Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 18–25

УДК **517.983**

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ШРЕДИНГЕРА[1]

А. В. Гиль, В. А. Ногин

Изучаются комплексные степени дифференциального оператора второго порядка $S_{\bar\lambda}$, с комплексными коэффициентами в главной части. Отрицательные степени этого оператора реализованы как потенциалы $H^{\alpha}_{\bar\lambda}\varphi$ с нестандартной метрикой. Положительные степени, обратные к отрицательным, — как аппроксимативные обратные операторы. Описан также образ $H^{\alpha}_{\bar\lambda}(L_p)$ в терминах оператора, левого обратного к $H^{\alpha}_{\bar\lambda}$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, образ, мультипликатор, комплексные степени, метод аппроксимативных обратных операторов.

1. Введение

В работе исследуются комплексные степени дифференциального оператора $S_{\bar\lambda}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ с комплексными коэффициентами в главной части:

$$S_{\bar\lambda} = m^2 I + ib\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}(1 - i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \tag{1}$$

где $m > 0$, $b \neq 0$, $\bar\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Комплексные степени оператора $S_{\bar\lambda}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x,t) \in \Phi(\mathbb{R}^{n+1})$, где $\Phi(\mathbb{R}^{n+1})$ — пространство Лизоркина (см. п. 2.2), определяются в образах Фурье равенством

$$(\widehat{S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi,\tau) = \left(m^2 + b\tau - |\xi'|^2 + i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2\right)^{-\alpha/2}\widehat{\varphi}(\xi,\tau). \tag{2}$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^1$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала с нестандартной метрикой. Соответствующие дробные потенциалы имеют вид:

$$(H^{\alpha}_{\bar\lambda}\varphi)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} h^{\alpha}_{\bar\lambda}(y,s)\varphi(x-y,t-s)\,dy\,ds, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}^1, \tag{3}$$

где

$$h^{\alpha}_{\bar\lambda}(y,s) = d_{n,\alpha}(\bar\lambda)(s)_+^{\frac{\alpha-n-1}{2}}\exp\left\{i\frac{m^2}{b}s - \sum_{k=1}^{n}\frac{b(\lambda_k - i)y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)s}\right\}, \tag{4}$$

[1] Работа первого автора выполнена в рамках совместного научного проекта международного конкурса «ГКН МОН РА — ЕГУ — ЮФУ РФ» № ВнГр-07/2017-31.

$$d_{n,\alpha}(\bar\lambda)=\frac{b^{(n-\alpha)/2}\exp(\frac{-\alpha-n}{4}\pi i)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-i\lambda_k}}.$$

Установлены оценки для оператора $H^{\alpha}_{\bar\lambda}$ из L_p в L_q. В рамках метода аппроксимативных обратных операторов, построено обращение потенциалов $H^{\alpha}_{\bar\lambda}\varphi$, $\varphi\in L_p$. Дано также описание образа $H^{\alpha}_{\bar\lambda}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

Таким образом, в работе получены явные выражения для комплексных степеней $S^{\alpha/2}_{\bar\lambda}\varphi$ с положительными вещественными частями и описаны области определения этих степеней.

В настоящее время имеется ряд работ по теории комплексных степеней дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами (см. [4, гл. 9, 11]), обзорную статью [2], а также работы [3–9]). Рассмотренный здесь случай оператора (1) является одним из наиболее трудных, что обусловлено анизотропностью соответствующих дробных потенциалов (т. е. комплексных степеней оператора (1) с отрицательными вещественными частями). Последнее, в свою очередь, связано с наличием комплексных коэффициентов в главной части оператора.

