

УДК 517.9; 539.3

О СВОЙСТВАХ ДИСПЕРСИОННОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А. О. Ватульян, В. О. Юров

На основе анализа операторного спектрального пучка с двумя параметрами исследованы дисперсионные соотношения для цилиндрического неоднородного по радиальной координате волновода с импедансными граничными условиями на внешней границе. Граничные условия позволяют моделировать условия свободной и жестко закрепленной внешней границы, а также промежуточные варианты, где напряжения и перемещения границы линейно связаны с помощью двух параметров. В осесимметричной постановке сформулирована спектральная задача в виде матричного дифференциального оператора 4 порядка относительно компонент векторов напряжений и смещений. Изучен ряд свойств, описывающих общую структуру дисперсионного множества. Сформулированы две спектральные задачи, из точек спектра которых аналитически продолжаются два семейства дисперсионных кривых, отличающиеся собственными функциями. Получены формулы, отражающие связь точек спектра с параметрами, входящими в граничные условия на внешней границе. На основе метода возмущений исследована структура кривых этих семейств. Доказанное в статье свойство разрешимости неоднородной задачи применено для построения асимптотического приближения компонент дисперсионного множества в области длинных волн. В низкочастотном диапазоне в частном случае построена явная зависимость угла наклона линейного участка первой дисперсионной кривой от одного из параметров граничных условий. При этом даже слабая связь касательных напряжений и продольных перемещений приводит к изменениям, при которых асимптотика не справедлива. Изложены схемы численного построения компонент дисперсионных кривых на основе метода пристрелки. Представлены результаты вычислительных экспериментов для двух видов радиальной неоднородности. Выявлены точки дисперсионного множества, не меняющие своего положения в зависимости от параметров в граничных условиях.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11397.

Ключевые слова: дисперсионные соотношения, цилиндрический волновод, импедансные граничные условия, неоднородность.

1. Введение

Исследование распространения волн в неоднородных волноводах, погруженных в упругую среду, имеет приложения к акустическим методам диагностики конструкций ответственного назначения и также к биомеханике крупных кровеносных сосудов. Задачи о волнах сводятся к отысканию нетривиальных решений краевых задач с двумя спектральными параметрами, которые образуют дисперсионное множество. Для однородных волноводов это множество подробно изучено в литературе. В частности, для цилиндрического однородного волновода дисперсионное уравнение строится в явном виде через цилиндрические функции [1, 2]. Особенности строения дисперсионного множества в случае неоднородного волновода изучены в меньшей степени и опираются как на теорию операторных спектральных пучков [3–5], так и на численные и асимптотические методы [5]. Полиномиальные операторные пучки с общих позиций изучались в [6].

Погруженные в среду волноводы часто изучаются с применением конечноэлементных (КЭ) пакетов. Так, в работе [7] изучается распространение волн в полом цилиндрическом волноводе в бесконечную среду, которая моделируется комбинацией цилиндрического слоя из конечных элементов и цилиндрического слоя элементов, задающих поведение искомых функций на бесконечности. Получены дисперсионные кривые как осесимметричных, так и неосесимметричных волновых форм, достаточно внимания уделено вопросам КЭ-сходимости. В [8] для моделирования внешней среды, контактирующей с волноводом произвольного сечения, используется поглощающая область, в которой поглощение растет с удалением от волновода. В частности, поглощающая область обладает той же массой и упругими свойствами, что и окружающая среда, но мнимые части ее комплексных модулей постепенно увеличиваются.

2. Постановка задачи

Рассмотрим волны в неоднородном по радиальной координате полом цилиндрическом волноводе в условиях осесимметричного деформирования. Внутренняя граница волновода $r = a$ свободна от нагрузок, на внешней $r = b$ сформулированы импедансные граничные условия, моделирующие контакт с упругой средой: $b\sigma_r(b) + c_1u_r(b) = 0$, $b\sigma_{rz}(b) + c_2u_z(b) = 0$.

Осесимметричная форма уравнений движения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Определяющие соотношения в изотропном случае задаются следующими формулами:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь u_r, u_z — компоненты вектора перемещений, $\sigma_r, \sigma_{rz}, \sigma_\varphi, \sigma_z$ — компоненты тензора напряжений Коши, λ, μ — параметры Ламе, которые зависят от радиальной координаты. Будем искать решение уравнений (1)–(2) в полом цилиндре со свободной внутренней границей и с описанными выше импедансными граничными условиями на внешней границе (они связывают радиальные и касательные напряжения на внешней границе с ее перемещениями) в виде бегущих волн с частотой ω и волновым числом k , это означает, что все компоненты физических полей пропорциональны множителю $\exp(i(kz - \omega t))$.

