Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 29–37

УДК 539.3; 517.984.54
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14717

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А. О. Ватульян, Л. В. Васильев, В. О. Юров

Настоящая работа посвящается 65-летию со дня рождения известного российского математика Анатолия Георгиевича Кусраева, который отдает немало сил для консолидации ученых-математиков на Юге России, развития науки и образования в области математики и ее приложений и поддержки молодых талантливых ученых.

Аннотация. Определение различных характеристик твердых тел по данным акустического зондирования в последние годы все чаще привлекает внимание исследователей. В настоящей работе исследуется новая обратная задача об определении двух параметров (коэффициентов постели), входящих в граничные условия для краевой задачи. Краевая задача описывает распространение волн в полом неоднородном цилиндрическом волноводе, расположенном в среде. Ранее проведено решение этой задачи, исследована структура дисперсионного множества и получен ряд формул, устанавливающих взаимосвязь спектральных параметров и коэффициентов постели. Решены вспомогательные задачи Коши, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям на внутренней границе цилиндра. Решение граничной задачи отыскивается в виде линейной комбинации вспомогательных задач, удовлетворяются граничные условия на внешней границе. Для существования нетривиального решения требуется равенство нулю определителя возникающей системы алгебраических уравнений. Реконструкция коэффициентов постели осуществляется по информации о двух точках дисперсионного множества, причем способ решения обратной задачи не использует явного представления дисперсионного множества. Решение обратной задачи не всегда удовлетворяет априорной информации о неотрицательности коэффициентов постели. С целью получения однозначной реконструкции параметров сформулирована теорема единственности. Теорема позволяет на начальном этапе отсеивать такие пары точек дисперсионного множества, для которых нет решения или оно не единственно. Вычислительные эксперименты показали распространенность ситуации, когда через две заданные точки дисперсионного множества могут быть проведены дисперсионные кривые неединственным образом. В рамках работы с малой погрешностью входной информации эффективный способ отбора пары параметров — рассмотрение третьей точки дисперсионного множества. Отмечено, что представленный способ реконструкции позволяет восстанавливать искомые параметры с достаточно высокой точностью.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, упругое закрепление, дисперсионное множество, реконструкция.

Введение. В спектральных задачах, где граничные условия содержат параметр, проявляется зависимость точек спектра от значения этого параметра. Анализ влияния спектральных параметров представляет большой интерес, его можно использовать в том числе и для решения обратных коэффициентных задач [1, 2]. Решения обратных задач по реконструкции коэффициентов в граничных условиях были реализованы ранее в задачах для балочных структур, где требовалось определять 4 параметра в граничных условиях. Для случая постоянной жесткости балки решение и частотное уравнение можно получить, используя функции Крылова [3, 4]; на основе явного вида частотного уравнения строится и дальнейший анализ обратной задачи. В [5] показано, что невозможно однозначно определить 4 неизвестных неотрицательных параметра по 4 резонансным частотам. В случае переменной жесткости балки невозможно применить описанные выше подходы, а именно, частотное уравнение уже нельзя записать в явном виде, что не дает возможности использовать методы, разработанные для однородных структур. Подобная задача по восстановлению параметров в граничных условиях для упругого неоднородного стержня при наличии упругих связей на границе была рассмотрена ранее [6], причем анализ решения и определение искомых коэффициентов базируется на составлении вспомогательных задач Коши. Также анализ влияния граничных условий на частотные уравнения применяется для идентификации массы тела на его границе [7]. Масса учитывается только в граничных условиях и методика решения является аналогичной.

Более сложной структурой является волновод. Задача, описывающая волновой процесс, содержит два спектральных параметра. Волновые процессы в однородных плоских и цилиндрических упругих волноводах со свободными границами достаточно подробно исследованы в литературе, поскольку для них возможно получить дисперсионные соотношения в явном виде [8]. Моделирование волновых процессов в магистральных трубопроводах порождает задачу о волноводе при наличии окружающей среды, присутствие которой моделируется импедансными граничными условиями или условиями третьего рода, содержащими два параметра, и представляет интерес для исследования [9]. Для неоднородных волноводов дисперсионные соотношения изучены гораздо меньше, их исследование представляет большой интерес для приложений, например, при оценке скоростей в слоистых или функционально-градиентных трубопроводах [10, 11].

