Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 43–59

УДК **517.518**

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

Э. Дж. Ибрагимов

В настоящей статье найдены коэффициентные условия для сходимости в среднем рядов Фурье — Якоби.

Ключевые слова: базис, оптимальная последовательность, ряд Фурье — Якоби, суммы Валле-Пуссена, функция обобщенного сдвига.

Цель настоящей работы — найти условия сходимости в среднем рядов Фурье — Якоби. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \tag{1}$$

— формальное разложение некоторой функции $f \in L^r_{2\pi}$, $\{S_n(f;x)\}$ — последовательность частичных сумм ряда (1), $\|f\|_r$ — норма функции $f \in L^r_{2\pi}$,

$$\|f\|_r = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad 1 \leqslant r < \infty.$$

Говорят, что ряд (1) сходится в среднем (с показателем r), если

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_r = 0. \tag{2}$$

М. Рисс [16] для функций $f \in L^r_{2\pi}$ при $1 < r < \infty$ установил неравенство

$$\|S_n(f)\|_r \leqslant C_r \|f\|_r, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

в котором C_r зависит только от r. Этот факт эквивалентен тому, что при $1 < r < \infty$ имеет место (2), т. е. тригонометрическая система образует базис в $L^r_{2\pi}$.

Затем Шаудер, Пэли, Катон и Хилле, Кобер доказали, что являются базисами в $L^r(0,1)$ система Хаара [22] при $1 \leqslant r < \infty$ и система Уолша [14] при $1 < r < \infty$, а в $L^r(-\infty,\infty)$, $1 < r < \infty$, — система преобразований Фурье многочленов Лагерра [4, 5].

В работе [19] Г. А. Фомин указал коэффициентные условия, при которых имеет место (2) при $r = 1$.

Удивительным фактом после этого оказался результат Г. Полларда [12, 13] о том, что система многочленов Лежандра $L^r(-1,1)$ является базисом при $\frac{4}{3} < r < 4$ и не является базисом, когда $r \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$. В дальнейшем Дж. Нейман и У. Рудин [9] показали, что при $r = \frac{4}{3}$ и $r = 4$ система многочленов Лежандра также не является базисом в L^r.

В. П. Моторный [8] указал условия на функцию f, при которых имеет место (2) при всех $r \in [1, \frac{4}{3}) \bigcup (4, \infty)$, т. е. в случаях, когда многочлены Лежандра не образуют базис в $L^r(-1,1)$ так, что последовательность констант Лебега сумм Фурье — Лежандра не ограничена. Причем порядки приближений частными суммами в $L^r(1 < r \leqslant \frac{4}{3})$ совпадают с наилучшими на классах функций с достаточно хорошими дифференциально-разностными свойствами.

В. М. Бадков [1] исследовал порядки приближений суммами Фурье — Лежандра при условии, что $f \in H_r^{m+\alpha}$, $r \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \bigcup [4, \infty)$, т. е.

$$\left(\int\limits_{-1}^{1} \left|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C \cdot h^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

и изучил порядок роста обобщенных констант Лебега ($r' = r/(r-1)$)

$$L_n(r, \gamma) = \sup_{\|f\|_{r'} \leqslant 1} \left\| \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\gamma} S_n^{(0,0)}(f; x) \right\|_r, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Отметим также следующий результат, анонсированный Г. Полардом в [12]. Система

$$\left\{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}} \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\} \quad \left(\alpha \geqslant -\frac{1}{2},\ \beta \geqslant -\frac{1}{2}\right)$$

является базисом в $L^r(-1,1)(\frac{4}{3} < r < 4)$; при $a \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ эта система не является базисом в $L^r(-1,1)$, если $r \in [1, \frac{4}{3}) \cup (4, \infty)$.

Обозначим

$$L_M^r = \left\{f : M^{\frac{1}{r}} f \in L^r\right\}, \quad (QL)^r = \left\{f : Qf \in L^r\right\},$$

где

$$M(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ \alpha, \beta > -1),$$
$$Q(x) = (1-x)^{A}(1+x)^{B} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ A, B \in \mathbb{R}),$$

а

$$S_n(f) = S_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_{\nu}(f) \widehat{P}_{\nu}^{(\alpha,\,\beta)}(x)$$

— частная сумма ряда Фурье по ортонормированным с весом $M(x)$ многочленам Якоби $\widehat{P}_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$L_{n,r}(M, Q) = \sup\left\{\|S_n(f)Q\|_r : f \in (QL)^r,\ \|fQ\|_r \leqslant 1\right\}.$$

В 1969 г. Б. Маккенхоупт [7] показал, что при $1 < r < \infty$ условия

$$\begin{gathered} \left|A + \frac{1}{r} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right), \\ \left|B + \frac{1}{r} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right) \end{gathered} \tag{3}$$

необходимы и достаточны для ограниченности констант Лебега $L_{n,r}(M, Q)$, т. е. система $\left\{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}$ $(\alpha, \beta > -1)$ образует базис в $L^r(-1,1)$ при $1 < r < \infty$. Л. Б. Ходак [21] дал оценки уклонения функции f от частичных сумм рядов Фурье —

Якоби в $L^r[-1,1]$ при условии, что хотя бы одно из неравенств (3) не выполняется, причем $f \in H_r^{\gamma+\alpha}$.

