Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 58–72

УДК **517.587**

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МЕЙКСНЕРА

И. И. Шарапудинов, З. Д. Гаджиева, Р. М. Гаджимирзаев

Рассмотрен вопрос о представлении решения задачи Коши для разностного уравнения r-го порядка с переменными коэффициентами и заданными начальными условиями в точке $x = 0$ путем разложения его решения в ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву на сетке $(0, 1, \ldots)$. Указанное представление базируется на конструировании новых полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими полиномами Мейкснера. Для новых полиномов получена явная формула, содержащая многочлены Мейкснера. Этот результат позволяет исследовать асимптотические свойства сконструированных новых полиномов, ортогональных по Соболеву на сетке $(0, 1, \ldots)$ с заданным весом. Кроме того, это позволяет решить проблему, связанную с вычислением новых полиномов, сводя ее к применению известных рекуррентных соотношений для классических полиномов Мейкснера.

Ключевые слова: разностное уравнение, ортогональные по Соболеву полиномы, ортогональные на сетке полиномы Мейкснера, приближение дискретных функций, смешанные ряды по полиномам Мейкснера.

1. Введение

В настоящей статье рассмотрен вопрос о представлении решения задачи Коши разностного уравнения

$$\sum_{l=0}^{r} a_l(j)\Delta^l y(j) = f(j), \quad j \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями $\Delta^l y(0) = y_l$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, путем разложения $y(j)$ на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ в ряд Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву на Ω, где функции a_l, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, заданы на множестве Ω, $\Delta^l y$ — оператор конечной разности порядка l. Такая задача представляет интерес не только сама по себе, но и в связи с тем, что к ней может быть сведена проблема о приближенном решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$\sum_{l=0}^{r} a_l(t) y^{(l)}(t) = f(t)$$

с начальными условиями $y^{(l)}(0) = y_l$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$. Заметим, что уравнение (1) можно переписать в следующем рекуррентном виде:

$$a_r(j) y(j+r) = \sum_{l=0}^{r-1} b_l(j) y(j+l) + f(j), \quad j \in \Omega, \tag{2}$$

в котором $b_l(j)$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, — заданные функции, определенные на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$. Если функция $|a_r(j)| \geqslant c > 0$, $j \in \Omega$, то точное решение уравнения (1) можно найти с помощью рекуррентной формулы (2). Если же для некоторых $j \in \Omega$ будет $a_r(j) = 0$, то найти соответствующие значения $y(j+r)$ с помощью равенства (2) не возможно. Кроме того, отметим еще, что если значения $f(j)$ функции f, фигурирующей в правой части уравнения (1), содержат погрешности измерений, то использование рекуррентной формулы (2) для нахождения решения задачи $y = y(j)$ может дать неудовлетворительные результаты даже в том случае, когда $|a_r(j)| \geqslant c > 0$, $j \in \Omega$. Таким образом, возникает задача о поиске альтернативных методов решения уравнения (1).

В настоящей работе предлагается новый метод решения задачи Коши (1), основанный на применении полиномов $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $n = 0, 1, \ldots$, ортогональных по Соболеву относительно скалярного произведения вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r g(j) \rho(j), \tag{3}$$

т. е.

$$\langle m_{r,n}^{\alpha}, m_{r,m}^{\alpha}\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k m_{r,n}^{\alpha}(0,q) \Delta^k m_{r,m}^{\alpha}(0,q) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r m_{r,n}^{\alpha}(j,q) \Delta^r m_{r,m}^{\alpha}(j,q) \rho(j) = \delta_{n,m},$$

где $\alpha > -1$, а $\rho(x)$ — весовая функция, определенная равенством (14). Полиномы $m_{r,k+r}^{\alpha}(x,q)$ порождаются классическими полиномами Мейкснера $m_n^{\alpha}(x,q)$, $n = 0, 1, \ldots$, ортонормированными на сетке Ω с весом $\rho(x)$ посредством равенства (27), причем в случае, когда $0 \leqslant k \leqslant r-1$, полиномы $m_{r,k}^{\alpha}(x,q)$ определяются равенством (28).

Следует отметить, что теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [1–6] и процитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева является, в частности, то, что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси.

С другой стороны, в работах [7–18] были введены так называемые смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат решения задач, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и несколько ее производных. В частности, такая задача часто возникает при решении дифференциальных уравнений численно-аналитическими (спектральными) методами [19, 21]. Смешанные ряды по ортонормированным системам функций оказались естественным и весьма эффективным средством решения краевых задач для дифференциальных уравнений спектральными методами. По этому поводу мы можем отослать, например, к работе [21]. В работе [18] показано, что смешанный ряд функции f по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ представляют собой ряд Фурье этой функции по новой системе функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a) g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) \rho(t)\, dt \tag{4}$$

