Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 9–20

УДК **519.652**

О СУЩЕСТВОВАНИИ БАЗИСА В ДОПОЛНЯЕМОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ ЯДЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА КЁТЕ ИЗ КЛАССА (d_2)

А. К. Дронов

В работе дано доказательство существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2). Показано также, что в любом таком подпространстве существует базис, квазиэквивалентный части базиса ортов.

Ключевые слова: гипотеза Пелчинского, пространство Кёте, базис, дополняемое подпространство, конус, интерполяция.

Введение

В 1970 г. А. Пелчинским была сформулирована гипотеза о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Фреше с базисом [15]. В силу теоремы Дынина — Митягина об абсолютном базисе [16] эта гипотеза эквивалентна утверждению о том, что дополняемое подпространство пространства Кёте тоже является пространством Кёте. До сих пор эта проблема остается открытой, хотя она была положительно решена для многих частных случаев. При этом применялся интерполяционный метод Митягина — Хенкина [13] и метод декомпозиции Фогта [17]. Также при различных дополнительных условиях на матрицу Кёте, либо на дополняемое подпространство, это задача решалась в [7] и [8] (см. также [10] и [9], где изучались близкие задачи).

В настоящей работе дано доказательство существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2). Доказательство основано на использовании интерполяционных свойств троек нормированных конусов вида $(Q \cap c_0^+(a_0), c_0^+(a_1), Q \cap c_0^+(a))$, где Q — конус в пространстве всех числовых последовательностей.

В первой части работы сообщаются необходимые определения и результаты (подробно постановка задачи теории интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах, представлена в [5]). Во второй части — приведены основные сведения из теории базисов в пространствах Фреше и доказательство основного результата. Техника доказательства опирается на использование интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом, а также на метод «тупикового» пространства Б. С. Митягина.

В статье будут использованы следующие обозначения: ω — линейное пространство всех числовых последовательностей, φ — линейное пространство всех финитных числовых последовательностей, c_0 — линейное пространство всех сходящихся к нулю числовых последовательностей, ω^+, φ^+, c_0^+ — конусы неотрицательных последовательностей в ω,

φ, c_0 соответственно, $l_2(a_r)$ — гильбертово пространство числовых последовательностей, наделенное нормой

$$\|x\|_{l_2(a_2)} = \|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 a_r^2(n)},$$

$c_0(a_r)$ — банахово пространство числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом $(a_r(n))_{n=1}^{\infty} \subset \omega^+$, наделенное нормой

$$\|x\|_{c_0(a_r)} = |x|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| a_r(n).$$

1. Некоторые сведения из теории интерполяции линейных операторов, действующих в банаховых пространствах

В данном параграфе используется терминология теории интерполяции линейных операторов, подробное изложение которой можно найти в [1] и [12].

Подмножество Q линейного пространства E называется *конусом*, если для любых $x, y \in Q$, $\lambda \geqslant 0$ имеем: $x + y \in Q$, $\lambda x \in Q$. Конус Q в E называется *воспроизводящим*, если его линейная оболочка $\operatorname{span}\{Q\}$ совпадает с E. Конус Q в линейном топологическом пространстве E называется *тотальным*, если его линейная оболочка плотна в E. Конус Q в нормированном пространстве E называется *несплющенным*, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого $x \in \operatorname{span}\{Q\}$ найдутся $y, z \in Q$ такие, что $x = y - z$, $\|y\| \leqslant c\|x\|$, $\|z\| \leqslant c\|x\|$. Наименьшая из таких констант называется *константой несплющенности конуса* Q и обозначается через $\gamma(Q)$.

Пусть E, F — нормированные пространства и $T : E \to F$ — линейный оператор, ограниченный на элементах несплющенного конуса $Q \subset E$:

$$\|Tx\|_F \leqslant C\|x\|_E, \quad x \in Q.$$

Тогда оператор T ограничен на подпространстве $\operatorname{span}\{Q\}$. Действительно, если $x = y - z$, где $y, z \in Q$, то

$$\|Tx\|_F \leqslant \|Ty\|_F + \|Tz\|_F \leqslant C\|y\|_E + C\|x\|_E \leqslant 2 \cdot C\gamma(Q)\|x\|_E.$$

