Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 59–66

УДК **517.956**

О НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. Г. Мамедов

В данной статье выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании четырехмерной задачи Гурса для одного дифференциального уравнения со старшей частной производной шестого порядка $D_1D_2D_3^2D_4^2u(x)$ с разрывными коэффициентами (L_p-коэффициентами) путем сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, четырехмерная задача Гурса, уравнения с разрывными коэффициентами.

К настоящему времени усилиями многих математиков исследовались разнообразные классы трехмерных, четырехмерных, а также многомерных локальных и нелокальных начально-краевых задач для уравнений со старшей частной производной, см., например, [1–9]. Это связано с их появлением в различных задачах прикладного характера [10].

1. Постановка задачи

В работе обосновывается корректность четырехмерной задачи Гурса с неклассическими условиями для одного гиперболического уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}(V_{1,1,2,2}u)(x) \equiv D_1D_2D_3^2D_4^2u(x)\\ + a_{1,0,2,2}(x)D_1D_3^2D_4^2u(x) + a_{0,1,2,2}(x)D_2D_3^2D_4^2u(x)\\ + a_{1,1,1,2}(x)D_1D_2D_3D_4^2u(x) + a_{1,1,2,1}(x)D_1D_2D_3^2D_4u(x)\\ + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4<5,\\ i_\xi=0,1,\,\xi=1,2;\\ i_\eta=0,2,\,\eta=3,4}} a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(x) = \varphi_{1,1,2,2}(x) \in L_p(G),\end{gathered} \tag{1}$$

здесь $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — искомая функция, определенная на G; $a_{i_1,i_2,i_3,i_4} = a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)$ — заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$, где $G_\xi = (0, h_\xi)$, $\xi = 1, 2, 3, 4$; $\varphi_{1,1,2,2}(x)$ — заданная измеримая функция на G; $D_\xi = \frac{\partial}{\partial x_\xi}$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева.

Уравнение (1) является гиперболическим уравнением, которое обладает четырьмя действительными характеристиками $x_1 = \mathrm{const}$, $x_2 = \mathrm{const}$, $x_3 = \mathrm{const}$, $x_4 = \mathrm{const}$, первая и вторая, из которых простая, а третая и четвертая — двухкратные. Поэтому уравнение (1) в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение [11, 12]. Уравнения подобного вида возникают при описании многих процессов, происходящих в природе и технике. Подобные ситуации имеют место при изучении процессов распространения тепла [13], влагопереноса в почвогрунтах [14], фильтрации жидкости в пористых средах [15], в задачах математической биологии [16], а также в теории оптимальных процессов [17].

В этой работе уравнение (1) исследовано в общем случае, когда коэффициенты $a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$
\begin{array}{lll}
a_{0,0,i_3,i_4}(x) \in L_p(G), & a_{1,0,i_3,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,p,p}(G), & a_{0,1,i_3,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,p,p}(G), \\
a_{0,0,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,p,\infty,p}(G), & a_{0,0,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,p,p,\infty}(G), & a_{1,1,i_3,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,\infty,p,p}(G), \\
a_{1,0,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,\infty,p}(G), & a_{1,0,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,p,\infty}(G), & a_{0,1,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,\infty,p}(G), \\
a_{0,1,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,p,\infty}(G), & a_{0,0,2,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,p,\infty,\infty}(G), & a_{1,1,2,i_4}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,\infty,\infty,p}(G), \\
a_{1,1,i_3,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,\infty,p,\infty}(G), & a_{0,1,2,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{p,\infty,\infty,\infty}(G), & a_{1,0,2,2}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3,x_4}_{\infty,p,\infty,\infty}(G),
\end{array}
$$

где $i_3 = 0, 1,\ i_4 = 0, 1$.

При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа p-интегрируемости и ограниченности, т. е. рассмотренный псевдопараболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряженного оператора.