Введем следующие безразмерные параметры и переменные: $\xi_0 = \frac{a}{b}$ — безразмерный внутренний радиус, $\mu_0 = (1 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^1 \mu(x) dx$ — осредненный по толщине стенки цилиндра модуль сдвига, $u_r = bU_1$, $u_z = ibU_3$, $\sigma_r = \mu_0 T_1$, $\sigma_{rz} = i\mu_0 T_3$, $\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{\mu_0}$, $\gamma = kb$, $\lambda = \mu_0 g_1$, $\mu = \mu_0 g_2$, $g_1 + 2g_2 = G$.

С целью исследования произвольной неоднородности, связанной с переменностью упругих свойств, сформулируем краевую задачу относительно амплитуд и представим возникающую спектральную задачу в виде матричного дифференциального уравнения первого порядка (3) с импедансными граничными условиями (4)

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \gamma \mathbf{A}_1 + \gamma^2 \mathbf{A}_2) \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = (U_1, U_3, T_1, T_3)^T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} T_1(\xi_0) = 0, \quad T_1(1) = -\alpha U_1(1), \quad \alpha \geq 0, \\ T_3(\xi_0) = 0, \quad T_3(1) = -\beta U_3(1), \quad \beta \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрица коэффициентов оператора (3) представлена в виде квадратичного пучка от спектральных параметров κ, γ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{-g_1}{xG} & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_2} \\ \frac{4g_2(g_1+g_2)}{x^2G} & 0 & -\frac{2g_2}{xG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1}{G} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2g_2g_1}{xG} & 0 & 1 \\ -\frac{2g_2g_1}{xG} & 0 & -\frac{g_1}{G} & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4g_2(g_1+g_2)}{G} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что выбранные в качестве неизвестных в векторном уравнении физические величины позволяют получить систему с вещественной матрицей, с компонентами, не содержащими производных от материальных функций $g_1(x), g_2(x)$. Это позволяет анализировать с единых позиций непрерывные и кусочно-разрывные законы неоднородности. Задача состоит в нахождении таких соотношений (дисперсионных) между спектральными параметрами κ, γ , при которых существуют нетривиальные решения спектральной задачи (3), (4). Прежде всего отметим, что случай $\alpha = \beta = 0$ (свободная внешняя граница) исследован ранее (однородный случай в [1, 2], где дисперсионные соотношения строятся явно через цилиндрические функции), случай переменных свойств изучен в [9], где составлен алгоритм исследования неоднородного по радиальной координате волновода со свободными границами и получена асимптотика дисперсионной кривой, выходящей из начала координат. Подобным образом исследованы волновые процессы в предварительно напряженном цилиндре в [10].

3. Общая структура дисперсионного множества

При помощи анализа спектральной задачи (3), (4) сформулируем следующие свойства.

1. При $\kappa = 0, \gamma \neq 0$ существует счетный набор комплексных корней, которые располагаются четверками: $\gamma, -\gamma, \bar{\gamma}, -\bar{\gamma}$ на комплексной плоскости $\text{Re}(\gamma), \text{Im}(\gamma)$.

2. При $\gamma = 0$ существует счетный набор нетривиальных решений, задача разделяется на две подзадачи, различающиеся кинематикой нетривиальных (однородных) решений.

ЗАДАЧА 1.

$$\begin{cases} U_3' = \frac{1}{g_2} T_3, & T_3' = -\kappa^2 U_3 - \frac{1}{x} T_3; \\ T_3(\xi_0) = 0, & T_3(1) = -\beta U_3(1). \end{cases} \quad (5)$$

ЗАДАЧА 2.

$$\begin{cases} U_1' = \frac{-g_1}{xG} U_1 + \frac{1}{G} T_1, & T_1' = \left(\frac{G}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2 G} - \kappa^2 \right) U_1 - \frac{2g_2}{xG} T_1; \\ T_1(\xi_0) = 0, & T_1(1) = -\alpha U_1(1). \end{cases} \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что задачи (5), (6) всегда имеют тривиальные решения. Пусть K_1 есть множество собственных значений $\kappa_1 \geq 0$ задачи (5), при которых она имеет нетривиальное решение, и K_2 есть множество собственных значений $\kappa_2 \geq 0$ задачи (6) соответственно. Введем множество $K = K_1 \cup K_2$. Заметим, что у множеств K_1, K_2 могут быть

одинаковые элементы, которые порождают кратные корни (в дальнейшем этот случай не рассматривается, поскольку кратные ситуации легко разрушаются шевелением параметров задачи).

Ниже отметим свойства введенных множеств.

Свойство 1. Если $\beta = 0$, то K_1 содержит нулевой элемент.

◁ Действительно, задача (5) при $\beta = 0$, $\kappa = 0$ имеет ненулевое решение $T_3 = 0$, $U_3 = 1$. ▷

Свойство 2. Если $\kappa_1 \in K_1$ и U_3, T_3 — нетривиальные решения задачи (5), то U_3, T_3 удовлетворяют следующему соотношению:

$$\kappa_1^2 = \left(\beta U_3^2(1) + \int_{\xi_0}^1 \frac{x T_3^2}{g_2} dx \right) / \int_{\xi_0}^1 x U_3^2 dx. \quad (7)$$

◁ Запишем второе уравнение из (5) в следующем виде: $\frac{(T_3 x)'}{x} = -\kappa_1^2 U_3$. Далее умножим обе его части на $U_3 x$ и проинтегрируем по отрезку $[\xi_0, 1]$. Интегрируя по частям и заменяя U_3' выражением из первого уравнения в (5), получим соотношение (7). ▷

Следствие 1. Пусть $\kappa_1 \in K_1$. Тогда $\kappa_1 > 0$ при $\beta \neq 0$.

