Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 37–46

УДК **512.554**

НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков

Владимиру Амурхановичу Койбаеву
к его шестидесятилетию

Рассматриваются вопросы описания идеалов и автоморфизмов нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов над полем и их нефинитарных обобщений, а также автоморфизмы присоединенных групп. Лиев идеал алгебры $NT(n,K)$ нильтреугольных $n\times n$ матриц (лиев тип A_{n-1}) охарактеризован через базис набором констант основного поля K. Когда $K=GF(q)$, это дает комбинаторное выражение числа лиевых идеалов и, в случае простого q, также числа нормальных подгрупп унитреугольной группы $UT(n,q)$.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, нефинитарные обобщения, максимальные абелевы идеалы, автоморфизмы, присоединенные группы.

1. Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их финитарные обобщения

Алгебру Шевалле над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, характеризуют базисом Шевалле, состоящим из элементов e_r $(r\in\Phi)$ и базы подалгебры Картана [1, §4.4]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r:\ r\in\Phi^+\}$ называем *нильтреугольной*. Для типа A_{n-1} ее отождествляют с ассоциированной алгеброй Ли алгебры $NT(n,K)$ нильтреугольных $(n\times n)$-матриц над K, т. е. с базой из матричных единиц $\{e_{ij}:\ 1\leqslant j<i\leqslant n\}$. Хорошо известно, что отображение $\alpha\to e+\alpha$ (e — единичная матрица) дает изоморфизм присоединенной группы $(NT(n,K),\circ)$, $\alpha\circ\beta=\alpha+\beta+\alpha\beta$, на унитреугольную группу $UT(n,K)$.

В [2] выявились тесные связи автоморфизмов, а также нормальных подгрупп группы $UT(n,K)$ и идеалов кольца Ли $NT(n,K)$ над любым ассоциативным кольцом K с единицей. В [3] они изучались для более общей алгебры $R=NT(\Gamma,K)$ финитарных нильтреугольных Γ-матриц $\|a_{ij}\|_{i,j\in\Gamma}$ над K с произвольной цепью (линейно упорядоченным множеством) Γ индексов и отношением порядка $<$. Базу здесь дают Γ-матрицы e_{ij} $(i,j\in\Gamma,\ j<i)$ с обычными правилами сложения и умножения матричных единиц, в частности, $e_{uv}e_{ij}=e_{uj}$ при $v=i$, а остальные произведения равны нулю. Построенная ассоциативная алгебра локально нильпотентная и поэтому радикальная, т. е. присоединенная полугруппа $(R,\circ)$ есть группа; последняя изоморфна финитарной унитреугольной группе $UT(\Gamma,K)$. Подобные общие конструкции рассматривал А. И. Мальцев [4].

В [2] и [3] установлено следующее структурное соответствие.

Теорема 1.1. *Идеалы кольца Ли $\Lambda(R)$, ассоциированного с кольцом $R = NT(\Gamma, K)$, и только они есть нормальные подгруппы присоединенной группы $G(R) = (R, \circ)$.*

Группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, R = \mathrm{Aut}\, \Lambda(R) \cap \mathrm{Aut}\, G(R)$, $\mathrm{Aut}\, \Lambda(R)$ и $\mathrm{Aut}\, G(R)$ описаны в [2] при $3 < |\Gamma| < \infty$ и в [3] (взаимосвязано с максимальными абелевыми идеалами), когда K — кольцо без делителей нуля. В частности: *если в цепи Γ нет первого или последнего элемента, то группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, \Lambda(R)$ и $\mathrm{Aut}\, G(R)$ совпадают с $\mathrm{Aut}\, R$ и все автоморфизмы стандартны.*

Произвол в выборе цепи Γ позволяет легко получать примеры алгебр и групп с аномальными свойствами по сравнению со случаем конечной цепи Γ. Всякая группа $G(NT(\Gamma, K))$ является локально нильпотентной группой, а при $K = GF(p)$ также локально конечной p-группой. В то же время, она имеет тривиальный центр, если в цепи Γ нет первого или последнего элемента, и совпадает с коммутантом для любой плотной цепи Γ; для цепи рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и $K = GF(p)$ это отмечает И. Д. Адо [5] и, аналогично, Д. Маклэйн [6] строит пример характеристически простой локально нильпотентной группы. Другие примеры указал в 1994 г. Ю. И. Мерзляков [7].

Унипотентный радикал $U = U\Phi(K)$ подгруппы Бореля группы Шевалле типа Φ над K с помощью канонической формы элементов в [8] представлен в $N\Phi(K)$ присоединенной группой. Развитие методов [2] позволило описать автоморфизмы унипотентных подгрупп U групп лиева типа (включая скрученные типы) над полем, завершив решение проблемы описания $\mathrm{Aut}\, U$; для конечного поля K это — проблема 1.5 из обзора [9].

