the theory of spectral synthesis in the complex field as transitions from an injective (internal) description of some mathematical objects to a projective (external) description of other mathematical objects. The involutions used in one-sided schemes of duality, in turn, are one-sided and the restrictions imposed on them are much weaker. This leads to a significant expansion of the scope of the possible application of dual schemes in research practice.

Key words: duality, duality theorem, injective description, projective description.

Mathematical Subject Classification (2010): 14A15, 22D35, 32C37, 46B10, 47L50.

For citation: Shishkin, A. B. One-Sided Dual Schemes, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 124–150 (in Russian). DOI: 10.46698/i3178-1119-0009-t.

References

1. Shishkin, A. B. Spectral Synthesis for Systems of Differential Operators with Constant Coefficients. Duality Theorem, *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1423–1440. DOI: 10.1070/SM1998v189n09ABEH000355.
2. Shishkin, A. B. Spectral Synthesis for Systems of Differential Operators with Constant Coefficients, *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 12, pp. 1865–1898. DOI: 10.1070/SM2003v194n12ABEH000789.
3. Shishkin A. B. *Proektivnoe i in'ektivnoe opisaniya v kompleksnoi oblasti. Spektralnyi sintez i lokalnoe opisanie analiticheskikh funktsii*, Slavyansk-na-Kubani, Izdatelskii tsentr KubGU, 2013, 304 p. (in Russian).
4. Shishkin A. B. Projective and Injective Descriptions in the Complex Domain. Duality, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 47–65.
5. Ehrenpreis L. Mean Periodic Functions I, *American Journal of Mathematics*, 1955, vol. 77, pp. 293–328.
6. Krasichkov I. F. Closed Ideals in Locally Convex Algebras of Entire Functions, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 35–55. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000546.
7. Krasichkov I. F. Closed Ideals in Locally Convex Algebras of Entire Functions. II. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 5, pp. 979–986. DOI: 10.1070/IM1968v002n05ABEH000683.
8. Ehrenpreis L. Fourier Analysis in Several Complex Variables. *Pure and Applied Mathematics*, 1970, vol. 17, N. Y.–London–Sydney, John Wiley & Sons Inc., 1970.
9. Krasichkov-Ternovsky I. F. Invariant Subspaces of Analytic Functions. I. Spectral Analysis on Convex Regions, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500. DOI: 10.1070/SM1972v016n04ABEH001436.
10. Krasichkov-Ternovsky I. F. Invariant Subspaces of Analytic Functions. II. Spectral Synthesis of Convex Domains, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 17, no. 1, pp. 1–29. DOI: 10.1070/SM1972v017n01ABEH001488.
11. Korobeinik Yu. F. Representing Systems, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 309–335. DOI: 10.1070/IM1978v012n02ABEH001856.
12. Korobeinik Yu. F. Representing Systems, *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
13. Korobeinik Yu. F., Melikhov S. N. A Continuous Linear Right Inverse of the Representation Operator and Applications to the Convolution Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 59–72. DOI: 10.1007/BF00971241.
14. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 12, pp. 1865–1898. DOI: 10.1070/SM2003v194n12ABEH000789.
15. Trutnev V. M. Convolution Equations in Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Journal of Mathematical Sciences (N. Y.)*, 2004, vol. 120, no 6, pp. 1901–1915. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000020709.31698.80.
16. Shishkin A. B. Exponential Synthesis in the Kernel of a Symmetric Convolution, *Journal of Mathematical Sciences (N. Y.)*, 2018, vol. 229, no. 5, pp. 572–599. DOI: 10.1007/s10958-018-3700-9.

Received May 11, 2020

ANDREY B. SHISHKIN
 Kuban State University,
 200 Kuban St., Slavyansk-on-Kuban 353560, Russia,
 Head of Department
 E-mail: shishkin-home@mail.ru