Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 30–40

УДК **517.518.13+517.983.23**

О КОМБИНАЦИЯХ ДИФФЕОМОРФНЫХ СДВИГОВ ОКРУЖНОСТИ И НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Б. Климентов

В работе изучаются суперпозиции диффеоморфизмов единичной окружности и сингулярных интегральных операторов на этой окружности. Установлено свойство таких суперпозиций, аналогичное свойству бесселевых потенциалов. Приводится пример, показывающий, что полученный результат, вообще говоря, не улучшаем.

Ключевые слова: сдвиг контура, сингулярный интегральный оператор.

1. Введение. Формулировка результатов

Обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

В работе используется банахово пространство $C^{k,\alpha}(\Gamma)$ комплекснозначных функций, имеющих на Γ k производных, где $k \geqslant 1$ — целое число, причем k-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. В этом пространстве предполагается заданной стандартная норма (см., например, [1, с. 25]). Как обычно, предполагаем, что $C^{k,0}(\Gamma) = C^k(\Gamma)$, $C^{0,\alpha}(\Gamma) = C^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha < 1$.

Пусть $\zeta(t)$ — диффеоморфизм класса $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, контура Γ на себя, причем $\zeta'_t(t) \neq 0$, где $\zeta'_t = \zeta'_s \cdot s'_t = \zeta'_s \cdot \overline{t'}_s$, $t(s) = e^{is}$.

Следуя [2, с. 33], для функции $\varphi(t)$, определенной на Γ, введем оператор сдвига $\mathscr{W}\varphi(t) = \varphi(\zeta(t))$. Очевидно, $\mathscr{W}$ — линейный, ограниченный, непрерывно обратимый в $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, оператор, причем $\|\mathscr{W}\|_{C(\Gamma)} = 1$ (см. [2, с. 33]).

Обозначим через

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

одномерный сингулярный (интегральный) оператор.

При изучении дифференциальных свойств «вплоть до края» решений краевых задач со сдвигом для различных эллиптических систем возникает потребность в исследовании свойств суперпозиции $\mathscr{W} S \mathscr{W}^{-1} - S$.

Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\mu = \alpha + \beta \leqslant 2$, то при $\mu < 1$ $\Psi\varphi(t) = (\mathscr{W} S \mathscr{W}^{-1} - S)\varphi(t) \in C^\mu(\Gamma)$, причем*

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^\mu(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const} \|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}, \tag{2}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Если $\mu = 1$, *то* $\Psi\varphi(t) \in C^{\mu-\varepsilon}(\Gamma)$ *для любого* ε, $0 < \varepsilon < \mu$, *с выполнением оценки, аналогичной* (2).

Если $\mu > 1$, *то* $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\mu-1}(\Gamma)$, *причем*

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\mu-1}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}, \tag{3}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Очевидно

Следствие 1. *Если* $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{1,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leqslant 1$, *то* $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, *причем*

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,1}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{1,\beta}(\Gamma)}, \tag{4}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Замечание 1. Как показывают примеры (см. замечание 2 после доказательства теоремы 1), при $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ показатель α в левой части (4) не улучшаем в том смысле, что существуют функции $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ такие, что $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, но $\Psi\varphi(t) \notin C^{1,\gamma}(\Gamma)$ при любом γ, $1 \geqslant \gamma > \alpha$.

2. Вспомогательные построения

Положим $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\sigma}$, $\omega = r\sigma + (1-r)s$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $u = e^{i\omega}$.