Свойство 3. Если $\kappa_2 \in K_2$ и U_1, T_1 — нетривиальные решения задачи (6), то U_1, T_1 удовлетворяют следующему соотношению:

$$\kappa_2^2 = \frac{\alpha U_1^2}{(1)} + \int_{\xi_0}^1 \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{xG} U_1^2 dx + \int_{\xi_0}^1 \frac{x T_1^2}{G} dx \int_{\xi_0}^1 x U_1^2 dx. \quad (8)$$

◁ Умножим второе уравнение в (6) на $U_1 x$ и проинтегрируем по отрезку $[\xi_0, 1]$. Интегрируя по частям и заменяя U_1' выражением из (6), получим

$$-\alpha U_1^2(1) - \int_{\xi_0}^1 \frac{x T_1^2}{G} dx + \int_{\xi_0}^1 \left(\frac{g_1}{G} + \frac{2g_2}{G} - 1 \right) T_1 U_1 dx = \int_{\xi_0}^1 \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{xG} U_1^2 dx - \kappa_2^2 \int_{\xi_0}^1 x U_1^2 dx.$$

Учитывая, что третье слагаемое в левой части этого равенства равно нулю, получим соотношение (8). ▷

Следствие 2. Пусть $\kappa_2 \in K_2$. Тогда $\kappa_2 > 0$ для любого α .

◁ Предположим противное, т. е. что $\kappa_2 = 0$ и $\kappa_2 \in K_2$. Но при $\kappa_2 = 0$ задача (6) для любого α имеет только тривиальное решение и, следовательно, $\kappa_2 \notin K_2$. ▷

Свойство 4. Пусть $\kappa_1 \in K_1$ и $\kappa_2 \in K_2$. Тогда из точек $(\kappa = \kappa_1, \gamma = 0)$ ($\kappa = \kappa_2, \gamma = 0$) аналитически продолжают вещественные кривые дисперсионного множества. В монографии [4] это свойство доказано для слоя путем построения разложений в ряды, а в рассмотренном случае обоснование аналогично.

Свойство 5. Для неоднородной задачи (9), (10):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}, \quad \text{где } \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \gamma \mathbf{A}_1 + \gamma^2 \mathbf{A}_2; \quad (9)$$

$$\begin{cases} T_1(\xi_0) = 0, & T_1(1) + \alpha U_1(1) + R_1(1) = 0, & \alpha \geq 0; \\ T_3(\xi_0) = 0, & T_3(1) + \beta U_3(1) + R_3(1) = 0, & \beta \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

которая при $R_1(1) = 0$, $R_3(1) = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ вырождается в задачу (3), (4), имеет место условие разрешимости (11), где U_1, U_3, T_1, T_3 — решения задачи (3), (4):

$$R_1(1)U_1(1) + R_3(1)U_3(1) = \int_{\xi_0}^1 (f_1T_1 + f_2T_3 - f_3U_1 - f_4U_3) x dx. \quad (11)$$

◁ Пусть $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ — обычное скалярное произведение векторов. Введем

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_{\xi_0}^1 \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} x dx.$$

Умножим векторное уравнение (9) на пробный вектор \mathbf{Y} справа, используя введенное умножение, а затем в левой части осуществим интегрирование по частям:

$$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) x \Big|_{\xi_0}^1 - \int_{\xi_0}^1 (\mathbf{X}, (x\mathbf{Y})') dx = (\mathbf{X}, \mathbf{A}^T \mathbf{Y}) + (\mathbf{F}, \mathbf{Y}). \quad (12)$$

Потребуем, чтобы вектор \mathbf{Y} являлся решением сопряженного уравнения

$$-(x\mathbf{Y})' = x\mathbf{A}^T \mathbf{Y}. \quad (13)$$

Для формулировки соответствующих граничных условий для \mathbf{Y} рассмотрим первое слагаемое в (12) с учетом граничных условий (10):

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) x \Big|_{\xi_0}^1 &= \left[U_1(1)(Y_1(1) - \alpha Y_3(1)) + U_3(1)(Y_2(1) - \beta Y_4(1)) \right. \\ &\quad \left. - R_1(1)Y_3(1) - R_3(1)Y_4(1) \right] - \left[U_1(\xi_0)Y_1(\xi_0)\xi_0 + U_3(\xi_0)Y_2(\xi_0)\xi_0 \right]. \end{aligned}$$