При этих условиях решение $u(x)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С. Л. Соболева

$$W_p^{(1,1,2,2)}(G) \equiv \Big\{ u(x) :\ D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) \in L_p(G),\ i_\xi = 0, 1,\ \xi = 1, 2;\ i_\eta = 0, 1, 2,\ \eta = 3, 4 \Big\},$$

где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Норму в анизотропном пространстве $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u(x)\|_{W_p^{(1,1,2,2)}(G)} = \sum_{\substack{i_\xi=0,\\ \xi=1,2}} \sum_{\substack{i_\eta=0,\\ \eta=3,4}} \left\| D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) \right\|_{L_p(G)}.$$

Для уравнения (1) условия Гурса классического вида можно задать в виде

$$
\begin{cases}
u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_1=0} = F^1(x_2,x_3,x_4);\ u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_2=0} = F^2(x_1,x_3,x_4); \\
u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_3=0} = F^3(x_1,x_2,x_4);\ \frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = F^4(x_1,x_2,x_4); \\
u(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{x_4=0} = F^5(x_1,x_2,x_3);\ \frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4}\Big|_{x_4=0} = F^6(x_1,x_2,x_3),
\end{cases}
\tag{2}
$$

$F^1(x_2,x_3,x_4),\ F^2(x_1,x_3,x_4),\ F^3(x_1,x_2,x_4),\ F^4(x_1,x_2,x_4),\ F^5(x_1,x_2,x_3),\ F^6(x_1,x_2,x_3)$ — заданные измеримые функции на G. Очевидно, что в случае условий (2) функции F^i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, кроме условий

$$F^1(x_2,x_3,x_4) \in W_p^{(1,2,2)}(G_2 \times G_3 \times G_4), \quad F^2(x_1,x_3,x_4) \in W_p^{(1,2,2)}(G_1 \times G_3 \times G_4),$$

$$F^3(x_1,x_2,x_4) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_4), \quad F^4(x_1,x_2,x_4) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_4),$$

$$F^5(x_1,x_2,x_3) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_3), \quad F^6(x_1,x_2,x_3) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_3),$$

должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\begin{cases} F^1(0,x_3,x_4)=F^2(0,x_3,x_4); & F^1(x_2,0,x_4)=F^3(0,x_2,x_4); \\ & F^2_{x_4}(x_1,x_3,0)=F^6(x_1,0,x_3); \\ F^1(x_2,x_3,0)=F^5(0,x_2,x_3); & F^1_{x_3}(x_2,0,x_4)=F^4(0,x_2,x_4); \\ & F^1_{x_4}(x_2,x_3,0)=F^6(0,x_2,x_3); \\ F^2(x_1,x_3,0)=F^5(x_1,0,x_3); & F^2(x_1,0,x_4)=F^3(x_1,0,x_4); \\ & F^2_{x_3}(x_1,0,x_4)=F^4(x_1,0,x_4); \\ F^3(x_1,x_2,0)=F^5(x_1,x_2,0); & F^3_{x_4}(x_1,x_2,0)=F^6(x_1,x_2,0); \\ & F^4_{x_4}(x_1,x_2,0)=F^6_{x_3}(x_1,x_2,0), \end{cases} \tag{3}$$

которые являются условиями согласования.

2. Четырехмерная задача Гурса в неклассической трактовке и ее обоснование

Наличие условий согласования (3) в постановке задачи (1), (2) означает, что условиями (2) задана также некоторая излишняя информация о решении этой задачи. Поэтому возникает вопрос о нахождении краевых условий, которые не содержат излишней информации о решении и не требуют выполнения некоторых дополнительных условий типа согласования. В связи с этим рассмотрим следующие неклассические граничные условия:

$$V_{0,0,i_3,i_4}u \equiv D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(0,0,0,0) = \varphi_{0,0,i_3,i_4} \in \mathbb{R}, \quad i_\nu = 0,1, \quad \nu = 3,4;$$

$$(V_{1,0,i_3,i_4}u)(x_1) \equiv D_1D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(x_1,0,0,0) = \varphi_{1,0,i_3,i_4}(x_1) \in L_p(G_1), \quad i_\nu = 0,1, \quad \nu = 3,4;$$

