

УДК 532.59

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛЯМЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРА
С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ
В ГЕМОДИНАМИКЕ АРТЕРИАЛЬНЫХ СОСУДОВ

Е. Н. Портнов, Ю. А. Устинов

Для построения математической модели распространения пульсовой «волны давления» в артериальных сосудах, стенки которых обладают винтовой анизотропией, дается описание метода расчета радиальной жесткости сосуда и фазовой скорости данной волны.

Ключевые слова: волна давления, винтовая анизотропия, радиальная жесткость, фазовая скорость.

Введение

В работе [1] для описания пульсового движения крови в толстостенных артериальных сосудах с винтовой анизотропией их стенок приведены следующие уравнения:

$$\begin{aligned}d_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{12} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} &= \rho_0 S \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + 2\pi r_2 q_z, \\d_{12} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{22} \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} &= \rho_0 I_p \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} + 2\pi r_2 q_\theta,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\rho \partial_t v - \partial_z p = 0, \quad c^2 \partial_z^2 p - \partial_t^2 p = 0,\tag{2}$$

где $u_z = u_z(z, t)$ — осевые смещения точек сосуда, $\phi_z = \phi_z(z, t)$ — угол поворота поперечного сечения сосуда, ρ_0 — плотность материала стенки сосуда, $S = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ — площадь поперечного сечения стенки сосуда, $I_p = \frac{1}{4}\pi(r_1^4 - r_2^4)$ — полярный момент инерции поперечного сечения, q_z, q_θ — касательные напряжения, возникающие между стенкой сосуда и кровью, r_1, r_2 — наружный и внутренний радиусы стенки сосуда соответственно, d_{ij} — элементы матрицы жесткостей растяжения-сжатия (метод их определения описан в [2]), $c^2 = \frac{G}{\rho}$, v — среднее по сечению значение скорости крови, p — гидродинамическое давление, c — фазовая скорость, G — радиальная жесткость стенки сосуда, ρ — плотность крови.

Эти уравнения описывают динамические процессы в стенке сосуда, возникающие во время систолы, последнее уравнение описывает распространение «волны давления». Для тонкостенной изотропной стенки сосуда

$$G = G_0 = \frac{Eh}{2b} = \frac{E(x-1)}{(1+x)}, \quad x = \frac{r_2}{r_1},\tag{3}$$

где E — модуль Юнга материала стенки, h, b — толщина и радиус срединной поверхности соответственно.

Формула (2) для тонкостенного сосуда впервые была получена Резалем [3], немногим позже этот же результат получен Мёнсом [4], Кортвегом [5] и Громеко [6].

В случае толстой изотропной стенки жесткость определяется на основе решения задачи Ляме [7] следующей формулой:

$$G = \frac{E(x^2 - 1)}{2(1 + x^2 + \nu(x^2 - 1))}, \quad (4)$$

где ν — коэффициент Пуассона. В силу несжимаемости материала стенки сосуда $\nu = 0.5$.

Сравнительный анализ величин радиальной жесткости, определяемых по формулам (3), (4), показал, что $\frac{\Delta G}{G_0}$, где $\Delta G = G_0 - G$ не превышает 5%, если $0 < y < 0.2$, где $y = x - 1$.

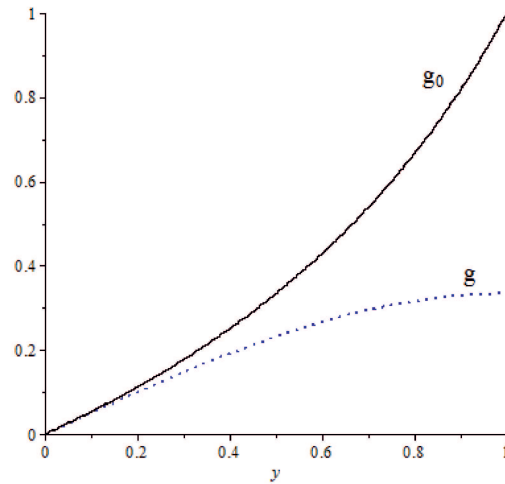


Рис. 1. $g = \frac{G}{E}$, $g_0 = \frac{G_0}{E}$.