и порожденной самой системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Дискретный аналог скалярного произведения (4) имеет вид (3), где функции f и g заданы на множестве $\Omega=\{0,1,\ldots\}$, $\rho=\rho(j)$ — дискретная весовая функция, заданная на множестве Ω. В случае, когда $r=0$, мы будем считать, что $\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)=0$. При $r\geqslant 1$ особой точкой в скалярном произведении (3) является $x=0$, в которой контролируется поведение соответствующих ортогональных по Соболеву полиномов дискретной переменной, благодаря присутствию в (3) выражения $\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\Delta^k g(0)$. В настоящей работе наряду с конструированием полиномов $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $n=0,1,\ldots$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения вида (3), и изучением некоторых важных свойств этих полиномов, рассмотрена также задача об одновременном приближении на сетке $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ решения $y=y(j)$ задачи Коши (1) и его конечных разностей $\Delta^{\nu}y(j)$ частичными суммами Фурье функции y по системе $\{m_{r,n}^{\alpha}(x,q)\}_{n=0}^{\infty}$ и их соответствующими конечными разностями. Прежде чем приступить к конструированию системы полиномов $m_{r,n}^{\alpha}(x,q)$, $n=0,1,\ldots$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения вида (3) и порожденных классическими полиномами Мейкснера дискретной переменной, мы рассмотрим общую идею построения систем функций, ортонормированных по Соболеву и порожденных заданной ортонормированной системой функций дискретной переменной.

2. Системы дискретных функций, ортонормированных по Соболеву, порожденные ортонормированными функциями

Перейдем к конструированию дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (3), порожденных заданной системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной на дискретном множестве $\Omega=\{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения и понятия. Если целое $k\geqslant 0$, то положим $a^{[k]}=a(a-1)\ldots(a-k+1)$, $a^{[0]}=1$ и рассмотрим следующие функции:

$$\psi_{r,k}(x)=\frac{x^{[k]}}{k!},\quad k=0,1,\ldots,r-1, \tag{5}$$

$$\psi_{r,k}(x)=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{(r-1)!}\sum\limits_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t), & r\leqslant x,\\ 0, & x=0,1,\ldots,r-1\end{matrix}\right\},\quad r\leqslant k, \tag{6}$$

которые определены на сетке $\Omega=\{0,1,\ldots\}$. Рассмотрим некоторые важные разностные свойства системы функций $\psi_{r,k}(x)$, определенных равенствами (5) и (6). Введем оператор конечной разности Δf: $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ и положим $\Delta^{\nu+1}f(x)=\Delta\Delta^{\nu}f(x)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\Delta^{\nu}\psi_{r,k}(x)=\begin{cases}\psi_{r-\nu,\,k-\nu}(x), & 0\leqslant\nu\leqslant r-1,\ r\leqslant k,\\ \psi_{k-r}(x), & \nu=r\leqslant k,\\ \psi_{r-\nu,\,k-\nu}(x), & \nu\leqslant k<r,\\ 0, & k<\nu\leqslant r.\end{cases} \tag{7}$$

$\lhd$ Справедливость утверждения леммы 1 при $r=1$ почти очевидна, поэтому мы будем считать, что $r\geqslant 2$. Прежде всего заметим, что если $f(x)=(x-1-t)^{[r-1]}$, то

$\Delta f(x) = (r-1)(x-1-t)^{[r-2]}$, поэтому для $r \leqslant x, k$ в силу (6) имеем

$$\Delta\psi_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\left(\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t) - \sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t)\right)$$
$$= \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}\left((x-t)^{[r-1]} - (x-1-t)^{[r-1]}\right)\psi_{k-r}(t)$$
$$= \frac{1}{(r-2)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-1-t)^{[r-2]}\psi_{k-1-(r-1)}(t) = \psi_{r-1,k-1}(x).$$

Отсюда убеждаемся в справедливости первого из равенств (7) для $r \leqslant x$. Справедливость равенства $\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r-1,k-1}(x)$ для $x = 0, 1, \ldots, r-2$ очевидна. Остается проверить первое из равенств (7) для $x = r-1$. Но в этом случае мы имеем

$$\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r,k}(x+1) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-t)^{[r-1]}\psi_{k-r}(t) = \frac{(r-1)^{[r-1]}}{(r-1)!}\psi_{k-r}(0) = \psi_{k-r}(0),$$

$$\psi_{r-1,k-1}(x) = \frac{1}{(r-2)!}\sum_{t=0}^{x-r+1}(x-1-t)^{[r-2]}\psi_{(k-1)-(r-1)}(t) = \frac{(r-2)^{[r-2]}}{(r-2)!}\psi_{k-r}(0) = \psi_{k-r}(0),$$

поэтому мы снова находим $\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r-1,k-1}(x)$. Таким образом, полностью доказано первое из равенств (7) для $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Его справедливость для $2 \leqslant \nu \leqslant r-1$ выводим по индукции.

Рассмотрим второе из равенств (7). В силу уже доказанного первого из равенств (7) и того, что второе из них для $r = 1$ легко проверяется, имеем

$$\Delta^r\psi_{r,k}(x) = \Delta\Delta^{r-1}\psi_{r,k}(x) = \Delta\psi_{1,k-r+1}(x) = \psi_{k-r}(x).$$

Тем самым мы доказали второе из равенств (7). Третье и четвертое равенства из (7) непосредственно вытекают из (5). $\triangleright$

Пусть $0 \leqslant r$ — целое. Обозначим через l_ρ пространство дискретных функций $f = f(x)$, заданных на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, в котором скалярное произведение $\langle f, g\rangle$ определено с помощью равенства (3). Рассмотрим задачу об ортогональности, нормированности и полноте в l_ρ системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (5) и (6).