Лемма 1. *Если* $\zeta(t) \in C^{n+1,\alpha}(\Gamma)$, $n \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то имеют место следующие разновидности формулы Тэйлора:*

$$\begin{gathered}\zeta(\tau) - \zeta(t) = \zeta'(t)(\tau - t) + \zeta''(t)\frac{(\tau-t)^2}{2!} + \cdots \\ + \zeta^{(n)}(t)\frac{(\tau-t)^n}{n!} + \frac{(\tau-t)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 \Omega(r,s,\sigma,\omega)\zeta^{(n+1)}(e^{i\omega})(1-r)^n dr,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\Omega(r,s,\sigma,\omega) = i \cdot \left[\frac{\tau - t}{\sigma - s}\right]^{-n-1} \cdot e^{i(n+1)\omega} \cdot \left[\frac{e^{i(\sigma-s)(1-r)} - 1}{(\sigma-s)(1-r)}\right]^n; \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\zeta(\tau) - \zeta(t) = \zeta'(t)(\tau - t) + \zeta''(t)\frac{(\tau-t)^2}{2!} + \cdots \\ + \zeta^{(n)}(t)\frac{(\tau-t)^n}{n!} + \zeta^{(n+1)}(t)\frac{(\tau-t)^{n+1}}{(n+1)!} + \Omega_1(\tau,t),\end{gathered} \tag{7}$$

где остаточный член имеет вид

$$\begin{gathered}\Omega_1(\tau,t) = \frac{(\tau-t)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 \left[\Omega(r,s,\sigma,\omega)\zeta^{(n+1)}(e^{i\omega}) - \zeta^{(n+1)}(t)\right](1-r)^n\,dr \\ = O\left(|\tau - t|^{n+1+\alpha}\right).\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь запись $f(x) = O(\varphi(x))$ означает выполнение неравенства

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{const}|\varphi(x)|,$$

где const от f и φ не зависит.

◁ Доказательство леммы 1. Для функции $f(t) \in C^1(\Gamma)$ очевидно соотношение:

$$f(\tau) - f(t) = \int\limits_t^\tau f'(u)\,du. \tag{9}$$

Подставив в (9)

$$f(u) = \zeta(u) + (\tau - u)\zeta'(u) + \frac{(\tau-u)^2}{2}\zeta''(u)\frac{(\tau-u)^3}{3!}\zeta'''(u) + \dots + \frac{(\tau-u)^n}{n!}\zeta^{(n)}(u),$$

в получившемся интеграле перейдем к переменной интегрирования r, после чего получим (5).

Легко проверяется соотношение

$$\Omega(r, s, \sigma, \omega) = 1 + O\left(|\tau - t|\right). \tag{10}$$

Действительно,

$$i \cdot \left[\frac{\tau - t}{\sigma - s}\right]^{-n-1} = e^{-i(n+1)s}\left[\frac{e^{i(\sigma-s)} - 1}{\sigma - s}\right]^{-(n+1)}$$

$$= e^{-i(n+1)s} \cdot i^{-n} \cdot \left[1 + O(\sigma - s)\right],$$

$$\left[\frac{e^{i(\sigma-s)(1-r)} - 1}{(\sigma - s)(1 - r)}\right]^n = i^n \cdot \left[1 + O(\sigma - s)\right],$$

и

$$e^{-i(n+1)s} \cdot e^{i(n+1)\omega} = e^{ir(\sigma-s)(n+1)} = 1 + O(\sigma - s).$$

Поскольку

$$0 < \mathrm{const} \leqslant \frac{|t_2 - t_1|}{|s_2 - s_1|} \leqslant 1 \tag{11}$$

для любых t_1, $t_2 \in \Gamma$ (s_1, s_2 — дуговые абсциссы этих точек), в этих формулах можно заменить $O(\sigma - s)$ на $O(|\tau - t|)$. Проделав такую замену, из (6) получим (10).