В работе [12] изучена модель упругого неоднородного полого цилиндра с упруго закрепленной внешней границей, причем граничные условия содержат два параметра. Изучено влияние этих параметров на дисперсионное множество. В настоящей работе рассмотрена обратная задача о восстановлении этих параметров по известным точкам дисперсионного множества. Построены базовые спектральные задачи, не содержащие искомых параметров. На их основе сформулированы необходимые и достаточные условия, обеспечивающие единственность восстановления параметров. Представлен метод восстановления, базирующийся на методе пристрелки. Проведена серия вычислительных экспериментов по определению искомых параметров, осуществлена оценка точности и применимости в расчетах представленного метода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим волны в неоднородном цилиндрическом волноводе, упруго закрепленном по внешней границе, что моделирует взаимодействие магистрального трубопровода с внешней средой, а именно с глинистым грунтом [13], где a, b — внутренний и внешний радиусы волновода.

Уравнения движения и определяющие соотношения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \sigma_r = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{rz}}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \sigma_\phi = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{rz}}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_z = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{rz}}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Учет контакта волновода с окружающей средой осуществляется в рамках модели с двумя коэффициентами постели и приводит к следующим граничным условиям:

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = -\tilde{\alpha} u_r(b), \quad \sigma_{rz}(a) = 0, \quad \sigma_{rz}(b) = -\tilde{\beta} u_z(b), \tag{3}$$

где σ_r, σ_z — компоненты радиального и осевого напряжений, σ_{rz}, σ_ϕ — компоненты касательного и окружного напряжений, u_r, u_z — радиальное и осевое перемещения.

Решения задачи (1)–(3) ищем в виде бегущей волны:

$$\begin{gathered} u_r = bU_1 \exp(i(kz - \omega t)), \quad u_z = ibU_3 \exp(i(kz - \omega t)), \\ \sigma_r = \mu_0 T_1 \exp(i(kz - \omega t)), \quad \sigma_{rz} = i\mu_0 T_3 \exp(i(kz - \omega t)). \end{gathered} \tag{4}$$

Отделим экспоненциальный множитель в (4) и представим задачу в каноническом виде, а именно в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя спектральными параметрами κ и γ

$$\begin{cases} U_1'(x) = -AU_1(x)/x + A\gamma U_3(x) + T_1(x)/(g_1(x) + 2g_2(x)); \\ U_3'(x) = -\gamma U_1(x) + T_3(x)/g_2(x); \\ T_1'(x) = \left(B/x^2 - \kappa^2\right) U_1(x) - C\gamma U_3(x) - 2DT_1(x) + \gamma T_3(x); \\ T_3'(x) = \left(\gamma^2 B - \kappa^2\right) U_3(x) - C\gamma U_1(x) - A\gamma T_1(x) - T_3(x)/x, \end{cases} \tag{5}$$

где $A = g_1(x)/(g_1(x) + 2g_2(x))$, $B = 4g_2(x)(g_1(x) + g_2(x))/(g_1(x) + 2g_2(x))$, $C = 2g_1(x)g_2(x)/(x(g_1(x) + 2g_2(x)))$, $D = g_2(x)/(x(g_1(x) + 2g_2(x)))$, $\xi_0 = a/b$ — безразмерный внутренний радиус, $x = r/b$ — радиальная координата.

$$\mu_0 = \frac{1}{1 - \xi_0} \int\limits_{\xi_0}^{1} \mu(x)\, dx, \quad \kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{\mu_0},$$

где μ_0 — среднее значение модуля сдвига, κ — безразмерная частота, $\gamma = kb$ — безразмерное волновое число, $\lambda = \mu_0 g_1$, $\mu = \mu_0 g_2$ — параметры Ламе, зависящие от радиальной координаты. Граничные условия имеют следующий вид, содержащий два параметра α, β, причем $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$:

$$\begin{gathered} T_1(\xi_0) = 0, \quad T_1(1) = -\alpha\, U_1(1), \\ T_3(\xi_0) = 0, \quad T_3(1) = -\beta\, U_3(1). \end{gathered} \tag{6}$$