Ранее, в статье [10], был исследован дифференциальный оператор $i\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}(1-i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, представляющий из себя оператор Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \tag{5}$$

возмущенный комплексными коэффициентами в главной части. Далее, в статье [11], был изучен дифференциальный оператор $m^2I+i\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}(1-i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, связанный с операторами Шредингера (5) и Гельмгольца $m^2I+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. В данной работе рассмотрен наиболее общий случай.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Обозначения. $\langle f,w\rangle=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\overline{f(x,t)}w(x,t)\,dx\,dt$; $(W_\delta\varphi)(x,t)=(\mathrm{w}(\cdot,\delta)*\varphi)(x,t)$ — интеграл Гаусса — Вейерштрасса, где $\mathrm{w}(x,t,\delta)=(4\pi\delta)^{-n/2}e^{(-|x|^2-t^2)/(4\delta)}$ — ядро Гаусса — Вейерштрасса; S — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; $\mathscr{R}_0$ — банахова алгебра преобразований Фурье функций, интегрируемых в $\mathbb{R}^n$; $C_0(\mathbb{R}^{n+1})=\{f: f\in C(\mathbb{R}^{n+1}),\ f(\infty)=0\}$ — пространство непрерывных функций, исчезающих на бесконечности.

Лемма [4, лемма 1.31]**.** *Пусть функция $f(x,z)$ аналитична по z в некоторой области $D\subset\mathbb{C}$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ и имеет суммируемую мажоранту: $|f(x,z)|\leqslant F(x)\in L_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда интеграл $\int_{\mathbb{R}^{n+1}}f(x,z)\,dx$ аналитичен по z в области D.*

2.2. О пространствах Лизоркина Φ, Ψ. Через Ψ обозначим класс функций из S, которые исчезают вместе со всеми своими производными на совокупности координатных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$: $y_1=0,\dots,y_{n+1}=0$.

Пространство Ψ является счетно-нормированным пространством, полным относительно набора попарно-согласованных норм, задаваемых равенствами

$$\|\psi\|_N=\sup_{\substack{|k|\leqslant N,\\ u\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{n+1}\{y\in\mathbb{R}^{n+1}:\,y_l=0\}}}(M(u))^N|D^k\psi(u)|,\quad N=0,1,2,\dots,$$

где $u=(x,t)$, $M(u)=\max\{\sqrt{1+|u|^2}, 1/\rho(u)\}$, $\rho(u)=\min_{j=1,\ldots,n+1}|y_j|$.

Обозначим через $\Phi=\Phi(\mathbb{R}^{n+1})$ пространство прообразов Фурье функций из Ψ: $\Phi = F^{-1}(\Psi)$. Пространства Ψ и Φ были введены П. И. Лизоркиным (см., например, [13]). Нам понадобится информация о плотности класса Φ в L_p.

Замечание 1. Известно [4, теорема 2.1], что Класс Φ плотен в L_p, $1<p<\infty$, и в $C_0(\mathbb{R}^{n+1})$. Как показано в [4, глава 2, § 4], для любой функции $\omega(x,t)\in S$ существует последовательность функций $\omega_N(x,t)\in\Phi$, аппроксимирующая $\omega(x)$ по норме L_p , $1<p<\infty$, и по норме C_0.

3. Основные результаты

3.1. Интегральные представления для комплексных степеней $S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi$, $\varphi\in\Phi$. Комплексные степени $S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi$, $\varphi\in\Phi$, определим равенством (2). Интегральное представление для указанных степеней дает следующая

Теорема. *Пусть* $0<\operatorname{Re}\alpha<n+2$, $\varphi\in\Phi$. *Тогда*

$$\left(S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi\right)(x,t)=\left(H_{\bar\lambda}^{\alpha}\varphi\right)(x,t), \tag{6}$$

где $H_{\bar\lambda}^{\alpha}$ — *оператор* (3).