Далее, формально записав равенство (7) и вычтя из него (5), с использованием (10) получим (8). Последнее равенство в (8) следует из (10) и $\zeta^{(n+1)}(z) \in C^\alpha(\Gamma)$. ▷

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Запишем рассматриваемый оператор следующим образом:

$$\Psi\varphi(t) = \left(\mathscr{W} S \mathscr{W}^{-1} - S\right)\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma k(\tau, t)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

где

$$k(\tau, t) = \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t}. \tag{13}$$

Поскольку (см. [3, с. 30–31])

$$\int\limits_\Gamma \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)}\,d\tau = \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \pi i, \quad z = \zeta(t) \in \Gamma,$$

то при $\varphi(\tau) = \text{const}$ $(\mathscr{W} S \mathscr{W}^{-1} - S)\varphi(t) \equiv 0$, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma} k(\tau, t)\, d\tau \equiv 0 \tag{14}$$

и

$$\Psi\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t_*))\, d\tau, \tag{15}$$

при всяком зафиксированном $t_* \in \Gamma$.

Отметим, что (13) можно переписать в виде

$$k(\tau, t) = \frac{\int\limits_{\tau}^{t} [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)]\ du}{[\zeta(\tau) - \zeta(t)](\tau - t)}. \tag{16}$$

Зафиксируем на Γ точку t и отложим в ту и другую сторону от t дуги $t't$ и tt'', равные по длине $2\sigma < \pi$. Обозначим через $l = t't''$ объединение этих дуг. Обозначим также через λ, s, ν дуговые абсциссы соответственно точек τ, t, w; $w - t = h$, $|\nu - s| = \sigma$.

Положим в (15) $t_* = t$. Тогда будем иметь

$$\begin{gathered} \Psi\varphi(t+h) - \Psi\varphi(t) \\ = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} k(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h))\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t))\, d\tau. \end{gathered} \tag{17}$$

Так как $\zeta = \zeta(t)$ — диффеоморфизм, $|\zeta'(t)| \geqslant \text{const} > 0$, то из (16) и $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ получим

$$|k(\tau, t)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{|\tau - t|}{|\zeta(\tau) - \zeta(t)|} \cdot \frac{1}{|\tau - t|^{1-\alpha}} \leqslant \text{const} \cdot \frac{1}{|\tau - t|^{1-\alpha}}, \tag{18}$$

где последняя константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$.

Аналогично

$$|k(\tau, t+h)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{1}{|\tau - t - h|^{1-\alpha}}. \tag{19}$$

Запишем разность (17) как $I_0 + I$, где

$$I_0 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{l} k(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h))\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{l} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t))\, d\tau,$$

$$I = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus l} k(\tau, t+h)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h))\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus l} k(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t))\, d\tau.$$

Воспользовавшись (6), из $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$ и (18), (19) выводим

$$|I_0| \leqslant \text{const} \left\{ \int\limits_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} |\lambda - s - \sigma|^{\mu-1}\, d\lambda + \int\limits_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} |\lambda - s|^{\mu-1}\, d\lambda \right\} \leqslant \text{const} |h|^{\mu}, \tag{20}$$

где $\mu = \alpha + \beta$, а константа зависит от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Перейдем к оценке выражения I, которое запишем в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \backslash l} k(\tau,t)(\varphi(t) - \varphi(t+h))\, d\tau, \tag{21}$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \backslash l} [k(\tau,t+h) - k(\tau,t)](\varphi(\tau) - \varphi(t+h))\, d\tau. \tag{22}$$

В силу (14)

$$I_1 = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{\pi i} \int\limits_{l} k(\tau,t)\, d\tau,$$

и из (18) и $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$ будем иметь

$$|I_1| \leqslant \mathrm{const}|h|^{\beta} \int\limits_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{1-\alpha}} \leqslant \mathrm{const}|h|^{\alpha+\beta}, \tag{23}$$

где константа зависит от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Перейдем к оценке выражения I_2. Для этого преобразуем разность $k(\tau,t+h) - k(\tau,t)$. Ясно, что это будет некоторая дробь $\frac{P(\tau,t,h)}{Q(\tau,t,h)}$, где

$$Q(\tau,t,h) = [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)] \cdot [\zeta(\tau) - \zeta(t)] \cdot (\tau - t) \cdot (\tau - t - h). \tag{24}$$