Теорема 1. *Предположим, что функции $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, образуют полную в l_ρ ортонормированную систему с весом $\rho(x)$. Тогда система $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (5) *и* (6), *полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (3).

$\triangleleft$ Из равенства (6) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $(\Delta^\nu\psi_{r,k}(x))_{x=0} = 0$, поэтому в силу (3) и (7) имеем

$$\langle\psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = \sum_{x=0}^{\infty}\Delta^r\psi_{r,k}(x)\Delta^r\psi_{r,l}(x)\rho(x) = \sum_{x=0}^{\infty}\psi_{k-r}(x)\psi_{l-r}(x)\rho(x) = \delta_{kl}, \quad k, l \geqslant r,$$

$$\langle\psi_{r,k}, \psi_{r,l}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu\psi_{r,k}(0)\Delta^\nu\psi_{r,l}(0) = \delta_{kl}, \quad k, l < r.$$

Очевидно также, что

$$\langle\psi_{r,k},\psi_{r,l}\rangle=0,\quad \text{если}\quad k<r\leqslant l\quad \text{или}\quad l<r\leqslant k.$$

Это означает, что функции $\psi_{r,k}(t)$, $k=0,1,\ldots$, образуют в l_ρ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (3). Чтобы проверить полноту этой системы в l_ρ предположим, что для функции $f=f(x)\in l_\rho$ имеют место равенства

$$\langle\psi_{r,k},f\rangle=0,\quad k=0,1,\ldots$$

Тогда, во-первых, в силу того, что $0=\langle\psi_{r,k},f\rangle=\Delta^k f(0)$ при $k=0,\ldots,r-1$ имеем $f(j)=0$ для всех $j=0,\ldots,r-1$. Во-вторых, из равенств $\langle\psi_{r,k},f\rangle=0$, $k=r,r+1,\ldots$, и полноты в l_ρ исходной системы $\psi_k(t)$, $k=0,1,\ldots$ следует, что $\Delta^r f(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$, и поэтому f совпадает с алгебраическим полиномом степени не выше $r-1$. Из этих двух фактов вытекает, что $f(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$. $\triangleright$

Систему функций $\psi_{r,k}(t)$, $k=0,1,\ldots$, мы будем называть *системой, ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (3).

Из теоремы 1 следует, что система дискретных функций $\psi_{r,k}(t)$, $k=0,1,\ldots$, является ортонормированным базисом в пространстве l_ρ, поэтому для произвольной функции $f(x)\in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\langle f,\psi_{r,k}\rangle\psi_{r,k}(x), \tag{8}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x)\in l_\rho$ по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву. Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f,\psi_{r,k}\rangle$ имеют вид

$$f_{r,k}=\langle f,\psi_{r,k}\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu f(0)\Delta^\nu\psi_{r,k}(0)=\Delta^k f(0),\quad k=0,\ldots,r-1,$$

$$f_{r,k}=\langle f,\psi_{r,k}\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\Delta^r\psi_{r,k}(j)\rho(j)=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)\psi_{k-r}(j)\rho(j),\quad k=r,\ldots, \tag{9}$$

то равенство (8) можно переписать в следующем смешанном виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r}^{\infty}f_{r,k}\psi_{r,k}(x),\quad x\in\Omega. \tag{10}$$

Поэтому ряд фурье по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ мы будем, следуя работам [7–18], называть *смешанным рядом по исходной ортонормированной системе* $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Отметим некоторые важные свойства смешанных рядов (10) и их частичных сумм вида

$$\mathscr{Y}_{r,n}(f,x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r}^{n}f_{r,k}\psi_{r,k}(x). \tag{11}$$

Из (10) и (11) с учетом равенств (7) мы можем записать

$$\Delta^\nu f(x)=\sum_{k=0}^{r-\nu-1}\Delta^{k+\nu}f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r-\nu}^{\infty}f_{r,k+\nu}\psi_{r-\nu,k}(x),\quad 0\leqslant\nu\leqslant r-1,\ x\in\Omega, \tag{12}$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu}\psi_{r-\nu,k}(x),$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f,x) = \mathscr{Y}_{r-\nu,n-\nu}(\Delta^\nu f, x).$$

$$\Delta^\nu \mathscr{Y}_{r,n}(f,0) = \Delta^\nu f(0), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant r-1. \tag{13}$$

3. Некоторые сведения о полиномах Мейкснера

При конструировании полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими многочленами Мейкснера нам понадобится ряд свойств этих многочленов, которые мы приведем в настоящем параграфе. Для произвольного α и $0 < q < 1$ положим

$$\rho(x) = \rho(x;\alpha,q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}, \tag{14}$$

$$M_n^\alpha(x,q) = \frac{q^{-n}}{n!\rho(x)} \Delta^n \left\{\rho(x) x^{[n]}\right\}, \tag{15}$$