Существенность описаний автоморфизмов для решения теоретико-модельных вопросов отмечалась в [10] и [11]. Применимость методов [8] в описаниях автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ показана там же для типа D_4; другие случаи изучались в [12] и [13]. В целом, вопрос описания $\mathrm{Aut}\, N\Phi(K)$ остается нерешенным (см. далее § 2).

Алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n, D_n и C_n представлены в [8] специальными матрицами с базисом из матричных единиц e_{iv}, соответственно,

$$-i < v < i \leqslant n, \quad 1 \leqslant |v| < i \leqslant n, \quad -i \leqslant v < i \leqslant n, \quad v \neq 0. \tag{1}$$

Это естественно приводит [14] к финитарным обобщениям алгебр $N\Phi(K)$ типа B_Γ, C_Γ и D_Γ групп U классических типов, вопросам перенесения теоремы 1 и описания автоморфизмов. Автоморфизмы финитарных групп U (включая скрученные) над полем изучены [15].

В § 3 показывается, что все нильтреугольные Γ-матрицы над K образуют радикальное кольцо $GNT(\Gamma, (K)$, когда $\Gamma = Z^{(+)}$ — цепь целых чисел > 0. (Аналогично, получаем кольцо треугольных Γ-матриц.) Нефинитарные обобщения унитреугольных и треугольных групп изучает Р. Словик ([16] и др.). Присоединенная группа кольца $GNT(\Gamma, (K))$ изоморфна группе $UT_\infty(K)$ из [16] и к ее исследованию также применимы методы [3].

В § 4 устанавливается канонический базис произвольного лиева идеала алгебры $NT(n, K)$ над полем K и исследуется для лиева типа A_n записанная в [17] задача о комбинаторном выражении числа всех идеалов алгебры $N\Phi(GF(q))$ классического типа.

2. Автоморфизмы нильтреугольных алгебр классического типа

Известно [1], что любой элемент $\gamma \in U = U\Phi(K)$ однозначно записывается произведением корневых элементов $x_r(\gamma_r)$ $(r \in \Phi^+)$, расположенных согласно фиксированному (произвольно) упорядочению корней. *Присоединенную группу* $\langle N\Phi(K), \circ\rangle$ и изоморфизм

π группы $U\Phi(K)$ на нее получаем, как и в [8], полагая

$$\pi(\gamma) = \sum_{r\in\Phi^+} \gamma_r e_r \quad (\gamma \in U\Phi(K)),$$
$$\alpha \circ \beta = \pi(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)) \quad (\alpha, \beta \in N\Phi(K)).$$

В этом параграфе методы [8] переносятся к описанию автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$.

К основным автоморфизмам (их произведения называем *стандартными автоморфизмами*) кольца Ли $N\Phi(K)$ и унипотентных групп U относим центральные (тождественные по модулю центра) автоморфизмы, внутренние и диагональные автоморфизмы [1, § 7.1] и автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца K.

Граф Кокстера систем корней типа A_n и D_n допускает симметрию 2-го порядка. В случае кольца K с автоморфизмом порядка 2 ей сопоставляют графовый автоморфизм τ порядка 2 кольца Ли $N\Phi(K)$ и присоединенной группы. Используем также

Определение 2.1 [14]. Автоморфизм группы или кольца Ли называют *гиперцентральным* высоты m, если он является внешним по модулю $(m-1)$-го гиперцентра и тождественным по модулю m-го гиперцентра.

Заметим, что в алгебрах Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n, D_n и C_n база из матричных единиц e_{iv} с индексами (1), соответственно, получена в [8] переобозначением индексов из элементов базы Шевалле. Пользуясь теоремой Шевалле о базисе, получаем [8, лемма 2].

Лемма 2.2. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что* $e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}$ *и, кроме того, выполняются следующие равенства.*

$$\Phi = B_n, D_n: \quad e_{jv} * e_{i,-v} = e_{i,-j} \quad (i > j > \mid v \mid > 0);$$

$$\Phi = C_n: \; e_{jm} * e_{i,-m} = e_{im} * e_{j,-m} = e_{i,-j} \quad (i > j > m \geqslant 1);$$

$$\Phi = B_n: \; e_{i0} * e_{j0} = 2e_{i,-j}, \quad \Phi = C_n: \; e_{ij} * e_{i,-j} = 2e_{i,-i} \quad (i > j \geqslant 1).$$

Каждый элемент алгебры Ли $N\Phi(K)$ записывается в виде $\sum a_{iv}e_{iv}$ и представляется Φ^+-матрицей $\|a_{iv}\|$ соответствующего типа. Так, B_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{10} & & & \\
 & & a_{2,-1} & a_{20} & a_{21} & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{n,-n+1} & \cdots & a_{n,-1} & a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1}.
\end{array}$$