2. Построение решения, анализ дисперсионного множества. Решение задачи (5)–(6) построено на основе метода пристрелки [14]. Основная идея заключается в формировании двух вспомогательных задач Коши, не содержащих параметров α, β для исходной краевой задачи (5)–(6), что позволяет отыскивать ее решение в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач. Введем в рассмотрение две вектор-функции $X^{(m)} = (U_1^{(m)}, U_3^{(m)}, T_1^{(m)}, T_3^{(m)})$, $m = 1, 2$, удовлетворяющие системе (5) и неоднородным данным Коши

$$\begin{gathered} U_1^{(1)}(\xi_0) = 1, \quad U_3^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad T_1^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad T_3^{(1)}(\xi_0) = 0, \\ U_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad U_3^{(2)}(\xi_0) = 1, \quad T_1^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad T_3^{(2)}(\xi_0) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Общее решение задачи (5)–(6) ищется в виде линейной комбинации $X = C_1 X^{(1)} + C_2 X^{(2)}$; отметим, что это решение удовлетворяет граничным условиям (6) при $x = \xi_0$.

Удовлетворение граничным условиям при $x = 1$ приводит к следующей системе и позволяет строить дисперсионное уравнение через ее определитель

$$\begin{cases} C_1 T_1^{(1)}(1) + C_2 T_1^{(2)}(1) = -\alpha(C_1 U_1^{(1)}(1) + C_2 U_1^{(2)}(1)), \\ C_1 T_3^{(1)}(1) + C_2 T_3^{(2)}(1) = -\beta(C_1 U_3^{(1)}(1) + C_2 U_3^{(2)}(1)). \end{cases} \tag{8}$$

Система (5) всегда имеет тривиальное решение. Приравнивая нулю определитель системы (8), получаем дисперсионное соотношение, которое связывает параметры α, β, γ, κ. Несложный анализ позволил установить, что дисперсионное уравнение относительно α и β имеет следующую структуру:

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \kappa) = \alpha\beta P_1(\gamma, \kappa) + \alpha P_2(\gamma, \kappa) + \beta P_3(\gamma, \kappa) + P_4 = 0, \tag{9}$$

где P_i — функции от κ и γ вида

$$\begin{aligned} P_1(\gamma, \kappa) &= U_1^{(1)}(\gamma, \kappa) U_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - U_1^{(2)}(\gamma, \kappa) U_3^{(1)}(\gamma, \kappa), \\ P_2(\gamma, \kappa) &= U_1^{(1)}(\gamma, \kappa) T_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - U_1^{(2)}(\gamma, \kappa) T_3^{(1)}(\gamma, \kappa), \\ P_3(\gamma, \kappa) &= T_1^{(1)}(\gamma, \kappa) U_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - T_1^{(2)}(\gamma, \kappa) U_3^{(1)}(\gamma, \kappa), \\ P_4(\gamma, \kappa) &= T_1^{(1)}(\gamma, \kappa) T_3^{(2)}(\gamma, \kappa) - T_1^{(2)}(\gamma, \kappa) T_3^{(1)}(\gamma, \kappa). \end{aligned} \tag{10}$$

Приводя уравнение (9) к каноническому виду, нетрудно показать, что при фиксированных γ и κ оно определяет ветви гиперболы с асимптотами, параллельными осям координат.

В [12] для точек дисперсионного множества установлено, что при увеличении α или β при фиксированном γ возрастает частотный параметр κ. Случай $\alpha = \beta = 0$ для однородных волноводов дает известное уравнение Похгаммера — Кри [8]. Предельный случай $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ соответствует дисперсионному уравнению для цилиндра в жесткой обойме.