где $\Delta^n f(x)$ — конечная разность n-го порядка функции $f(x)$ в точке x, т. е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta\Delta^{n-1} f(x)$ $(n \geqslant 1)$, $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1)\ldots(a-k+1)$ при $k \geqslant 1$. Для каждого $0 \leqslant n$ равенство (15) определяет [22], алгебраический полином степени n, для которого $M_n^\alpha(0,q) = \binom{n+\alpha}{n}$. Полные доказательства приведенных ниже свойств полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x,q)$ можно найти, например, в [22, 23]. Прежде всего отметим, что полиномы $M_n^\alpha(x,q)$ допускают следующее явное представление:

$$M_n^\alpha(x,q) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1)k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k. \tag{16}$$

Если $\alpha > -1$, то полиномы $M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x,q)$, $n = 0,1,\ldots$, образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (14)) систему на множестве $\Omega = \{0,1,\ldots\}$:

$$\sum_{x\in\Omega} M_k^\alpha(x) M_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{n,k} h_n^\alpha(q), \quad 0 < q < 1,\ \alpha > -1, \tag{17}$$

где

$$h_n^\alpha(q) = \sum_{x=0}^{\infty} \rho(x) \left\{M_n^\alpha(x)\right\}^2 = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n}\Gamma(\alpha+1). \tag{18}$$

Нам понадобятся также следующие свойства:

$$\Delta M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q} M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{19}$$

$$M_{k+r}^{\alpha-r}(x,q) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{r^{[j]}}{j!} M_{k+r-j}^\alpha(x,q), \tag{20}$$

$$M_n^{-l}(x,q) = \frac{(n-l)!}{n!} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^l (-x)_l M_{n-l}^l(x-l,q), \tag{21}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_l = a(a+1)\ldots(a+l-1)$; l — целое, $1 \leqslant l \leqslant n$.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant r$. *Тогда*

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \frac{1}{(1-q)^r} \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x,q).$$

$\triangleleft$ Полагая в (20) $\alpha = r$, имеем

$$M_j^0(x,q) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x,q).$$

С другой стороны, мы можем записать

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \sum_{j=0}^{k+r} \gamma_j M_j^0(x,q), \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{1}{h_j^0(q)} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t,0,q) \frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(t,q) M_j^0(t,q) \\ &= q^j(1-q) \sum_{t=0}^{\infty} q^t \frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(t,q) M_j^0(t,q) \\ &= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \sum_{t=0}^{\infty} q^t \frac{\Gamma(t+r+1)}{\Gamma(t+1)} (1-q)^{r+1} M_k^r(t,q) M_j^0(t,q), \end{aligned} \tag{23}$$

в частности, $\gamma_j = 0$ при $j < k$. Из (22) и (23) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t,r,q) M_k^r(t,q) \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x,q) \\ &= \frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \binom{r}{j-k} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t,r,q) \left[M_k^r(t,q)\right]^2 \\ &= \frac{q^j(-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \binom{r}{j-k} h_k^r(q) = \frac{(-q)^{j-k}}{(k+r)^{[r]}(1-q)^r} \binom{r}{j-k} \binom{k+r}{k} \Gamma(r+1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (22) находим

$$(1-q)^q \frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x,q) = \sum_{j=k}^{k+r} (-q)^{j-k} \binom{r}{j-k} M_j^0(x,q) = \sum_{i=0}^{r} (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x,q). \ \triangleright$$

Из (17) следует, что полиномы

$$m_k^\alpha(x) = m_k^\alpha(x,q) = (h_n^\alpha(q))^{-\frac{1}{2}} M_n^\alpha(x,q) \tag{24}$$

образуют ортонормированную систему на множестве Ω с весом $\rho(x) = \rho(x,\alpha,q)$, т. е.

$$\sum_{x\in\Omega} m_k^\alpha(x) m_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{n,k}, \quad 0 < q < 1, \ \alpha > -1. \tag{25}$$

Ниже нам понадобится следующая рекуррентная формула для полиномов Мейкснера $m_n^\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}&[(n+\alpha+1)(n+1)q]^{\frac{1}{2}}\, m_{n+1}^\alpha(x)\\ &= [n(q+1)+q(\alpha+1)+(q+1)x]\, m_n^\alpha(x) - [(n+\alpha)nq]^{\frac{1}{2}}\, m_{n-1}^\alpha(x).\end{aligned} \tag{26}$$

4. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные многочленами Мейкснера

Из равенства (25) следует, что если $\alpha > -1$, то полиномы $m_n^\alpha(x,q)$, $n = 0,1,\ldots$, образуют ортонормированную на $\Omega = \{0,1,\ldots\}$ с весом $\rho(x)$ систему. Эта система порождает на Ω систему полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$, $k = 0,1,\ldots$, определенных равенством

$$m_{r,k+r}^\alpha(x,q) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]} m_k^\alpha(t,q). \tag{27}$$