Учитывая (16), для $P(\tau,t,h)$ будем иметь

$$\begin{gathered}
P(\tau,t,h) = \left\{ \int\limits_{\tau}^{t} [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)]\, du + \int\limits_{t}^{t+h} [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)]\, du \right\} \left\{ -\int\limits_{\tau}^{t} \zeta'(u)\, du \right\} (\tau - t) \\
- \int\limits_{\tau}^{t} [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)]\, du \left\{ -\int\limits_{\tau}^{t} \zeta'(u)\, du - \int\limits_{t}^{t+h} \zeta'(u)\, du \right\} (\tau - t) \\
- h \int\limits_{\tau}^{t} [\zeta'(u) - \zeta'(\tau)]\, du \int\limits_{\tau}^{t+h} \zeta'(u)\, du \\
= \zeta'(\tau) \int\limits_{t}^{t+h} \zeta'(u)\, du (\tau - t)(\tau - t - h) - h \int\limits_{\tau}^{t} \zeta'(u)\, du \int\limits_{\tau}^{t+h} \zeta'(u)\, du.
\end{gathered} \tag{25}$$

Поскольку $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, имеют место следующие соотношения (см. лемму 1):

$$\int\limits_{t}^{t+h} \zeta'(u)\, du = \zeta(t+h) - \zeta(t) = \zeta'(t)h + O\left(|h|^{1+\alpha}\right),$$

$$\int\limits_{\tau}^{t} \zeta'(u)\, du = \zeta(t) - \zeta(\tau) = -\zeta'(t)(\tau - t) + O\left(|\tau - t|^{1+\alpha}\right),$$

$$\int\limits_{\tau}^{t+h} \zeta'(u)\,du = -\zeta'(\tau)(\tau - t - h) + O\left(|\tau - t - h|^{1+\alpha}\right).$$

Подставляя эти соотношения в (25), получим

$$\begin{aligned} P(\tau,t,h) = \zeta'(\tau)(\tau - t)(\tau - t - h) \cdot O\left(|h|^{1+\alpha}\right) \\ + h\zeta'(t)(\tau - t) \cdot O\left(|\tau - t - h|^{1+\alpha}\right) \\ + h\zeta'(\tau)(\tau - t - h) \cdot O\left(|\tau - t|^{1+\alpha}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Аналогично (20) из (22), (24) и (26) будем иметь

$$\begin{aligned} |I_2| \leqslant \mathrm{const} \cdot |h|^{1+\alpha} \int\limits_{\Gamma \setminus l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t| \cdot |\tau - t - h|^{1-\beta}} \\ + \mathrm{const} \cdot |h| \int\limits_{\Gamma \setminus l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t| \cdot |\tau - t - h|^{1-\alpha-\beta}} \\ + \mathrm{const} \cdot |h| \int\limits_{\Gamma \setminus l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^{1-\alpha} \cdot |\tau - t - h|^{1-\beta}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Так как на $\Gamma \setminus l$ величина $\frac{\sigma}{\lambda - s}$ не превышает по абсолютной величине $\frac{1}{2}$, из (27) получаем

$$\begin{aligned} |I_2| \leqslant \mathrm{const} \cdot \sigma^{1+\alpha} \left\{ \int\limits_{s+2\sigma}^{\pi+s} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\beta}} + \int\limits_{-\pi+s}^{s-2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\beta}} \right\} \\ + \mathrm{const} \cdot \sigma \left\{ \int\limits_{s+2\sigma}^{\pi+s} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\alpha-\beta}} + \int\limits_{-\pi+s}^{s-2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\alpha-\beta}} \right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Если $\alpha + \beta < 1$, из (28) будем иметь

$$\begin{aligned} |I_2| \leqslant \mathrm{const} \cdot \sigma^{1+\alpha} \int\limits_{s+2\sigma}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - s)^{2-\beta}} + \mathrm{const} \cdot \sigma \int\limits_{s+2\sigma}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda - s)^{2-\alpha-\beta}} \\ \leqslant \mathrm{const} \cdot \sigma^{\alpha+\beta} \leqslant \mathrm{const} \cdot |h|^{\alpha+\beta}, \end{aligned} \tag{29}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{\beta}(\Gamma)}$.