3. Обратная задача. Задачу идентификации параметров в граничных условиях можно сформулировать следующим образом: пусть известны две точки дисперсионного множества вида (κ_1, γ_1), (κ_2, γ_2), требуется определить неизвестные параметры α и β в граничных условиях (6). Так как неизвестные параметры содержатся только в граничных условиях, то решается система (5) с условиями (7) для пары точек (κ_i, γ_i). Таким образом, для определения α и β строится система из двух уравнений вида (9) гиперболической структуры

$$\begin{cases} \alpha\beta P_{11} + \alpha P_{12} + \beta P_{13} + P_{14} = 0; \\ \alpha\beta P_{21} + \alpha P_{22} + \beta P_{23} + P_{24} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где принято $P_{mj} = P_j(\kappa_m, \gamma_m)$, $m = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Будем считать, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Система (11) может иметь два набора решений (α_i, β_i), которые соответствуют пересечению двух гипербол. Возможны также ситуации, когда решение единственно или вообще отсутствует. С целью установления критерия существования единственного решения обратной задачи получим из системы уравнений (11) следующую систему:

$$a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0, \quad -a_0\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0, \tag{12}$$

где $a_0 = P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12}$, $a_1 = P_{24}P_{11} + P_{22}P_{13} - P_{21}P_{14} - P_{23}P_{12}$, $a_2 = P_{24}P_{13} - P_{23}P_{14}$, $a_{12} = P_{21}P_{13} - P_{11}P_{23}$, $a_{13} = P_{21}P_{14} - P_{24}P_{11}$.

Введем ряд характеристик, которые позволят сформулировать условие единственности решения системы (11)

$$\begin{aligned} D &= a_1^2 - 4\,a_0\,a_2, \quad S = a_0 a_2 + a_{13} a_1 + a_{13}^2, \\ M &= -\frac{a_1 + 2\,a_{13}}{a_{12}}, \quad K = \frac{a_1^2 + a_{13} a_1 - 2\,a_2 a_0}{a_{12} a_0}. \end{aligned} \tag{13}$$

Теорема. *Пусть $D > 0$. Система уравнений* (11) *имеет единственное решение* (α, β), *удовлетворяющее условию $\alpha > 0$, $\beta > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:*

1. $a_0 a_2 > 0, \quad a_0 a_1 < 0, \quad S < 0;$
2. $a_0 a_2 < 0, \quad S > 0, \quad M > 0;$
3. $a_0 a_2 < 0, \quad S < 0, \quad K > 0.$

$\lhd$ Случай 1. Первые два неравенства в силу теоремы Виета гарантируют наличие двух положительных корней α_1, α_2 квадратного уравнения в (12). Находя из линейного уравнения в (12) β_1 и β_2, и далее $\beta_1 \beta_2 = S/a_{12}^2$, получим, что условие $S < 0$ гарантирует различные знаки у β_1, β_2, и соответственно, определяет единственное положительное решение (11).

В случае 2 корни α_1, α_2 разных знаков, а соответствующие β_1 и β_2 одного знака; в силу $\beta_1 + \beta_2 = M > 0$ оба β_1, β_2 положительны, таким образом, решение единственно.

В случае 3 корни α_1, α_2 разных знаков, и соответствующие β_1 и β_2 разных знаков ($S < 0$); в силу $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = K > 0$ одна из пар α_1, β_1 или α_2, β_2 дает единственное решение. $\rhd$

Замечание. Отдельно отметим, что при $\gamma = 0$ задача разделяется на две независимых краевых задачи для радиальных и осевых колебаний

$$\begin{cases} U_1'(x) = -AU_1(x)/x + T_1(x)/(g_1(x) + 2g_2(x)); \\ T_1'(x) = \big(B/x^2 - \kappa^2\big) U_1(x) - 2DT_1(x); \\ T_1(\xi_0) = 0, T_1(1) = -\alpha U_1(1), \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} U_3'(x) = T_3(x)/g_2(x); \\ T_3'(x) = -\kappa^2 U_3(x) - T_3(x)/x; \\ T_3(\xi_0) = 0, \ T_3(1) = -\beta U_3(1). \end{cases} \tag{15}$$

Используя (14) или (15), можно независимо определить параметр α или β соответственно. Для этого, однако, потребуются не только координаты точек радиального резонанса дисперсионного множества $(\kappa_1, 0)$, $(\kappa_2, 0)$, но и априорная информация о принадлежности к семейству радиальных или продольных колебаний.