Кроме того, определим полиномы

$$m_{r,k}^\alpha(x,q) = \frac{x^{[k]}}{k!},\ k = 0,1,\ldots,r-1. \tag{28}$$

Покажем, что полином $m_{r,k+r}^\alpha(x,q)$ обращается в нуль, если $x \in \{0,1,\ldots,r-1\}$. С этой целью мы рассмотрим следующий дискретный аналог формулы Тейлора:

$$F(x) = Q_{r-1}(F,x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t), \quad x \in \{r, r+1, \ldots\}, \tag{29}$$

где

$$Q_{r-1}(F,x) = F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!}x + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!}x^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^{r-1}F(0)}{(r-1)!}x^{[r-1]}. \tag{30}$$

Так как для функции $F(x) = x^{[l+r]}$, где целое $l \geqslant 0$, имеем $\Delta^r F(x) = (l+r)^{[r]}x^{[l]}$ и $Q_{r-1}(F,x) \equiv 0$, то из (29) следует, что

$$\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}t^{[l]} = \frac{1}{(l+r)^{[r]}(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r F(t) = \frac{x^{[l+r]}}{(l+r)^{[r]}}. \tag{31}$$

С другой стороны, функция $x^{[l+r]}$ обращается в нуль в узлах $x \in \{0,1,\ldots,r-1\}$, поэтому наше утверждение вытекает из того, что полином $m_{k+r}^\alpha(x,q)$ в силу (16) и (24) можно представить в виде линейной комбинации функций вида $x^{[l]}$. Поэтому из теоремы 1 и свойства (20) непосредственно выводим следующий результат.

Теорема 2. *Если $\alpha > -1$, то система полиномов $m_{r,k}^\alpha(x,q)$, $k = 0,1,\ldots$, порожденная многочленами Мейкснера $m_n^\alpha(x,q)$, $n = 0,1,\ldots$, посредством равенств* (27) *и* (28), *полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (3).

5. Дальнейшие свойства полиномов $m^{\alpha}_{r,k}(x,q)$

Перейдем к исследованию дальнейших свойств полиномов $m^{\alpha}_{r,k}(x,q)$, $k=0,1,\dots$ Речь, в первую очередь, идет о том, чтобы получить представление полиномов $m^{\alpha}_{r,k}(x,q)$, которое не содержит знаков суммирования с переменным верхним пределом типа (27). С этой целью применим формулу (29) к полиному $F(x)=M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q)$ и запишем

$$F(x)=Q_{r-1}(F,x)+\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}\Delta^r M^{\alpha-r}_{k+r}(t,q).$$

Вместо $\Delta^r M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q)$ подставим его значение, которое согласно формуле (19) равно $(\frac{q-1}{q})^r M^{\alpha}_{k}(x,q)$. Тогда из (29) получим

$$F(x)-Q_{r-1}(F,x)=\left(\frac{q-1}{q}\right)^r\frac{1}{(r-1)!}\sum_{t=0}^{x-r}(x-1-t)^{[r-1]}M^{\alpha}_{k}(t,q). \tag{32}$$

Сопоставляя (27) и (32) с (24), находим

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^r\{h^{\alpha}_k(q)\}^{\frac{1}{2}}\,m^{\alpha}_{r,k+r}(x,q)=F(x)-Q_{r-1}(F,x). \tag{33}$$

Из (33) имеем

$$m^{\alpha}_{r,k+r}(x,q)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^r\{h^{\alpha}_k(q)\}^{-1/2}\,[F(x)-Q_{r-1}(F,x)],\quad F(x)=M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q). \tag{34}$$

Далее, в силу (19) $\Delta^{\nu}M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q)=(\frac{q-1}{q})^{\nu}M^{\alpha-r+\nu}_{k+r-\nu}(x,q)$, поэтому из (16) находим

$$\Delta^{\nu}M^{\alpha-r}_{k+r}(0,q)=\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)!\Gamma(\nu-r+\alpha+1)}=A_{r,k,\nu}. \tag{35}$$

Равенства (30) и (35), взятые вместе, дают

$$F(x)-Q_{r-1}(F,x)=M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}.$$

Подставив это выражение в (34), находим

$$m^{\alpha}_{r,k+r}(x,q)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^r\left\{h^{\alpha}_k(q)\right\}^{-\frac{1}{2}}\left[M^{\alpha-r}_{k+r}(x,q)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{r,k,\nu}x^{[\nu]}}{\nu!}\right],\quad k=0,1,\dots \tag{36}$$

Еще одно важное представление для полиномов $m^{\alpha}_{r,k+r}(x,q)$ можно получить, если мы обратимся к равенствам (16) и (24):

$$m^{\alpha}_{k}(t,q)=\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\left\{h^{\alpha}_k(q)\right\}^{\frac{1}{2}}}\sum_{l=0}^{k}\frac{k^{[l]}t^{[l]}}{\Gamma(l+\alpha+1)l!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^l.$$