◁ Утверждение теоремы будет следовать из равенства

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^1}dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\widehat{\varphi}(\xi,\tau)\exp(-ix\xi-it\tau)\,d\xi}{\left(m^2+b\tau+\sum\limits_{k=1}^{n}(i\lambda_k-1)\xi_k^2\right)^{\alpha/2}}=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}h_{\bar\lambda}^{\alpha}(y,s)\varphi(x-y,t-s)\,dy\,ds, \tag{7}$$

где $h_{\bar\lambda}^{\alpha}(y,s)$ — ядро (4). Для доказательства (7) установим вначале формулу

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^1}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\widehat{\varphi}(\xi,\tau)\exp\left(-\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2-ix\xi-it\tau\right)d\xi}{\left(m^2+b\tau-\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2+i\varepsilon\right)^{\alpha/2}}$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}h_{\bar\gamma,\varepsilon}^{\alpha}(y,s)\varphi(x-y,t-s)\,dy\,ds. \tag{8}$$

Здесь $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\gamma_k=1-i\lambda_k$,

$$h_{\bar\gamma,\varepsilon}^{\alpha}(y,s)=\frac{b^{(n-\alpha)/2}\exp(-\frac{\alpha\pi i}{4})}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\gamma_k}}(\varepsilon b+is)^{-n/2}\exp\left\{\left(\frac{m^2i-\varepsilon}{b}\right)s-\sum_{k=1}^{n}\frac{by_k^2}{4\gamma_k(b\varepsilon+is)}\right\}(s)_+^{\frac{-2+\operatorname{Re}\alpha}{2}},$$

$\gamma_k>0$, $k=1,\ldots,n$.

Заметим, что $h_{\bar\gamma,\varepsilon}^{\alpha}(y,s)\in L_1$.

С помощью формулы Бохнера (в $\mathbb{R}^n$) получаем:

$$\widehat{h_{\bar\gamma,\varepsilon}^{\alpha}}(\xi,\tau)=\frac{2\exp\left(-\frac{\alpha\pi i}{4}\right)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_0^\infty\frac{\exp\left(-\varepsilon\rho+ib\tau\rho+im^2\rho\right)}{\rho^{1-\alpha/2}(\varepsilon+i\rho)^{n/2}}\,d\rho$$

$$\times\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2}\right)^{1-n/2}\int\limits_0^\infty r^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{-r^2}{\varepsilon+i\rho}\right)J_{\frac{n-2}{2}}\left(2r\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2}\right)\,dr,$$

где $J_{\frac{n-2}{2}}(z)$ — функция Бесселя порядка $\frac{n-2}{2}$. Применив к внутреннему интегралу в правой части формулу 6.631.4 из [14], имеем

$$\widehat{h^{\alpha}_{\overline{\gamma},\varepsilon}}(\xi,\tau)=\frac{\exp\left(-\alpha\pi i/4\right)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\varepsilon\rho+i\left(m^2+b\tau-\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2\right)\rho\right)}{\rho^{1-\alpha/2}\exp\left(\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2\right)}\,d\rho.$$

Используя далее формулу 3.381.4 из [14], будем иметь:

$$\widehat{h^{\alpha}_{\overline{\gamma},\varepsilon}}(\xi,\tau)=\exp\left(-\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2\right)\left(m^2+b\tau-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\xi_k^2+i\varepsilon\right)^{-\alpha/2}. \tag{9}$$

Умножив обе части (9) на $\widehat{\varphi}(\xi,\tau)$ и применив обратное преобразование Фурье, получаем (8).

Заметим, что обе части (8) аналитичны по γ_1 в области $D_1=\{\operatorname{Re}\gamma_1>0,\operatorname{Im}\gamma_1<0\}$. Аналитичность правой части этой формулы обосновывается применением леммы 1 с учетом равномерной (в области D_1) оценки

$$|h^{\alpha}_{\overline{\gamma},\varepsilon}(y,s)|\leqslant C(\varepsilon^2b^2+s^2)^{-n/4}e^{-\varepsilon\cdot s/b}(s)^{-1+\frac{\operatorname{Re}\alpha}{2}}. \tag{10}$$

Аналитичность левой части (8) очевидна.

Анализ доказательства граничной теоремы единственности И. И. Привалова, приведенного в [1, с. 413–415], показывает, что равенство (8) справедливо для $\gamma_1\in D_1$, $\gamma_2>0,\dots,\gamma_n>0$.

Далее, зафиксируем $\gamma_1\in D_1$ и распространим по аналитичности формулу (6) для $\gamma_1\in D_1$ и $\gamma_2\in D_2=\{\operatorname{Re}\gamma_2>0,\operatorname{Im}\gamma_2<0\}$.