Рассмотрим пример несплющенного конуса, который понадобится нам в дальнейшем. Пусть $B : E \to E$ — положительный оператор, действующий в банаховом пространстве числовых последовательностей с монотонной нормой E (т. е. $\|x\| \leqslant \|y\|$ при $|x| \leqslant |y|$, см. [2]) и $\|B\| \leqslant \frac{1}{2}$. Введем конус $Q(B) = \{x \in E^+,\, x \geqslant Bx\}$. В данном случае в силу биективности B конус $Q(B)$ является воспроизводящим (т. е. $\operatorname{span}\{Q(B)\} = E$). Действительно, поскольку для любого $y \in \omega$ справедливо разложение $y = y_+ - y_-$, где

$$y_+ = \max(y(n), 0),$$

$$y_- = \max(-y(n), 0),$$

то

$$x = (I - B)^{-1}((I - B)x)_+ - (I - B)^{-1}((I - B)x)_-.$$

Ясно, что $(I - B)^{-1}((I - B)x)_\pm \in Q(B)$. При этом, поскольку $\|(I - B)^{-1}\| \leqslant 2$, $\|(I - B)\| \leqslant 2$, и, в силу монотонности нормы, $\|((I - B)x)_\pm\| \leqslant \|(I - B)x\|$, справедлива оценка

$$\|(I - B)^{-1}((I - B)x)_\pm\| \leqslant 2\|(I - B)x\| \leqslant 4\|x\|, \quad x \in E.$$

Следовательно, конус $Q(B)$ является несплющенным с константой несплющенности, не превосходящей 4.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — отделимые вещественные линейные топологические пространства, $\overline{E} = (E_0, E_1)$, $\overline{F} = (F_0, F_1)$ — банаховы пары, $E_i \subset \mathscr{A}$, $F_i \subset \mathscr{B}$ и Q_i — конусы в пространствах E_i $(i = 0, 1)$. В этом случае будем говорить, что $\overline{Q} = (Q_0, Q_1)$ — пара конусов в банаховой паре $\overline{E}$. Конус Q в пространстве $\mathscr{A}$ называется *промежуточным* для пары $\overline{Q}$, если

$$Q_0 \cap Q_1 \subset Q \subset Q_0 + Q_1.$$

Пусть банаховы пространства E и F являются промежуточными пространствами банаховых пар $\overline{E}$ и $\overline{F}$, причем банахова тройка (E_0, E_1, E) интерполяционна относительно банаховой тройки (F_0, F_1, F). Пусть $T : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$ — непрерывный линейный оператор. Если $T|_{Q_i} : Q_i \longrightarrow F_i$ и $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ при $x \in Q_i$, то будем говорить, что T — ограниченный оператор из пары нормированных конусов $\overline{Q} = (Q_0, Q_1)$ в банахову пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$. Пусть конус $Q \subset E$ и является промежуточным для пары $\overline{Q}$. Если существует постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, \overline{Q}, E, F, Q) > 0$ такая, что $T|_Q : Q \longrightarrow F$ и

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E \quad \text{при } x \in Q, \tag{1.1}$$

то будем говорить, что тройка конусов (Q_0, Q_1, Q) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Пусть теперь задано семейство троек конусов

$$\mathscr{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}},$$

где A — некоторое множество индексов. Пусть семейство $\mathscr{M}$ удовлетворяет условиям:

1) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ справедливы вложения $Q_0^\alpha \subset E_0$, $Q_1^\alpha \subset E_1$, $Q^\alpha \subset E$, причем конус Q^α — промежуточный конус для пары $\overline{Q^\alpha} = (Q_0^\alpha, Q_1^\alpha)$;

2) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ тройка $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

В этом случае будем говорить, что семейство $\mathscr{M}$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F). При этом постоянная $\{c = c(\overline{E}, \overline{F}, \overline{Q^\alpha} E, F, Q^\alpha)\}$ в неравенстве (1.1), вообще говоря, зависит от выбора тройки $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ из семейства $\mathscr{M}$. Если для всех троек конусов из $\mathscr{M}$ может быть выбрана одинаковая интерполяционная постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, E, F)$, то будем говорить, что семейство $\mathscr{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Для доказательства основного утверждения нам понадобится следующее хорошо известное (см. [1, 14]) условие интерполяционности тройки $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ по отношению к банаховой тройке $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$:

$$a = a_1 h\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad b = b_1 h\left(\frac{b_0}{b_1}\right),$$

где $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — квазивогнутая функция.