Исключая нулевой столбец, получим D_n^+-матрицу. C_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{1,-1} & & & \\
 & & a_{2,-2} & a_{2,-1} & a_{21} & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{n,-n} & \cdots & a_{n,-2} & a_{n,-1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}.
\end{array}$$

Пусть T_{iv} для каждой матричной позиции (iv) есть идеал в $N\Phi(K)$, состоящий из всех матриц с нулевыми строками с номерами $< i$ и столбцами с номерами $> v$. По определению, T_{1v} — совокупность матриц с нулевыми столбцами с номерами $> v$.

Пользуясь предыдущей леммой, индукцией по i находим члены Z_i гиперцентрального или верхнего, а также нижнего центральных рядов кольца Ли $N\Phi(K)$, причем для любого ассоциативно коммутативного кольца K с единицей. Все они, а также их централизаторы являются характеристическими идеалами. Известно, что при $2K = K$ верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ совпадают со стандартным центральным рядом $L_1 = N\Phi(K) \supset L_2 \supset \ldots$, где L_i — сумма всех Ke_r для корней высоты $\geqslant i$.

Подробнее рассмотрим тип C_n. Аннулятор в K элемента t обозначим через $\mathrm{Ann}(t)$.

Лемма 2.3. *Для кольца Ли $NC_n(K)$ $(n \geqslant 3)$ верны равенства:*

$$C(T_{ij}) = T_{1,-j-1} \quad (-i \leqslant j < i < n),$$
$$C(T_{nj}) = T_{1,-j-1} + \mathrm{Ann}(2) \cdot T_{nn-1} \quad (-n \leqslant j < n);$$

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathrm{Ann}(2) \cdot L_{2n-i-1} \quad (1 \leqslant i < 2n-1), \quad Z_{2n-1} = L_1.$$

Кроме того, все идеалы T_{ij}, $-n < j < i < n$, являются характеристическими.

Далее замечаем, что фактор-кольцо $NC_n(K)/T_{2,-2}$ изоморфно кольцу Ли $NA_n(K)$, так что его автоморфизмы описаны в [2]. Тем самым, описание $\mathrm{Aut}\, NC_n(K)$ редуцируется к гиперцентральным автоморфизмам, которые также описаны явно.

Теорема 2.4 [13]. *Пусть K — ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n $(n > 4)$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты $\leqslant 5$ автоморфизмов.*

Неулучшаемость оценки в теореме дает при любом $t \in \mathrm{Ann}(2)$ следующий автоморфизм алгебры $NC_n(K)$, тождественный на всех матричных единицах, кроме

$$\begin{gathered} e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-2,-n+3}, \quad e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n-1,-n+3}, \\ e_{nn-3} \to e_{nn-3} + te_{n-1,-n+2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Автоморфизмы алгебры Ли $NC_n(K)$ были описаны ранее [12] при условии $2K = K$ и $\mathrm{Ann}(3) = 0$; высота гиперцентральных автоморфизмов в этих случаях $\leqslant 3$.

Остаются неизученными автоморфизмы введенных в [14] финитарных обобщений колец Ли $N\Phi(K)$ типов B_Γ, C_Γ и D_Γ с произвольной цепью Γ. Для их описания эффективно использовать методы [3] и [15], см. также [18], [14, теорема 10], [19] и [20].

3. Нефинитарные обобщения

Если в ассоциативном кольце $R = (R; +, \cdot)$ заменить умножение лиевым $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$, то получают ассоциированное кольцо Ли $\Lambda(R) = (R; +, *)$.

Ассоциативное кольцо R всегда является полугруппой с единицей 0 относительно присоединенного умножения $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$. Кольцо R называется *радикальным*, если $(R, \circ)$ — группа, т. е. при любом $\alpha \in R$ имеем

$$\alpha + \alpha' + \alpha\alpha' = \alpha' + \alpha + \alpha'\alpha = 0$$

для некоторого элемента $\alpha' \in R$, называемого *квазиобратным* к α.

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и Γ — произвольное линейно упорядоченное множество или цепь. Ясно, что совокупность $GNT(\Gamma, K)$ всех Γ-матриц $\alpha = \|a_{ij}\|_{i,j\in\Gamma}$ с условием нильтреугольности (т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$) есть аддитивная группа относительно обычного сложения матриц. Произведение Γ-матриц в общем случае не определено, так как в кольце не определены суммы с бесконечным числом ненулевых слагаемых.

