Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 5–11

УДК **519.17+514.52**

АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(1197, 156, 15, 21)$

В. В. Биткина, А. К. Гутнова, А. А. Махнев

К 60-летию
Владимира Амурхановича Койбаева

Пусть 3-(V, K, Λ) схема $\mathscr{E} = (X, \mathscr{B})$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда либо $\mathscr{E}$ является адамаровой 3-$(4\Lambda+4, 2\Lambda+2, \Lambda)$ схемой, либо $V = (\Lambda+1)(\Lambda^2+5\Lambda+5)$ и $K = (\Lambda+1)(\Lambda+2)$, либо $V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$. Дополнительный граф к блочному графу 3-$(496, 40, 3)$ схемы сильно регулярен с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$ и имеет сильно регулярные окрестности вершин с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. В работе найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. Доказано, что указанный граф не является реберно симметричным.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, реберно симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф $\{a\} \cup [a]$, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, каждое ребро Γ лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин.

Система инцидентности $(X, \mathscr{B})$ с множеством точек X и множеством блоков $\mathscr{B}$ называется t-(V, K, Λ) *схемой*, если $|X| = V$, каждый блок содержит ровно K точек и любые t точки лежат ровно в Λ блоках. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ) схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V-1)\Lambda = R(K-1)$. Схема называется *симметричной*, если $B = V$. Схема называется *квазисимметричной*, если для любых двух блоков $B, C \in \mathscr{B}$ имеем $|B \cap C| \in \{x, y\}$. Числа x, y называются *числами пересечений квазисимметричной схемы*, и предполагается, что $x < y$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00061 (теорема), и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом, соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013 (следствие).

Блочный граф квазисимметричной схемы $(X, \mathscr{B})$ в качестве вершин имеет блоки схемы и два блока $B, C \in \mathscr{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$.

Предложение 1. *Блочный граф квазисимметричной (V, B, R, K, Λ) схемы сильно регулярен с собственными значениями $k = ((R-1)K - xB + x)/(y-x)$ кратности 1, $k = (R - K - \Lambda + x)/(y-x)$ кратности $V-1$ и $k = -(K-x)/(y-x)$ кратности $B-V$.*

Производной схемой для t-(V, K, Λ) схемы $\mathscr{D} = (X, \mathscr{B})$ в точке $x \in X$ называется схема $\mathscr{D}_x$ с множеством точек $X_x = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathscr{B}_x = \{B - \{x\} : x \in B \in \mathscr{B}\}$. Схема $\mathscr{E}$ называется *расширением* схемы $\mathscr{D}$ если производная схемы $\mathscr{E}$ в каждой точке изоморфна $\mathscr{D}$. *Вычетом* схемы $\mathscr{D}$ в блоке B называется схема $\mathscr{D}^B$ с множеством точек $X^B = X - \{x\}$ и множеством блоков $\mathscr{B}^B = \{C \in \mathscr{B}\} : |B \cap C| = 0\}$. Хорошо известно, что проективная плоскость расширяема, только если ее порядок равен 2 или 4. П. Камерон [1, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем.

Предложение 2. *Пусть 3-(V, K, Λ) схема $\mathscr{E} = (X, \mathscr{B})$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *$\mathscr{E}$ является адамаровой 3-$(4\Lambda+4, 2\Lambda+2, \Lambda)$ схемой;*

(2) *$V = (\Lambda+1)(\Lambda^2+5\Lambda+5)$ и $K = (\Lambda+1)(\Lambda+2)$;*

(3) *$V = 496$, $K = 40$ и $\Lambda = 3$.*

В случае (3) имеем $R = V - 1 = 495$, $B = VR/K = 496 \cdot 495/40 = 6138$ и дополнительный граф к блочному графу схемы имеет параметры $(6138, 1197, 156, 252)$ и спектр $1197^1, 9^{5642}, -105^{495}$. Отсюда максимальный порядок коклики не больше $vm/(k+m) = 6138 \cdot 105/1302 = 495$. В частности, граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича (см. лемму 1). Дополнительный граф к блочному графу 3-$(496, 40, 3)$ схемы назовем монстром Камерона. В [2] доказано