4. Результаты вычислительных экспериментов. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению параметров в граничных условиях. В начале для заданных $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $g_1(x) = 1.5 f_0 \left(2 - x^{10}\right)$, $g_2(x) = f_0 \left(2 - x^{10}\right)$, $\xi_0 = 0.76$,

$$f_0 = (1 - \xi_0) \Bigg/ \int\limits_{\xi_0}^{1} \left(2 - x^{10}\right) dx$$

решалась прямая задача по построению дисперсионных кривых. Первые две ветви дисперсионного множества изображены на рис. 1. Затем выбраны пять точек с координатами: $Q_1(2.213, 0.5)$, $Q_2(2.498, 1)$, $Q_3(2.984, 3.479)$, $Q_4(2.984, 1)$, $Q_5(4.753, 2.5)$. Далее решалась обратная задача с входными данными Q_i, Q_j, $i \neq j$.

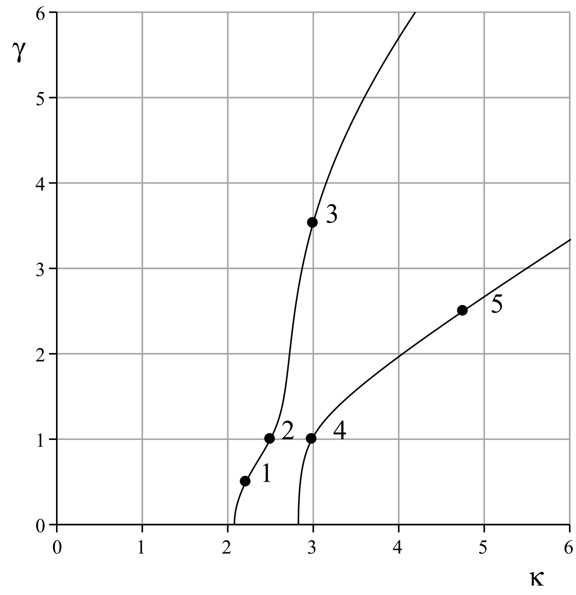

Рис. 1.

Теорема позволяет установить, что только для следующих пар точек (Q_1, Q_3), (Q_2, Q_3), (Q_3, Q_4), (Q_3, Q_5) существует единственное решение, причем выполняется первое условие теоремы. Для остальных шести пар имеет место неединственность. Для пары (Q_1, Q_2), например, найдено: $(\alpha_1 = 0.99780,\ \beta_1 = 1.0007)$, $(\alpha_2 = 0.19957,\ \beta_2 = 0.54447)$. Тот факт, что $\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ позволяет сделать вывод, что точки (Q_1, Q_2), принадлежащие в прямой задаче первой дисперсионной кривой, могут также принадлежать второй дисперсионной кривой. Решив прямую задачу для (α_2, β_2), убеждаемся в этом. Средняя погрешность восстановления составляет 0.05% (определялись четыре значащих цифры для координат точек дисперсионного множества).

Приведем пример, когда существование единственного решения удается установить через второе и третье условие теоремы. Решим прямую задачу при $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.01$. Выберем следующие три точки на второй и третьей дисперсионных ветвях: $H_1(2.10317, 1)$, $H_2(13.3779, 1)$, $H_3(13.3779, 8.36408)$. Для пары точек (H_1, H_2) выполняется второе условие теоремы и $(\alpha_1 = 0.00097,\ \beta_1 = 0.01004)$, $(\alpha_2 = -38.2018,\ \beta_2 = 0.31939)$. Для пары (H_1, H_3) также выполняется второе условие теоремы. Для пары точек (H_2, H_3) выполняется третье условие теоремы и $(\alpha_1 = 0.00125,\ \beta_1 = 0.01004)$, $(\alpha_2 = -99.3972,\ \beta_2 = -28.8104)$.

Таким образом, представлен метод восстановления параметров в граничных условиях для неоднородного цилиндрического волновода, обеспечивающий достаточную точность при точности входной информации порядка 10^{-4}. При повышении точности определения координат точек дисперсионного множества точность восстановления повышалась.