Если $\alpha + \beta = 1$, то, не переходя к бесконечным пределам в интегралах, из (28) получаем

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const} \cdot |h| \ln \frac{1}{|h|}, \tag{30}$$

где также константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{\beta}(\Gamma)}$.

Предположим теперь, что $1 < \alpha + \beta < 2$. В этом случае из (20), (23)–(26) и (28) получаем, что к пределу

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Psi(t+h) - \Psi(t)}{h} = \frac{1}{\pi i} \lim_{h \to 0} \int\limits_{\Gamma} \frac{k(\tau, t+h) - k(\tau, t)}{h} (\varphi(\tau) - \varphi(t))\,d\tau$$

применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости, т. е. предел можно подвести под знак интеграла и функция $\Psi(t)$ дифференцируема (на Γ) по t, причем

$$\Psi_t'(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} M(\tau,t)(\varphi(\tau)-\varphi(t))\,d\tau, \tag{31}$$

где

$$M(\tau,t) = \frac{\zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau-t)^2 - [\zeta(\tau)-\zeta(t)]^2}{[\zeta(\tau)-\zeta(t)]^2\,(\tau-t)^2} = \frac{\partial}{\partial t}k(\tau,t), \tag{32}$$

и интеграл в (31) есть обычный абсолютно сходящийся несобственный интеграл. Действительно, с помощью формул

$$\begin{gathered}\zeta(\tau)-\zeta(t) = \zeta'(t)(\tau-t) + O\left(|\tau-t|^{1+\alpha}\right),\\ \zeta(\tau)-\zeta(t) = \zeta'(\tau)(\tau-t) + O\left(|\tau-t|^{1+\alpha}\right)\end{gathered} \tag{33}$$

числитель дроби в (32) преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}\zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau-t)^2 - [\zeta(\tau)-\zeta(t)]^2\\ = \zeta'(t)(\tau-t)\cdot O\left(|\tau-t|^{1+\alpha}\right) + \zeta'(\tau)(\tau-t)\cdot O\left(|\tau-t|^{1+\alpha}\right),\end{gathered}$$

откуда, с учетом $\varphi(t)\in C^{0,\beta}(\Gamma)$, будем иметь

$$|M(\tau,t)(\varphi(\tau)-\varphi(t))| \leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{|\tau-t|^{2-\alpha-\beta}}, \tag{34}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Используя схему, аналогичную примененной к $\Psi(t)$, покажем, что $\Psi_t'(t)\in C^{\alpha+\beta-1}(\Gamma)$.

Аналогично (17) запишем

$$\begin{gathered}\Psi_t'(t+h)-\Psi_t'(t)\\ = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} M(\tau,t+h)(\varphi(\tau)-\varphi(t+h))\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} M(\tau,t)(\varphi(\tau)-\varphi(t))\,d\tau\end{gathered} \tag{35}$$

и представим эту разность как $J_0 + J$, где

$$J_0 = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l} M(\tau,t+h)(\varphi(\tau)-\varphi(t+h))\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l} M(\tau,t)(\varphi(\tau)-\varphi(t))\,d\tau,$$

$$J = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus l} M(\tau,t+h)(\varphi(\tau)-\varphi(t+h))\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus l} M(\tau,t)(\varphi(\tau)-\varphi(t))\,d\tau$$

(здесь дуга l та же, что и выше).

Аналогично (20), из (34) имеем

$$|J_0| \leqslant \mathrm{const}\left\{\int\limits_{s-2\sigma}^{s+2\sigma}|\lambda-s-\sigma|^{\mu-2}d\lambda + \int\limits_{s-2\sigma}^{s+2\sigma}|\lambda-s|^{\mu-2}d\lambda\right\} \leqslant \mathrm{const}|h|^{\mu-1}, \tag{36}$$

где $\mu = \alpha+\beta$.