Подчиним \mathbf{Y} следующим граничным условиям (14), для которых при $R_1(1) = 0$, $R_3(1) = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ справедливо равенство $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) x \Big|_{\xi_0}^1 = (\mathbf{F}, \mathbf{Y})$,

$$Y_1(\xi_0) = 0, \quad Y_2(\xi_0) = 0, \quad Y_1(1) - \alpha Y_3(1) = 0, \quad Y_2(1) - \beta Y_4(1) = 0. \quad (14)$$

Заметим, что решение задачи (13), (14) связано с решением (3), (4) следующим образом:

$$Y_1(x) = -T_1(x), \quad Y_2(x) = -T_3(x), \quad Y_3(x) = U_1(x), \quad Y_4(x) = U_3(x).$$

С учетом вышеизложенного перепишем (12) и получим условие разрешимости (11). ▷

Свойство 6. При любом фиксированном γ $\frac{\partial \kappa^2}{\partial \beta} > 0$ и $\frac{\partial \kappa^2}{\partial \alpha} > 0$.

◁ Докажем первое утверждение. Продифференцируем задачу (3), (4) по β при фиксированном параметре γ , получим неоднородную краевую задачу относительно $\frac{\partial U_1}{\partial \beta}$, $\frac{\partial U_3}{\partial \beta}$, $\frac{\partial T_1}{\partial \beta}$, $\frac{\partial T_3}{\partial \beta}$. Используя свойство 5 и учитывая вид правых частей $f_3 = -\frac{\partial \kappa^2}{\partial \beta} U_1$, $f_4 = -\frac{\partial \kappa^2}{\partial \beta} U_3$, $R_3(1) = U_3(1)$, $R_1(1) = 0$, получим, что $\frac{\partial \kappa^2}{\partial \beta} = U_3^2(1) \left(\int_{\xi_0}^1 x U_1^2 + x U_3^2 dx \right)^{-1}$. Аналогичным образом получим, что $\frac{\partial \kappa^2}{\partial \alpha} = U_1^2(1) \left(\int_{\xi_0}^1 x U_1^2 + x U_3^2 dx \right)^{-1}$. Правые части в этих соотношениях являются строго положительными величинами, что и доказывает свойство 6. ▷

Асимптотический анализ. Исследуем структуру дисперсионных кривых в окрестности линии $\gamma = 0$. Пусть $\kappa_0 \in \mathbb{K}$ и не является кратным собственным значением, т. е. не принадлежит одновременно \mathbb{K}_1 и \mathbb{K}_2 . Будем искать разложение вида $\kappa^2 = \kappa_0^2 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \dots$, а решение задачи (3), (4) будем отыскивать в виде регулярного разложения по γ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \gamma\mathbf{X}_1 + \gamma^2\mathbf{X}_2 + o(\gamma^2). \quad (15)$$

Сформируем задачи при одинаковых степенях γ :

$$\mathbf{X}'_0 = (\mathbf{A}_0 - \kappa_0^2\mathbf{A}_{01}) \mathbf{X}_0, \quad (16)$$

$$\mathbf{X}'_1 = (\mathbf{A}_0 - \kappa_0^2\mathbf{A}_{01}) \mathbf{X}_1 + \mathbf{F}_1, \quad \text{где } \mathbf{F}_1 = (\mathbf{A}_1 - a_1\mathbf{A}_{01}) \mathbf{X}_0, \quad (17)$$

$$\mathbf{X}'_2 = (\mathbf{A}_0 - \kappa_0^2\mathbf{A}_{01}) \mathbf{X}_2 + \mathbf{F}_2, \quad \text{где } \mathbf{F}_2 = (\mathbf{A}_1 - a_1\mathbf{A}_{01}) \mathbf{X}_1 + (\mathbf{A}_2 - a_2\mathbf{A}_{01}) \mathbf{X}_0. \quad (18)$$

Отметим, что задача (16) с точностью до индексов описывается (5), (6), системы (17), (18) как и (16) разделяются на две подсистемы и определены тем же дифференциальным оператором $L = \frac{d}{dx} - \mathbf{A}_0 + \kappa_0^2\mathbf{A}_{01}$ и имеют правые части. Вектор $\mathbf{F}_i = (f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i})^T$ зависит от решений предыдущих задач.

Свойство 7. Задачи (17), (18) имеют решение, если выполнены условия разрешимости:

$$\int_{\xi_0}^1 [f_{4i}U_{30} - f_{2i}T_{30}] x dx = 0, \quad \text{если } \kappa_0 \in \mathbb{K}_1, \quad (19)$$

$$\int_{\xi_0}^1 [f_{3i}U_{10} - f_{1i}T_{10}] x dx = 0, \quad \text{если } \kappa_0 \in \mathbb{K}_2. \quad (20)$$

◁ Доказательство основано на использовании (11) применительно к (17), (18). ▷

Используем условия разрешимости (19), (20) к задачам при γ^1 , для этого определим правые части в (17):

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{g_1}{G} U_{30}, & f_{31} &= -\frac{2g_1g_2}{xG} U_{30} + T_{30} - a_1U_{10}, \\ f_{21} &= -U_{10}, & f_{41} &= -\frac{2g_1g_2}{xG} U_{10} - \frac{g_1}{G} T_{10} - a_1U_{30}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в условия (19), (20), получим, что $a_1 = 0$ для обоих семейств.