В работе [6] Н. М. Казакова дает порядок констант Лебега $L_{n,r}(M,Q)$ в пространстве $(QL)^r$.

Обозначим через $B_r^{\nu+\mu}$ $(0<r<\infty,\ 0<\mu\leqslant 1,\ \nu=0,1,\ldots)$ — класс функций Бесова, заданных на $[-1,1]$, для которых $f^{(\nu)}\in L^r$ и конечен следующий интеграл

$$\int\limits_0^1 h^{-1-\mu r}\left\|f^{(\nu)}(x+h)-f^{(\nu)}(x)\right\|^r_{r[-1,1-h]}\,dh\leqslant C.$$

С. Г. Нещадим [10] указал достаточные условия на функцию, отличные от приведенных в [8], при которых имеет место (2), а также привел оценки сверху $f\in B_r^{\nu+\mu}$ частными суммами рядов Фурье — Якоби в L_1 и Фурье — Лежандра в L_r $(1<r<\infty)$.

Обозначим через $L_{p,\mu}[-1,1]$ $(1\leqslant p<\infty)$ — пространство функций суммируемых с p-ой степенью с весом $\mu(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^{-\frac12}\,dx$ $(-\frac12<\alpha<\frac12)$, а $\|f\|_{p,\mu}$ — норму, $f\in L_{p,\mu}[-1,1]$,

$$\|f\|_{p,\mu}=\left(C(\alpha)\int\limits_{-1}^1|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac1p}<\infty,$$

где

$$C(\alpha)=\Gamma(\alpha+3/2)/2^{\alpha+3/2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac12\right),$$

$$d\mu(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^{-\frac12}\,dx.$$

Пусть

$$f(x)\sim\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x), \tag{4}$$

где

$$a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)=\int\limits_1^1 f(x)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x)\,d\mu(x)$$

— формальное разложение в ряд Фурье функции $f\in L_{p,\mu}[-1,1]$ по многочленам Якоби, образующих ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$ с весом $\mu(x)$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^1 P_n^{(\alpha,-\frac12)}(x)P_k^{(\alpha,-\frac12)}(x)\,d\mu(x)=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ h_n(\alpha), & k=n,\end{cases}$$

где

$$h_n(\alpha)=\frac{2^{\alpha+\frac12}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma\big(n+\frac12\big)}{\big(2n+\alpha+\frac12\big)\Gamma(n+1)\Gamma\big(n+\alpha+\frac12\big)}.$$

Обозначим через $S_n^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f;x)$ частичную сумму ряда (4).

В настоящей статье найдены коэффициентные условия для сходимости в среднем рядов Фурье — Якоби (4), т. е. выполнения соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\|_{p,\mu}=0,\quad 1\leqslant p<\infty. \tag{5}$$

Следуя [19], каждую последовательность $\{\overline{m}_n\}$ натуральных чисел $\overline{m}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будем называть *оптимальной* для функции f, если

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\overline{m}_n}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} E_n(f)_{p,\mu} = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{6}$$

где

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n} \|f - P_n\|_{p,\mu}$$

— наилучшее приближение в метрике $L_{p,\mu}$ функции f алгебраическими многочленами степени меньше или равно n.

Отметим, что среди оптимальных для f последовательностей имеются и такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{m}_n}{n} = 0. \tag{7}$$

Это следует из (6), если учесть, что для любого $f \in L_{p,\mu}$ и $E_n(f)_{p,\mu} \to 0$ при $n \to \infty$ (см., например, [18, с. 41]).

Лемма 1 [3]. *При любом* $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ *справедливо равенство*

$$S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x) = \int_{-1}^{1} (\tau_u f)(x) K_n(u)\, d\mu(u),$$

где

$$K_n(u) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\left(2\nu + \alpha + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \alpha + \frac{1}{2}\right)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} P_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(u),$$

а

$$(\tau_u) f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-r^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(x,t,r)\, dr,$$

где

$$f(x,t,r) = f\left(xt + r\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}(1-r^2)(1-x)(1-t)\right)$$

есть функция обобщенного сдвига [15].