$$(V_{0,1,i_3,i_4}u)(x_2) \equiv D_2D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(0,x_2,0,0) = \varphi_{0,1,i_3,i_4}(x_2) \in L_p(G_2), \quad i_\nu = 0,1, \quad \nu = 3,4;$$

$$(V_{0,0,2,i_4}u)(x_3) \equiv D_3^2D_4^{i_4}u(0,0,x_3,0) = \varphi_{0,0,2,i_4}(x_3) \in L_p(G_3), \quad i_4 = 0,1;$$

$$(V_{0,0,i_3,2}u)(x_4) \equiv D_3^{i_3}D_4^2u(0,0,0,x_4) = \varphi_{0,0,i_3,2}(x_4) \in L_p(G_4), \quad i_3 = 0,1;$$

$$\begin{aligned}(V_{1,1,i_3,i_4}u)(x_1,x_2) &\equiv D_1D_2D_3^{i_3}D_4^{i_4}u(x_1,x_2,0,0) \\ &= \varphi_{1,1,i_3,i_4}(x_1,x_2) \in L_p(G_1\times G_2), \quad i_\nu = 0,1, \quad \nu = 3,4;\end{aligned}$$

$$(V_{1,0,2,i_4}u)(x_1,x_3) \equiv D_1D_3^2D_4^{i_4}u(x_1,0,x_3,0) = \varphi_{1,0,2,i_4}(x_1,x_3) \in L_p(G_1\times G_3), \quad i_4 = 0,1;$$

$$(V_{1,0,i_3,2}u)(x_1,x_4) \equiv D_1D_3^{i_3}D_4^2u(x_1,0,0,x_4) = \varphi_{1,0,i_3,2}(x_1,x_4) \in L_p(G_1\times G_4), \quad i_3 = 0,1;$$

$$(V_{0,1,2,i_4}u)(x_2,x_3) \equiv D_2D_3^2D_4^{i_4}u(0,x_2,x_3,0) = \varphi_{0,1,2,i_4}(x_2,x_3) \in L_p(G_2\times G_3), \quad i_4 = 0,1;$$

$$(V_{0,1,i_3,2}u)(x_2,x_4) \equiv D_2D_3^{i_3}D_4^2u(0,x_2,0,x_4) = \varphi_{0,1,i_3,2}(x_2,x_4) \in L_p(G_2\times G_4), \quad i_3 = 0,1;$$

$$(V_{0,0,2,2}u)(x_3,x_4) \equiv D_3^2D_4^2u(0,0,x_3,x_4) = \varphi_{0,0,2,2}(x_3,x_4) \in L_p(G_3\times G_4);$$

$$\begin{aligned}(V_{1,1,2,i_4}u)(x_1,x_2,x_3) &\equiv D_1D_2D_3^2D_4^{i_4}u(x_1,x_2,x_3,0) \\ &= \varphi_{1,1,2,i_4}(x_1,x_2,x_3) \in L_p(G_1\times G_2\times G_3), \quad i_4 = 0,1;\end{aligned}$$

$$(V_{1,1,i_3,2}u)(x_1,x_2,x_4)\equiv D_1D_2D_3^{i_3}D_4^2u(x_1,x_2,0,x_4)$$
$$=\varphi_{1,1,i_3,2}(x_1,x_2,x_4)\in L_p(G_1\times G_2\times G_4),\quad i_3=0,1;$$

$$(V_{0,1,2,2}u)(x_2,x_3,x_4)\equiv D_2D_3^2D_4^2u(0,x_2,x_3,x_4)=\varphi_{0,1,2,2}(x_2,x_3,x_4)\in L_p(G_2\times G_3\times G_4);$$
$$(V_{1,0,2,2}u)(x_1,x_3,x_4)\equiv D_1D_3^2D_4^2u(x_1,0,x_3,x_4)$$
$$=\varphi_{1,0,2,2}(x_1,x_3,x_4)\in L_p(G_1\times G_3\times G_4). \tag{4}$$