Однако, в случае цепи $\Gamma = Z^{\{+\}} := \{1, 2, 3, \dots\}$ натуральных чисел обычное умножение матриц корректно и получаем кольцо $GNT(\Gamma, K) \supset NT(\Gamma, K)$. Более того, справедлива

Лемма 3.1. *Кольцо $R = GNT(Z^{\{+\}}, K)$ — радикальное и не является ниль-кольцом.*

$\lhd$ В кольце $GNT(Z^{\{+\}}, K)$ матрицы $\|a_{ij}\|$ с условием $a_{ij} = 0$ при $i - j < k$ образуют идеал L_k. Получаем убывающий центральный ряд

$$L_1 = GNT(Z^{\{+\}}, K) \supset L_2 \supset \dots \supset L_k \supset \dots, \quad \cap_{k=1}^{\infty} L_k = 0, \quad L_k * L_m \subseteq L_{k+m}.$$

Все фактор-алгебры L_1/L_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ являются нильпотентными и, следовательно, радикальными. Выберем $\alpha = \|a_{ij}\| \in L_1$. Чтобы построить матрицу $\gamma = \|c_{ij}\|$, квазиобратную к α, достаточно определить ее k-ую диагональ $\{c_{ij} : i - j = k\}$ для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ Пусть $c_{ij} = -a_{ij}$ при $i - j = 1$ и при любом $k \geqslant 1$ первые $k - 1$ диагоналей матрицы γ выбраны так, что

$$\gamma = \sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m = -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots + (-\alpha)^k \mod L_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как выбор диагоналей при возрастании k не изменяет диагонали с меньшими номерами, то указанный алгоритм построения дает матрицу $\gamma = \|c_{ij}\| \in L_1$. (Корректность записи $\sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m$ матрицы следует также из того, любой ее элемент есть сумма с конечным числом ненулевых слагаемых.)

С другой стороны, при любом $k = 1, 2, \dots$ фактор-алгебры L_1/L_{k+1} нильпотентны и $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha = 0 \mod L_{k+1}$. Таким образом, γ — квазиобратный элемент к α, кольцо L_1 — радикальное и, например, его элемент $\sum_{k=1}^{\infty} e_{k+1k}$ не является нильпотентным. $\rhd$

Определение идеалов T_{iv} $(i, v \in Z^{\{+\}},\ i > v)$ из §2 корректно и для алгебры $NT(Z^{\{+\}}, K)$. Аналогично определяем идеалы GN_{ij} алгебры $GNT(Z^{\{+\}}, K)$.

Пусть H максимальный абелев идеал кольца Ли $GNT(Z^{\{+\}}, K)$ и m — наименьший номер ненулевой строки для всех матриц из H, скажем, с ненулевой (m, j)-проекцией H_{mj}. Пользуясь включениями

$$(Ke_{sm} * H) * Ke_{jv} = (KH_{mj}K)e_{sv} \subset H \subseteq C((KH_{mj}K)e_{sv}), \quad 1 \leqslant v < j < m < s,$$

для кольца K без делителей нуля находим $H \subseteq GN_{1m-1} \cap GNT(Z^{\{+\}}, KH_{mj}K)$ и, более того, $H \subseteq GN_{mm-1}$. По аналогии с [3], получаем

Теорема 3.2. *Пусть K — кольцо без делителей нуля. Идеалы $GN_{i+1,i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, исчерпывают все максимальные абелевы идеалы в кольцах $R = GNT(Z^{\{+\}}, K)$ и $\Lambda(R)$, а также все максимальные абелевы нормальные подгруппы присоединенной группы.*

Показывается, что в условиях теоремы группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} \Lambda(R)$ и $\operatorname{Aut} G(R)$ совпадают с $\operatorname{Aut} R$ и всякий автоморфизм является произведением сопряжения обратимой треугольной $Z^{\{+\}}$-матрицей на автоморфизм, индуцированный автоморфизмом основного кольца K. Р. Словик [16] исследовала $\operatorname{Aut} G(R)$ в случае поля $|K| > 2$.

4. Канонический базис лиева идеала алгебры $NT(n,K)$

В этом параграфе устанавливается (первым и третьим авторами) канонический базис произвольного лиева идеала алгебры $NT(n,K)$ над полем K и исследуется для лиева типа A_n записанная в [17] задача о комбинаторном выражении числа всех лиевых идеалов.