Рассмотрим обобщенные суммы Валле-Пуссена

$$V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x) = \frac{1}{\overline{m}_n + 1} \sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n} S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 2. *При* $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$\left\| f - V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right\|_{p,\mu} = O(1) \left(\left(\frac{n + \overline{m}_n}{\overline{m}_n + 1} \right)^{\alpha+\frac{1}{2}} + 1 \right) E_n(f)_{p,\mu}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

$\lhd$ Пусть $Q_n(x)$ — алгебраический многочлен степени меньше или равной n наименее уклоняющийся в среднем от f. Так как

$$S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}\{Q_n(x)\} = Q_n(x), \quad \nu = n, n+1, \ldots,$$

то

$$\left\|f - V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} = \frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\left\{S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) - f\right\}\right\|_{p,\mu}$$
$$\leqslant \frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n} S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f-Q_n)\right\|_{p,\mu} + E_n(f)_{p,\mu}. \tag{8}$$

Заметим, что

$$J_n = \frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n} S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f-Q_n)\right\|_{p,\mu}$$
$$= \frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\{C(\alpha)\int_{-1}^{1}\left\|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n} S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f-Q_n;x)\right\|^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\{C(\alpha)\int_{-1}^{1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\int_{-1}^{1}\tau_u(f-Q_n)(x)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(i+\alpha+\frac{1}{2})}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(u)d\mu(u)\right|^p d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Используя теорему Фубини [11, с. 385] при $p=1$, а при $p>1$ обобщенное неравенство Минковского [20, с. 179], получим

$$J_n \leqslant \frac{C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}\int_{-1}^{1}\|\tau_u(f-Q_n)\|_{p,\mu}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(i+\alpha+\frac{1}{2})}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(u)\right| d\mu(u).$$

И так как [3]

$$\|\tau_u f\|_{p,\mu} \leqslant \|f\|_{p,\mu},$$

то

$$J_n \leqslant \frac{C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}\int_{-1}^{1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma\big(i+\alpha+\frac{1}{2}\big)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma\Big(i+\frac{1}{2}\Big)\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(u)\right| d\mu(u)$$
$$= \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(i+\alpha+\frac{1}{2})}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+1)}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right| dt$$
$$= \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}} + \int_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\right) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}C(\alpha)}{\overline{m}_n+1}E_n(f)_{p,\mu}(J_{n.1}+J_{n.2}). \tag{9}$$

Для оценки $J_{n.1}$ воспользуемся соотношением [22, с. 83]

$$K_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2\nu+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{1}{2}\big)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma\big(\nu+\frac{1}{2}\big)\Gamma(\alpha+1)}P_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma\big(\nu+\frac{1}{2}\big)\Gamma(\alpha+1)}P_n^{\left(\alpha+1,-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Откуда с учетом неравенства (см. [17, с. 264])

$$\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}|P_n^{(\gamma,\beta)}(\cos t)|\leqslant Mn^{-\frac{1}{2}},\quad \gamma,\beta\geqslant-\frac{1}{2},\ t\in[0,\pi], \tag{10}$$

при $\gamma=\alpha+1$ и $\beta=-\frac{1}{2}$, а также соотношения (см. [2, с. 951]) $\Gamma(n+\alpha)\sim n^{\alpha}\Gamma(n)$, $n\to\infty$, получим, что

$$K_n(\cos t)\sim\frac{n^{\alpha+1}}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+1)}P_n^{\left(\alpha+1,-\frac{1}{2}\right)}(\cos t)=O\left(n^{\alpha+\frac{1}{2}}\right)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}},\quad n\to\infty. \tag{11}$$

Из (9) с учетом (11) будем иметь

$$\begin{gathered}J_{n.1}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}K_\nu(\cos t)\right|dt\\ =O(1)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\nu^{\alpha+\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt=O(1)(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\overline{m}_n+1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}t^{\alpha-\frac{1}{2}}\,dt\\ =O(1)\left(\frac{n+\overline{m}_n}{\overline{m}_n+1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\overline{m}_n+1).\end{gathered} \tag{12}$$

Для оценки $J_{n.2}$ используем формулу Кристоффеля — Дарбу [16, с. 83]

$$K_n(x)=\frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}\Gamma\left(n+\alpha+\frac{3}{2}\right)\left\{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}}{\left(2n+\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)(1-x)}.$$

Тогда получим

$$\begin{gathered}J_{n.2}=C_1(\alpha)\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}\left|\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\frac{\Gamma\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\left(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right.\\ \left.\times\left\{(\nu+\alpha+1)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right\}\right|dt.\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь и в дальнейшем $C_1(\alpha),C_2(\alpha),\ldots$ будут обозначать положительные постоянные зависящие от α.