Предложение 3. *Для монстра Камерона Γ выполняются следующие утверждения:*

(1) *окрестность любой вершины в графе Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ и спектром 156^1, 9^{741}, -15^{455}, причем порядок коклики в этом графе не больше 105;*

(2) *множество блоков C_x, содержащих точку x схемы $\mathscr{E}$, является 495-кокликой графа Γ, для которой достигается равенство в границах Хофмана и Цветковича;*

(3) *подграф $\Gamma - C_x$ сильно регулярен с параметрами $(5643, 1092, 141, 228)$ и спектром 1092^1, 9^{5148}, -96^{494};*

(4) *для различных точек x, y схемы $\mathscr{E}$ имеем $|C_x \cap C_y| = 39$, причем для коклики $C_x - C_y$ графа $\Gamma - C_y$ достигается равенство в границе Хофмана.*

В данной работе найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$.

Теорема. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| \leqslant 171$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо*

(*i*) *$p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l$, либо*

(*ii*) *$p = 7$ и $\alpha_1(g) = 168l - 21$, либо*

(*iii*) *$p = 19$ и $\alpha_1(g) = 456l + 171$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо*

(*i*) *$p = 13$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) = 312l + 156$, либо*

(*ii*) *$p = 2$, $n = 9$ и $\alpha_1(g) = 48l + 12$ или $n = 11$ и $\alpha_1(g) = 32l - 12$, либо*

(*iii*) *$p = 5$, $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 120l + 45$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 120l - 30$;*

(3) *Ω является $3t+1$-кокликой, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;*

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \leqslant 13$.

Следствие. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$ *не является реберно симметричным.*

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* D *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leqslant d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leqslant r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* D.

$\lhd$ Это утверждение хорошо известно (см., например, [3, § 2]). $\rhd$

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ и спектром 156^1, 9^{741}, -15^{455}. Если D — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $d - 9 \leqslant w(156-d)/(1197-w) \leqslant d + 15$. Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 105 (не больше 11). Если C является 105-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 15 вершинами из C.

Лемма 2 [4, теорема 3.2]**.** *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и собственными значениями* k, r, $-m$. *Если* g *— автоморфизм* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Omega| \leqslant v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k-r)$.

В случае сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ получим $|\Omega| \leqslant 1197/7 = 171$.

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G *и* χ_1 — *характер, полученный при проектировании* $\psi(G)$ *на подпространство размерности* 741. *Тогда*

$$\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 57)/8, \quad \alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$$

для любого l, *не кратного* p, *и* $741 - \chi_1(g)$ *делится на* p.

$\lhd$ Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 741 & 171/4 & -57/8 \\ 455 & -175/4 & 49/8 \end{pmatrix},$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 741 равно $\chi_1(g) = (13\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g)/4 - \alpha_2(g))/8)/21$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получаем $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 57)/8$.

Два последних утверждения леммы следуют из [6, лемма 1]. $\rhd$

В леммах 4–7 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 741.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω — *пустой граф, то либо*

(*i*) $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 72l$, *либо*

(*ii*) $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 168l - 21$, *либо*

(*iii*) $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 456l + 171$;

(2) *если* Ω *является* n-*кликой, то либо*

(*i*) $p = 13$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 312l + 156$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $n = 9$ *и* $\alpha_1(g) = 48l + 12$ *или* $n = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 32l - 12$, *либо*

(*iii*) $p = 5$, $n = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 120l + 45$ *или* $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 120l - 30$;

(3) *если* Ω *является* m-*кокликой, то* $p = 3$, $m = 3t + 1$ *и* $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$;

(4) *если* Ω *является объединением* m ($m \geqslant 2$) *изолированных клик, то* $p = 3$ *и* Ω — *коклика.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$. Так как $1197 = 9 \cdot 7 \cdot 19$, то $p \in \{3, 7, 19\}$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\chi_1(g) = (w_1 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 72l$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\chi_1(g) = (7w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 168l - 21$.