Для задачи при γ^2 аналогично определим неоднородную часть в (18)

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{g_1}{G} U_{31}, & f_{32} &= -\frac{2g_1g_2}{xG} U_{31} + T_{31} - a_1U_{11} - a_2U_{10}, \\ f_{22} &= -U_{11}, & f_{42} &= -\frac{2g_1g_2}{xG} U_{11} - \frac{g_1}{G} T_{11} - a_1U_{31} - a_2U_{30} + \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{G} U_{30}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим (22) в условия (19), (20) и получим выражения (23), (24) для коэффициентов разложений a_2 для семейств задач 1 и 2 соответственно:

$$a_2 = b_3 \int_{\xi_0}^1 \left[U_{11}T_{30} - \frac{2g_1g_2}{xG} U_{11}U_{30} - \frac{g_1}{G} T_{11}U_{30} + \frac{4g_2(g_1 + g_2)}{G} U_{30}^2 \right] x dx, \quad (23)$$

$$a_2 = b_1 \left(\int_{\xi_0}^1 \left[T_{31} U_{10} - \frac{2g_1 g_2}{xG} U_{31} U_{10} - \frac{g_1}{G} U_{31} T_{10} \right] x dx \right), \quad b_j = \left(\int_{\xi_0}^1 U_{j0}^2 x dx \right)^{-1}. \quad (24)$$

Отметим, что знак a_2 определяет случай нормальной ($a_2 > 0$) и аномальной ($a_2 < 0$) дисперсии [4].

Низкочастотная асимптотика. В случае $\beta = 0$ удается установить наличие нетривиального решения в окрестности точки $\kappa = \gamma = 0$. Получим формулу наклона дисперсионной кривой, выходящей из начала координат. Нетривиальное решение задачи при γ^0 имеет вид $U_{10}(x) = T_{10}(x) = T_{30}(x) = 0$, $U_{30}(x) = 1$ и позволяет упростить формулу (23) до следующего вида:

$$a_2 = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \left(\int_{\xi_0}^1 \left[\frac{4g_2(g_1 + g_2)}{G} - \frac{2g_1 g_2}{xG} U_{11} - \frac{g_1}{G} T_{11} \right] x dx \right). \quad (25)$$

В случае постоянных g_1, g_2 можно построить точное решение для U_{11}, T_{11} :

$$U_{11}(x) = \frac{1}{2x} \frac{g_1(\alpha \xi_0^2 + x^2)(2\xi_0^2 g_2 - 2g_2 - \alpha \xi_0^2)}{2(g_1 g_2 + g_2^2)(\xi_0^2 - 1) - \alpha((g_1 + g_2)\xi_0^2 + g_2)}, \quad (26)$$

$$T_{11}(x) = \frac{1}{x^2} \frac{g_1 g_2 \alpha (x^2 - \xi_0^2)}{2(g_1 g_2 + g_2^2)(\xi_0^2 - 1) - \alpha((g_1 + g_2)\xi_0^2 + g_2)},$$

а формула (25) принимает следующий вид:

$$a_2 = t^2 = \frac{g_2 [2(3g_1 g_2 + 2g_2^2)(\xi_0^2 - 1) - ((3g_1 + 2g_2)\xi_0^2 + g_1 + 2g_2)\alpha]}{2(g_1 g_2 + g_2^2)(\xi_0^2 - 1) - ((g_1 + g_2)\xi_0^2 + g_2)\alpha}. \quad (27)$$

Формула (27) определяет монотонно возрастающую функцию $t(\alpha) = \sqrt{a_2(\alpha)}$. Например, при $\xi_0 = 0.76$, $g_1 = 1.5$, $g_2 = 1$ область значений функции $t(\alpha)$ лежит в достаточно узком диапазоне $[1.612, 1.723]$, $\alpha \in [0, \infty)$.

Численный анализ. С помощью метода пристрелки произведен численный анализ дисперсионного множества. Исходная задача (3), (4) сведена к решению двух вспомогательных задач Коши (3), (28) и (3), (29), которые не содержат параметров граничных условий α, β :

$$U_1(\xi_0) = 1, \quad U_3(\xi_0) = 0, \quad T_1(\xi_0) = 0, \quad T_3(\xi_0) = 0, \quad (28)$$

$$U_1(\xi_0) = 0, \quad U_3(\xi_0) = 1, \quad T_1(\xi_0) = 0, \quad T_3(\xi_0) = 0. \quad (29)$$