Частичное упорядочение на матричных позициях вводим, полагая $(u,v) \geqslant (i,j)$, если $1 \leqslant v \leqslant j < i \leqslant u \leqslant n$. Выделим идеалы

$$T_{ij} = T(i,j) := \sum_{(u,v)\geqslant(i,j)} Ke_{uv}, \quad Q(i,j) := \sum_{(u,v)>(i,j)} Ke_{uv}.$$

Определение 4.1. *Множеством углов степени* n называют всякое множество матричных позиций вида

$$\mathscr{L} = \{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_m,j_m)\},$$

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_m, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n, \quad j_t < i_t \quad (1 \leqslant t \leqslant m).$$

Множеством углов непустого ненулевого подмножества $H \subseteq NT(n,K)$ называем множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$ матричных позиций такое, что

$$H \subseteq T(\mathscr{L}) := \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}} T(i,j),$$

но при любой замене $T(i,j)$ на $Q(i,j)$ в сумме включение нарушается.

Лиевы идеалы кольца $NT(n,K)$ (т. е. идеалы ассоциированного кольца Ли) над полем или телом K описывает следующая

Теорема 4.2 [2, теорема 2 (I)]. *Пусть K — тело. Ненулевая аддитивная подгруппа H кольца $NT(n,K)$ является его лиевым идеалом тогда и только тогда, когда:*

а) $Ke_{ij} \subseteq H$ для любой позиции (i,j), лежащей на или под лестницей $\mathscr{L}(H)$; исключение могут составлять лишь углы лестницы $\mathscr{L}(H)$ и, кроме того, позиции (s,k) и $(k+1,m)$ в том случае, когда позиции $(s,k+1)$ и (k,m) одновременно являются углами;

б) если $(s,k+1)$ и (k,m) — углы лестницы $\mathscr{L}(H)$, то либо $H \supseteq Ke_{k+1,m} + Ke_{sk}$, либо отображение $\varphi : a_{km} \to a_{s,k+1}$, $\|a_{uv}\| \in H$, есть изоморфизм аддитивной группы H_{km} всех (k,m)-координат матриц из H на $H_{k+1,m}$ и $H \supseteq \{xae_{k+1,m} - a^{\varphi}xe_{sk} : x \in K, a \in H_{km}\}$; в случае, когда K — поле, $\varphi : a \to ca$, $a \in H_{km}$, для некоторого $c \neq 0$ из K.

Определение 4.3. Аддитивную подгруппу S пространства V_m строк длины m над полем (или телом) K называем *собственной*, если при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$, в S существует элемент с ненулевой i-ой координатой.

Чтобы задать произвольный идеал $H \neq 0$ кольца $NT(n,K)$ над телом K, зафиксируем $\mathscr{L}(H)$ и собственную подгруппу (подпространство, когда H — идеал алгебры) S m-ой декартовой степени аддитивной группы тела K. Для $Q(\mathscr{L}) := \sum_{(i,j)\in\mathscr{L}} Q(i,j)$ полагаем

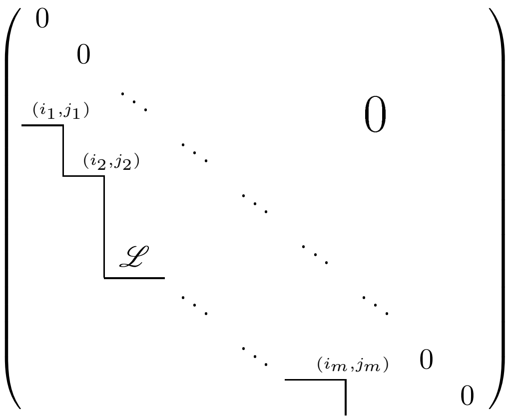
$$H(\mathscr{L},S) = Q(\mathscr{L}) + \{a_1e_{i_1,j_1} + a_2e_{i_2,j_2} + \cdots + a_me_{i_m,j_m} : (a_1,a_2,\ldots,a_m) \in S\}. \qquad (3)$$

Согласно [23, теорема 9] (для алгебр) и [24, следствие 4.2] справедлива

Теорема 4.4. *Всякий ненулевой идеал кольца $NT(n,K)$ над полем K однозначно представляется идеалом вида $H(\mathscr{L},S)$ при подходящем выборе множества $\mathscr{L}$ углов степени n и собственной аддитивной подгруппы S в V_m. При этом различным парам $(\mathscr{L},S)$ соответствуют различные идеалы.*

Для построения идеалов в [23, § 7] введено понятие *матричной лестницы.*

Определение 4.5. *Матричной лестницей* с углами $\mathscr{L}$ назовем линию (обозначаем также через $\mathscr{L}$), проходящую в $n \times n$-матрице, как в квадрате с n^2 точками, следующим образом: по i_1-строке от 1-го столбца до позиции (i_1, j_1), от нее по j_1-му столбцу до i_2-й строки и по ней до (i_2, j_2) и т. д., по i_m-й строке от j_{m-1}-го столбца до позиции (i_m, j_m), от нее по j_m-му столбцу до n-ой строки.