В частности, для проверки интерполяционности достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{b(m)}{a(n)} \leqslant C \max\left\{\frac{b_0(m)}{a_0(n)}, \frac{b_1(m)}{b_1(n)}\right\}.$$

Следующая теорема играет важную роль при доказательстве основного результата. Укажем предварительно, что подмножество A упорядоченного пространства E называется *нижней полурешеткой*, если $\min(x, y) \in A$ для любых $x, y \in A$.

Теорема 1.1. *Пусть $E_i = c_0(a_i)$, $F = c_0(b_i)$ $(i = 0, 1)$, $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, причем $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$, и банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F). Пусть $\mathscr{A}$ — множество конусов в ω^+ такое, что для каждого $Q \in \mathscr{A}$ выполняются условия:*

1) Q — нижняя полурешетка в ω;

2) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в $c_0(a_1)$;

3) $Q \cap E_1^+$ содержит последовательность, все члены которой положительны.

Тогда каждое из семейств троек конусов

$$\mathscr{L} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathscr{A}\},$$

и

$$\mathscr{M} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathscr{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$.

Доказательство данной теоремы, а также подробное изложение постановки задачи теории интерполяции на конусах можно найти в [5].

2. Основная теорема

Пространством Фреше называется полное метризуемое линейное локально выпуклое пространство. Важнейший класс пространств Фреше — счетно-гильбертовы ядерные пространства Кёте числовых последовательностей. Пусть $E = \bigcap_{r \geqslant 1} H_r$, где $H_r = l_2(a_r(n))$ — пространство Кёте, топология которого задана счетным набором гильбертовых норм $\{\| \cdot \|_r\}_{r=1}^{\infty}$:

$$\|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 a_r^2(n)}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Матрицу $(a_r(n))$ всегда можно считать монотонной по $r : a_{r+1}(n) \geqslant a_r(n)$. Как известно [3], условие ядерности пространства E имеет вид

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s(r)) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} < +\infty \right).$$

Базисом в пространстве E называют систему элементов $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ из E такую, что каждый элемент $x \in E$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n,$$

где $x_n^*(x)$ — числа.

Если при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ сходится абсолютно, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| \|x_n\|_r < +\infty$$

для всех r, то базис $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называют *абсолютным*.

Аналогично, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ сходится к x безусловно, т. е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}^*(x)x_{\sigma(n)}$$

для любой перестановки (биективного отображения) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, то базис $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называют *безусловным*.

Последовательность $(x_n)_1^{\infty}$ пространства Фреше E называется *правильной в смысле Драгилева*, если для некоторой определяющей системы преднорм $(|\cdot|)_1^{\infty}$ в E выполняются неравенства (полагают $0/0 = 0$):

$$\frac{|x_n|_p}{|x_n|_{p+1}} \geqslant \frac{|x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_{p+1}}, \quad n, p = 1, 2, \ldots$$

Матрица Кёте $(a_r(n))$ называется *правильной в смысле Драгилева*, если

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s = s(r)) \quad \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} \downarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty,\ r = 1, 2, \ldots$$

Без ограничения общности можно считать, что $s(r) = r + 1$ (этого всегда можно добиться, переходя к эквивалентной системе норм). Пространство Фреше с правильным базисом изоморфно пространству Кёте с правильной матрицей.

Пространство Кёте E с правильной матрицей относится к классу (d_1), если

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s = s(r))\ (c = c(r) > 0) \quad (a_r^2(n) \leqslant c(r)a_1(n)a_s(r)(n)).$$

Пространство Кёте E с правильной матрицей относится к классу (d_2), если

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s)\ (\forall\, q)\ (\exists\, c = c(r, q) > 0) \quad (a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r, q)a_s^2(n)).$$

Классы (d_1) и (d_2) были введены М. М. Драгилевым [4] в связи с изучением локально выпуклых пространств аналитических функций. Типичными представителями пространств классов (d_1) и (d_2) являются пространство целых функций и пространство функций аналитических в круге с топологией компактной сходимости соответственно.

