Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 69–77

УДК 517.977
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17992

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Кыров[1]

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Аннотация. $(n+1)$-мерная геометрия локальной максимальной подвижности задается некоторой невырожденной и дифференцируемой функцией пары точек f на многообразии M, являющимся инвариантом группы движений размерности $(n+1)(n+2)/2$. Полной классификации таких геометрий размерности $n+1$ пока нет, но хорошо известны отдельные примеры: гоеметрия евклида, симплектическая геометрия, геометрии постоянной кривизны. В последнее время методом вложения были найдены некоторые ранее неизвестные геометрии локальной максимальной подвижности. Метод вложения дает возможность нахождения функций f, задающих $(n+1)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности, по функциям θ известных n-мерных геометрией локальной максимальной подвижности. Эта задача сводится к решению функциональных уравнений специального вида, являющихся следствием инвариантности функции пары точек f относительно группы движений. Такие уравнения решаются в данной работе. Дифференцированием они сводятся сначала к функционально-дифференциальным уравнениям, от которых разделением переменных переходим к дифференциальным уравнениям. Затем решения последних уравнений подставляем в исходные функциональные уравнения, после чего получаем окончательный результат.

Ключевые слова: функциональное уравнение, функционально-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение.

Mathematical Subject Classification (2000): 39b62.

Введение

На примере хорошо известного функционального уравнения Коши проиллюстрируем метод решения:

$$g(u+v) = g(u) + g(v),$$

где g — функция класса C^1, u и v — независимые переменные. Это уравнение сначала дифференцируем по переменным u и v: $g'(u+v) = g'(u)$, $g'(u+v) = g'(v)$. Далее вычитаем из первого уравнения второе и разделяем переменные: $g'(u) = g'(v) = a = \mathrm{const}$. Затем интегрируем и результат подставляем в исходное уравнение, после чего записываем ответ: $g(u) = au$. Таким способом в данной работе решаются функциональные уравнения, появляющиеся при классификации геометрий локальной максимальной подвижности методом вложения [1–3].

Под $(n+1)$-мерной геометрией локальной максимальной подвижности понимается геометрия многообразия M, задаваемая некоторой невырожденной и достаточно дифференцируемой функцией $f : M \times M \to \mathbb{R}$ (не обязательно метрикой), являющаяся инвариантом группы движений размерности $(n+1)(n+2)/2$. Суть метода вложения состоит в поиске функций f, задающих $(n+1)$-мерные геометрии локальной максимальной подвижности, по функциям θ ранее известных n-мерных геометрией локальной максимальной подвижности, причем функция f ищется в виде

$$f(x,y) = \psi\big(\theta(x,y), x^{n+1}, y^{n+1}\big), \tag{0.1}$$

где $\theta(x,y) = \theta(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)$, а $(x^1,\dots,x^n,x^{n+1})$ и $(y^1,\dots,y^n,y^{n+1})$ — координаты точек x и y соответственно. Записывая условие локальной инвариантности функции f относительно группы движений [4], получаем функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}\left(X_k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x^k} + X_k(y)\frac{\partial\theta}{\partial y^k}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + X_{n+1}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x^{n+1}} + X_{n+1}(y)\frac{\partial\psi}{\partial y^{n+1}} = 0. \tag{0.2}$$

В данной работе рассматриваются наиболее важные частные случаи, когда последние аргументы в функции (0.1) представляются в виде комбинаций $w = x^{n+1} - y^{n+1}$ и $z = x^{n+1} + y^{n+1}$. Тогда уравнение (0.2) сводится к (1.8) и (1.9), от которых приходим к (1.10) и (1.11). Результаты, получаемые в этой статье, будут использоваться при нахождении геометрий локальной максимальной подвижности методом вложения.

Выше сформулированная задача решалась в работах [1–3]:

$$\theta(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\big(x^k - y^k\big)^2, \quad \varepsilon_k = \pm 1,$$

$$\theta(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 \quad (\text{см. в [2]}),$$

$$\theta(x,y) = \big[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\big]\, e^{2\,\gamma\,\operatorname{arctg}\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}},$$

$$\theta(x,y) = \big[(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2\big]\, e^{2\,\beta\operatorname{Ar(c)\,th}\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}},$$

$$\theta(x,y) = (x_1-y_1)^2\, e^{2\,\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}} \quad (\text{см. в [3]}).$$

Уравнения (1.10) и (1.11) также решались в работе [5], в которой

$$\theta(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x^k y^k, \quad \varepsilon_k = \pm 1.$$

Заметим, что задачу вложения можно также решать и аналитически, т. е. искать решение уравнения (0.2) в виде рядов Тейлора [6, 7].