Искомое решение разыскивается в виде линейной комбинации (30) решений задач (3), (28) и (3), (29):

$$\mathbf{X} = p_1 \mathbf{X}_1 + p_2 \mathbf{X}_2. \quad (30)$$

Решение (30) удовлетворяет граничным условиям на внутренней границе, а при удовлетворении граничным условиям на внешней границе получаем линейную алгебраическую систему (31) относительно пристрелочных параметров p_1, p_2 :

$$p_1 \left(T_1^{(1)} + \alpha U_1^{(1)} \right) + p_2 \left(T_1^{(2)} + \alpha U_1^{(2)} \right) = 0, \quad (31)$$

$$p_1 \left(T_3^{(1)} + \beta U_3^{(1)} \right) + p_2 \left(T_3^{(2)} + \beta U_3^{(2)} \right) = 0.$$

Решением дисперсионного уравнения $D(\kappa, \gamma) = 0$ будем считать набор спектральных параметров (κ, γ) , обращающих определитель пристрелочной системы (31) в нуль. При группировке определителя системы (31) для произвольных параметров α, β прослеживается структура дисперсионного множества (32), причем при $\alpha, \beta = 0$ условия (4) означают свободную внешнюю границу, случай $\alpha, \beta = \infty$ означает жесткую заделку внешней границы волновода, а случай $\alpha = \infty, \beta = 0$ соответствует волноводу, находящемуся в жесткой обойме без трения:

$$D(\gamma, \kappa) = S_0 + S_\alpha \alpha + S_\beta \beta + S_{\alpha\beta} \alpha \beta = 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \left(T_1^{(1)} T_3^{(2)} - T_1^{(2)} T_3^{(1)} \right), & S_\alpha &= \left(U_1^{(1)} T_3^{(2)} - U_1^{(2)} T_3^{(1)} \right), \\ S_\beta &= \left(T_1^{(1)} U_3^{(2)} - T_1^{(2)} U_3^{(1)} \right), & S_{\alpha\beta} &= \left(U_1^{(1)} U_3^{(2)} - U_1^{(2)} U_3^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Произведем моделирование различных неоднородностей в упрощенном виде, принимая коэффициент Пуассона постоянным: $\nu = 0.3$ и принимая $g_1(x) = 1.5s(x)$, $g_2(x) = s(x)$. Рассмотрим далее несколько законов неоднородности, выбранных таким образом, чтобы $(1 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^1 s(x) dx = 1$. Таковыми, например, являются

$$s_1(x) = 1, \quad s_2(x) = \frac{5(1 + x^4)}{\xi_0^4 + \xi_0^3 + \xi_0^2 + \xi_0 + 6}, \quad (34)$$

где $s_1(x)$ соответствует однородному материалу, $s_2(x)$ — возрастающему модулю упругости.

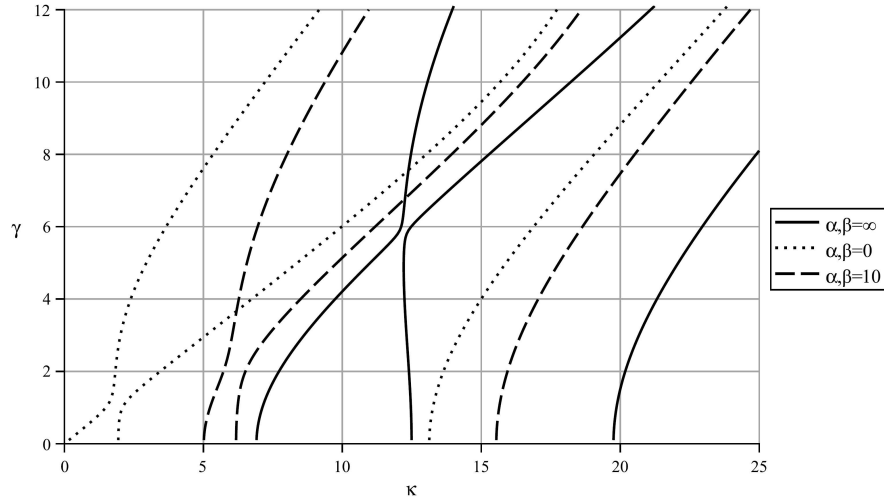


Рис. 1.

На рис. 1 изображена общая структура компонент дисперсионного множества в случаях $\alpha, \beta = 0$, $\alpha, \beta = 10$ и $\alpha, \beta = \infty$, $s(x) = s_1(x)$. Численный анализ показывает, что при увеличении α, β все компоненты дисперсионного множества сдвигаются вправо вдоль частотной оси в соответствии со свойством 6.