Пусть $E \subset (d_2)$ — ядерное пространство Кёте и $F \subset E$ — его дополняемое подпространство. Покажем, что в пространстве F существует абсолютный базис и, следовательно, оно изоморфно пространству Кёте числовых последовательностей. Так как $E \subset (d_2)$, то

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s_1(r))\ (\forall\, q)\ (\exists\, c(r, q) > 0) \quad (a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r, q)a_{s_1(r)}^2(n)).$$

В силу ядерности E имеем

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s_2(r)) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s_2(r)}(n)} < +\infty\right).$$

Пусть $s(r) = \max\{s_1(r), s_2(r)\}$. Тогда условия, приведенные выше, можно записать в виде

$$a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r, q)a_{s(r)}(n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} < +\infty.$$

Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $s(r) = r + 1$. Итак, пусть

$$(\forall\, r)\ (\exists\, c(r,q)) \quad (a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r,q)a_{r+1}^2(n)) \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} < +\infty, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Отметим также, что функцию $c(r,q)$ можно считать возрастающей по r и q, так как в противном случае можно перейти в оценке (2.1) к функции

$$\widetilde{c}(r,q) = \max_{\substack{1 \leqslant r' \leqslant r \\ 1 \leqslant q' \leqslant q}} c(r', q').$$

Из условия ядерности следует, что системы l_2-норм и соответствующие системы sup-норм являются эквивалентными [3]. Отметим, что это утверждение в нашем случае легко выводится непосредственно из условия (2.2), причем справедливы оценки

$$|x|_r \leqslant \|x\|_r \leqslant N(r)|x|_{r+1},$$

где

$$\|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 a_r^2(n)}, \qquad |x|_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_r(n)|x(n)|.$$

С помощью диагонального преобразования можно добиться выполнения условия $a_1(n) \equiv 1$. В дальнейшем будем предполагать, что это преобразование выполнено.

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset (d_2)$ — ядерное пространство Кёте, $F \subset E$ — дополняемое подпространство в E. Тогда F имеет абсолютный базис.*

$\lhd$ Введем обозначения: $H_r = l_2(a_r(n))$, $G_r = c_0(a_r(n))$. Тогда $E = \bigcap_{r \geqslant 1} H_r = \bigcap_{r \geqslant 1} G_r$, причем $G_1 \supset G_r \supset G_{r+1}$, $H_1 \supset H_r \supset H_{r+1}$.

Пусть P — непрерывный проектор в E такой, что $F = P(E)$. Так как E — пространство с абсолютным базисом (из ядерности E и теоремы Дынина — Митягина [16] следует, что всякий безусловный базис в E является абсолютным), то оператор $|P| : E \longrightarrow E$ также непрерывен. Здесь $|P|$ — модуль оператора P в смысле теории векторных решеток [2]. Если (p_{ij}) — матрица P в базисе $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, то $(|p_{ij}|)$ — матрица $|P|$ в этом же базисе. Запишем условие непрерывности оператора $|P|$:

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s(r))\ (C_1(r) > 0) \quad \||P|x\|_r \leqslant C_1(r)|x|_{s(r)}. \tag{2.3}$$

Заметим, что из (2.3) следует

$$\|Px\|_r \leqslant c_1(r)|x|_{s(r)}. \tag{2.4}$$

Функции $C_1(r)$ и $s(r)$ в (2.3) и (2.4) можно считать монотонными по r. Кроме того, без ограничения общности можно принять, что $s(r) = r + 1$.

Переход к эквивалентной системе норм вида

$$|x|_r' = \alpha(r)|x|_r, \quad \|x\|_r' = \alpha(r)\|x\|_r$$

не меняет условий на матрицу Кёте (так как это соответствует замене $a_r(n) \to \alpha(r)a_r(n)$). Выбирая последовательность $\alpha(r) \uparrow \infty$ из условия

$$C_1(r)\frac{\alpha(r)}{\alpha(r+1)} \leqslant \frac{1}{2},$$

можно добиться выполнения неравенств

$$|||P|||'_r \leqslant \frac{1}{2}|x|'_{r+1}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что это преобразование выполнено, т. е.

$$|||P|x\|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_{r+1}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

и, соответственно,

$$|||P|||_{c_0(a_{r+1}) \longrightarrow l_2(a_r)} \leqslant \frac{1}{2}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Определим весовое «тупиковое» гильбертово пространство H_∞ и пространство $G_{\infty,0} = c_0(a^2_{\infty,0}(n))$ так, чтобы $G_{\infty,0} \subset H_\infty \subset H_r$ для любого r и оператор $|P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,0}$ в H_∞. Пусть $a_{\infty,0}(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r a_r(n)$, где последовательность $\{\gamma_r\}$ будет выбрана ниже.