Подставим это выражение в (27) и воспользуемся равенством (31). Это приводит к следующему явному виду для полиномов $m^{\alpha}_{r,k+r}(x,q)$ $(k=0,1,\dots)$:

$$m^{\alpha}_{r,k+r}(x,q)=\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\left\{h^{\alpha}_k(q)\right\}^{\frac{1}{2}}}\sum_{l=0}^{k}\frac{k^{[l]}x^{[r+l]}}{\Gamma(l+\alpha+1)l!(r+l)^{[r]}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^l.$$

6. Полиномы $\{m^0_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$

Рассмотрим частный случай, который соответствует выбору $\alpha=0$. Заметим, что если $\alpha=0$, то из (35) имеем $A_{r,k,\nu}=0$ при всех $\nu=0,1,\ldots,r-1$. Поэтому из (36) имеем

$$m^0_{r,k+r}(x,q)=\left(\frac{q}{q-1}\right)^r\left\{h^0_k(q)\right\}^{-\frac{1}{2}}M^{-r}_{k+r}(x,q),\quad k=0,1,\ldots \tag{37}$$

Далее, если мы обратимся к равенству (21), то можем записать

$$M^{-r}_{k+r}(x,q)=\frac{k!}{(k+r)!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^r x^{[r]}M^r_k(x-r,q). \tag{38}$$

Из (37) и (38) находим

$$m^0_{r,k+r}(x,q)=\frac{k!}{(k+r)!}\left\{h^0_k(q)\right\}^{-\frac{1}{2}}x^{[r]}M^r_k(x-r,q),\quad k=0,1,\ldots$$

С учетом (18) и (24) этому равенству можно придать также следующий вид:

$$m^0_{r,k+r}(x,q)=\left((k+r)^{[r]}\right)^{-\frac{1}{2}}x^{[r]}m^r_k(x-r,q),\quad k=0,1,\ldots \tag{39}$$

С помощью леммы 2 равенство (39) можно записать в виде

$$m^0_{r,k+r}(x,q)=\frac{1}{(1-q)^r}\sum_{i=0}^{r}(-q)^{\frac{i}{2}}m^0_{k+i}(x-r,q),\quad k=0,1,\ldots$$

Наконец, если $0\leqslant k\leqslant r-1$, то в силу определения (28)

$$m^0_{r,k}(x,q)=\frac{x^{[k]}}{k!}.$$

Из теоремы 1 следует, что система полиномов $m^0_{r,k}(x,q)$, $k=0,1,\ldots$, является ортонормированным базисом в пространстве l_ρ, поэтому для произвольной функции $f(x)\in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\langle f,m^0_{r,k}\rangle m^0_{r,k}(x,q), \tag{40}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x)\in l_\rho$ по системе $\{m^0_{r,k}(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (3). Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f,m^0_{r,k}\rangle$ имеют вид

$$f_{r,k}=\langle f,m^0_{r,k}\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}\Delta^\nu f(0)\Delta^\nu m^0_{r,k}(0,q)=\Delta^k f(0),\quad k=0,\ldots,r-1,$$

$$f_{r,k}=\langle f,m^0_{r,k}\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^r f(j)m^0_{k-r}(j,q)\rho(j),\quad k=r,\ldots,$$

то равенство (40) можно переписать в следующем смешанном виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k f(0)\frac{x^{[k]}}{k!}+\sum_{k=r}^{\infty}f_{r,k}m^0_{r,k}(x,q),\quad x\in\Omega.$$

7. О представлении решения задачи Коши для разностного уравнения рядами Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву

Как уже отмечалось выше, одним из эффективных подходов решения уравнений различных типов (дифференциальных, интегральных, разностных и т. д.) является [19, 20] так называемый спектральный метод, основанный на представлении искомого решения рассматриваемого уравнения в виде ряда по подходящей ортонормированной системе функций и последующего преобразования его к двойственному виду, в котором вместо искомого решения уравнения фигурируют неизвестные коэффициенты его разложения по выбранной ортонормированной системе. Мы вернемся к задаче Коши (1) и, пользуясь разложением (10), представим ее искомое решение y в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k y(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k+r} \psi_{r,k+r}(x), \quad x \in \Omega, \tag{41}$$

по системе $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (5) и (6), ортонормированных на сетке Ω по Соболеву относительно скалярного произведения (3). Кроме того, в силу (12) для $x \in \Omega$ и $0 \leqslant l \leqslant r-1$ имеем

$$\Delta^l y(x) = \sum_{k=0}^{r-l-1} \Delta^{k+l} y(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,r+k} \psi_{r-l,r-l+k}(x), \tag{42}$$

а из (13) следует, что

$$\Delta^r y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,r+k} \psi_k(x), \quad x \in \Omega, \tag{43}$$

где для коэффициентов $y_{r,k+r}$ согласно (9) имеет место равенство

$$y_{r,k+r} = \langle y, \psi_{r,k+r} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r y(j) \psi_k(j) \rho(j), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Отметим, что если будут найдены коэффициенты $y_{r,k}$ из (41) так, чтобы функция $y(x)$ оказалась решением разностного уравнения (1), то мы, очевидно, получим именно то решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям $\Delta^l y(0) = y_l$, $l = 0, 1, \ldots, r-1$, другими словами, мы получим решение поставленной задачи Коши. При этом важно заметить, что частичная сумма ряда Фурье (41) вида (см. (11))

$$\mathscr{Y}_{r,n}(y, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k y(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} y_{r,k+r} \psi_{r,k+r}(x)$$