Продолжая процесс последовательного аналитического продолжения (по переменным $\gamma_3,\dots,\gamma_n$), убеждаемся в справедливости (8) для $\gamma_k\in D_k=\{\operatorname{Re}\gamma_k>0,\operatorname{Im}\gamma_k<0\}$, $k=1,\dots,n$.

Полагая в (8) $\gamma_k=1-i\lambda_k$, $k=1,\dots,n$, $\lambda_k>0$, будем иметь:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^1_+}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\widehat{\varphi}(\xi,\tau)\cdot\exp^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon(i\lambda_k-1)\xi_k^2-ix\xi-it\tau}\,d\xi}{\left(m^2+b\tau+\sum\limits_{k=1}^{n}(i\lambda_k-1)\xi_k^2+i\varepsilon\right)^{\alpha/2}}$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}h^{\alpha}_{\bar{\lambda},\varepsilon}(y,s)\varphi(x-y,t-s)\,dy\,ds,\quad \varphi\in\Phi, \tag{11}$$

где

$$h^{\alpha}_{\bar{\lambda},\varepsilon}(y,s)=d_{n,\alpha}(\bar{\lambda})(\varepsilon b+is)^{-n/2}(s)_+^{\frac{-2+\operatorname{Re}\alpha}{2}}\exp\left\{\frac{(m^2i-\varepsilon)s}{b}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b(ib\varepsilon+s)(\lambda_k-i)y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)(\varepsilon^2b^2+s^2)}\right\}.$$

Переходя в (11) к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем (7). Предельный переход в правой части (11) обосновывается мажорантной теоремой Лебега, применимой с учетом оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\varphi(x-y,t-s)|}{|s|^{\frac{n+2-\operatorname{Re}\alpha}{2}}}\,dy\,ds<\infty,\quad \operatorname{Re}\alpha<n+2.$$

Возможность предельного перехода под знаком интеграла в левой части (11) очевидна. Применяя к обеим частям (7) преобразование Фурье, получаем (6). $\triangleright$

3.2. Действие оператора $H^{\alpha}_{\bar\lambda}$ в L_p-пространствах. Действие оператора $H^{\alpha}_{\bar\lambda}$ из $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ в $L_q(\mathbb{R}^{n+1})$ описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Оператор $H^{\alpha}_{\bar\lambda}$ ограничен из L_p в L_q, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$, $1 \leqslant p < \frac{n+2}{\operatorname{Re}\alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\operatorname{Re}\alpha}$.*

Утверждение теоремы 2 легко выводится из [15, теоремы 28.2, с. 412], содержащей $(L_p - L_q)$-оценки для параболических потенциалов Джонса — Сэмпсона в $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.3. Обращение потенциалов $f = H^{\alpha}_{\bar\lambda}\varphi$ с L_p-плотностями. В рамках метода аппроксимативных обратных операторов, левый обратный к $S^{-\alpha/2}_{\bar\lambda}$ оператор будем строить в виде:

$$(T^{\alpha}_{\bar\lambda} f)(x,t) = \overset{(L_p(\mathbb{R}^{n+1}))}{\lim_{\delta\to 0}} (T^{\alpha}_{\delta,\bar\lambda} f)(x,t), \tag{12}$$

где

$$(T^{\alpha}_{\delta,\bar\lambda} f)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} r^{\alpha}_{\delta,\bar\lambda}(y,s) f(x-y,t-s)\,dy\,ds, \tag{13}$$

$$r^{\alpha}_{\delta,\bar\lambda}(y,s) = F^{-1}\left[\left(m^2 + b\tau - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2\right)^{\alpha/2}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + i\delta}\right)^{d} e^{-\delta|\xi|^2}\right](y,s),$$

$\delta > 0$, $d > n+1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{2}$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$, $1 \leqslant p < \frac{n+2}{\operatorname{Re}\alpha}$, $\varphi \in L_p$. Тогда*

$$(T^{\alpha}_{\bar\lambda} H^{\alpha}_{\bar\lambda}\varphi)(x,t) = \varphi(x,t). \tag{14}$$

Предел по норме L_p в (12) можно заменить пределом почти всюду.