Литература

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач.—М.: Физматлит, 2006.—384 с.
2. *Gladwell G. M. L., Movahhedy M.* Reconstruction of mass-spring system from spectral data I: Theory // Inverse problems in engineering.—1995.—Vol. 1, № 2.—P. 179–189.
3. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения.—М.: Физматлит, 2009.—272 с.

4. *Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ахтямова А. А.* Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки.—2013.—Вып. 3.—С. 114–129.
5. *Аитбаева А. А., Ахтямов А. М.* Идентификация закрепленности и нагруженности одного из концов балки Эйлера — Бернулли по собственным частотам ее колебаний // Сиб. журн. индустр. математики.—2017.—Т. 20, № 1.—С. 3–10.
6. *Ватульян А. О., Васильев Л. В.* Об определении параметров упругого закрепления неоднородной балки // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС.—2015.—Вып. 3.—С. 14–19.
7. *Morassi A., Dilena M.* On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse Probl. Engrg.—2002.—Vol. 10, № 3.—P. 183—201.
8. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.—Киев: Наукова думка, 1981.—284 с.
9. *Шардаков И. Н., Шестаков А. П., Цветков Р. В.* Математическое моделирование волновых процессов в магистральных трубопроводах // XVII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 18–22 февраля 2013 г.). Тез. докл.—ИМСС УрО РАН, 2013.—С. 252.
10. *Ватульян А. О., Юров В. О.* О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания // Изв. РАН. Механика твердого тела.—2016, № 5.—С. 85–93.
11. *Абзалимов Р. Р., Ахтямов А. М.* Диагностика и виброзащита трубопроводных систем и хранилищ.—Уфимский гос. нефтяной технический ун-т, 2006.—118 с.
12. *Ватульян А. О., Юров В. О.* О свойствах дисперсионного множества для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 1.—С. 50–60.
13. *Айбиндер А. Б.* Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие.—М.: Недра, 1991.—287 с.
14. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. Изд. 2.—СПб.: БХВ-Петербург, 2011.—586 с.

Статья поступила 28 февраля 2018 г.

Ватульян Александр Ованесович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
заведующий отделом дифференциальных уравнений;

Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
заведующий кафедрой теории упругости
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Васильев Леонид Викторович
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
магистрант кафедры теории упругости
E-mail: leninid@mail.ru

Юров Виктор Олегович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений;

Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
аспирант кафедры теории упругости
E-mail: vitja.jurov@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-4689-4068

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 23–37

RESTORATION OF PARAMETERS IN THE BOUNDARY CONDITIONS FOR AN INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Vatulyan A. O.[1,2], Vasil'ev L. V.[2], Yurov V. O.[1,2]
[1] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS;
[2] Southern Federal University

Abstract. Identification of different characteristics of solid bodies according to the acoustic sounding data has been increasingly attracting the attention of researchers in recent years. In the present paper, we investigate a new inverse problem on determining two parameters (bedding values) entering into the boundary conditions for the boundary-value problem. The boundary problem describes the waves propagation in a hollow inhomogeneous cylindrical waveguide located in a medium. We have performed the solution of this problem previously, we have studied the structure of the dispersion set and obtained the several formulae. These formulae correlate with spectral parameters and bedding values. We have treated the auxiliary Cauchy problems which automatically satisfy boundary conditions on the cylinder's internal boundary. Solution of boundary problem is found in the form of a linear combination of auxiliary problems. Boundary conditions at the outer boundary are satisfied. For the existence of a nontrivial solution, it is required that the determinant of the emergent system of algebraic equations is zero. Reconstruction of bedding values have been carried out from information on two points of the dispersion set; at that, the approach to solving the inverse problem did not require the explicit representation of the dispersion set. The solution of the inverse problem does not always satisfy a priori information on the non-negativity of the bedding values. In order to obtain a unique reconstruction of the parameters, a unicity theorem is formulated. At the initial stage, the theorem allows to filter out pairs of points of the dispersion set for which there is no solution or it is not unique. Computational experiments show the prevalence of the situation when the dispersion curves can be carried out uniquely through two given points of the dispersion set. Within the framework of the work, an effective method of selecting a pair of parameters with a small error in the input data is to consider the third point of the dispersion set. It is revealed that the reconstruction method presented allows to restore the required parameters with a high enough accuracy.