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим дифференцируемую класса C^4 функцию $f : S_f \to \mathbb{R}$, где $S_f \subset \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ — открытая и плотная область определения. Пусть $U_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — некоторая координатная окрестность, $x, y \in U_0$, причем $\langle x, y\rangle \in S_f$. Рассмотрим окрестности точек x и y: $U(x) \subset U_0$ и $U(y) \subset U_0$, причем $\langle x', y'\rangle \in S_f$ для любых x', y', $x' \in U(x)$, $y' \in U(y)$. Обозначим через $U(\langle x,y\rangle) \subset \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ некоторую окрестность пары $\langle x,y\rangle$: $U(\langle x,y\rangle) \subset U(x)\times U(y)$, в которой функция f имеет один из следующих видов:

$$f(x,y) = \sigma\left(\theta(x,y), w\right), \tag{1.1}$$

$$f(x,y) = \varkappa\left(\theta(x,y), z\right), \tag{1.2}$$

где θ, σ, $\varkappa$ — функции класса C^4 в этой окрестности, $\theta(x,y) = \theta(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$, $(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1})$, $(y^1,\ldots,y^n,y^{n+1})$ — координаты точек x и y соответственно, $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $z = x^{n+1} + y^{n+1}$. Дополнительно потребуем, чтобы в произвольной системе координат в U_0 и в любой точке из $U(\langle x,y\rangle)$ выполнялись неравенства [5]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x^i} \neq 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y^i} \neq 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \neq 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial w} \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} \neq 0, \quad \frac{\partial\varkappa}{\partial z} \neq 0. \tag{1.5}$$

Эти требования являются необходимыми при определении геометрии локальной максимальной подвижности. Если они не выполняются, то задача вложения для геометрии локальной максимальной подвижности, о которой кратко говорилось во введении, не имеет решения.

Также будем предполагать, что функция f — двухточечный инвариант действия некоторой группы Ли в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ [6]. Множество таких действий задает группу Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Произвольный оператор алгебры Ли этой группы преобразований в окрестности $U(x)$ имеет вид [8]

$$X = X_1\partial_{x^1} + \cdots + X_n\partial_{x^n} + X_{n+1}\partial_{x^{n+1}}, \tag{1.6}$$

где $X_s = X_s(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1})$ — функции класса C^3 в окрестности $U(x) \subset U_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $s = 1,\ldots,n+1$. Через операторы записывается критерий локальной инвариантности [4]:

$$X(x)f(x,y) + X(y)f(x,y) = 0. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) расписываем для функций (1.1) и (1.2), после простых преобразований получаем

$$[X] = (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi(\theta,w), \tag{1.8}$$

$$[X] = (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\lambda(\theta,z), \tag{1.9}$$

где введено сокращающее обозначение:

$$[X] = \sum_{k=1}^{n}\left(X_k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x^k} + X_k(y)\frac{\partial\theta}{\partial y^k}\right),$$

причем $\varphi(\theta,w) = -\frac{\partial\sigma}{\partial w}/\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}$ и $\lambda(\theta,z) = -\frac{\partial\varkappa}{\partial z}/\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}$ — функции класса C^3 в $U(\langle x,y\rangle)$, а также $\varphi \neq 0$, $\lambda \neq 0$, поскольку иное противоречит неравенствам (1.4) и (1.5). Уравнения (1.8) и (1.9) являются функционально-дифференциальными относительно неизвестных компонент оператора (1.6), а также функций σ и $\varkappa$, и выполняются тождественно по координатам точек x и y в окрестности $U(\langle x,y\rangle)$.