В работе [8] на основе математической модели, в которой стенка сосуда рассматривается как тонкая цилиндрическая оболочка с винтовой анизотропией, были выделены три типа волн, две из которых продольно-крутильная и крутильно-продольная (в предлагаемой модели аналогичные волны описываются уравнениями (1)) энергетически незначительно влияют на волновые процессы в сосуде.

1. Основные соотношения теории упругости в винтовой системе координат и постановка задачи

Обозначим через r_1, r_2 внешний и внутренний радиусы цилиндра соответственно. С геометрическим центром одного из сечений цилиндра свяжем начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Эту систему координат будем называть «основной». Для описания винтовой анизотропии введем «сопутствующую» систему координат r, θ, z , связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z. \quad (5)$$

Здесь и ниже предполагается, что параметр $\tau = \text{const}$, а соотношения (5) при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии.

Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= r\mathbf{e}'_1 + z\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \sin(\theta + \tau z), \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \cos(\theta + \tau z), \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_z,\end{aligned}\tag{6}$$

где \mathbf{i}_n — орты основной системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный репер

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t},\tag{7}$$

где \mathbf{n} , \mathbf{b} , \mathbf{t} — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно.

Используем формулы

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{ds} &= \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad ds = g dz, \\ k &= \frac{\tau^2 r}{g^2}, \quad g^2 = 1 + x^2, \quad x = \tau r,\end{aligned}\tag{8}$$

где k — кривизна винтовой линии.

После преобразований получаем ортогональную матрицу перехода от базиса \mathbf{e}_j к базису \mathbf{e}'_i :

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g} & \frac{x}{g} \\ 0 & \frac{x}{g} & \frac{1}{g} \end{array} \right\|.$$

Будем считать материал цилиндра локально трансверсально изотропным, у которого направления главных осей тензора модулей упругости c_{ij} совпадают с направлениями ортов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , где орт \mathbf{e}_3 определяет направление оси упругой симметрии. В этом базисе соотношения обобщенного закона Гука имеют вид [9]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33}, \\ \sigma_{22} &= c_{12}e_{11} + c_{11}e_{22} + c_{13}e_{23}, \\ \sigma_{33} &= c_{13}(e_{11} + e_{22}) + c_{33}e_{33}, \\ \sigma_{23} &= c_{44}e_{23}, \quad \sigma_{13} = c_{44}e_{13}, \quad \sigma_{12} = c_{66}e_{12}.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь e_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров малых деформаций и напряжений соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Технические постоянные E , E' , G' , ν , ν' связаны с модулями c_{ij} следующими выражениями:

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{E(E' + E\nu^2)}{E'(1 + \nu^2) - 2E\nu'(\nu + \nu')}, \\ c_{12} &= \frac{E(E'\nu + E\nu^2)}{E'(1 + \nu^2) - 2E\nu'(\nu + \nu')}, \\ c_{13} &= \frac{EE'\nu}{E'(1 - \nu) - 2E'\nu'^2}, \\ c_{33} &= \frac{E'^2(1 - \nu)}{E'(1 - \nu) - 2E'\nu'^2}, \\ c_{44} &= G'; \quad 2c_{66} = c_{11} - c_{12}.\end{aligned}\tag{10}$$