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac{3}{2})}{(2\nu+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{(\nu+\alpha+1)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}\\ =\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\left\{\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac{3}{2})}{(2\nu+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}-\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac{5}{2})}{(2\nu+\alpha+\frac{7}{2})\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\right\}\\ \times\left\{\sum_{i=0}^{\nu}(iP_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(i+1)P_{i+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x))+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}\\ +\frac{\Gamma\left(n+\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\right)}{(2n+2\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma\left(n+\overline{m}_n+\frac{1}{2}\right)}\\ \times\left\{\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n}\left(\nu P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)+(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}\end{gathered}$$

$$-\frac{\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}{(2n+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\nu P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)+(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n+1}\frac{\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\big(\nu+\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)-\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{5}{2}\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{3}{2}\big)}$$

$$\times\left\{(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(x)-(\nu+1)P_{\nu+1}^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(x)\right\}+\frac{\Gamma\big(n+\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{(2n+2\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2})\Gamma(n+\overline{m}_n+\frac{1}{2})}$$

$$\times\left\{(\alpha+1)\sum_{i=0}^{n+\overline{m}_n}\left(P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(n+\overline{m}_n+1)P_{n+\overline{m}_n+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)\right\}$$

$$+\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}\left\{nP_n^{\alpha,-\frac{1}{2}}(x)-(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n-1}\frac{\big\{(\alpha+1)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)-(2\nu+1)\big\}\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{3}{2}\big)}$$

$$\times\left\{(\nu+1)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}+\frac{\Gamma\big(n+\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+2\overline{m}_n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\overline{m}_n+\frac{1}{2}\big)}$$

$$\times\left\{(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n}\left(P_\nu^{\alpha,-\frac{1}{2}}(x)-(n+\overline{m}_n+1)P_{n+\overline{m}_n+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right)\right\}$$

$$+\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}\left\{nP_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)-(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\right\}. \tag{14}$$

Учитывая (14) в (13), получаем

$$J_{n.2}=J_{n.2}^{(1)}+J_{n.2}^{(2)}+J_{n.2}^{(3)}. \tag{15}$$

Оценим каждый из этих интегралов. Используя неравенство (10) при $\gamma=\alpha$ и $\beta=-\frac{1}{2}$, получаем

$$J_{n.2}^{(1)}=C_1(\alpha)\int_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}\left|\sum_{\nu=0}^{n+\overline{m}_n-1}\frac{\big\{(\alpha+1)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)-(2\nu+1)\big\}}{\big(2\nu+\alpha+\frac{7}{2}\big)\big(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(\nu+\frac{3}{2}\big)}\right.$$

$$\left.\times\Gamma\left(\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)\left\{(\nu+1)P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)-(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right\}\right|dt$$

$$\leqslant C_2(\alpha)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\nu^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{2\alpha-1}\left\{(\nu+1)\left|P_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}\left|P_i^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\right\}dt$$

$$\leqslant C_3(\alpha)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\nu^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{2\alpha-1}\left\{(\nu+1)^{\frac{1}{2}}+(\alpha+1)\sum_{i=0}^{\nu}i^{-\frac{1}{2}}\right\}dt$$

$$\leqslant C_4(\alpha)\sum_{\nu=n}^{n+\overline{m}_n-1}\nu^{\alpha-\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{2\alpha-1}dt\leqslant C_5(\alpha)\frac{(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(\overline{m}_n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \tag{16}$$

Воспользовавшись снова неравенством (10), будем иметь

$$\begin{gathered}
J_{n.2}^{(3)} = C_1(\alpha)\frac{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\big(2n+\alpha+\frac{3}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{1}{2}\big)}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}\Big|nP_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\\
-(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\Big|\,dt \leqslant C_6(\alpha)n^\alpha\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1}\\
\times\Big\{n\Big|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\Big|+(\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{n}\Big|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\Big|\Big\}dt\\
\leqslant C_7(\alpha)n^{n+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{\overline{m}_n+1}}^{\pi}t^{\alpha-\frac{3}{2}}dt \leqslant C_8(\alpha)\frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(\overline{m}_n+1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}.
\end{gathered}\tag{17}$$

Аналогично для $J_{n.2}^{(2)}$ получаем оценку

$$J_{n.2}^{(2)} \leqslant C_9(\alpha)(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\overline{m}_n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}.\tag{18}$$

Теперь, учитывая (16)–(18) в (15), получаем

$$J_{n.2} \leqslant C_{10}(\alpha)(n+\overline{m}_n)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\overline{m}_n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}.\tag{19}$$

А учитывая (16) и (19) в (9), имеем

$$J_n \leqslant C_{11}(\alpha)\left(\frac{n+\overline{m}_n}{\overline{m}_n+1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}E_n(f)_{p,\mu}.\tag{20}$$

Утверждение леммы следует из (8) и (20).