Если функция $u\in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является решением четырехмерной задачи Гурса классического вида (1), (2), то она является также решением задачи (1), (4) для $\varphi_{i_1,i_2,i_3,i_4}$ с условиями

$$\varphi_{0,0,0,0}=F^1(0,0,0)=F^2(0,0,0)=F^3(0,0,0)=F^5(0,0,0);$$
$$\varphi_{0,0,1,0}=F^4(0,0,0)=F^2_{x_3}(0,0,0)=F^1_{x_3}(0,0,0);$$
$$\varphi_{0,0,0,1}=F^6(0,0,0)=F^1_{x_4}(0,0,0)=F^3_{x_4}(0,0,0);$$
$$\varphi_{0,0,1,1}=F^6_{x_3}(0,0,0)=F^4_{x_4}(0,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,0,0}(x_1)=F^2_{x_1}(x_1,0,0)=F^3_{x_1}(x_1,0,0)=F^5_{x_1}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,1,0}(x_1)=F^2_{x_1x_3}(x_1,0,0)=F^4_{x_1}(x_1,0,0)=F^5_{x_1x_3}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,0,1}(x_1)=F^2_{x_1x_4}(x_1,0,0)=F^3_{x_1x_4}(x_1,0,0)=F^6_{x_1}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{1,0,1,1}(x_1)=F^2_{x_1x_3x_4}(x_1,0,0)=F^4_{x_1x_4}(x_1,0,0);$$
$$\varphi_{0,1,0,0}(x_2)=F^1_{x_2}(x_2,0,0)=F^3_{x_2}(0,x_2,0)=F^5_{x_2}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,1,1,0}(x_2)=F^1_{x_2x_3}(x_2,0,0)=F^5_{x_2x_3}(0,x_2,0)=F^4_{x_2}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,1,0,1}(x_2)=F^1_{x_2x_4}(x_2,0,0)=F^3_{x_2x_4}(0,x_2,0)=F^6_{x_2}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,1,1,1}(x_2)=F^1_{x_2x_3x_4}(x_2,0,0)=F^6_{x_2x_3}(0,x_2,0);$$
$$\varphi_{0,0,2,0}(x_3)=F^1_{x_3x_3}(0,x_3,0)=F^2_{x_3x_3}(0,x_3,0)=F^5_{x_3x_3}(0,0,x_3);$$
$$\varphi_{0,0,2,1}(x_3)=F^1_{x_3x_3x_4}(0,x_3,0)=F^2_{x_3x_3x_4}(0,x_3,0)=F^6_{x_3x_3}(0,0,x_3);$$
$$\varphi_{0,0,0,2}(x_4)=F^1_{x_4x_4}(0,0,x_4)=F^2_{x_4x_4}(0,0,x_4)=F^3_{x_4x_4}(0,0,x_4);$$
$$\varphi_{0,0,1,2}(x_4)=F^1_{x_3x_4x_4}(0,0,x_4)=F^2_{x_3x_4x_4}(0,0,x_4)=F^4_{x_4x_4}(0,0,x_4);$$
$$\varphi_{1,1,0,0}(x_1,x_2)=F^3_{x_1x_2}(x_1,x_2,0)=F^5_{x_1x_2}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,1,1,0}(x_1,x_2)=F^5_{x_1x_2x_3}(x_1,x_2,0)=F^4_{x_1x_2}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,1,0,1}(x_1,x_2)=F^3_{x_1x_2x_4}(x_1,x_2,0)=F^6_{x_1x_2}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,1,1,1}(x_1,x_2)=F^4_{x_1x_2x_4}(x_1,x_2,0)=F^6_{x_1x_2x_3}(x_1,x_2,0);$$
$$\varphi_{1,0,2,0}(x_1,x_3)=F^2_{x_1x_3x_3}(x_1,x_3,0)=F^5_{x_1x_3x_3}(x_1,0,x_3);$$
$$\varphi_{1,0,2,1}(x_1,x_3)=F^2_{x_1x_3x_3x_4}(x_1,x_3,0)=F^6_{x_1x_3x_3}(x_1,0,x_3);$$
$$\varphi_{1,0,0,2}(x_1,x_4)=F^2_{x_1x_4x_4}(x_1,0,x_4)=F^3_{x_1x_4x_4}(x_1,0,x_4);$$
$$\varphi_{1,0,1,2}(x_1,x_4)=F^2_{x_1x_3x_4x_4}(x_1,0,x_4)=F^4_{x_1x_4x_4}(x_1,0,x_4);$$
$$\varphi_{0,1,2,0}(x_2,x_3)=F^1_{x_2x_3x_3}(x_2,x_3,0)=F^5_{x_2x_3x_3}(0,x_2,x_3);$$