При переходе от базиса Френе к базису винтовой системы координат для закона Гука получаем следующие выражения [2]:

$$\begin{aligned}
\sigma &= C' \mathbf{e}', \\
C' &= (c_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, 6, \\
\sigma &= (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})^T, \\
\mathbf{e}' &= (\mathbf{e}_{rr}, \mathbf{e}_{\theta\theta}, \mathbf{e}_{zz}, \mathbf{e}_{\theta z}, \mathbf{e}_{rz}, \mathbf{e}_{r\theta})^T.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= c_{11}, \quad c'_{12} = c_{12}l_c^2 + c_{13}l_s^2, \quad c'_{13} = c_{13}l_c^2 + c_{12}l_s^2, \\
c'_{14} &= l_c l_s (c_{13} - c_{12}), \\
c'_{23} &= c_{13}l_c^2 + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})l_c^2 l_s^2 + c_{13}l_s^4, \\
c'_{24} &= -c_{11}l_c^3 l_s - c_{13}(l_c l_s^3 - l_c^3 l_s) + c_{33}l_c l_s^3 - 2c_{44}(l_c l_s^3 - l_c^3 l_s), \\
c'_{33} &= c_{11}l_s^4 + 2c_{13}l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_c^4 + 4c_{44}l_c^2 l_s^2, \\
c'_{34} &= -l_c l_s (c_{11}l_s^2 - c_{13} + 2c_{13}l_c^2 + 2c_{44}l_c^2 - 2c_{44}l_s^2), \\
c'_{44} &= c_{11}l_c^2 l_s^2 - 2c_{13}l_c^2 l_s^2 + c_{33}l_c^2 l_s^2 + c_{44}(1 - 4l_c^2 l_s^2), \\
c'_{55} &= c_{44}l_c^2 + c_{66}l_s^2, \\
c'_{56} &= l_c l_s (c_{44} - c_{66}), \\
c'_{66} &= c_{66}l_c^2 + c_{44}l_s^2, \\
l_c &= \cos \alpha, \quad l_s = \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{12}$$

Остальные элементы матрицы C' равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку $\tau = \text{const}$, то α (угол между касательной к винтовой спирали $r = \text{const}$ и осью Oz) является функцией r , в силу чего все c'_{ij} , кроме c'_{11} зависят от r .

В базисе винтовой системы координат $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ компоненты тензора деформаций выражаются через координаты вектора смещений

$$\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T$$

следующими формулами:

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \partial_r u_r, & e_{\theta\theta} &= u_r + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r}, \\
e_{zz} &= D u_z, & 2e_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + \frac{\partial_\theta u_r - u_\theta}{r}, \\
2e_{\theta z} &= \frac{\partial_\theta u_z}{r} + D u_\theta, & 2e_{rz} &= \partial_r u_z + D u_r.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения равновесия в напряжениях в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\partial_r (r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta \sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} &= 0, \\
\partial_r (r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{rz} &= 0, \\
\partial_r (r\sigma_{rz}) + \partial_\theta \sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} &= 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\partial_r, \partial_\theta$ — частные производные по r, θ соответственно, $D = \partial_z - \tau \partial_\theta$.

2. Решение задачи Ляме

Рассмотрим полый цилиндр с винтовой анизотропией с внутренним радиусом r_2 и внешним радиусом r_1 . Будем считать, что на внутреннюю поверхность цилиндра задано давление $p = \text{const}$, а внешняя поверхность свободна от напряжений.

Полагая

$$u_r = a(r), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0, \quad (15)$$

для компонент тензора деформаций получаем

$$e_{rr} = \frac{da}{dr}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{a(r)}{r}, \quad e_{zz} = 0, \quad e_{r\theta} = 0, \quad e_{z\theta} = 0, \quad e_{rz} = 0. \quad (16)$$

Соотношения обобщенного закона Гука, в рассматриваемом случае, принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c'_{11}e_{rr} + c'_{12}e_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c'_{12}e_{rr} + c'_{22}e_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а из системы уравнений равновесия (14) нетривиальным будет только одно:

$$\frac{d(r\sigma_{rr})}{dr} - \sigma_{\theta\theta} = 0. \quad (18)$$

Поставленная задача в общем случае не имеет аналитического решения, для численного интегрирования сведем ее к эквивалентной системе 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого, полагая

$$y_1 = a(r), \quad y_2 = r\sigma_{rr},$$

на основании (18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= \frac{-c'_{12}}{c'_{11}r}y_1 + \frac{1}{c'_{11}r}y_2, \\ \frac{dy_2}{dr} &= \frac{c'_{22}c'_{11} - c'^2_{12}}{c'_{11}r}y_1 + \frac{c'_{12}}{c'_{11}r}y_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку цилиндр подвержен только внутреннему давлению, получаем следующие граничные условия:

- 1) при $r = r_1$, $\sigma_{rr} = -p$, $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$;
- 2) при $r = r_2$, $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{rz} = 0$.