$\triangleleft$ Заметим, что функция

$$\left(m^2 + b\tau - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2\right)^{\alpha/2}\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + i\delta}\right)^{d}\exp\left(-\delta|\xi|^2\right)$$

принадлежит $\mathscr{R}_0$ согласно теореме 3.5 из [4]. Следовательно, $r^{\alpha}_{\delta,\bar\lambda}(y,s) \in L_1$. Доказательство равенства (14) основано на представлении

$$(T^{\alpha}_{\delta,\bar\lambda} H^{\alpha}_{\bar\lambda}\varphi)(x,t) = (W_\delta M_\delta\varphi)(x,t) + (W_\delta\varphi)(x,t). \tag{15}$$

Здесь $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$, $\varphi \in L_p$, $1 \leqslant p < \frac{n+2}{\operatorname{Re}\alpha}$. Оператор M_δ имеет вид

$$(M_\delta\varphi)(x,t) = \sum_{j=1}^{d} C_d^j(-\delta)^j (A^j_\delta\varphi)(x,t),$$

где

$$(A^j_\delta\varphi)(x,t) = \underbrace{\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty}_{j} e^{-\delta(y_1+\ldots+y_j)}\varphi(x_1 - y_1 - \ldots - y_j, x_2, \ldots, x_n, t)\,dy_1\ldots dy_j.$$

Равенство (15) проверяется переходом к образам Фурье для $\varphi \in \Phi$, с учетом формулы

$$(\widehat{M_\delta \varphi})(\xi, \tau) = \left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + i\delta} \right)^d - 1 \right) \widehat{\varphi}(\xi, \tau), \quad \varphi \in \Phi. \tag{16}$$

Это равенство распространяется по ограниченности на все L_p, $1 < p < \frac{n+2}{\mathrm{Re}\ \alpha}$, с учетом того, что операторы в обеих частях (15) ограничены из L_p в L_q, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\ \mathrm{Re}\ \alpha}$.

Ограниченность оператора в правой части (15) из L_p в L_q вытекает из теоремы Юнга о свертках, с учетом очевидной оценки $\|M_\delta \varphi\|_p \leqslant C\|\varphi\|_p$ и ограниченности оператора W_δ из L_p в L_q для $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$.

Оператор $T^\alpha_{\delta,\bar\lambda} H^\alpha_{\bar\lambda}$ ограничен из L_p в L_q по теореме 2, в силу того, что $T^\alpha_{\delta,\bar\lambda}$ — оператор свертки с интегрируемым ядром.

В случае, когда $\varphi \in L_1$, равенство (15) доказывается вначале в смысле Φ' :

$$\langle T^\alpha_{\delta,\bar\lambda} H^\alpha_{\bar\lambda} \varphi, \omega \rangle = \langle W_\delta M_\delta \varphi + W_\delta \varphi, \omega \rangle, \quad \omega \in \Phi. \tag{17}$$

Пусть далее $\omega_N(x,t)$ — последовательность функций из Φ, аппроксимирующая $\omega(x,t) \in S$ по норме L_q, $q = \frac{n+2}{n-\mathrm{Re}\,\alpha+2}$ и по норме C_0 (см. замечание 1). В силу (17) имеем

$$\langle T^\alpha_{\delta,\bar\lambda} H^\alpha_{\bar\lambda} \varphi, \omega_N \rangle = \langle W_\delta M_\delta \varphi + W_\delta \varphi, \omega_N \rangle. \tag{18}$$

Переходя в (18) к пределу при $N \to \infty$, получаем (15) для $\varphi \in L_1$.

В [2] показано, что если $g(x,t) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$(W_\delta M_\delta g)(x,t) \to 0 \tag{19}$$

по норме L_p или почти всюду.