Так как $a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r,q)a^2_{r+1}(n)$, то

$$a_r(n)\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q a_q(n) \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q c(r,q)\right) a^2_{r+1}(n).$$

Выберем γ_q так, чтобы

$$\sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q c(r,q) < +\infty, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\gamma_q = \frac{1}{2^q c(q,q)}$. Так как $\frac{c(r,q)}{c(q,q)} \leqslant 1$ при $q > r$, то

$$c'(r) = \sum_{q=1}^{\infty}\gamma_q c(r,q) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^q}\cdot\frac{c(r,q)}{c(q,q)} < +\infty, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Таким образом,

$$a_r(n)a_{\infty,0}(n) \leqslant c'(r)a^2_{r+1}(n) \quad (\forall\, n). \tag{2.6}$$

Итак, пусть $G_{\infty,0} = c_0(a^2_{\infty,0}(n))$.

Определим теперь гильбертово пространство H_∞ нормой

$$\|x\|^2_{H_\infty} = \|x\|^2_\infty = \sum_{r=1}^{\infty}\delta_r^2\|x\|_r^2,$$

где $\{\delta_r\}_{r=1}^{\infty}$ — некоторая числовая последовательность. Тогда $H_\infty = l_2(a_\infty)$, где

$$a^2_\infty(n) = \sum_{r=1}^{\infty}\delta_r^2 a_r^2(n).$$

Выберем эту последовательность так, чтобы оператор $T = |P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,0}$ в H_∞.

Так как $G_{\infty,0} \subset H_r$ для любого r, то

$$\|x\|_r \leqslant D_1(r)\|x\|_{G_{\infty,0}}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

следовательно,

$$\||P|x\|_r \leqslant D(r)\|x\|_{G_{\infty,0}}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Функцию $D(r)$ будем считать возрастающей, принимающей значения, не меньшие 1 (в противном случае можно перейти к функции $\widetilde{D}(r') = \max\limits_{1\leqslant r\leqslant r'}\{1, D(r)\}$). Далее, полагая $\delta_r^2 = \min\left\{\gamma_r^2, \frac{1}{2^r D^2(r)}\right\}$, получим

$$\||P|x\|_{H_\infty}^2 \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 \||P|x\|_r^2 \leqslant \left(\sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 D^2(r)\right) \|x\|_{G_{\infty,0}}^2 \leqslant \|x\|_{G_{\infty,0}}^2. \tag{2.7}$$

Введем еще одно пространство $G_\infty = c_0(a_\infty)$, определяемое нормой

$$\|x\|_{G_\infty} = |x|_\infty = \sup a_\infty(n)|x(n)|.$$

Ясно, что $G_{\infty,0} \subset H_\infty \subset G_\infty \subset H_r$ и $\||P|x\|_{G_\infty} \leqslant |x|_{G_{\infty,0}}$. Заметим также, что $a_\infty(n) \leqslant a_{\infty,0}(n)$ для всех n в силу выбора δ_r. Следовательно, учитывая (2.6),

$$a_r(n)a_\infty(n) \leqslant c'(r)a_{r+1}^2(n). \tag{2.8}$$

Покажем, что для любого r оператор $J_r = \frac{a_{r+1}}{a_r}$ непрерывно действует из $G_{\infty,0}$ в G_∞. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{a_{r+1}}{a_r}x\right\|_{G_\infty} &\leqslant \|a_{r+1}x\|_{G_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{r+1}(n)a_\infty(n)|x(n)| \\ \leqslant c'(r+1)\sup_{n\in\mathbb{N}} a_{r+2}^2(n)|x(n)| &\leqslant \gamma_r^{-2}c'(r+1)\sup_{n\in\mathbb{N}} a_{\infty,0}^2(n)|x(n)| = M(r)\|x\|_{G_{\infty,0}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $M(r) = \gamma_r^{-2}c'(r+2)$.

Пополним линейное многообразие $L = \{Px : x \in G_\infty\}$ по нормам $\|\cdot\|_r$ и $\|\cdot\|_\infty$. Получим гильбертовы пространства F_r и F_∞ такие, что

$$F_1 \supset F_r \supset F_{r+1} \supset F_\infty.$$

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — «общий» ортогональный базис пространств F_1 и F_∞. Для определенности будем считать его нормированным в F_1. Докажем, что $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — абсолютный базис в $F = \bigcap_{r\geqslant1} F_r$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_i)$, где $\varepsilon_i \in \{\pm1\}$ и $n \in \mathbb{N}$. Введем операторы

$$P_{n,\varepsilon}x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_k'(Px)f_k,$$

где $f_k'(x) = (f_k, x)_{H_1}$. По известному критерию безусловной базисности [4] последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ будет безусловным базисом в F, если $\{P_{n,\varepsilon}\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов в E (так как ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k'(f)f_k$ сходится к f при $f \in F_\infty$ и F_∞ плотно в F). Так как $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональный базис и в F_1, и в F_∞, то