с $n \geqslant r$ также удовлетворяет (см. (13)) начальным условиям задачи Коши (1) и поэтому может быть рассмотрена в качестве приближенного решения этой задачи. В связи с этим возникает вопрос об оценке отклонения приближенного решения $\mathscr{Y}_{r,n}(y, x)$ задачи Коши (1) от ее точного решения y, представленного в виде (41), другими словами, возникает задача об оценке остатка $|y(x) - \mathscr{Y}_{r,n}(y, x)|$, $x \in \Omega$. На подробном анализе этой проблемы мы здесь не будем останавливаться.

Чтобы завершить переход от уравнения (1) к его двойственному (спектральному) виду, подставим в левой части равенства (1) вместо конечных разностей $\Delta^l y(j)$ их представления из (41)–(43) и в результате получим равенство

$$a_r(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\,\psi_i(x) + \sum_{l=0}^{r-1} a_l(x)\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\,\psi_{r-l,r-l+i}(x) = f(x) - \sum_{l=0}^{r-1} a_l(x)\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!},$$

которое можно переписать еще так:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\left[a_r(x)\psi_i(x) + \sum_{l=0}^{r-1} a_l(x)\psi_{r-l,r-l+i}(x)\right] = f(x) - \sum_{l=0}^{r-1} a_l(x)\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!}. \tag{44}$$

Полагая

$$g(x) = f(x) - \sum_{l=0}^{r-1} a_l(x)\sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l}y(0)\frac{x^{[k]}}{k!},$$

$$F_i(x) = a_r(x)\psi_i(x) + \sum_{l=0}^{r-1} a_l(x)\psi_{r-l,r-l+i}(x), \tag{45}$$

запишем равенство (44) в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}F_i(x) = g(x), \quad x\in\Omega. \tag{46}$$

Тем самым мы пришли к системе линейных уравнений (46) относительно неизвестных коэффициентов $y_{r,r+i}$, $i=0,1,\ldots$

Рассмотрим еще один подход к получению бесконечной системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $y_{r,r+i}$, $i=0,1,\ldots$ А именно, пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая полная в l_ρ ортонормированная система, состоящая из функций $\varphi_k(x)$, заданных на Ω. Тогда мы можем каждую из функций $F_i(x)$, $i=0,1,\ldots$, разложить в ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и получить представление

$$F_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat F_{i,k}\varphi_k(x), \quad i,x\in\Omega, \tag{47}$$

где

$$\hat F_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} F_i(j)\varphi_k(j)\rho(j), \quad i\in\Omega.$$

Аналогично

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat g_k\varphi_k(x), \quad x\in\Omega, \tag{48}$$

где

$$\hat g_k = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)\varphi_k(j)\rho(j), \quad k\in\Omega.$$

Подставим в (46) вместо $F_i(x)$ и $g(x)$ правые части равенств (47) и (48). Тогда мы получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\hat{F}_{i,k}\right)\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{g}_k\varphi_k(x), \quad x\in\Omega. \tag{49}$$

Из (49), в свою очередь, получаем систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_{r,r+i}\hat{F}_{i,k} = \hat{g}_k, \quad k\in\Omega,$$

относительно неизвестных коэффициентов $y_{r,r+i}$, $i=0,1,\dots$

8. О представлении решения задачи Коши для разностного уравнения рядами Фурье по полиномам $m_{r,k}^0(x,q)$, $k=0,1,\dots$

Рассмотрим частный случай, когда вместо ортонормированной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ берется система полиномов Мейкснера $m_k^0(x,q)$, $k=0,1,\dots$ Тогда вместо системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ мы получим систему полиномов $\{m_{r,k}^0(x,q)\}_{k=0}^{\infty}$, рассмотренную нами выше в п. 6. Таким образом, если в представлении (41) функции $\psi_{r,k}(x)$ заменить на полиномы $m_{r,k}^0(x,q)$, то равенства (41)–(43) принимают следующий вид:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{r-1}\Delta^k y(0)\frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,k+r} m_{r,k+r}^0(x,q), \quad x\in\Omega,$$

$$\Delta^l y(x) = \sum_{k=0}^{r-l-1}\Delta^{k+l} y(0)\frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,r+k} m_{r-l,r-l+k}^0(x,q),$$

$$\Delta^r y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{r,r+k} m_k^0(x),$$