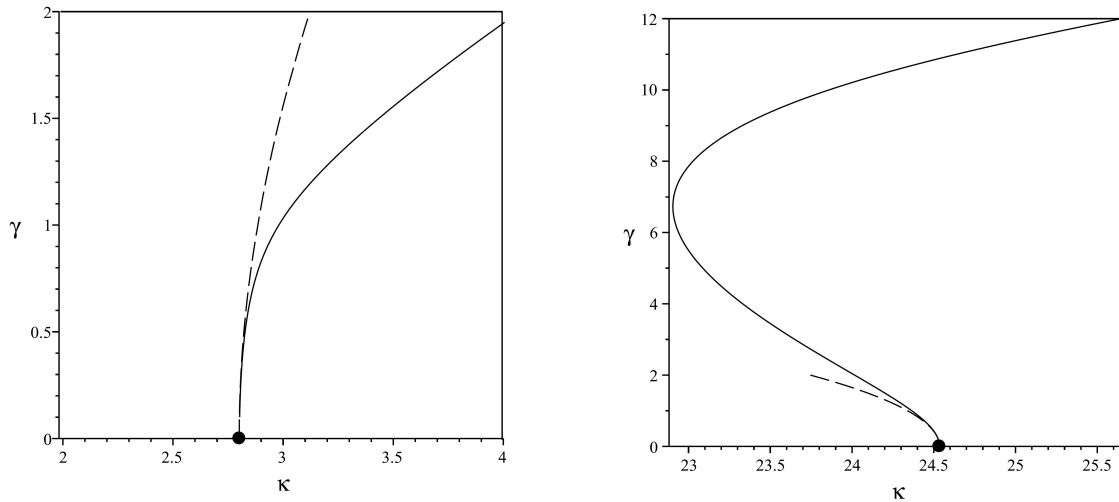


Рис. 2.

На рисунках 2 и 3 проведено сравнение численно полученных дисперсионных ветвей (сплошная линия) с квадратичным приближением ветвей вида $\kappa^2 = \kappa_0^2 + a_2\gamma^2$ (пунктир). Расчеты проведены при следующем наборе параметров $s(x) = s_2(x)$, $\xi_0 = 0.76$, $\alpha = \beta = 1$. Для апробации формул (23) и (24) выбраны такие собственные значения задач (5) и (6), из которых можно продолжить дисперсионные кривые, проявляющие нормальную и аномальную дисперсию; сравнение результатов показало их практическое совпадение в окрестности $\gamma = 0$ в соответствии с (23) и (24).

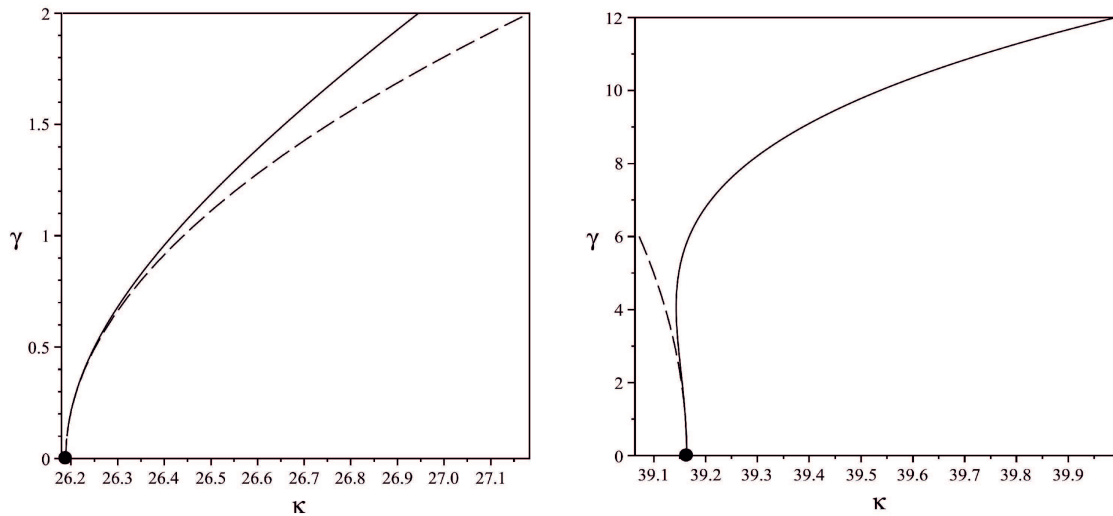


Рис. 3.

Заключение. Исследована структура дисперсионного множества в зависимости от параметров граничных условий α, β . Выявлено наличие ряда точек дисперсионного множества, не меняющихся при изменении параметра α или β . Построены асимптотические приближения дисперсионного множества при малом γ , которые позволяют анализировать стержневые моды, различать случаи нормальной и аномальной дисперсии. Проведена серия расчетов, проведено сравнение с асимптотиками.