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_1 \leqslant \|Px\|_1, \qquad \|P_{n,\varepsilon}x\|_\infty \leqslant \|Px\|_\infty. \tag{2.10}$$

Так как $\|Px\|_r \leqslant D'(r)|x|_\infty$, где $D'(r)$ — некоторая постоянная, то

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_r \leqslant D'(r)|x|_\infty \ \text{ при } \ x \in G_\infty.$$

Далее, вводя оператор $|P|$, из (2.10) получим $\|P_{n,\varepsilon}x\|_1 \leqslant \|\,|P|x\|_1$, если $x \in \varphi^+$, так как $\|Px\|_1 \leqslant \|\,|P|x\|_1$ при $x \in \varphi^+$.

Фиксируем $r \in \mathbb{N}$. Тогда из условия ядерности следует, что

$$\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \in l_1.$$

Для любого $y \in E$ имеем

$$\begin{aligned}\|y\|_1 = \|y\|_{l_2} \leqslant C_0\|y\|_{l_1} = C_0\sum_{n=1}^{\infty}|y(n)| = C_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}\left(\frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)}|y(n)|\right)\\ \leqslant C_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}\cdot\sup|y(n)|\frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} = \widetilde{C}(r)\left\|\frac{a_{r+1}}{a_r}y\right\|_{l_\infty} = \widetilde{C}(r)\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}y\right|_1.\end{aligned}$$

Используя это неравенство, получим

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_1 \leqslant C_1(r)\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right|_1, \quad x \in \varphi^+.$$

Так как $\|x\|_1 \geqslant |x|_1$, то

$$|P_{n,\varepsilon}x|_1 \leqslant C_1(r)\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right|_1.$$

Таким образом, существуют постоянные $C_1(r)$, $C_2(r)$ такие, что

$$|P_{n,\varepsilon}x|_1 \leqslant C_1(r)\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right|_1, \quad |P_{n,\varepsilon}x|_r \leqslant C_2(r)|x|_\infty, \quad x \in \varphi^+.$$

Далее нам понадобятся оценки для оператора $|P|$. Из (2.5) имеем

$$\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|x\right|_r = ||P|x|_{r+1} \leqslant \frac{1}{2}|x|_{r+2} = \frac{1}{2}\left|\frac{a_{r+2}}{a_r}x\right|_r.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{a_{r+1}}{a_r}|P|\frac{a_r}{a_{r+2}}x\right|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_r. \tag{2.11}$$

Введем операторы

$$A_r = J_r|P|J_r', \quad J_r = \frac{a_{r+1}}{a_r}, \quad J_r' = \frac{a_r}{a_{r+2}}.$$

Тогда из (2.11) следует, что $|A_rx|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_r$, т. е. $\|A_r\|_{G_r\to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, для любого $x \in \varphi^+$ справедливы неравенства

$$\left|P_{n,\varepsilon}J_r'x\right|_1 \leqslant C_1(r)|A_rx|_1, \quad \left|P_{n,\varepsilon}J_r'x\right|_r \leqslant C_2(r)\left|J_r'x\right|_\infty \leqslant C_2(r)|x|_\infty.$$

Пусть

$$\left(Q^{(N)}x\right)(n) = \begin{cases} x(n), & n = 1, 2, \ldots, N,\\ 0, & n > N.\end{cases}$$

Положим

$$S_{n,\varepsilon,r} = P_{n,\varepsilon}J_r', \quad S_{n,\varepsilon,r}^{(N)} = S_{n,\varepsilon,r}Q^{(N)}, \quad A_r^{(N)} = A_rQ^{(N)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x|_1 &\leqslant C_1(r)|A^{(N)}_r x|_1 \qquad \text{при всех} \quad x \in \omega^+, \\ |S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x|_r &\leqslant C_2(r)|x|_\infty \qquad \text{при всех} \quad x \in \omega^+ \cap G_\infty. \end{aligned}$$

Так как $|\cdot|_1$ — монотонная норма, то при $x \geqslant A^{(N)}_r x \geqslant 0$ справедлива оценка $|A^{(N)}_r x|_1 \leqslant |x|_1$. Рассмотрим в пространстве ω конус

$$Q_N = \big\{x \in \omega^+ : \, A^{(N)}_r x \leqslant x\big\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \big|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x\big|_1 &\leqslant C_2(r)|x|_1 \qquad \text{при} \quad x \in Q_N \cap G^+_1, \\ \big|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x\big|_r &\leqslant C_2(r)|x|_\infty \qquad \text{при} \quad x \in G^+_\infty. \end{aligned}$$