Дифференцируя уравнения (1.8) и (1.9) по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, а также вводя сокращающее обозначение $Y = X_{n+1}$, получаем новые функционально-дифференциальные уравнения в окрестности $U(\langle x,y\rangle)$:

$$\big((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}\big)\varphi'_w + (Y(x) - Y(y))\varphi''_{ww} = 0, \tag{1.10}$$

$$\big((Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}\big)\lambda'_z + (Y(x) + Y(y))\lambda''_{zz} = 0. \tag{1.11}$$

Основным содержанием данной работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *В окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *функционально-дифференциальное уравнение* (1.10), *где* $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $Y \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$, *имеет решения*

$$Y = C\big(x^1, \dots, x^n\big), \quad \varphi = a(\theta)w + b(\theta); \tag{1.12}$$

$$Y = rx^{n+1} + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{1.13}$$

$$Y = r\big(x^{n+1}\big)^2 + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{1.14}$$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big) + c, \quad \varphi = a(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{1.15}$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}} + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{e^{\omega w}}{e^{\omega w} - 1} + b(\theta); \tag{1.16}$$

$$Y = r\operatorname{ch}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big) + c, \quad \varphi = a(\theta)\operatorname{cth}\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{1.17}$$

$$Y = r\operatorname{sh}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big) + c, \quad \varphi = a(\theta)\operatorname{th}\frac{\omega w}{2} + b(\theta), \tag{1.18}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \dots, x^n) \neq \mathrm{const}$, $a(\theta)$, $b(\theta)$ *— функции класса* C^3, $a(\theta) \neq 0$.

Теорема 2. *В окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *функционально-дифференциальное уравнение* (1.11), *где* $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, $Y \neq 0$, $\lambda'_z \neq 0$, *имеет решения:*

$$Y = C\big(x^1, \dots, x^n\big), \quad \lambda(\theta, z) = a(\theta)z + b(\theta); \tag{1.19}$$

$$Y = rx^{n+1} + c, \quad \lambda = a(\theta)\frac{1}{rz + 2c} + b(\theta); \tag{1.20}$$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big), \quad \lambda = a(\theta)\operatorname{tg}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{1.21}$$

$$Y = re^{\omega x^{n+1}}, \quad \lambda = a(\theta)e^{-\omega z} + b(\theta); \tag{1.22}$$

$$Y = r\operatorname{ch}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big), \quad \lambda = a(\theta)\operatorname{th}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{1.23}$$

$$Y = r\operatorname{sh}\big(\omega x^{n+1} + \alpha\big), \quad \lambda = a(\theta)\operatorname{cth}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta), \tag{1.24}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \dots, x^n) \neq \mathrm{const}$, $a(\theta)$, $b(\theta)$ *— функции класса* C^3, $a(\theta) \neq 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *В окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *функциональное уравнение*

$$C(x) - C(y) = \xi(\theta(x, y), w), \tag{2.1}$$

где $C(x) = C(x^1, \dots, x^n)$ *— функция класса* C^3, ξ *— функция класса* C^1, *имеет решение*

$$C(x) = c = \mathrm{const}. \tag{2.2}$$

$\lhd$ Продифференцируем уравнение (2.1) по координате x^{n+1}, получим $\xi'_w = 0$. Значит, $\xi(\theta(x, y), w) = \xi(\theta(x, y))$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$C(x) - C(y) = \xi(\theta(x, y)). \tag{2.3}$$

Далее выделяются два случая: $\xi'_\theta = 0$ и $\xi'_\theta \neq 0$.

1. Если в (2.3) $\xi'_\theta = 0$, то $C(x) - C(y) = \mathrm{const}$. Разделяя переменные, получаем (2.2).

2. Если же в (2.3) $\xi'_\theta \neq 0$ в $U(\langle x, y\rangle)$, то для некоторой координаты x^i

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x^i} = \xi'_\theta \frac{\partial \theta(x,y)}{\partial x^i} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее от координат x^i переходим к новым координатам x'^i по формулам $x'^1 = x'^1, \dots, x'^{i-1} = x'^{i-1}$, $x'^i = C(x^1, \dots, x^n)$, $x'^{i+1} = x'^{i+1}, \dots, x'^n = x'^n$. Несложно доказать, что якобиан в данной замене координат равен $\frac{\partial C(x)}{\partial x^i}$ и поэтому отличен от нуля. Тогда в новых координатах уравнение (2.3) примет вид $x'^i - y'^i = \xi(\theta(x,y))$, следовательно, по теореме о неявной функции, в $U(\langle x, y\rangle)$ будем иметь $\theta = \eta(x'^i - y'^i)$, где η — некоторая функция класса C^1. Поэтому $\frac{\partial \theta}{\partial x'^j} = 0$, $j \neq i$, что противоречит неравенству из (1.3). Таким образом, справедлива формула (2.2). $\rhd$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *В окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ функциональное уравнение*