Лемма 3. *Для любой оптимальной для функции $f(x)$ последовательности $\{\overline{m}_n\}$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\|f-V_{\overline{m}_n}(f)\|_{p,\mu}=0, \quad 1\leqslant p<\infty.$$

$\lhd$ Это сразу следует из леммы 2. $\rhd$

Теперь, положим

$$\begin{gathered}
d_{\overline{m}_n}(f;x)=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\Big\{S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f;x)\Big\}\\
=\sum_{\nu=1}^{\overline{m}_n}\frac{\overline{m}_n+1-\nu}{\overline{m}_n+1}a_{\nu+n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_{\nu+n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x), \quad n=1,2,\ldots
\end{gathered}$$

Теорема 1. *Если $\{\overline{m}_n\}$– оптимальная для f последовательность, то при $1\leqslant p<\infty$ справедливо соотношение*

$$\|f-S_n^{(\alpha,\frac{1}{2})}(f)\|_{p,\mu}=o(1)\to\|d_{\overline{m}_n}(f)\|_{p,\mu}=o(1), \quad n\to\infty.$$

◁ Это следует из неравенств

$$\|d_{\overline{m}_n}(f)\|_{p,\mu}=\left\|V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}\leqslant\left\|f-V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}+\left\|f-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu},$$

$$\left\|f-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}\leqslant\left\|f-V_{\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}+\left\|d_{\overline{m}_n}(f)\right\|_{p,\mu}$$

и леммы 3. ▷

Теорема 2. *Для того, чтобы ряд* (4) *сходился в среднем, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности* $\{\overline{m}_n\}$ *натуральных чисел, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{n}=0, \tag{21}$$

выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}=0,\quad 1\leqslant p<\infty. \tag{22}$$

◁ *Необходимость* следует из неравенства

$$\left\|S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}\leqslant\left\|f-S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}+\left\|f-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}.$$

Достаточность. Пусть имеют место (21) и (22). Тогда найдется оптимальная для f последовательность $\{\overline{m}_n\}$, удовлетворяющая соотношению (7), и для нее

$$\left\|d_{\overline{m}_n}(f)\right\|_{p,\mu}=\frac{1}{\overline{m}_n+1}\left\|\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left\{S_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\}\right\|_{p,\mu}$$

$$\leqslant\frac{1}{\overline{m}_n+1}\sum_{\nu=1}^{\overline{m}_n}\left\|S_{\nu+\nu}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}=o(1).$$

Теорема 2 доказана. ▷

Следствие 1. *Если для каждой последовательности* $\{\overline{m}_n\}$, *удовлетворяющей условию* (21), *выполняются соотношения:*

1. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\nu^{\alpha-\frac{1}{2}}=0, \tag{23}$$

2. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\left(\frac{\ln\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}=0, \tag{24}$$

3. *при* $(\alpha+\frac{1}{2})p<1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\nu^{-\frac{1}{2}}=0, \tag{25}$$

то ряд (4) *сходится в среднем.*

◁ Применяя неравенство Минковского, а также неравенство (см. [17, лемма 4.3])

$$\left\|P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cdot)\right\|_{p,\mu} = O(1)\begin{cases} n^{\alpha-\frac{1}{p}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1,\\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1,\\ n^{-\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p<1,\end{cases}$$

получаем

$$\left\|S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu}$$

$$=\left(C(\alpha)\int\limits_{-1}^{1}\Bigl|\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)\Bigr|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\left\|P_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cdot)\right\|_{p,\mu}$$

$$=O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+\overline{m}_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\begin{cases} n^{\alpha-\frac{1}{p}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1,\\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1,\\ n^{-\frac{1}{2}}, & \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p<1.\end{cases} \tag{26}$$

Откуда и следует наше утверждение, ибо выполнение (23)–(25) влечет за собой выполнение условия (22) теоремы 2. ▷

Ниже, C — некоторые, вообще говоря, различные положительные постоянные.

Следствие 2. *Если для каждой последовательности натуральных чисел $\{\overline{m}_n\}$, удовлетворяющей условию* (21), *выполняются соотношения*

1. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p>1$

$$|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)| \leqslant C\cdot \nu^{\frac{1}{p}-1-\alpha}, \tag{27}$$

2. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p=1$

$$|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)| \leqslant C\cdot (\nu\ln\nu)^{-\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

3. *при* $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)p<1$

$$|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)| \leqslant C\cdot \nu^{\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

то ряд (4) *сходится в среднем.*

◁ Действительно, при выполнении условий (27)–(29) из (26) имеем

$$\left\|S_{n+\overline{m}_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{p,\mu} = O(1)\ln\frac{n+\overline{m}_n}{n+1} = o(1), \quad n\to\infty. \ \triangleright$$

В дальнейшем, $\alpha_n \asymp \beta_n \to C_1\beta_n \leqslant \alpha_n \leqslant C_2\beta_n$ при $n\to\infty$, где C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные.