где $0\leqslant l\leqslant r-1$,

$$m_{r-l,k}^0(x,q) = \psi_{r-l,k}(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad 0\leqslant k\leqslant r-l-1, \tag{50}$$

$$m_{r-l,r-l+k}^0(x,q) = \psi_{r-l,r-l+k}(x), \quad r-l\leqslant k<\infty.$$

Кроме того, отметим, что в силу (39) мы можем записать

$$\begin{aligned}\psi_{r-l,r-l+k}(x) &= m_{r-l,r-l+k}^0(x,q)\\ &= \left((r-l+k)^{[r-l]}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{[r-l]} m_{k-r+l}^{r-l}(x-r+l,q), \quad r-l\leqslant k<\infty.\end{aligned} \tag{51}$$

Используя равенства (50), (51) и (45) можно указать способ для нахождения значений элементов матрицы $[F_i(x)]_{0\leqslant i,\,x<\infty}$, если только мы найдем способ для вычисления значений полиномов Мейкснера $m_{k-r+l}^{r-l}(x-r+l,q)$, $r-l\leqslant k<\infty$, фигурирующих в (51). Но эту задачу можно решить, обратившись к рекуррентной формуле (26).

Литература

1. *Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M.* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory.—1991.—Vol. 65.—P. 151–175.
2. *Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L.* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math.—1993.—Vol. 48, № 1—2.—P. 113—131.
3. *Meijer H. G.* Laguerre polynimials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory.—1993.—Vol. 73.—P. 1–16.
4. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal.—1995.—№ 2.—P. 289–303.
5. *Kwon K. H., Littlejohn L. L.* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Ann. Numer. Anal.—1998.—Vol. 28.—P. 547–594.
6. *Marcellan F., Yuan Xu* On Sobolev orthogonal polynomials.—arXiv: 6249v1 [math.C.A] 25 Mar 2014.—P. 1–40.
7. *Шарапудинов И. И.* Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Мат. заметки.—2000.—Т. 67, № 3.—С. 460–470. DOI: 10.4213/mzm858.
8. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье — Лежандра // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 5.—С. 143–160. DOI: 10.4213/sm480.
9. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства операторов $\mathscr{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки.—2002.—Т. 72, № 5.—С. 765–795. DOI: 10.4213/mzm466.
10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сб.—2003.—Т. 194, № 3.—С. 115–148. DOI: 10.4213/sm723.
11. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам.—Махачкала: Дагестан. науч. центр РАН, 2004.—276 с.
12. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Мат. заметки.—2005.—Т. 78, № 3.—С. 442–465. DOI: 10.4213/mzm2599.
13. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 3.—С. 135–154. DOI: 10.4213/sm1539.
14. *Шарапудинов Т. И.* Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестн. Дагестан. науч. центра РАН.—2007.—Т. 29.—С. 12–23.
15. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки.—2008.—Т. 84, № 3.—С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
16. *Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2009.—Т. 9, № 1.—С. 68–76.
17. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Мат. заметки.—2010.—Т. 88, № 1.—С. 116–147. DOI: 10.4213/mzm6607.
18. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их прил. Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк.—2016.—С. 329–332.
19. *Trefethen L. N.* Spectral methods in Matlab.—Philadelphia: SIAM, 2000.
20. *Trefethen L. N.* Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equation.—Cornell Univ., 1996.
21. *Магомед-Касумов М. Г.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара // Современные проблемы теории функций и их прил. Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк.—2016.—С. 176–178.
22. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на дискретных сетках.—Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.
23. *Gasper G.* Positivity and special function // Theory and Appl. Spec. Funct / Ed. by R. A. Askey.—N. Y.: Acad. Press Inc., 1975.—P. 375–433.

Статья поступила 11 мая 2016 г.

Шарапудинов Идрис Идрисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Дагестанский государственный педагогический университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 367003, Махачкала, ул. Яракского, 57
E-mail: `sharapud@mail.ru`

Гаджиева Зульфия Джамалдиновна
Дагестанский государственный педагогический университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 367003, Махачкала, ул. Яракского, 57;

Дагестанский научный центр РАН,
научный сотрудник отдела математики и информатики,
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: `zula-1976@bk.ru`

Гаджимирзаев Рамис Махмудович
Дагестанский научный центр РАН,
младший научный сотрудник отдела математики и информатики,
РОССИЯ, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45
E-mail: `ramis3004@gmail.com`

DIFFERENCE EQUATIONS AND SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS, GENERATED BY MEIXNER POLYNOMIALS

Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D, Gadzhimirzaev R. M.

The representation of the Cauchy problem's solution for a difference equation with variable coefficients and given initial conditions at $x = 0$ by expanding this solution in a Fourier series on Sobolev polynomials orthogonal on the grid $(0, 1, \ldots)$. The representation is based on contraction new polynomials orthogonal on Sobolev and generated by classical Meixner's polynomials. For new polynomials an explicit formula containing Meixner polynomials is obtained. This result allows us to investigate the asymptotic properties of new polynomials orthogonal on Sobolev on the grid $(0, 1, \ldots)$ with a given weight. In addition, it allows to solve the problem of the calculation of the polynomials orthogonal on Sobolev, reducing it to use of well known recurrence relations for classical Meixner polynomials.

Key words: difference equation, Sobolev orthogonal polynomials, orthogonal on grid Meixner polynomials, discrete functions approximation, orthogonal on equidistant grid mixed series on Meixner polynomials.