$$C(x) + C(y) = \xi(\theta(x,y), z),$$

где $C(x) = C(x^1, \dots, x^n)$ — функция класса C^4, ξ — функция класса C^1, имеет решение

$$C(x) = c = \mathrm{const}.$$

3. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе «по умолчанию» все уравнения решаются в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$. Вначале заметим, что $Y = \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $Y(x) - Y(y) = 0$. Прямое утверждение очевидно. Для доказательства обратного утверждения применяем разделение переменных: $Y(x) = Y(y) = \mathrm{const}$. По условию теоремы $Y \neq \mathrm{const}$, следовательно, $Y(x) - Y(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (1.10) приходим к новому

$$\frac{(Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}}{Y(x) - Y(y)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{3.1}$$

Дифференцируя это уравнение сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего первый результат складываем со вторым, получаем равенство

$$((Y(x))''_{x^{n+1}} + (Y(y))''_{y^{n+1}})(Y(x) - Y(y)) - ((Y(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((Y(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{3.2}$$

Это равенство является функционально-дифференциальным уравнением, которое выполняется тождественно в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$.

Возможны два случая: $(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(Y(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае из уравнения (1.10) получаем $\varphi''_{ww} = 0$, следовательно, справедливо решение (1.12).

Во втором случае тождество (3.2) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(Y(x))'_{x^{n+1}}(Y(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение

$$(Y(x))'''_{x^{n+1}} + \mu (Y(x))'_{x^{n+1}} = 0, \quad \mu = \mathrm{const}. \tag{3.3}$$

Это уравнение имеет следующие решения:
при $\mu = 0$

$$Y = A\big(x^1,\dots,x^n\big)\big(x^{n+1}\big)^2 + B\big(x^1,\dots,x^n\big)x^{n+1} + C\big(x^1,\dots,x^n\big);$$

при $\mu > 0$

$$Y = A\big(x^1,\dots,x^n\big)\cos\omega x^{n+1} + B\big(x^1,\dots,x^n\big)\sin\omega x^{n+1} + C\big(x^1,\dots,x^n\big), \quad \omega = \sqrt{\mu};$$

при $\mu < 0$

$$Y = A\big(x^1,\dots,x^n\big)e^{\omega x^{n+1}} + B\big(x^1,\dots,x^n\big)e^{-\omega x^{n+1}} + C\big(x^1,\dots,x^n\big), \quad \omega = \sqrt{-\mu}.$$

Затем найденное подставляем в (3.2) и получаем:
при $\mu = 0$

$$Y = rx^{n+1} + C\big(x^1,\dots,x^n\big); \tag{3.4}$$

$$Y = r\big(x^{n+1}\big)^2 + c; \tag{3.5}$$

при $\mu > 0$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + p(x^1,\dots,x^n)\big) + c, \quad \omega = \sqrt{\mu}; \tag{3.6}$$

при $\mu < 0$

$$Y = A\big(x^1,\dots,x^n\big)e^{\omega x^{n+1}} + c, \quad \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{3.7}$$

$$Y = r\,\mathrm{ch}\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1,\dots,x^n\big)\big) + c, \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.8}$$

$$Y = r\,\mathrm{sh}\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1,\dots,x^n\big)\big) + c, \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.9}$$

причем $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее функцию (3.4) подставляем в уравнение (3.1):

$$\frac{2r}{rw + C(x^1,\dots,x^n) - C(y^1,\dots,y^n)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{3.10}$$

К уравнению (3.10) применяем лемму 1, получаем $C(x^1,\dots,x^n) = c = \mathrm{const}$. Значит, уравнение (3.10) принимает более простой вид:

$$\frac{2}{w} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последнее, получаем $\varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.4), получаем (1.13).

Функцию (3.5) подставляем в уравнение (3.1), в результате, как и выше, получаем $\varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.5), получаем (1.14).