$$\varphi_{0,1,2,1}(x_2,x_3)=F^1_{x_2x_3x_3x_4}(x_2,x_3,0)=F^6_{x_2x_3x_3}(0,x_2,x_3);$$
$$\varphi_{0,1,0,2}(x_2,x_4)=F^1_{x_2x_4x_4}(x_2,0,x_4)=F^3_{x_2x_4x_4}(0,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{0,1,1,2}(x_2,x_4)=F^1_{x_2x_3x_4x_4}(x_2,0,x_4)=F^4_{x_2x_4x_4}(0,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{0,0,2,2}(x_3,x_4)=F^1_{x_3x_3x_4x_4}(0,x_3,x_4)=F^2_{x_3x_3x_4x_4}(0,x_3,x_4);$$
$$\varphi_{1,1,2,0}(x_1,x_2,x_3)=F^5_{x_1x_2x_3x_3}(x_1,x_2,x_3);$$
$$\varphi_{1,1,2,1}(x_1,x_2,x_3)=F^6_{x_1x_2x_3x_3}(x_1,x_2,x_3);$$
$$\varphi_{1,1,0,2}(x_1,x_2,x_4)=F^3_{x_1x_2x_4x_4}(x_1,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{1,1,1,2}(x_1,x_2,x_4)=F^4_{x_1x_2x_4x_4}(x_1,x_2,x_4);$$
$$\varphi_{0,1,2,2}(x_2,x_3,x_4)=F^1_{x_2x_3x_3x_4x_4}(x_2,x_3,x_4);$$
$$\varphi_{1,0,2,2}(x_1,x_3,x_4)=F^2_{x_1x_3x_3x_4x_4}(x_1,x_3,x_4).$$

Легко доказать, что верно и обратное. Иначе говоря, если функция $u\in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является решением задачи (1), (4), то она является также решением задачи (1), (2), для следующих функций F^i, $i=1,2,3,4,5,6$:

$$F^1(x_2,x_3,x_4)=\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}\,x_4^{i_4}\,\varphi_{0,0,i_3,i_4}+\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,i_3,i_4}(\xi_2)\,d\xi_2$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{0,0,2,i_4}(\xi_3)\,d\xi_3+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,i_3,2}(\xi_4)\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{0,1,2,i_4}(\xi_2,\xi_3)\,d\xi_2\,d\xi_3+\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,2,2}(\xi_3,\xi_4)\,d\xi_3\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,1,i_3,2}(\xi_2,\xi_4)\,d\xi_2\,d\xi_4$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,1,2,2}(\xi_2,\xi_3,\xi_4)\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4;$$

$$F^2(x_1,x_3,x_4)=\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}x_4^{i_4}\,\varphi_{0,0,i_3,i_4}+\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{i_4=0}^{1}x_3^{i_3}\,x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,i_3,i_4}(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{0,0,2,i_4}(\xi_3)\,d\xi_3+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,i_3,2}(\xi_4)\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_4=0}^{1}x_4^{i_4}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\xi_3)\,\varphi_{1,0,2,i_4}(\xi_1,\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_3+\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{0,0,2,2}(\xi_3,\xi_4)\,d\xi_3\,d\xi_4$$
$$+\sum_{i_3=0}^{1}x_3^{i_3}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\xi_4)\,\varphi_{1,0,i_3,2}(\xi_1,\xi_4)\,d\xi_1\,d\xi_4$$
$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}\int\limits_0^{x_4}(x_3-\xi_3)(x_4-\xi_4)\,\varphi_{1,0,2,2}(\xi_1,\xi_3,\xi_4)\,d\xi_1\,d\xi_3\,d\xi_4;$$