Далее, аналогично предыдущему, представим J в виде суммы $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus l} M(\tau, t)(\varphi(t) - \varphi(t+h))\, d\tau, \tag{37}$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus l} [M(\tau, t+h) - M(\tau, t)](\varphi(\tau) - \varphi(t+h))\, d\tau. \tag{38}$$

Аналогично (23) будем иметь

$$|J_1| \leqslant \mathrm{const}|h|^{\beta} \int\limits_{s-2\sigma}^{s+2\sigma} \frac{d\lambda}{|\lambda - s|^{2-\alpha}} \leqslant \mathrm{const}|h|^{\alpha+\beta-1}, \tag{39}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Далее, для оценки J_2 преобразуем разность

$$M(\tau, t+h) - M(\tau, t) = \frac{P_1(\tau, t, h)}{Q_1(\tau, t, h)},$$

где

$$Q_1(\tau, t, h) = [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2 (\tau - t)^2, \tag{40}$$

$$P_1(\tau, t, h) = \Big\{\zeta'(t+h)\zeta'(\tau)(\tau - t - h)^2 - [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2\Big\} [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 (\tau - t)^2$$
$$- \Big\{\zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau - t)^2 - [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2\Big\} [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2,$$

или, после элементарных преобразований,

$$\begin{aligned} P_1(\tau, t, h) &= \zeta'(t+h)\zeta'(\tau)(\tau - t - h)^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 (\tau - t)^2 \\ &\quad - [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 (\tau - t)^2 \\ &\quad - \zeta'(t)\zeta'(\tau)(\tau - t)^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2 \\ &\quad + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 (\tau - t - h)^2 \\ &= \zeta'(\tau)(\tau - t)^2(\tau - t - h)^2 \Big\{ \big[\zeta'(t+h) - \zeta'(t)\big] [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 \\ &\quad + \zeta'(t) \Big[(\zeta(\tau) - \zeta(t))^2 - (\zeta(\tau) - \zeta(t) + \zeta(t) - \zeta(t+h))^2\Big]\Big\} \\ &\quad + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 \big[(\tau - t - h)^2 - (\tau - t)^2\big] \\ &= \zeta'(\tau)(\tau - t)^2(\tau - t - h)^2 \Big\{ \big[\zeta'(t+h) - \zeta'(t)\big] [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 \\ &\quad - \zeta'(t) \Big[2\left(\zeta(\tau) - \zeta(t)\right)\left(\zeta(t) - \zeta(t+h)\right) + \left(\zeta(t) - \zeta(t+h)\right)^2\Big]\Big\} \\ &\quad + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 [\zeta(\tau) - \zeta(t+h)]^2 \left[-2h(\tau - t) + h^2(\tau - t)^2\right]. \end{aligned} \tag{41}$$

Используя (33), а также формулу

$$\zeta(t) - \zeta(t+h) = -\zeta'(t)h + O\left(|h|^{1+\alpha}\right), \tag{42}$$

из (41) для $P_1(\tau, t, h)$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_1(\tau, t, h) &= h^{\alpha} \cdot O\left(|\tau - t|^4 |\tau - t - h|^2\right) \\ &\quad + h \cdot \Big[O\left(|\tau - t|^{3+\alpha}|\tau - t - h|^2\right) + O\left(|\tau - t|^{2+\alpha}|\tau - t - h|^3\right)\Big] \\ &\quad + h^{1+\alpha} \cdot O\left(|\tau - t|^3 |\tau - t - h|^2\right). \end{aligned} \tag{43}$$