Для описания идеала $H \neq 0$ кольца $NT(n, K)$ достаточно указать взаимосвязь элементов матриц из H в углах лестницы $\mathscr{L}$. Для лиевых идеалов этого недостаточно.

Укажем сейчас алгоритм построения базиса в лиевом идеале H алгебры $NT(n, K)$ с фиксированным множеством углов $\mathscr{L} = \mathscr{L}(H)$ степени n. Угол (k, v) в H назовем *связанным*, если $Q(k, v) \nsubseteq H$ и либо в H существует угол $(s, k+1)$ и $Q(s, k+1) \nsubseteq H$ (случай $(k+1, k)$-*связанной пары углов*), либо существует угол $(v-1, j)$ и $Q(v-1, j) \nsubseteq H$.

Отметим, что случай ассоциативного идеала H алгебры $NT(n, K)$, т. е. когда $Q(\mathscr{L}) \subseteq H$, изучен в 4.2. Поэтому далее $Q(\mathscr{L}) \nsubseteq H$, так что по теореме 4.2, множество $n(H)$ всех номеров k с $(k+1, k)$-связанной парой углов $(k, v(k))$ и $(s(k), k+1)$ в H непустое и $n(H) \subseteq \{2, 3, \ldots, n-2\}$ $(n \geqslant 4)$. Обозначим через $Q^*(\mathscr{L})$ подалгебру, базис которой составляют матричные единицы $e_{uv} \in H$ такие, что $(u, v) > (i, j)$ хотя бы при одном $(i, j) \in \mathscr{L}$. Из теоремы 4.2 легко вытекает

Лемма 4.6. *Пусть H — лиев идеал алгебры $NT(n, K)$ и $Q(\mathscr{L}) \nsubseteq H$. Тогда база подалгебры $Q^*(\mathscr{L})$ дополняется до базы в $Q(\mathscr{L}) \cap H$ однозначно определенными элементами*

$$\beta_k = e_{k+1, v(k)} - b_k e_{s(k), k} \in Q^*(\mathscr{L}) + e_{k+1, k} * H \quad (k \in n(H)). \tag{4}$$

Произвольный элемент $\alpha \in H$ представляется однозначно по модулю $Q(\mathscr{L}) \cap H$ в виде

$$\alpha = \sum_{k \in n(H)} a_k e_{s(k), k} + \sum_{(u,v) \in \mathscr{L}} a_{uv} e_{uv}. \tag{5}$$

Выберем угол (i_1, j_1) в H с наименьшим номером $j_1 \geqslant 1$; через H_1 обозначим подалгебру матриц в H с нулевой (i_1, j_1)-ой координатой. Выберем по лемме 4.6 базисный элемент $\alpha_1 = e_{i_1 j_1} + \alpha_1' \in H$ вида (5) так, что $\alpha_1' \in H_1$. Если пересечение $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}(H_1)$ не пустое, то угол (i_2, j_2) из него выберем с наименьшим номером $j_2 > j_1$. Через H_2 обозначим подалгебру матриц в H_1 с нулевой (i_2, j_2)-координатой. Выберем по лемме 4.6 базисный элемент $\alpha_2 = e_{i_2 j_2} + \alpha_2' \in H_1$ вида (5) так, что $\alpha_2' \in H_2$, и т. д.

На каком-то t-ом шаге получим матрицу $\alpha_t = e_{i_t j_t} + \ldots$ из H_{t-1} с углом $(i_t, j_t) \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}(H_{t-1})$ такую, что подпространство H_t матриц из H_{t-1} с нулевой (i_t, j_t)-координатой лежит в $Q(\mathscr{L}) \cap H$. Не теряя общности, считаем, что j_2-ая координата вектора α_1 нулевая, ..., j_t-ые координаты векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}$ нулевые. По лемме 4.6 получаем в H элементы

$$\alpha_i = \sum_{k\in n(H)} \widetilde{a}^i_k e_{s(k),k} + \sum_{(u,v)\in\mathscr{L}} a^i_{uv} e_{uv}, \quad 1 \leqslant i \leqslant t. \tag{6}$$

Ясно, что $H + Q(\mathscr{L})$ — идеал алгебры $NT(n,K)$. По теореме 4.2, он записывается в виде $H(\mathscr{L}, S)$ из (3), где S — собственное подпространство V_m, $m = |\mathscr{L}|$ и $\dim_K S = t$, $1 \leqslant t \leqslant m$. Каждому из векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ в базе из матричных единиц e_{uv} ($(u,v) \in \mathscr{L}$) с фиксированным упорядочением, определенным нашим построением, соответствует координатная строка из V_m (см. [21, § 2]):

$$[\alpha_1] = (1, a^1_2, \ldots, a^1_{j_2-1}, 0, a^1_{j_2+1}, \ldots, a^1_{j_t-1}, 0, a^1_{j_t+1}, \ldots, a^1_m),$$
$$[\alpha_2] = (0, \ldots, 0, 1, a^2_{j_2+1}, \ldots, a^2_{j_3-1}, 0, a^2_{j_3+1}, \ldots, a^2_{j_t-1}, 0, a^2_{j_t+1}, \ldots, a^2_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[\alpha_t] = (0, \ldots, 0, 1, a^t_{j_t+1}, \ldots, a^t_{m-1}, a^t_m).$$