Теперь функцию (3.6) подставляем в уравнение (3.1) и применяем тригонометрические формулы:

$$-\omega\,\frac{\sin(\omega x^{n+1} + p(x)) + \sin(\omega y^{n+1} + p(y))}{\cos(\omega x^{n+1} + p(x)) - \cos(\omega y^{n+1} + p(y))}$$

$$= \omega\,\frac{\sin\frac{\omega z + p(x) + p(y)}{2}\,\cos\frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2}}{\sin\frac{\omega z + p(x) + p(y)}{2}\,\sin\frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2}} = \omega\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega w + p(x) - p(y)}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

где, например, $p(x) = p(x^1, \ldots, x^n)$, следовательно,

$$p(x) - p(y) = -2\omega w - 2\mathrm{arcctg}\frac{\varphi''_{ww}}{\omega\varphi'_w}.$$

Применяя к этому равенству лемму 1, получаем $p(x^1, \ldots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В результате имеем уравнение

$$\omega \,\mathrm{ctg}\, \frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

интегрируя которое, получаем $\varphi = a(\theta)\mathrm{ctg}\frac{\omega w}{2} + b(\theta)$. В итоге приходим к (1.15).

(3.7) подставляем в (3.1):

$$\omega \,\frac{A(x)e^{\omega x^{n+1}} + A(y)e^{\omega y^{n+1}}}{A(x)e^{\omega x^{n+1}} - A(y)e^{\omega y^{n+1}}} = \omega\frac{A(x)/A(y) + e^{-\omega w}}{A(x)/A(y) - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

где, например, $A(x) = A(x^1, \ldots, x^n)$, следовательно

$$A(x)/A(y) = e^{-\omega w}\frac{\varphi''_{ww} - \omega\varphi'_w}{\varphi''_{ww} + \omega\varphi'_w}.$$

Логарифмируя последнее выражение и применяя лемму 1, получаем $A(x^1, \ldots, x^n) = r = \mathrm{const}$. Тогда будем иметь дифференциальное уравнение

$$\omega \,\frac{1 + e^{-\omega w}}{1 - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w},$$

интегрируя которое, получаем $\varphi = a(\theta)\frac{1}{1-e^{-\omega w}} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.1), получаем (1.16).

И, наконец, функции (3.8) и (3.9) подставляем в уравнение (3.1) и применяем свойства гиперболических функций, потом, как и выше, с тригонометрическими функциями, устанавливаем, что $p(x^1, \ldots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В итоге приходим к уравнениям

$$\omega \,\mathrm{cth}\, \frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}, \quad \omega \,\mathrm{th}\, \frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последние уравнения, получаем $\varphi = a(\theta)(\mathrm{c})\mathrm{th}\frac{\omega w}{2} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.8) и (3.9), имеем (1.17) и (1.18).

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Эта теорема доказывается как и теорема 1, поэтому некоторые рассуждения будем опускать. Как и выше «по умолчанию» все уравнения решаются в $U(\langle x, y\rangle)$. Вначале заметим, что $Y = 0$ тогда и только тогда, когда $Y(x) + Y(y) = 0$. В прямую сторону это очевидно. В обратную сторону применяем разделение переменных: $Y(x) = -Y(y) = \mathrm{const} = 0$. По условию теоремы $Y \neq 0$, следовательно $Y(x) + Y(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (1.11) приходим к новому:

$$\frac{(Y(x))'_{x^{n+1}} + (Y(y))'_{y^{n+1}}}{Y(x) + Y(y)} = -\frac{\lambda''_{zz}}{\lambda'_z}. \tag{4.1}$$

Дифференцируем это уравнение сначала по x^{n+1}, затем по y^{n+1}, после чего из первого равенства вычитаем второе:

$$((Y(x))''_{x^{n+1}} - (Y(y))''_{y^{n+1}})(Y(x) + Y(y)) - ((Y(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((Y(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{4.2}$$

Возможны два случая: $(Y(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(Y(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае уравнение (1.11) имеет решение (1.19).

Во втором случае тождество (4.2) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(Y(x))'_{x^{n+1}}(Y(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение (3.3). Решения этого уравнения, найденные в теореме 1, подставляем в (4.2):

при $\mu = 0$

$$Y = rx^{n+1} + C\big(x^1, \dots, x^n\big); \tag{4.3}$$

при $\mu > 0$

$$Y = r\cos\big(\omega x^{n+1} + p(x^1, \dots, x^n)\big), \quad \omega = \sqrt{\mu}; \tag{4.4}$$

при $\mu < 0$

$$Y = A\big(x^1, \dots, x^n\big)e^{\omega x^{n+1}}, \quad \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{4.5}$$

$$Y = r\operatorname{ch}\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1, \dots, x^n\big)\big), \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{4.6}$$

$$Y = r\operatorname{sh}\big(\omega x^{n+1} + p\big(x^1, \dots, x^n\big)\big), \quad \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{4.7}$$

причем $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее, поступаем как и при доказательстве теоремы 1, т. е. функции (4.3)–(4.7) подставляем в уравнение (4.1) и применяем лемму 2, а затем решаем. В итоге получаем (1.20)–(1.24).