Покажем, что из этих неравенств следует ограниченность оператора $S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}$ на элементах конуса $Q_N \cap G^+_r$. Действительно,

$$\big|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x\big|_{r-1} \leqslant C_3(r)|x|_r \quad \text{при} \quad x \in Q_N \cap G^+_r.$$

Чтобы убедиться в интерполяционности тройки (G_1, G_∞, G_r) относительно тройки (G_1, G_r, G_{r-1}), достаточно проверить выполнение неравенства

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant C_r \max\left\{1, \frac{a_r(m)}{a_\infty(n)}\right\}.$$

Пусть $n \geqslant m$. Из условия правильности, учитывая, что $a_1(n) = 1$ для всех n, получаем

$$\frac{1}{a_{r-1}(n)} \leqslant \frac{1}{a_{r-1}(m)},$$

откуда

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant \frac{a_{r-1}(m)}{a_{r-1}(n)} \leqslant 1.$$

Пусть $m > n$. Покажем, что

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant C_r \frac{a_r(m)}{a_\infty(n)}. \tag{2.12}$$

Действительно, в силу условия правильности, с учетом (2.8), полагая $C_r = c'(r - 1)$, будем иметь

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(m)} \leqslant \frac{a_{r-1}(n)}{a_r(n)} \leqslant C_r \frac{a_r(n)}{a_\infty(n)}.$$

Следовательно, тройка (G_1, G_∞, G_r) интерполяционна относительно тройки (G_1, G_r, G_{r-1}).

Покажем теперь, что выполняются условия теоремы 1.2. Рассмотрим оператор $I - A^{(N)}_r : G_r \to G_r$. Поскольку $\|A^{(N)}_r\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$, то $I - A^{(N)}_r$ биективно действует из G_r в G_r. Условие $x \geqslant A^{(N)}_r x$ равносильно тому, что $x = \big(I - A^{(N)}_r\big)^{-1} h$, где $h \in G^+_r$. Ядро оператора $I - A^{(N)}_r : G_r \to G_r$ состоит из нулевого элемента. Тогда ядро его сужения

$I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ также состоит из нулевого вектора. Учитывая (2.9), (2.7), конечномерность оператора $|P|J_r'Q^{(N)} : G_{\infty,0} \to G_\infty$, а также эквивалентность всех норм в конечномерном пространстве, имеем

$$\big\|A_r^{(N)}x\big\|_{G_\infty} = \big\|J_r|P|J_r'Q^{(N)}x\big\|_{G_\infty} \leqslant M(r)\big\||P|J_r'Q^{(N)}x\big\|_{G_{\infty,0}}$$
$$\leqslant M(r)C(N)\big\||P|J_r'Q^{(N)}x\big\|_{G_\infty} \leqslant M(r)C(N)\big\|Q^{(N)}x\big\|_{G_{\infty,0}} \leqslant M(r)C^2(N)\|x\|_{G_\infty},$$

где $C(N)$ — некоторая зависящая от N константа. Оператор $A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ является непрерывным конечномерным и, следовательно, компактным. Тогда к оператору $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ применима альтернатива Фредгольма, и потому его инъективность влечет биективность. В предыдущем параграфе было показано, что из биективности оператора $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ следует воспроизводимость конуса $Q_N \cap G_\infty^+$. Ясно, что из биективности оператора $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ также следует наличие строго положительного вектора в $Q_N \cap G_\infty^+$.

Наконец, конус $Q_N \cap G_\infty^+$ является нижней полурешеткой в ω. Действительно, пусть $x, y \in Q_N \cap G_\infty^+$, т. е. $y \geqslant A_r^{(N)}y$, $y \geqslant A_r^{(N)}y$. В силу положительности оператора $A_r^{(N)}$ (именно, $A_r^{(N)} > 0$ при $x > 0$) имеем $x \geqslant A_r^{(N)}\min(x,y)$, $x \geqslant A_r^{(N)}\min(x,y)$. Откуда следует, что $\min(x,y) \geqslant A_r^{(N)}\min(x,y)$. Следовательно, для всех троек конусов из семейства $\{(Q_N \cap G_1^+, G_\infty^+, Q_N \cap G_r)\}_N$ выполнены условия теоремы 1.1, и справедлива оценка

$$\big\|S_{n,\varepsilon,r}^{(N)}x\big\|_{r-1} \leqslant C_3(r)\|x\|_r, \quad x \in Q_N \cap G_r^+.$$