Такая база в S единственна и в [21, § 2] она названа канонической базой собственного t-мерного подпространства S. Согласно [21], каждый из $j_2 - 2$ коэффициентов $a^1_2, a^1_3, \ldots, a^1_{j_2-1}$ независимо пробегает $K \setminus \{0\}$. Каждая из $j_3 - j_2 - 1$ пар (a^1_i, a^2_i) при $j_2 < i < j_3$ независимо пробегает значения в декартовом квадрате (K, K), кроме нулевого $(0,0)$ (иначе подпространство S не будет собственным), и т. д.

Аналогично устанавливаем возможные значения всех координат с номерами $\leqslant j_t$. Наконец, при каждом i, $j_t < i \leqslant m$, значение набора $(a^1_i, a^2_i, \ldots, a^t_i)$ может быть любым из t-й декартовой степени $(K, K, \ldots, K)$, исключая нулевое.

Каноническую базу лиева идеала в H, учитывая лемму 4.6, дают элементы a_i из (6), матричные единицы $e_{uv} \in H$ такие, что $(u,v) > (i,j)$ хотя бы при одном $(i,j) \in \mathscr{L}$ и $|n(H)|$ элементов β_k из (4). В силу леммы 4.6, указанные элементы e_{uv} и β_k полностью определяются выбором элементов α_i, и, следовательно, не влияют на перечисление лиевых идеалов.

Заметим, что любым двум $(k+1,k)$-связанным углам в H соответствуют два пропорциональных столбца в $(t \times m)$-матрице, составленной из строк $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_t]$. В частности, если j_2 столбец пропорционален какому-либо l-ому столбцу, то $l > j_2$ и $a^i_l = 0$, т. е. приходим к уменьшению на единицу числа параметров элемента α_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, $i \neq 2$.

Для каждого элемента α_i из (6) любой из $|n(H)|$ коэффициентов $\widetilde{a}^i_k$ принимает различные значения в K для различных лиевых идеалов.

Таким образом, мы получаем однозначно определенный предыдущими условиями базис лиева идеала H, состоящий из всех элементов α_i, β_k и всех матричных единиц идеала $Q^*(\mathscr{L})$. Его называем *каноническим базисом лиева идеала* H.

При $K = GF(q)$ в [21] найдено число собственных t-мерных подпространств и доказана

Теорема 4.7. Число $\Lambda(n,q)$ ненулевых идеалов алгебры $NT(n,q)$ равно

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\sum_{t=1}^{m}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m}\frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}.$$

Канонические базисы лиевых идеалов позволяют записать явно комбинаторное выражение числа $\Omega(n,q)$ всех лиевых идеалов кольца $NT(n,K)$. Значения $\Omega(n,q)$ для малых $n \leqslant 6$ указывает следующая таблица.

Таблица 1

Перечисление лиевых идеалов $NT(n,q)$

n	$\Omega(n,q)$
2	1
3	$q+3$
4	$3q^2+4q+7$
5	$q^4+7q^3+14q^2+9q+10$
6	$2q^6+5q^5+20q^4+46q^3+27q^2+16q+15$

В общем случае явную формулу числа $\Omega(n,q)$ дает

Теорема 4.8. *Число идеалов для данной лестницы* $\mathscr{L}$ *равно*

$$\sum_{s=0}^{n(\mathscr{L})}(q-1)^s\sum_{t=1}^{m-s}q^{st}\sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leqslant m-s}\frac{(q^t-1)^{m-s-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}}\cdot\prod_{k=2}^{t-1}\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}, \tag{7}$$

где $n(\mathscr{L})$ — *число всех* $(k+1,k)$*-связанных пар углов в* $\mathscr{L}$.