Лемма 4. *При* $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^\pi \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \asymp n^{-\frac{1}{2}}, \quad n\to\infty.$$

◁ Разобьем интеграл по схеме

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}+\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}+\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} = J_1+J_2+J_3. \tag{30}$$

Учитывая неравенство (10), получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t)\right| \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1} dt \\ &= O(n^{-\frac12}) \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac12} dt = O(n^{-\frac12}) \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} t^{\alpha-\frac12}\, dt = O(n^{-\alpha-1}). \end{aligned} \tag{31}$$

Далее,

$$\begin{aligned} J_3 & \int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t)\right| \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1} dt \\ &= O(n^{-\frac12}) \int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{\alpha-\frac12} dt = O\big(n^{-\frac12}\big)\left(\pi^{\alpha+\frac12} - \left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha+\frac12}\right) = O(n^{-\alpha-1}). \end{aligned} \tag{32}$$

Из асимптотической формулы [16, с. 205]

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t) &= (\pi n)^{-\frac12}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac32} \\ &\times \left\{\cos\left[\left(n+\frac{2\alpha+3}{4}\right)t - \left(\alpha+\frac32\right)\frac{\pi}{2}\right] + O(1)(n\sin t)^{-1}\right\}, \quad \frac{c}{n} \leqslant t \leqslant \pi - \frac{c}{n}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left|P_n^{(\alpha+1,-\frac12)}(\cos t)\right| \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1} dt \\ &\leqslant (\pi n)^{-\frac12} \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left\{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac12} + O(1)\frac{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac12}}{n\cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right\} dt \\ &= O(n^{-\frac12})\left(\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} t^{\alpha-\frac12}\, dt + \frac1n \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac32}\left(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}} dt\right) \\ &= O\left(n^{-\frac12}\right)\left(1 + \frac1n \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac12}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{-1} dt + \frac1n \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac32}\cos\frac{t}{2}\, dt\right) \\ &= O\left(n^{-\frac12}\right)\left(1 + \frac1n \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \frac{(\sin\frac{t}{2})^{\alpha+\frac12}}{\sin\frac{\pi}{2n}} dt + \frac1n \frac{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha-\frac12}}{\alpha-\frac12}\Bigg|_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}\right) \\ &= O\left(n^{-\frac12}\right)\left(1 + \frac{O(1)}{n\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{O(1)}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha-\frac12}\right) \\ &= O\left(n^{-\frac12}\right)\left(1 + O(1) + O\left(n^{-\alpha-\frac12}\right)\right) = O\left(n^{-\frac12}\right)(1+O(1)). \end{aligned} \tag{33}$$

Учитывая (31), (32) и (33) в (30), получаем

$$\int\limits_0^\pi \left|P_n^{\left(\alpha+1,-\frac{1}{2}\right)}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt = O\Big(n^{-\frac{1}{2}}\Big)(1+O(1)), \quad n\to\infty,$$

что равносильно утверждению леммы. $\rhd$

Следствие 3. *При* $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_\pi^0 |K_n(\cos t)|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt \asymp n^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad n\to\infty.$$

$\lhd$ Вытекает из (11) и леммы 4. $\rhd$

Отсюда следует, что константы Лебега в $L_{1,\mu}$ не ограничены и, следовательно, система $\left\{P_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(\alpha)(1-x)^\alpha(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}$ не образует базиса в $L_{1,\mu}$. В связи с этим фактом интересен следующий результат.

Теорема 3. *Если для любой последовательности* $\{m\}_n$ *натуральных чисел, удовлетворяющей условию* (21), *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{m_n-1}\frac{|\Delta a_{n+\nu}|}{\sqrt{n+\nu}}=0, \tag{34}$$

то $\|f-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\|_{1,\mu}=o(1)$, $n\to\infty$.

$\lhd$ Согласно теореме 2 достаточно доказать, что из (34) следует (22). Действительно,

$$\begin{aligned}
&\left\|S_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)-S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right\|_{1,\mu}\\
&=C(\alpha)\int\limits_0^\pi\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt\\
&=C(\alpha)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}+\int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}+\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}\right)=C(\alpha)(A+B+C).
\end{aligned} \tag{35}$$

Используя неравенство (10), при $\gamma=\alpha$ и $\beta=-\frac{1}{2}$ получаем

$$\begin{aligned}
A&=\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt\\
&\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}\left|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt\\
&=O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac{1}{2}}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt
\end{aligned}$$

$$= O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac{1}{2}}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+m_n}} t^{\alpha+\frac{1}{2}}\,dt = O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac{1}{2}}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|(n+m_n)^{\alpha-\frac{3}{2}}$$

$$= O(1)\frac{1}{m_n}\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac{1}{2}}\frac{\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|}{\sqrt{\nu}} = o(1), \quad n\to\infty, \tag{36}$$

так как согласно теореме 5.2 из [3]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|}{\sqrt{\nu}} = 0. \tag{37}$$

Рассмотрим интеграл

$$C = \int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n} a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt$$

$$\leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi}\left|P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(\cos t)\right|\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha+1}dt$$

$$= O(1)\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\nu^{-\frac{1}{2}}\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|\int\limits_{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi} t^{\alpha+\frac{1}{2}}dt \tag{38}$$

$$= O(1)\frac{1}{m_n}\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}\frac{\left|a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\right|}{\sqrt{\nu}} = o(1), \quad n\to\infty.$$

Для оценки интеграла B рассмотрим выражение

$$J_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n} a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)P_\nu^{(\alpha,\,-\frac{1}{2})}(x)$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n} a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\frac{(2\nu+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})}{(2\nu+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x).$$