Поскольку оператор $A_r^{(N)}$ положителен, $\|A_r^{(N)}\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$ и норма $\|\cdot\|_{G_r}$ монотонна, то конус Q_N, как было показано в начале предыдущего параграфа, несплющен с константой несплющенности, не превышающей 4. Поэтому

$$\|S_{n,\varepsilon,r}^{(N)}x\|_{r-1} \leqslant 8 \cdot C_3(r)\|x\|_r, \quad x \in G_r.$$

Пусть $C(r) = 8 \cdot C_3(r)$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\big\|S_{n,\varepsilon,r}x\big\|_{r-1} \leqslant C(r)\|x\|_r, \quad x \in G_r,$$

или

$$\|P_{n,\varepsilon}J_r'x\|_{r-1} \leqslant C(r)\|x\|_r, \quad x \in G_r.$$

Тогда

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_{r-1} \leqslant C(r)\big\|J_r'^{-1}x\big\|_r = C(r)\left\|\frac{a_{r+2}}{a_r}x\right\|_r = C(r)\|x\|_{r+2},$$

или, поскольку наши рассуждения не зависят от выбора r,

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_r \leqslant C(r)\|x\|_{r+3}.$$

Таким образом, $\{P_{n,\varepsilon}\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов в E, а значит, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — безусловный, а поэтому и абсолютный (так как F — ядерно) базис в F. ▷

Утверждение о квазиэквивалентности [4] каждого базиса в дополняемом подпространстве части абсолютного базиса пространства Фреше называют гипотезой Бессаги. В работах В. П. Кондакова (см. [6, с. 52]) доказана справедливость гипотезы Бессаги для пространств Кёте из класса (d_2). Доказанная теорема позволяет немедленно сформулировать следующий результат.

Теорема 2.2. *В любом дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2) существует базис, квазиэквивалентный базису ортов.*

Литература

1. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства.—М.: Мир, 1980.—264 с.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961.—407 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.—448 с.
4. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Кёте.—Ростов-н/Д.: Изд-во РГУ, 1983.—144 с.
5. *Каплицкий В. М., Дронов А. К.* К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей // Записки научных семинаров ПОМИ.—2014.—Т. 424.—С. 154–178.
6. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—72 с.
7. *Кондаков В. П.* Об операторах и дополняемых подпространствах в пространствах Кёте, определяемых разряжёнными матрицами // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 5.—С. 1096–1112.
8. *Кондаков В. П.* Геометрические свойства пространств Фреше и выделение базисных последовательностей // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 1.—С. 102–111.
9. *Кондаков В. П.* Замечание о существовании базисов в весовых счетно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 43, № 6.—С. 1300–1313.
10. *Кондаков В. П., Ефимов А. И.* О классах пространств Кёте, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 2.—С. 21–29.
11. *Крейн М. Г.* О минимальном разложении функционала на положительные составляющие // Докл. АН СССР.—1940.—Т. 28, № 1—С. 18–22.
12. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.
13. *Митягин Б. С., Хенкин Г. М.* Линейные задачи комплексного анализа // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 26, вып. 4.—С. 93–153.
14. *Peetre J.* On interpolation functions III // Acta Sci. Math.—1969.—Vol. 30, № 3, 4.—P. 235–239.
15. *Pelczynski A.* Problem 37 // Stud. Math.—1970.—Vol. 38.—P. 18–22.
16. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1970.
17. *Vogt D.* Ein Isomorphiesatz für Potenzreihenräume // Arch. Match.—1982.—Vol. 38.—P. 540–548.

Статья поступила 23 октября 2014 г.

Дронов Алексей Константинович
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
ассистент кафедры прикладной и фундаментальной мат-ки
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 69
E-mail: floberrr@mail.ru

ON THE EXISTENCE OF A BASIS IN A COMPLEMENTED SUBSPACE OF A NUCLEAR KÖTHE SPACE OF TYPE d_2

Dronov A. K.

The existence of a basis in a complemented subspace of a nuclear Köthe space of the class d_2 is proved. It is also shown that in each such subspace there is a basis quasiequivalent to the part of the basis of orts.

Key words: Pelczynski hypothesis, Köthe space, basis, complemented subspace, cone, interpolation.