Для численного интегрирования этой системы дифференциальных уравнений использовалась стандартная программа, основанная на методе «пристрелки».

При проведении расчетов основное внимание было уделено исследованию зависимости радиальной жесткости $G_\tau = \frac{p}{u_r(r_2)}$ от безразмерных параметров r_1 и α , где $tg(\alpha) = \tau r_1$.

Расчеты проводились для стенки плечевой артерии со значениями постоянных:

$$E' = 4.905 \cdot (10)^8 (\text{Па}), \quad E = 4.086 \cdot (10)^8 (\text{Па}),$$

$$\nu' = 0.5, \quad \nu = 0.5, \quad \rho = 1020 \text{ кг/м}^3, \quad G' = 8.175 \cdot (10)^7 (\text{Па}).$$

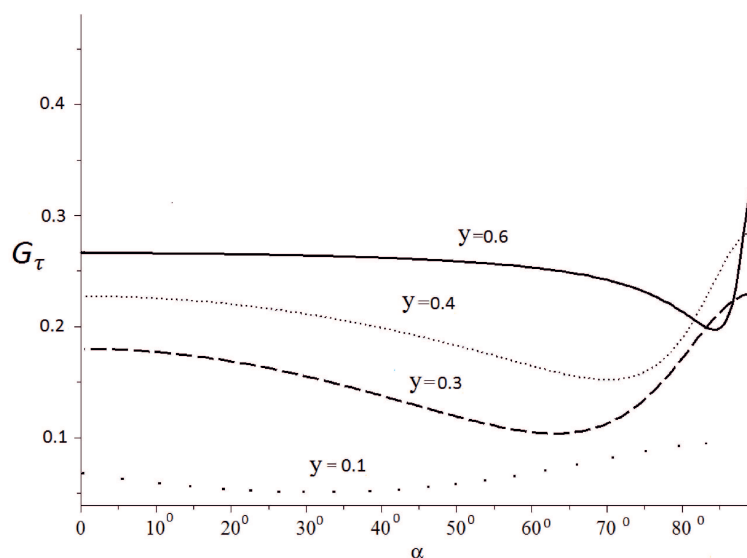


Рис. 2.

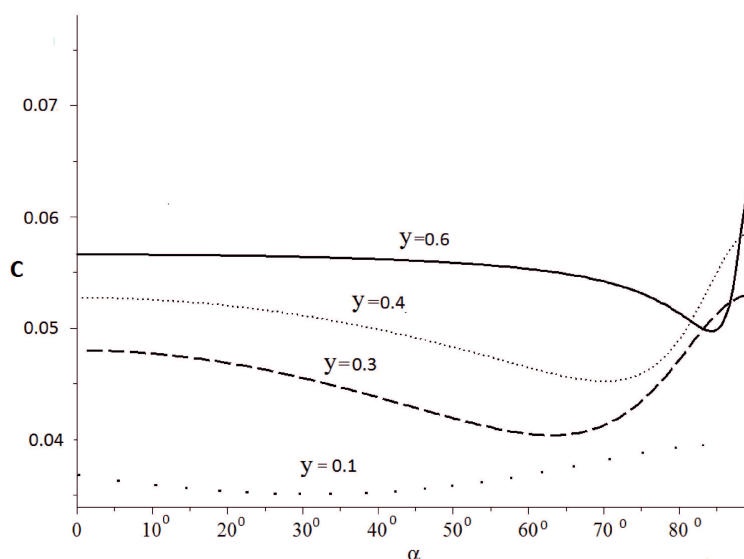


Рис. 3.