Преобразование Абеля дает

$$J_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\Delta\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)}{(2\nu+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(2i+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(i+\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+\frac{1}{2})}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x).$$

$$+a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\frac{\Gamma(n+m_n+\frac{1}{2})}{(2n+2m_n+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(n+m_n+\alpha+\frac{1}{2})}\sum_{\nu=0}^{n+m_n}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x)}{(2\nu+\alpha+\frac{1}{2})^{-1}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$$

$$-a_{n+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{(2n+\alpha+\frac{5}{2})\Gamma(n+\alpha+\frac{3}{2})}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2\nu+\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}P_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(x).$$

Учитывая здесь (10), получаем

$$J_n(x)=\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\left(\Delta\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}\right)\frac{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)}P_\nu^{(\alpha+1,-\frac12)}(x)$$
$$+a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac12)}\frac{\Gamma\big(n+m_n+\alpha\frac12\big)}{\big(2n+2m_n+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(n+m_n+\alpha+\frac12\big)}P_{n+m_n}^{(\alpha+1,-\frac12)}(x) \tag{39}$$
$$-a_{n+1}^{(\alpha,-\frac12)}\frac{n+\frac12}{2n+\alpha+\frac52}P_n^{(\alpha+1,-\frac12)}(x).$$

Так как

$$\Delta\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}=\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}$$
$$-\frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big)a_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}=\frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}$$
$$+\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}-\frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}$$
$$=\frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big)\Delta a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}+\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)} \tag{40}$$
$$\times\left(\frac{1}{2\nu+\alpha+\frac12}-\frac{\nu+\frac12}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}\right)=\frac{\Gamma\big(\nu+\frac32\big)\Delta a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac32\big)}$$
$$+\frac{\Gamma\big(\nu+\frac12\big)a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)}{\Gamma\big(\nu+\alpha+\frac12\big)}\times\frac{2(\alpha+1)\nu+\big(\alpha+\frac12\big)(\alpha+2)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)\big(\nu+\alpha+\frac12\big)},$$

то, учитывая (40) в (39), получаем

$$J_n(x)=\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n}a_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(f)P_\nu^{(\alpha,-\frac12)}(x)=\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}\frac{\big(\nu+\frac12\big)\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)}{2\nu+\alpha+\frac52}P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x)$$
$$+\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\frac{2(\alpha+1)\nu+\big(\alpha+\frac12\big)(\alpha+2)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)}P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x)$$
$$a_{n+m_n}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\frac{n+m_n+\alpha+\frac12}{2n+2m_n+\alpha+\frac12}P_{n+m_n}^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x)-a_{n+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\frac{n+\frac12}{2n+\alpha+\frac52}P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x)$$
$$=\sum_{\nu=n}^{n+m_n-1}\frac{\big(\nu+\frac12\big)\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)}{2\nu+\alpha+\frac52}P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x) \tag{41}$$
$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1}a_{\nu+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\frac{(2\alpha+2)\nu+(\alpha+2)\big(\alpha+\frac12\big)}{\big(2\nu+\alpha+\frac12\big)\big(2\nu+\alpha+\frac52\big)}P_\nu^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x)$$
$$+a_{n+m_n}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\frac{n+m_n+\alpha+\frac12}{2n+2m_n+\alpha+\frac12}P_{n+m_n}^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x)-a_{n+1}^{\left(\alpha,-\frac12\right)}(f)\frac{n+\frac12}{2n+\alpha+\frac52}P_n^{\left(\alpha+1,-\frac12\right)}(x).$$

Из (41) и (35) получаем

$$B = \int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}} \left| \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n} a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) P_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(\cos t) \right| \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{2\alpha+1} dt$$

$$\leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \left| a_\nu^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right| \int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}} P_\nu^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t) \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{2\alpha+1} dt$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left| a_{\nu+1}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right|}{\nu+1} \int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}} \left| P_\nu^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t) \right| \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{2\alpha+1} dt$$

$$+ \left| a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right| \int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}} \left| P_{n+m_n}^{(\alpha+1,-\frac{1}{2})}(\cos t) \right| \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{2\alpha+1} dt$$

$$+ \left| a_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) \right| \int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}} \left| P_n^{\left(\alpha+1,-\frac{1}{2}\right)}(\cos t) \right| \left(\sin\frac{t}{2} \right)^{2\alpha+1} dt.$$

Откуда с учетом леммы 4 получим

$$B = O(1) \left(\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left| \Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) \right|}{\sqrt{\nu}} + \frac{\left| a_{n+m_n}^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) \right|}{\sqrt{n+m_n}} + \frac{1}{m_n} \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left| \Delta a_{\nu+1}^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) \right|}{\sqrt{\nu+1}} + \frac{\left| a_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) \right|}{\sqrt{n}} \right). \qquad (42)$$