Переходя в (15) к пределу при $\delta \to 0$ в указанном смысле, получаем (14). $\rhd$

3.4. Описание образа $H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p)$. Через $H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p)$ обозначим образ оператора $H^\alpha_{\bar\lambda}$:

$$H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p) = \{ f(u) : \, f(u) = (H^\alpha_{\bar\lambda} \varphi)(u), \; \varphi \in L_p \}.$$

Основной результат статьи составляет следующая

Теорема 4. *Пусть* $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < n+2$, $1 \leqslant p < \frac{n+2}{\mathrm{Re}\,\alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\,\mathrm{Re}\,\alpha}$. *Тогда*

$$H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p) = \{ f \in L_q : \, T^\alpha_{\bar\lambda} f \in L_p \}.$$

$\lhd$ Вложение

$$H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p) \subset \{ f(u) \in L_q : \, T^\alpha_{\bar\lambda} f \in L_p \} \tag{20}$$

вытекает из теорем 2 и 3.

Докажем вложение

$$H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p) \supset \{ f(u) \in L_q : T^\alpha_{\bar\lambda} f \in L_p \},$$

обратное к (20).

Пусть $f \in L_q$. Обозначим $\varphi = T^\alpha_{\bar\lambda} f$. Справедливо равенство

$$\langle H^\alpha_{\bar\lambda} \varphi, \omega \rangle = \langle \varphi, \overline{H^\alpha_{\bar\lambda}} \omega \rangle, \quad \omega \in \Phi,$$

которое обосновывается применением теоремы Фубини с учетом $(L_p - L_q)$-оценок оператора $H^\alpha_{\bar\lambda}$, приведенных в теореме 3. Здесь $\overline{H^\alpha_{\bar\lambda}}$ — оператор с символом

$$\left(m^2 + b\tau + \sum_{k=1}^{n}(i\lambda_k - 1)\xi_k^2\right)^{\alpha/2}.$$

Далее имеем

$$\langle H^\alpha_{\bar\lambda}\varphi, \omega\rangle = \left\langle \varphi, \overline{H^\alpha_{\bar\lambda}}\omega \right\rangle = \left\langle \overset{(L_p)}{\lim_{\delta\to 0}} T^\alpha_{\delta,\bar\lambda} f, \overline{H^\alpha_{\bar\lambda}}\omega \right\rangle$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \left\langle T^\alpha_{\delta,\bar\lambda} f, \overline{H^\alpha_{\bar\lambda}}\omega \right\rangle = \lim_{\delta\to 0} \left\langle f, \overline{T^\alpha_{\delta,\bar\lambda}}\,\overline{H^\alpha_{\bar\lambda}}\omega \right\rangle. \quad (21)$$

Последнее из равенств (21) вытекает из того, что сходимость в L_p влечет сходимость в Φ'.

С учетом (21) и (15), будем иметь:

$$\langle H^\alpha_{\bar\lambda}\varphi, \omega\rangle = \lim_{\delta\to 0}\langle f, \overline{(W_\delta M_\delta + W_\delta)}\omega\rangle = \lim_{\delta\to 0}\langle (W_\delta M_\delta + W_\delta) f, \omega\rangle = \langle f, \omega\rangle. \quad (22)$$

Вторoе из равенств (22) обосновывается применением неравенства Гёльдера при $p > 1$ и мажорантной теоремы Лебега при $p = 1$.

Используя рассуждения, аналогичные применявшимся при переходе от (15) к (17), получаем:

$$\langle f, \omega\rangle = \langle H^\alpha_{\bar\lambda}\varphi, \omega\rangle, \quad \omega \in S,$$

откуда вытекает, что $f(x,t) = (H^\alpha_{\bar\lambda}\varphi)(x,t)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, $f(x,t) \in H^\alpha_{\bar\lambda}(L_p)$. $\rhd$