На рис. 2–3 изображены изменения радиальной жесткости G_r и фазовой скорости c для «мягкого» материала (стенка плечевой артерии) в зависимости от α при фиксированных значениях внутреннего радиуса. На них видно что наибольшие изменения произошли при $\alpha > 60^\circ$.

Так же было проведено сравнение радиальной жесткости по формуле (4) и результатами расчетов, полученных по описанной модели при фиксированных значениях $\alpha = 30^\circ - 50^\circ$ и переменном внутреннем радиусе r_2 . Рис. 4 иллюстрирует влияние угла намотки на радиальную жесткость. Кривая $\alpha = 0^\circ$ отвечает формуле (4).

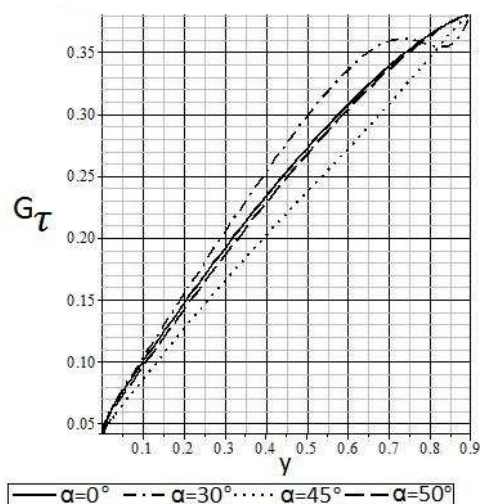


Рис. 4.

Литература

1. Батищев В. А., Поддубный А. А., Устинов Ю. А. Математические модели движения крови в артериальных сосудах // Исследования по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 15–31.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 2).
2. Панфилов И., Устинов Ю. А. Колебания и волны в цилиндре свинтовой анизотропией // Акуст. журн.—2010.—Т. 56, № 6.—С. 759–766.
3. Resal H. Sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuysu élastique // J. de Math. Pures et Appliquées.—Amsterdam, 1876.—166 p.—[in French].
4. Moens J. Pulscurve.—Leiden, 1878.—S. 80.
5. Kortveg D. J. Over Voorplantigs snelheid van golven in elastische buisen. PhD Thesis.—Amsterdam: Univ. of Amsterdam, 1878.—166 p.—[in Dutch].
6. Громеко И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1952.—С. 172–183.
7. Лурье А. И. Теория упругости.—М.: Наука, 1970.—940 с.
8. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики.—2003.—Т. 2, № 4.—С. 37–62.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.—М.: Наука: 1977.—415 с.

Статья поступила 13 декабря 2015 г.

Портнов Евгений Николаевич
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: djonatan-91@mail.ru

Устинов Юрий Анатольевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: ustinov_rsu@mail.ru

BUILDING THE SOLUTION OF THE LAME PROBLEM FOR
A CYLINDER WITH A SPIRAL ANISOTROPY AND ITS APPLICATIONS
IN HEMODYNAMICS OF ARTERIAL VESSELS

Portnov E. N., Ustinov U. A.

A cylinder with spiral anisotropy may be presented, in particular, as a result of spiral wrapping of a cylindrical surface by layers of thin threads of rigid material with simultaneous covering by a polymer material. Thus, there will be locally transversely isotropic composite material with a symmetry axis directed tangentially to helical spirals; in order to determine its elastic characteristics, one can use homogenization methods. To construct a mathematical model of propagation of sphygmie “pressure waves” in arterial vessels whose walls possess spiral anisotropy, we give a description of the method to calculate a radial stiffness and phase velocity of a certain wave. In the same way, we present a comparative analysis of radial stiffness values, various theories and calculation results illustrating the dependency of rigidity and phase velocity on geometric parameters.

Key words: wave pressure, helical anisotropy, radial stiffness, the phase velocity.