Литература

1. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.*—1876.—Vol. 81.—P. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *J. Quart. Pure Appl. Math.*—1886.—Vol. 21.—P. 287–298.
3. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи // *Функцион. анализ и его прилож.*—1983.—Т. 17, вып. 2.—С. 38–61.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979.—320 с.
5. *Гетман И. П., Устинов Ю. А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов.—Ростов н/Д.: РГУ, 1993.—144 с.
6. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.—Кишинев: Штиинца, 1986.—260 с.
7. *Jia H., Jing M., Rose J. L.* Guided wave propagation in single and double layer hollow cylinders embedded in infinite media // *J. Acoust. Soc. Am.*—2011.—Vol. 129, № 2.—P. 691–700. DOI: 10.1121/1.3531807.
8. *Castangs M., Lowe M.* Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media // *J. Acoust. Soc. Am.*—2008.—Vol. 123, № 2.—P. 696–708. DOI: 10.1121/1.2821973.
9. *Ватульян А. О., Моргунова А. В.* Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // *Акуст. журн.*—2015.—№ 3.—С. 295–301.
10. *Ватульян А. О., Юров В. О.* Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // *Прикл. математика и теор. физика.*—2016.—Т. 57, № 4.—С. 182–191.

Статья поступила 11 июля 2017 г.

Ватульян Александр Ованесович
Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
заведующий отделом дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru;

Юров Виктор Олегович
Южный федеральный университет,
магистрант кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vitja.jurov@yandex.ru

ON THE PROPERTIES OF THE DISPERSION SET
FOR AN INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Vatulyan A. O., Yurov V. O.

On the basis of the analysis of an operator spectral beam with two parameters, the dispersion relations for a cylindrical waveguide, inhomogeneous in the radial coordinate, with impedance boundary conditions on the external boundary are investigated. This boundary conditions permit to simulate free and clamped external boundary conditions as well as intermediate options. The stresses and displacements on the boundary are linearly related by means of two parameters. In the axisymmetric formulation, the spectral problem in the form of matrix differential operator of the 4th order with respect to the stress and displacement vectors components is formulated. A number of properties describing the general structure of the dispersion set are studied. Two spectral problems are formulated with two families of dispersion curves which are analytically continued from the points of the spectrum and differing by their eigenfunctions. Formulae reflecting the connection of the spectrum points with parameters entering the

boundary conditions at the outer boundary are obtained. Based on the perturbation method, the structure of the curves of families considered is investigated. The property of solvability of the inhomogeneous problem proved in the article was used to construct an asymptotic approximation of the dispersion set components in the region of long waves. In the low-frequency range, in the particular case, the explicit dependence of the first dispersion curve slope angle on one of the parameters of the boundary conditions is constructed. At that, even a weak relationship between shear stresses and longitudinal displacements leads to changes for which the asymptotic behavior is not valid. On the basis of the shooting method, the schemes of constructing the dispersion curves components are stated. The results of the computational experiments for two kinds of radial inhomogeneity are presented. The dispersion set points that do not change their position depending on the boundary conditions parameters are revealed.

Key words: dispersion relations, cylindrical waveguide, inhomogeneity, impedance boundary conditions.

References

1. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder, *J. Reine Angew. Math.*, 1876, vol. 81, pp. 324–336.
2. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar, *J. Quart. Pure Appl. Math.*, 1886, vol. 21, pp. 287–298.
3. Kostyuchenko A. G., Shkalikov A. A. Self-adjoint quadratic operator pencils and elliptic problems, *Funct. Anal. Appl.*, 1983, vol. 17, pp. 109–128. DOI: 10.1007/BF01083136.
4. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastej* [Dynamic Mixed Elastic Problems for Nonclassical Regions], Moscow, Nauka, 1979, 320 p. (in Russian).
5. Getman I. P., Ustinov Yu. A. *Matematicheskaya teoriya neregulyarnykh tverdykh volnovodov* [Mathematical Theory of Irregular Solid Waveguides], Rostov-on-Don, Izdat. RGU, 1993, 144 p. (in Russian).
6. Markus A. S. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Sheaf], Kishinev, Shtiintsa, 1986, 260 p. (in Russian).
7. Jia H., Jing M., Rose J. L. Guided wave propagation in single and double layer hollow cylinders embedded in infinite media, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, vol. 129, pp. 691–700. DOI: 10.1121/1.3531807.
8. Castaings M., Lowe M. Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, vol. 123, pp. 696–708. DOI: 10.1121/1.2821973.
9. Vatulyan A. O., Morgunova A. V. Study of the dispersion properties of cylindrical waveguides with variable properties, *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 265. DOI: 10.1134/S1063771015020141.
10. Vatulyan A. O., Yurov V. O. Wave processes in a hollow cylinder in an inhomogeneous prestress field, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, pp. 731–739. DOI: 10.1134/S0021894416040180.

Received July 11, 2017

VATULYAN ALEXANDR OVANESOVICH
 Southern Mathematical Institute — the Affiliate
 of Vladikavkaz Science Center of the RAS,
 The Head of the Department of Differential Equations
 22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
 Southern Federal University,
 The Head of the Department of Elasticity Theory
 8 a Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, 344090, Russia
 E-mail: vatulyan@math.rsu.ru
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

YUROV VICTOR OLEGOVICH
 Southern Federal University
 Post-Graduate Student of the Department of Elasticity Theory
 8 a Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, 344090, Russia
 E-mail: vitja.jurov@yandex.ru
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>