Пусть $p = 19$. Тогда $\chi_1(g) = 19(w_1/3 - 3)/8$ и $\alpha_1(g) = 456l + 171$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$ и $\Omega = \{a\}$, то p делит 156 и 1040, поэтому $p = 2, 13$. В случае $p = 2$ для $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u] \cap [u^g]$ содержит 15 или 21 вершин, поэтому $[u]$ содержит вершину из Ω, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $\chi_1(g) = (5 + 13w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 312l + 156$.

Пусть $n \geqslant 2$ и $a, b \in \Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$, то p делит 140, 900 и $17 - n$ и $p = 2, 5$. В случае $p = 2$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с нечетным числом вершин из Ω, то $n = 9, 11$ В случае $n = 9$ имеем $\chi_1(g) = (45 + 2w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 48l + 12$. В случае $n = 11$ имеем $\chi_1(g) = (55 + 2w_1/3 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 32l - 12$. В случае $p = 5$ получим $n = 2$ и $\alpha_1(g) = 120l + 45$ или $n = 7$ и $\alpha_1(g) = 120l - 30$.

Пусть Ω является m-кокликой, $0 < t \leqslant 34$. Если $a, b \in \Omega$, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$, $[a] - [b]$, поэтому p делит 21 и 135. Отсюда $p = 3$, $m = 3t + 1$, $\chi_1(g) = (15t + 5 + w_1 - 57)/8$ и $\alpha_1(g) = 72l + 12 - 45t$.

Пусть Ω является объединением m ($m \geqslant 2$) изолированных клик. Если a, c — несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и p делит 21.

Пусть a, b — смежные вершины из клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^\perp$, то p делит 140. Отсюда $p = 7$ и порядки изолированных клик в Ω равны 3 или 10. Противоречие с тем, что 7 не делит $900 - 3$. $\rhd$

Лемма 5. *Если Ω содержит геодезический путь b, a, c, то выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов D с $\lambda_D = 15$ и $\mu_D = 21$;*

(2) *если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $p = 2, 5$, $\Omega = a^\perp$ и $\alpha_1(g) = 0$;*

(3) $p \leqslant 13$.

$\lhd$ Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф D с $\lambda_D = 15$ и $\mu_D = 21$. Тогда $36 + 4(k_D - 21) = 4s^2$, $k_D = s^2 + 12$, D имеет неглавные собственные значения $s - 3$, $-(s + 3)$ и кратность $s - 3$ равна $(s + 2)(s^2 + 12)(s^2 + s + 15)/42s$. Отсюда $s = 4, 10$ и нарушается прямоугольное соотношение.

Если Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины $a \in \Omega$, то $p = 2, 5, 13$, $\Omega = a^\perp$ и $\alpha_1(g) = 0$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной в любой орбите $u^{\langle g\rangle}$ длины p, то $p \neq 13$.

Если $p \geqslant 23$, то Ω — сильно регулярный подграф с $\lambda_\Omega = 15$ и $\mu_\Omega = 21$, противоречие.

Если $p = 19$, то $\lambda_\Omega = 15$ и $\mu_\Omega = 2, 21$. Далее, $|\Omega| = 19, 38, \ldots, 171$ и степень вершины в Ω равна $42, 80, \ldots$ Пусть $\Omega_2(a)$ содержит y вершин, смежных с 21 вершинами из $\Omega(a)$. Если степень вершины a в графе Ω не меньше 80, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $80 \cdot 26$, но не больше $90 \cdot 21$, противоречие. Итак, Ω — регулярный граф степени 42. По лемме 1 имеем $33 \leqslant 114|\Omega|/(1197 - |\Omega|) \leqslant 57$ и $1881 \leqslant 7|\Omega|$, противоречие.