Поскольку на $\Gamma \setminus l$ величина $\frac{\sigma}{\lambda - s}$ не превышает по абсолютной величине $\frac{1}{2}$, из (40), (43), на $\Gamma \setminus l$ имеем оценку

$$\begin{gathered} |(M(\tau, t+h) - M(\tau, t)(\varphi(\tau) - \varphi(t+h)| \\ \leqslant \mathrm{const} \left\{ \frac{\sigma^\alpha}{|\lambda - s|^{2-\beta}} + \frac{\sigma}{|\lambda - s|^{3-\mu}} + \frac{\sigma^{1+\alpha}}{|\lambda - s|^{3-\beta}} \right\}, \end{gathered} \tag{44}$$

где, как и выше, $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\lambda}$, $\mu = \alpha + \beta$, а константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ и линейно от $\|\varphi\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)}$.

Аналогично (28), (29), из (44) получим

$$|J_2| \leqslant \mathrm{const} \cdot |h|^{\alpha+\beta-1}. \tag{45}$$

Сопоставляя (20), (23), (29), (30), (36), (39) и (45), получаем утверждение теоремы 1. $\triangleright$

Непосредственно из рассуждений доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Если $\zeta(z) \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ — голоморфное продолжение $\zeta(t)$ внутрь D, а $\Psi(z)$ определяется формулами* (12), (13) *с заменой переменной t на z, то*

$$\lim_{z \to t} \Psi(z) = \Psi(t), \quad \lim_{z \to t} \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z) = \Psi'(t), \quad z \in D, \ t \in \Gamma. \tag{46}$$

Замечание 2. Обсудим несколько подробнее банахово пространство (комплекснозначных) функций $C^{1,\alpha}(\Gamma)$. Норма в нем, как известно [1, с. 25], задается формулой

$$\|\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)| + \max_{t \in \Gamma} |\varphi'(t)| + \sup_{\tau, t \in \Gamma} \frac{|\varphi'(\tau) - \varphi'(t)|}{|\tau - t|^\alpha}. \tag{47}$$

Обозначим через $C_0^{1,\alpha}(\Gamma)$ подпространство функций $\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, для которых

$$\lim_{|\tau - t| \to 0} \frac{|\varphi'(\tau) - \varphi'(t)|}{|\tau - t|^\alpha} = 0.$$

($C_0^{1,\alpha}(\Gamma)$ — замкнутое подпространство пространства $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ (см. [4, с. 269]).)

Обозначим $C_*^{1,\alpha}(\Gamma) = C^{1,\alpha}(\Gamma) \setminus C_0^{1,\alpha}(\Gamma)$, $D \subset C^{1,\alpha}(\Gamma)$ — множество диффеоморфизмов окружности Γ. Покажем, что $D_* = D \cap C_*^{1,\alpha}(\Gamma) \neq \varnothing$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Положим

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi - 2], \\ \frac{1}{2}\left(1 + |s - \pi + 1|^\alpha\right), & s \in [\pi - 2, \pi], \\ \frac{1}{2}\left(3 - |s - \pi - 1|^\alpha\right), & s \in [\pi, \pi + 2], \\ 1, & s \in [\pi + 2, 2\pi] \end{cases}$$

и

$$\varphi^*(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \pi - 2], \\ \frac{1}{2}\left(3 - |s - \pi + 1|^\alpha\right), & s \in [\pi - 2, \pi], \\ \frac{1}{2}\left(1 + |s - \pi - 1|^\alpha\right), & s \in [\pi, \pi + 2], \\ 1, & s \in [\pi + 2, 2\pi], \end{cases}$$

а также

$$f(s) = \int\limits_0^s \varphi(\sigma)\, d\sigma, \quad f^*(s) = \int\limits_0^s \varphi^*(\sigma)\, d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi].$$

Очевидно, функции $\zeta(t) = \zeta(e^{is}) = \zeta(s) = e^{if(s)}$ и $\zeta^*(t) = e^{if^*(s)}$ задают диффеоморфизмы класса $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ окружности Γ на себя и $\zeta(t), \zeta^*(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$.