Так как согласно (21)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+m_n}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)|}{\sqrt{n+m_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n(1+\frac{m_n}{n})}^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)|}{\sqrt{n(1+\frac{m_n}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f)|}{\sqrt{n}},$$

то учитывая (36), (37) и (34) в (42), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n+m_n}}^{\pi-\frac{\pi}{n+m_n}} \left| \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n} a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) P_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(\cos t) \right| \left(\sin\frac{1}{2} \right)^{2\alpha+1} dt = 0.$$

Учитывая это равенство, а также (36) и (37) в (35), получим утверждение теоремы. ▷

Следствие 4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0$, $\left| \Delta a_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}$, *то*

$$\left\| f - S_n^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f) \right\|_{1,\mu} = o(1), \quad n\to\infty.$$

◁ Действительно,

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left|\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f)\right|}{\sqrt{n}} \leqslant c \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{1}{\nu} = O(1) \ln \frac{n+m_n}{n} = o(1), \quad n \to \infty. \ \triangleright$$

Следствие 5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0$, $\left|\Delta a_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}\right| \leqslant \frac{c}{n^{\frac{1}{2}+\gamma}}$ *при* $\gamma > 0$, *то*

$$\left\| f - S_n^{(\alpha,-\frac{1}{2})}(f) \right\|_{1,\mu} = 0, \quad n \to \infty.$$

◁ Действительно,

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{\left|\Delta a_\nu^{\left(\alpha,-\frac{1}{2}\right)}(f)\right|}{\sqrt{n}} \leqslant c \sum_{\nu=n+1}^{n+m_n-1} \frac{1}{\nu^{\gamma+1}} \leqslant \frac{c}{n^\gamma} = o(1), \quad n \to \infty. \ \triangleright$$

Литература

1. *Бадков В. М.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 3.—С. 51–106.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971.—1108 с.
3. *Ibrahimov E. J.* Jacobi transform method in approximation theory // Procedings of A. Razmadze Math. Inst.—2015.—Vol. 169.—P. 33–82.
4. *Caton W. B., Hille E.* Laguerre polynomials and Laplace integrals // Duke Math. J.—1945.—Vol. 12.—P. 217–242.
5. *Kober H.* A note on approximation by rational functions // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1946.—Vol. 7, № 2.—P. 123–133.
6. *Казакова Н. М.* О порядках констант Лебега сумм Фурье — Якоби в пространствах $(QL)^r$.—1984.—66 с. Деп. в ВИНИТИ, № 2113.
7. *Muckenhoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 23.—P. 306–310.
8. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 204, № 4.—С. 788–790.
9. *Newman J., Rudin W.* Mean convergence of orthogonal series // Proc. Amer. Math. Soc.—1952.—№ 3.—P. 219–222.
10. *Нещадим С. Г.* Приближение функций суммами Фурье по многочленам Якоби в интегральной метрике.—1983.—28 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4559.
11. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. 2-е изд.—М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1957.—552 с.
12. *Harry Pollard.* The mean convergence of orthogonal series of polynomials // Proc. Natl. Acad. Sci. USA.—1946.—Vol. 32.—P. 8–10.
13. *Harry Pollard.* The mean convergence of orthogonal series. I // Trans. Amer. Math. Soc.—1947.—Vol. 62.—P. 387–403.
14. *Paley E. A. C.* A remarkable series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc.—1932.—Vol. 34.—P. 241–279.
15. *Потапов М. К.* О приближении многочленами Якоби // Вестн. Моск. ун-та. Мат-ка. Механика.—1977.—№ 5.—С. 70–82.
16. *Riesz M.* Sur les series conjuges // Math. Z.—1927.—Vol. 27.—P. 218–244.
17. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М.: Физматлит, 1976.—327 с.
18. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960.—624 с.
19. *Фомин Г. А.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Мат. сб.—1979.—Vol. 110, № 2.—P. 251–265.

20. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948.—456 с.
21. *Ходак Л. Б.* О сходимости рядов Фурье — Якоби в интегральной метрике.—Днепропетровск, 1979.—29 с. Деп. в Укр. НИИНТИ.
22. *Schauder J.* Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems // Math. Zeitschrift.—1928.—Vol. 28, issue 1.—P. 317–320.
23. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.

Статья поступила 11 декабря 2015 г.

Ибрагимов Эльман Джаваншир оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ1141, г. Баку, ул. Ф. Агаева, 9
E-mail: elmanibrahimov@yahoo.com

ON MEAN CONVERGENCE OF FOURIER–JACOBI SERIES

Ibrahimov E. J.

The conditions on coefficients for mean convergence of Fourier–Jacobi series are obtained. The asymptotic formulae for the best approximation in Lebesgue spaces are derived and an asymptotic equality for Valee–Poussin sums is obtained. Some properties of generalized shift function are also studied.

Key words: basis, optimal sequence, Fourier–Jacobi series, Vallee–Poussin sums, generalized shift function.