Если $p = 17$, то $\lambda_\Omega = 15$ и $\mu_\Omega = 4, 21$, $|\Omega| = 24, 41, \ldots, 160$, степени вершин в Ω равны 20, 54, 88. Пусть y — число вершин в $\Omega_2(a)$, смежных с 21 вершиной из $\Omega(a)$, $k_2 = |\Omega_2(a)|$. Пусть D — регулярный подграф из Γ степени 15 на w вершинах. По лемме 1 имеем $43 \leqslant w \leqslant 210$. Поэтому в Ω нет вершин степени 20.

Если a — вершина степени 88 в Ω, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $38 \cdot 88$, но не больше $21k_2$, противоречие с тем, что $k_2 \leqslant 71$.

Значит, Ω — регулярный граф степени 54. По лемме 1 имеем неравенства $45 \leqslant 102|\Omega|/(1197 - |\Omega|) \leqslant 69$ и $2565 \leqslant 7|\Omega|$, противоречие. $\rhd$

3. Доказательство следствия

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа Γ. По теореме $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19\}$. Далее, для смежных вершин a, b имеем $|G : G_a| = 63 \cdot 19$ и $|G_a : G_{a,b}| = 156$.

Лемма 6. *Пусть f — элемент порядка 19 из G, g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 3$, Ω — пустой граф и $\alpha_1(g) = 627$;*

(2) *$p = 7$, $|\Omega| = 133$ и $\alpha_1(g) = 0$;*

(3) *$p = 5$, $|\Omega| = 57$ и $\alpha_1(g) = 1140$ или $|\Omega| = 152$ и $\alpha_1(g) = 120l + 75$;*

(3) *$p = 3$, $|\Omega| = 57$ и $\alpha_1(g) = 456s + 228$ или $|\Omega| = 114$ и $\alpha_1(g) = 456s + 57$ или $|\Omega| = 171$ и $\alpha_1(g) = 456s + 342$;*

(4) *$p = 2$, $|\Omega| = 38$ и $\alpha_1(g) = 912s + 57$ или $|\Omega| = 57$ и $\alpha_1(g) = 798$, или $|\Omega| = 95$ и $\alpha_1(g) = 684$, или $|\Omega| = 133$ и $\alpha_1(g) = 114$, или $|\Omega| = 171$ и $\alpha_1(g) = 228$.*

$\lhd$ Пусть g — элемент простого порядка $p < 19$ из $C_G(f)$. Тогда либо $p = 3$, Ω — пустой граф и $\alpha_1(g) = 0$, либо $|\Omega| = 19t$, $t \leqslant 9$ и p делит $63 - t$. Далее, $\chi_1(g) = (95t + \alpha_1(g)/3 - 57)/8$. Тогда $p \neq 13$, и если $p = 11$, то $|\Omega| = 152$ и $\alpha_1(g) = 264l + 99$ делится на 19. Отсюда $l = 2$ и $\alpha_1(g) = 627$.

Если $p = 7$, то $|\Omega| = 133$ и $\alpha_1(g) = 168l$ делится на 19. Отсюда $\alpha_1(g) = 0$.

Если $p = 5$, то $t = 3, 8$. В первом случае $|\Omega| = 57$ и $228 + \alpha_1(g)/3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 120l + 60$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 1140$. Во втором случае $|\Omega| = 152$ и $703 + \alpha_1(g)/3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 120l + 75$ делится на 19, противоречие.

Если $p = 3$, то $t = 3, 6, 9$. В первом случае $|\Omega| = 57$ и $228 + \alpha_1(g)/3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 12$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 456s + 228$. Во втором случае $|\Omega| = 114$ и $\alpha_1(g)/3 - 3$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 9$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 456s + 57$. В третьем случае $|\Omega| = 171$ и $\alpha_1(g)/3 - 2$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 6$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 456s + 342$.