$$F^3(x_1,x_2,x_4)=M_0(x_1,x_2,x_4),\quad F^4(x_1,x_2,x_4)=M_1(x_1,x_2,x_4),$$

где

$$M_k(x_1,x_2,x_4)=\varphi_{0,0,k,0}+x_4\,\varphi_{0,0,k,1}+\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,k,0}(\tau_1)\,d\tau_1+x_4\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,k,1}(\tau_1)\,d\tau_1$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,k,0}(\tau_2)\,d\tau_2+x_4\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,k,1}(\tau_2)\,d\tau_2+\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{0,0,k,2}(\tau_4)\,d\tau_4$$
$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,k,0}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2+x_4\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,k,1}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{0,1,k,2}(\tau_2,\tau_4)\,d\tau_2\,d\tau_4+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{1,0,k,2}(\tau_1,\tau_4)\,d\tau_1\,d\tau_4$$
$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_4}(x_4-\tau_4)\,\varphi_{1,1,k,2}(\tau_1,\tau_2,\tau_4)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_4,\quad k=0,1;$$

$$F^5(x_1,x_2,x_3)=L_0(x_1,x_2,x_3),\quad F^6(x_1,x_2,x_3)=L_1(x_1,x_2,x_3),$$

где

$$L_k(x_1,x_2,x_3)=\varphi_{0,0,0,k}+x_3\,\varphi_{0,0,1,k}+\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,0,k}(\eta_1)\,d\eta_1+x_3\int\limits_0^{x_1}\varphi_{1,0,1,k}(\eta_1)\,d\eta_1$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,0,k}(\eta_2)\,d\eta_2+x_3\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1,1,k}(\eta_2)\,d\eta_2+\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\varphi_{0,0,2,k}(\eta_3)\,d\eta_3$$
$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,0,k}(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2+x_3\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1,1,k}(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\,\varphi_{0,1,2,k}(\eta_2,\eta_3)\,d\eta_2\,d\eta_3+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\,\varphi_{1,0,2,k}(\eta_1,\eta_3)\,d\eta_1\,d\eta_3$$
$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{x_3}(x_3-\eta_3)\,\varphi_{1,1,2,k}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\,d\eta_1\,d\eta_2\,d\eta_3,\quad k=0,1.$$

Итак, четырехмерные задачи Гурса классического вида (1), (2) и вида (1), (4) в общем случае эквивалентны. Однако четырехмерная задача Гурса (1), (4) по постановке более естественна, чем задача (1), (2). Это связано с тем, что в постановке задачи (1), (4) на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуется. Поэтому задачу (1), (4) можно рассматривать как задачу Гурса с неклассическими условиями.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Задачи Гурса вида* (1), (2) *и неклассического вида* (1), (4) *эквивалентны.*

Задачу (1), (4) можно исследовать, следуя схеме рассуждений работы [24], методом операторных уравнений. В результате убеждаемся в справедливости утверждения, аналогичного теореме из [24, с. 63].

Отметим, что применяя методику, приводимую в статье [25], можно получить интегральное представление решения задачи (1), (4) с использованием фундаментального решения. А в работах [18–21] исследовались краевые задачи в неклассических трактовках. В этих работах для исследования таких задач развита методика, которая аналогично методу предложенному С. С. Ахиевым [22, 23] и существенно использует современные методы теории функций и функционального анализа. В данной статье она изложена, в основном, применительно к четырехмерным гиперболическим уравнениям шестого порядка с разрывными коэффициентами.

3. Выводы

Постановка задачи (1), (4) обладает рядом преимуществ:

1) в этой постановке не требуется никаких дополнительных условий согласования;

2) такая постановка порождает гомеоморфизм между двумя определенными банаховыми пространствами;

3) эту задачу можно рассматривать как задачу сформулированную по следам в пространстве С. Л. Соболева $W_p^{1,1,2,2}(G)$;

4) в этой постановке рассматриваемое уравнение является обобщением многих модельных уравнений некоторых процессов (например, уравнения влагопереноса, уравнения теплопроводности, уравнения Аллера, уравнения Буссинеска — Лява, уравнения Манжерона, трехмерного телеграфного уравнения и т. д.).