Литература

1. *Carter R.* Simple groups of Lie type.—N. Y.: Wiley and Sons, 1972.—364 p.
2. *Левчук В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и логика.—1976.—Т. 1, № 5.—С. 558–578.
3. *Левчук В. М.* Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы.—Мат. заметки.—1987.—Т. 42, № 5.—С. 631–641.
4. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб.—1949.—Т. 25, № 3.—Р. 347–366.
5. *Адо И. Д.* О нильпотентных алгебрах и p-группах // Докл. АН СССР.—1943.—Т. 40, № 8.—С. 339–342.
6. *McLain D. H.* A characteristically-simple group // Proc. Cambridge Phil. Soc.—1954.—Vol. 50.—P. 641–642.
7. *Мерзляков Ю. И.* Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости // Докл. РАН.—1994.—Т. 339, № 6.—С. 732–735.
8. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика.—1990.—Т. 29, № 3.—С. 315–338.
9. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук.—1986.—Т. 41, № 1 (247).—С. 57–96.
10. *Videla C. R.* On the Mal'cev correspondence // Proceed. AMS.—1990.—Vol. 109, № 2.—P. 493–502.
11. *Левчук В. М.* Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Сер. Мат. форум. Т. 6. Группы и графы.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—С. 75–84.—(Итоги науки. Юг России).
12. *Cao Y., Jiang D., Wang D.* Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings // J. Algebra.—2007.—Vol. 17, № 3.—P. 527–555.
13. *Литаврин А. В.* Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Изв. ИркГУ. Сер. мат-ка.—2015.—Т. 8, № 2.—С. 43–58.
14. *Levchuk V. M.* Chevalley groups and their unipotent subgroups // Contemp. Math., AMS.—1992.—Vol. 131, part 1.—P. 227–242.
15. *Levchuk V. M., Suleimanova G. S.* Automorphisms and normal structure of unipotent subgroups of finitary Chevalley groups // Proceed. Steklov Inst. Math.—Pleiades Publ., Ltd, 2009.—Vol. 3.—P. 118–127.
16. *Slowik R.* Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators // Linear and Multilinear Algebra.—2013.—Vol. 61, № 8.—P. 1028–1040.
17. *Egorychev G. P., Levchuk V. M.* Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bulletin.—2001.—Vol. 35, № 2.—P. 439–452.

18. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.—М.: Наука, 1978.—119 с.
19. *Левчук В. М., Мартынова Л. А.* Нормальное строение унипотентных подгрупп групп Шевалле и идеалы ассоциированного кольца Ли // Конструкции в алгебре и логике.—Тверь: ТГУ, 1990.—С. 60–66.
20. *Мартынова Л. А.* Нормальное строение и автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиевых типов: Дисс. ... к. ф.-м. н.—М.: МГУ, 1994.
21. *Кривоколеско В. П., Левчук В. М.* Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр // Труды ИММ УрО РАН.—2015.—Т. 21, № 1.—С. 166–171.
22. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.—Новосибирск: Наука, 1977.—271 с. *Egorychev G. P.* Integral represantation and computation combinatorial sums.—Americ. Math. Soc., 1984.—300 p.—(Transl. of Math. Monogr. Vol. 59); 2-d ed. in 1989.
23. *Dubish R., Perlis S.* On total nilpotent algebras // Amer. J. Math.—1951.—Vol. 73.—P. 439–452.
24. *Левчук В. М.* Подгруппы унитреугольной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1974.—Vol. 38, № 6.—P. 1202–1220.
25. *Egorychev G. P., Kuzucuoglu F., Levchuk V. M.* Enumeration of ideals of some nilpotent matrix rings // J. Algebra and Its Applications.—2013.—Vol. 12, № 1.—1250140 [11 pages].

Статья поступила 30 апреля 2015 г.

Левчук Владимир Михайлович
Сибирский федеральный университет,
заведующий кафедрой алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru;

Литаврин Андрей Викторович
Сибирский федеральный университет,
аспирант кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: anm11@rambler.ru;

Ходюня Николай Дмитриевич
Сибирский федеральный университет,
бакалавр кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: nkhodyunya@gmail.com;

Цыганков Виталий Владимирович
Сибирский федеральный университет,
аспирант кафедры алгебры и математической логики
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: tsygankov@partner.tiu.ru

NILTRIANGULAR SUBALGEBRAS OF THE CHEVALLEY ALGEBRAS AND THEIR GENERALIZATIONS

Levchuk V. M., Litavrin A. V., Hodyunya N. D., Tsigankov V. V.

We study some problems concerned with ideals and automorphisms of niltriangular subalgebras of classical Lie type Chevalley algebras over a field K and of their non-finitary generalizations and also automorphisms of adjoint group. We characterize (for Lie type A_{n-1}) every Lie ideal of algebra $NT(n,K)$ of all niltriangular $n \times n$ matrices by a selection of constants from K. When $K = GF(q)$, this gives a combinatorial expression of number of Lie ideals and, for a simple q, also the number of normal subgroups in unitriangular group $UT(n,q)$.

Key words: Chevalley algebra, niltriangular subalgebra, non-finitary generalizations, maximal abelian ideals, automorphisms, adjoint group.