Если $p = 2$, то $t = 1, 3, 5, 7, 9$. В первом случае $|\Omega| = 38$ и число $(3013 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l - 3$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 912s + 57$. Во втором случае $|\Omega| = 57$ и число $(5358 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l - 18$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 798$. В третьем случае $|\Omega| = 95$ и число $(8968 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 912$. В четвертом случае $|\Omega| = 133$ и число $(12578 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l + 18$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 114$. В пятом случае $|\Omega| = 171$ и число $(16188 + \alpha_1(g)/3)/8$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 48l - 12$ делится на 19 и $\alpha_1(g) = 228$. $\rhd$

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *$S(G) = O_{3,7}(G)$;*

(2) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_3(7)$, $U_3(8)$, $L_4(7)$, $U_4(8)$, HN.*

$\lhd$ Пусть $|S(G)|$ делится на 19 и R — силовская 19-подгруппа из $S(G)$. Тогда $|N_G(R)|$ делится на 13, противоречие с леммой 6.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Из действия элемента порядка 19 на минимальной нормальной подгруппе $\bar{N}$ из $\bar{T}$ следует, что 19 делит $|\bar{N}|$ и $\bar{T}$ — простая неабелева группа.

Из [7, таблица 1] следует, что группа $\bar{T}$ изоморфна $L_3(7)$, $U_3(8)$, $L_4(7)$, $U_4(8)$, HN. $\rhd$

Завершим доказательство следствия. Группы $U_3(8)$, $L_4(7)$, $U_4(8)$, HN не содержат максимальных подгрупп индекса, делящего $19 \cdot 63$.

Если группа $\bar{T}$ изоморфна $L_3(7)$, то

$$|\bar{T} : \bar{T}_a| = 57, \quad \bar{T}_a = 7^2 : SL_2(7) : 2,$$

либо

$$|S(G) : S(G)_a| = 7, \quad |\bar{G} : \bar{T}| = 3, \quad \bar{G}_a = 7^2 : SL_2(7) : 2,$$

либо

$$|S(G) : S(G)_a| = 21.$$

В любом случае $|G|$ не делится на 13, противоречие. $\rhd$

Литература

1. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts, № 22).
2. *Махнев А. А.* Расширения симметричных 2-схем // Тез. докл. междунар. конф. «Мальцевские чтения».—Новосибирск, 2015.—С. 112.

3. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
4. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311, № 2–3.—P. 132–144.
5. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts, № 45).
6. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
7. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 23 апреля 2015 г.

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `bviktoriyav@mail.ru`

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`

AUTOMORPHISMS OF A STRONGLY REGULAR GRAPH WITH PARAMETERS (1197, 156, 15, 21)

Bitkina V. V., Gutnova A. K., Makhnev A. A.

Let a 3-(V, K, Λ) scheme $\mathscr{E} = (X, \mathscr{B})$ is an extension of a symmetric 2-scheme. Then either $\mathscr{E}$ is Hadamard 3-$(4\Lambda + 4, 2\Lambda + 2, \Lambda)$ scheme, or $V = (\Lambda + 1)(\Lambda^2 + 5\Lambda + 5)$ and $K = (\Lambda + 1)(\Lambda + 2)$, or $V = 496$, $K = 40$ and $\Lambda = 3$. The complementary graph of a block graph of 3-$(496, 40, 3)$ scheme is strongly regular with parameters $(6138, 1197, 156, 252)$ and the neighborhoods of its vertices are strongly regular with parameters $(1197, 156, 15, 21)$. In this paper automorphisms of strongly regular graph with parameters $(1197, 156, 15, 21)$ are studied. We yet introduce the structure of automorphism groups of abovementioned graph in vetrex symmetric case.

Key words: strongly regular graph, vertex symmetric graph, automorphism groups of graph.