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

Литература

1. *Жегалов В. И., Севастьянов В. А.* Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Диф. уравнения.—1996.—Т. 32, № 10.—С. 1429–1430.
2. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.—Казань: Казанское мат. общество, 2001.—226 с.
3. *Миронов А. Н.* К задаче Коши в четырехмерном пространстве // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 6.—С. 844–847.
4. *Миронов А. Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.—2007.—№ 2 (15).—С. 27–32.
5. *Кощеева О. А.* О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика.—2008.—№ 9.—С. 40–46.
6. *Уткина Е. А.* Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика.—2009.—№ 4.—С. 50–55.
7. *Миронов А. Н.* О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка // Диф. уравнения.—2010.—Т. 46, № 2.—С. 266–272.
8. *Джохадзе О. М.* О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерры первого рода // Диф. уравнения.—2006.—Т. 42, № 3.—С. 385–394.
9. *Midodashvili B.* Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proceedings of A. Razmadze Math. Institute.—2005.—Vol. 138.—P. 43–54.
10. *Березин А. В., Воронцов А. С., Марков М. Б., Плющенков Б. Д.* О выводе и решении уравнений Максвелла в задачах с заданным волновым фронтом // Мат. моделирование.—2006.—Т. 18, № 4.—С. 43–60.
11. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 10.—С. 73–76.

12. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2009.—Т. 49, № 1.—С. 99–110.
13. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 6.—С. 763–764.
14. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, №2.—С. 280–285.
15. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
16. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—304 с.
17. *Мамедов И. Г.* Условия оптимальности некоторых процессов, описываемых псевдопараболическим уравнением при нелокальных краевых условиях // Мат. и компьютерное моделирование. Сер. физ.-мат. науки.—2008.—Вып. 1.—С. 133–141.
18. *Чернов А. В.* О тотальном сохранении глобальной разрешимости задачи Гурса для управляемого полулинейного псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.— 2014.—Т. 16, вып. 3.—С. 55–63.
19. *Мамедов И. Г.* Формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 4.—С. 40–51.
20. *Мамедов И. Г.* Нелокальная комбинированная задача типа Бицадзе — Самарского и Самарского — Ионкина для системы псевдопараболических уравнений // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, вып. 1.—С. 30–41.
21. *Мамедов И. Г.* О неклассической трактовке задачи Дирихле для одного псевдопараболического уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2014.—Т. 50, № 3.—С. 417–420.
22. *Ахиев С. С.* Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления // Докл. АН СССР.—1983.—Т. 271, № 2.—С. 265–269.
23. *Ахиев С. С.* Функция Римана уравнения с доминирующей смешанной производной произвольного порядка // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 283, № 5.—С. 783–787.
24. *Мамедов И. Г.* Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // Изв. вузов. Математика.— 2011.—№ 2.—С. 54–64.
25. *Мамедов И. Г.* Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2010.— Т. 12, вып. 1.—С. 17–32.

Статья поступила 12 декабря 2013 г.

Мамедов Ильгар Гурбат оглы
Институт Систем Управления НАН Азербайджана,
ведущий научный сотрудник
Азербайджан, AZ 1141, Баку, Б. Вагабзаде, 9
E-mail: `ilgar-mammadov@rambler.ru`

ON A NONCLASSICAL INTERPRETATION OF THE FOUR-DIMENSIONAL GOURSAT PROBLEM FOR ONE HYBERBOLIC EQUATION

Mamedov I. G.

A homeomorphism between certain pairs of Banach space is revealed in the study of the four-dimensional Goursat problem for one differential equation with leading partial derivative of the sixth order $D_1D_2D_3^2D_4^2$ with discontinuous coefficients (L_p-coefficients) by reducing this problem to an equivalent integral equation.

Key words: hyperbolic equation, the four-dimensional Goursat problem, equations with discontinuous coefficients.