5. Заключение

Условия (1.3) дают существенные ограничения на выбор функции θ. Так, на плоскости $\mathbb{R}^2$ функцию θ можно брать в виде:

$$\theta(x,y) = x^1y^1 + x^2y^2, \quad \theta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2, \quad \theta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^3,$$

$$\theta(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1, \quad \theta(x,y) = \big[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big]\, e^{2\gamma \operatorname{arctg}\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}}, \quad \theta(x,y) = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1},$$

т. е. для этих функций доказанные здесь результаты верны. А, например, для функций $\theta(x,y) = x^1y^1 + x^2$, $\theta(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (y_2)^2$ доказанное выше несправедливо.

Литература

1. *Кыров В. А.* Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сиб. журн. индустр. мат.—2010.—Т. 13, № 4. —С. 38–51.
2. *Кыров В. А.* Функциональные уравнения в симплектической геометрии // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2010.—Т. 16, № 2.—С. 149–153.
3. *Кыров В. А.* Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Т. 26, № 1.—С. 31–38. DOI: 10.14498/vsgtu986.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—400 с.
5. *Кыров В. А.* Решение функциональных уравнений, связанных со скалярным произведением // Челяб. физ.-мат. журн.—2017.—Т. 2, № 1.—С. 30–45.
6. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сиб. электрон. мат. изв.—2017.—Т. 14.—С. 657–672.

7. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2017.—Т. 23, № 2.—С. 165–181.
8. *Mikhailichenko G. G.* The Mathematical Basics and Results of the Theory of Physical Structures.—URL: https://arxiv.org/pdf/1602.02795.

Статья поступила 30 декабря 2016 г.
Окончательный вариант 12 марта 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 69–77

ON A FAMILY OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Kyrov V. A.[1]

[1] Gorno-Altaisk State University,
1 Lenkina st., Gorno-Altaisk 649000, Russia
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Abstract. The $(n+1)$-dimensional geometry of local maximum mobility is given by some non-degenerate and differentiable function f of the pair of points on the manifold M, which is a motion group invariant of dimension $(n+1)(n+2)/2$. There is no complete classification of such geometries of dimension $n+1$, but some examples are well known: Euclidean geometry, symplectic geometry, constant curvature geometry. Recently, some previously unknown geometries of local maximum mobility has been found using the embedding method. The embedding method enables one to find functions f that define $(n+1)$-dimensional geometries of local maximum mobility by functions θ of known n-dimensional geometry of local maximum mobility. This problem is reduced to the solution of functional equations of a special type, which are a consequence of the invariance of the function f of the pair of points with respect to the motion group. Such equations are solved in this paper. By differentiation, they are first reduced to functional differential equations, from which we pass to differential equations by separating the variables. Then the solutions of the latter are substituted into the original functional equations, after which we get the final result.

Key words: functional equation, functional differential equation, differential equation.

Mathematical Subject Classification (2000): 39b62.

References

1. Kyrov V. A. Functional equations in pseudo-Euclidean geometry, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51 (in Russian).
2. Kyrov V. A. Functional equations in simplicial geometry, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153 (in Russian).
3. Kyrov V. A. On some class of functional-differential equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, vol. 26, no. 1, pp. 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986.
4. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoy Analiz Differentsial'nykh Uravneniy* [Group Analysis of Differential Aquation], Moscow, Nauka, 1978. 400 p. (in Russian).
5. Kyrov V. A. Solving of functional equations associated with the scalar product, *Chelyabinskiy Fiziko-Matematicheskiy Zhurnal*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 30–45 (in Russian).
6. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. The analytic method of embedding symplectic geometry, *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2017, vol. 14, pp. 657–672 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.17377/ semi.2017.14.057.
7. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no.2, pp. 167–181 (in Russian).
8. Mikhailichenko G. G. *The Mathematical Basics and Results of the Theory of Physical Structures.* https://arxiv.org/pdf/1602.02795.

Received December 30, 2016
Final version March 12, 2017