Отметим, что

$$\zeta^*(t) = \overline{\zeta(t)} \cdot t^2. \tag{48}$$

Введем в рассмотрение два линейных оператора

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S), \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S),$$

где I — тождественный оператор. Это непрерывные проекторы в пространстве $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ (см. [1, с. 38], [3, с. 66]). Для краткости далее будем обозначать проекции $P_\pm C^{1,\alpha}(\Gamma)$ через $P_\pm$.

Ясно, что пространство $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ представимо в виде прямой суммы $P_+ \oplus P_-$. На P_+ и P_- естественным образом определена норма (47) и определенная на $P_+ \oplus P_-$ топология произведения $P_+ \times P_-$ совпадает с топологией на $C^{1,\alpha}(\Gamma)$, определенной нормой (47).

Рассмотрим разложение в ряд Фурье функции $\zeta(t) = \zeta(e^{is})$:

$$\zeta(e^{is}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_0 + c_{-n}e^{-ins} + c_n e^{ins}\right]. \tag{49}$$

Очевидно, $P_-\zeta(e^{is}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-ins}$, а $P_+\zeta(e^{is}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_0 + c_n e^{ins}\right]$.

Продифференцировав ряд (49) по s, из теоремы 4.7 и формулы (4.1) из [5, с. 79, 81], получим следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то $c_\nu = O\big(\frac{1}{|\nu|^{1+\alpha}}\big)$. Для того чтобы $\zeta(t) \in C_*^{1,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись коэффициенты c_ν разложения (49) со сколь угодно большими по модулю номерами такие, что $|c_\nu| \geqslant \frac{L}{|\nu|^{1+\alpha}}$, где константа $L > 0$ от ν не зависит.*

$\lhd$ Пусть $\zeta(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$ — построенный выше диффеоморфизм окружности Γ. Положим в теореме 1 $\varphi(\tau) = \zeta(\tau)$. Тогда

$$\Psi\zeta(t) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\zeta(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \zeta(t) = 2P_-\zeta(t). \rhd$$

Если $P_-\zeta(t) \notin C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$, то в силу леммы 2 и (48) $P_-\zeta^*(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$ и в качестве $\varphi(\tau)$ возьмем $\zeta^*(t)$. Таким образом, можем считать, что $\Psi\zeta(t) \in C_*^{1,\alpha}(\Gamma)$, откуда $\Psi\zeta(t) \notin C^{1,\gamma}(\Gamma)$ для любого γ, $1 \geqslant \gamma > \alpha$.

Литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М.: Физматгиз, 1977.—448 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.

4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1.—М.: Мир, 1965.—615 с.

Статья поступила 25 октября 2016 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sklimentov@hotmail.com

ON COMBINATIONS OF THE CIRCLE SHIFTS AND SOME ONE-DIMENSIONAL INTEGRAL OPERATORS

Klimentov S. B.

The diffeomorphism $\zeta = \zeta(e^{is})$ of the unit circle and the operator $\Psi\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau)-\zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\varphi(\tau)d\tau$ are under consideration. The main results can be stated as follows: If $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\mu = \alpha + \beta \leqslant 2$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$ for $\mu < 1$. Moreover, the following inequality holds:

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^\mu(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)},$$

where the constant depends on $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ only. If $\mu = 1$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{\mu-\varepsilon}(\Gamma)$ for all $0 < \varepsilon < \mu$ and the similar inequality holds. If $\mu > 1$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\mu-1}(\Gamma)$, and

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\mu-1}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\Gamma)},$$

where the constant depends on $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ only. If $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{1,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta \leqslant 1$, then $\Psi\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, and

$$\|\Psi\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi(t)\|_{C^{0,1}(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi(t)\|_{C^{1,\beta}(\Gamma)},$$

where the constant depends on $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)}$ only. The index α in the left-hand side of the last inequality can not be improved. The appropriate example is given.

Key words: shift, singular integral operator.