Литература

1. *Samko S. G.* Hypersingular integrals and their applications // Internat. Ser. Analytical Methods and Special Functions.—Vol. 5.—London–N. Y.: Taylor & Frances, 2002.—376 p.
2. *Nogin V. A., Samko S. G.* Method of approximating inverse operators and its applications to the inversion of potential-type integral transforms // Integral Transforms and Special Functions.—1999.—Vol. 6, № 2.—P. 89–104.
3. *Ногин В. А., Сухинин Е. В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями // Докл. АН.—1993.—Т. 329, № 5.—С. 550.
4. *Abramyan A. V., Nogin V. A.* Integral transforms, connected with fractional powers of nonhomogeneous differential operators in L_p-spases // Integral Transforms and Special Functions.—1994.—Vol. 2, № 1.—P. 1.
5. *Ногин В. А., Сухинин Е. В.* Дробные степени оператора Клейна —Гордона // Докл. АН.—1995.—Т. 341, № 2.—С. 166.
6. *Abramyan A. V., Nogin V. A.* Factional powers of differential operators of the second order with constant coefficients in L_p-spases // Докл. АН.—1995.—Vol. 341, № 3.—P. 295.
7. *Karapetyants A. N., Nogin V. A.* Complex powers of the second order non-homogeneous elliptic differential operators with degenerating symbols in the spaces $L_p(\mathbb{R}^n)$) // Bol. Soc. Mat. Mexicana.—2001.—Vol. 7.—P. 193–209.
8. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On the boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels // Mathematische Nachrichten.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574.
9. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Обращение и описание образов потенциалов с особенностями ядер на сфере // Владикавк. матем. журн.—2012.—Т. 14, № 4.—С. 10–18.
10. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Описание функциональных пространств, связанных с обобщенными операторами Шредингера // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 1.—С. 10–13.

11. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Комплексные степени одного дифференциального оператора в L_p-пространствах // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки.—2014.—№ 5.—С. 5–10.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—630 с.
13. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН.—1969.—Т. 105.—P. 89–167.
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1971.—1108 с.
15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.

Статья поступила 16 мая 2016 г.

Гиль Алексей Викторович
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `gil-alexey@yandex.ru`

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `vnogin@ns.math.rsu.ru`

COMPLEX POWERS OF A DIFFERENTIAL OPERATOR RELATED TO THE SCHRÖDINGER OPERATOR

Gil A. V., Nogin V. A.

We study complex powers of the generalized Schrödinger operator in $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ with complex coefficients in the principal part

$$S_{\bar\lambda} = m^2 I + ib\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}(1 - i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \qquad (1)$$

where $m > 0$, $b > 0$ $\bar\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Complex powers of the operator $S_{\bar\lambda}$ with negative real parts on «sufficiently nice» functions $\varphi(x)$ are defined as multiplier operators, whose action in the Fourier pre-images is reduced to multiplication by the corresponding power of the symbol of the operator under consideration:

$$F\left((S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi\right)(\xi) = \left((m^2 + b\xi_{n+1} - |\xi'|^2 + i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2\right)^{-\alpha/2}\widehat{\varphi}(\xi), \qquad (2)$$

where $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$. We obtain integral representations for complex powers (2) as potential-type operators with non-standard metric. The corresponding fractional potentials have the form $H_{\bar\lambda}^{\alpha}\varphi$. Complex powers $S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi$, $0 < \operatorname{Re}\alpha < n+2$, are interpreted as distributions:

$$\langle S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}\varphi, \omega\rangle = \langle\varphi, \overline{S_{\bar\lambda}^{-\alpha/2}}\omega\rangle, \quad \varphi \in \Phi,$$

where Φ is the Lizorkin space of functions in S, whose Fourier transforms vanish on coordinate hyperplanes. Within the framework of the method of approximative inverse operators we describe the range $H_{\bar\lambda}^{\alpha}(L_p)$, $1 \leqslant p < \frac{n+2}{\operatorname{Re}\alpha}$. Recently a number of papers related to complex powers of second order degenerating differential operator was published (see survey papers [1–3], and also [6–11]). The case considered in our work is the most difficult, because of non-standard expressions for the potentials $H_{\bar\lambda}^{\alpha}\varphi$.

Key words: differential operator, range, multiplier, complex powers, method of approximative inverse operators.