Key words: cylindrical waveguide, dispersion set, reconstruction, elastic fixing.

References

1. *Yurko V. A. Vvedenie v teoriyu obratnyh spektral'nyh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Moscow, Fizmatlit, 2006, 384 p. (in Russian).
2. *Gladwell G. M. L., Movahhedy M.* Reconstruction of Mass-Spring System From Spectral Data I: Theory. *Inverse Problems in Engineering*, 1995, vol. 1, no. 2, pp. 179–189. DOI: 10.1080/174159795088027578.
3. *Akhtyamov A. M. Teoriya identifikacii kraevyh uslovij i eyo prilozheniya* [Theory of Identification of Boundary Conditions and its Applications], Moscow, Fizmatlit, 2009, 272 p. (in Russian).
4. *Akhtyamov A. M., Muftahov A. V., Akhtyamova A. A.* On the Determination of the Fixation and Loading of one of the Ends of a Rod According to the Natural Frequencies of its Oscillations. *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki* [Herald of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computers of Science], 2013. vol. 3, pp. 114–129 (in Russian).
5. *Aitbaeva A. A., Ahtyamov A. M.* Identification of Fixedness and Loading of an End of the Euler–Bernoulli Beam by the Natural Frequencies of its Vibrations. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2017, vol. 11, no. 1, pp. 1–7. DOI: 10.1134/S199047891701001X.
6. *Vatulyan A. O., Vasilev L. V.* Determination of the Parameters of an inHomogeneous Beam Elastic Fixation. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov CHEHS* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2015, no. 3, pp. 14–20 (in Russian).

7. *Morassi A., Dilena M.* On Point Mass Identification in Rods and Beams from Minimal Frequency Measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 2002, vol. 10, no. 3, pp. 183–201. DOI: 10.1080/10682760290010378.
8. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah* [Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies], Kiev, "Nauk. dumka", 1981, 284 p. (in Russian).
9. *Shardakov I. N., Shestakov A. P., Cvetkov R. V.* Mathematical Modeling of Wave Processes in Main Pipelines. *XVII Zimnyaya shkola po mekhanike sploshnyh sred. Perm'. 18–22 Fevralya 2013g. Tezisy dokladov* [XVII Winter School on the Mechanics of Continuous Media. Perm, February 18–22, 2013. Abstracts of Reports], IMSS Uro RAN, 2013, 252 p. (in Russian).
10. *Vatul'yan A. O., Yurov V. O.* On the Dispersion Relations for an Inhomogeneous Waveguide With Attenuation. *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, p. 576–582. DOI: 10.3103/S0025654416050101 (10.3103/S0025654417010137).
11. *Abzalimov R. R., Akhtyamov A. M. Diagnostika i vibrozashchita truboprovodnykh sistem i khranilishch* [Diagnosis and Vibration Protection of Pipeline Systems and Storags], Ufa State Petroleum Technological University, 2006, 118 p. (in Russian).
12. *Vatul'yan A. O., Yurov V. O.* On the Properties of a Dispersion Set for an Inhomogeneous Cylindrical Waveguide, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2018, vol. 20, no. 1, pp. 50–60 (in Russian). DOI 10.23671/VNC.2018.1.11397.
13. *Aybinder A. B. Raschet magistral'nykh i promyslovykh truboprovodov na prochnost' i ustoychivost': spravochnoe posobie* [Calculation of Main and Field Pipelines for Strength and Stability: Reference Book], Moscow, Nedra, 1991, 287 p. (in Russian).
14. *Kalitkin N. N. Chislennye metody: uchebnoe posobie* [Numerical Methods. Tutorial], SPb., BHV-SPb, 2011, 592 p. (in Russian).

Received February 28, 2018

Alexandr O. Vatulyan
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Street, Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: `vatulyan@math.rsu.ru`
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Leonid V. Vasiliev
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Street, Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: `leninid@mail.ru`

Victor O. Yurov
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS,
22 Markus Street, Vladikavkaz 362027, Russia
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Str., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: `vitja.jurov@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-4689-4068