Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 1, С. 14–20

УДК **517.983**

ОБ ОДНОМ ФУРЬЕ-МУЛЬТИПЛИКАТОРЕ

М. Н. Гуров, Д. Н. Карасев, В. А. Ногин

Изучается один Фурье-мультипликатор, вырождающийся или имеющий особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности этого мультипликатора классу Хермандера M_p^q.

Ключевые слова: мультипликатор, ограниченность, потенциал.

Введение

В работе изучается вопрос о принадлежности классу M_p^q [1] мультипликатора

$$b_\lambda(|\xi|) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|)A_\lambda(1-|\xi|+i0)^\lambda, & \lambda \notin \mathbb{Z}, \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^\lambda(A'_\lambda + A''_\lambda \ln(1-|\xi|+i0)), & \lambda \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{1}$$

где $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$, A_λ, A'_λ, A''_λ — постоянные из леммы 2.1, $n \in \mathbb{N}$. Функция $\varkappa(r) \in C^\infty(0,+\infty)$ такова, что $0 \leqslant \varkappa(r) \leqslant 1$; $\varkappa(r) = 1$, если $|1-r| \leqslant \delta/4$, $\varkappa(r) = 0$, если $|1-r| \geqslant \delta/2$. Здесь δ, $0 < \delta < 1$, — некоторое число, о его выборе будет сказано ниже.

Мультипликаторы такого вида возникают при исследовании свойств ограниченности операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами (см. [2–8]). В частности, подобные мультипликаторы возникают при получении $(L_p - L_q)$-оценок для дробных акустических потенциалов [9].

Нетривиальность представленных результатов объясняется тем, что к функции $b_\lambda(|\xi|)$ не применимы классические мультипликаторные теоремы типа Михлина — Хермандера.

1. Основной результат

Ниже мы будем использовать следующие обозначения: $(A, B, \ldots, K)$ — открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках $A, B, \ldots, K$; $[A, B, \ldots, K]$ — его замыкание. Пусть $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$. Обозначим

$$A = \left(1; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right), \quad A' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; 0\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1}; \frac{3}{2} - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1}\right),$$

$$C' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1} - \frac{1}{2}; \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$E = (1;0), \quad F = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)(n-1)}{2n(n+3)}; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right),$$

$$G' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; \frac{(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)(n-1)}{2n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right), \quad H' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right),$$

$$O = (1;1), \quad O' = (0;0),$$

$$K = \left(\frac{n+1-2\operatorname{Re}\lambda}{n+1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{n+1-2\operatorname{Re}\lambda}{n+1}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)}{2n(n+1)}; 1 - \frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}\right),$$

$$B' = \left(\frac{n-1-2\operatorname{Re}\lambda}{2n}; \frac{(n-1)(n+1+2\operatorname{Re}\lambda)}{2n(n+1)}\right).$$

Для формулировки основных результатов нам понадобится следующее множество на $(1/p, 1/q)$-плоскости (см. рис. 1, 2 для случаев $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$ и $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < 0$ соответственно):

$$\mathscr{L}_1(\lambda, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), \ \frac{n-1}{2(n+1)} \leqslant \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), 0 < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2(n+1)}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, \ \operatorname{Re}\lambda = 0, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), \ \lambda = 0, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], \ -1/2 < \operatorname{Re}\lambda < 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), \ -\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\frac{1}{2}, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), \ -\frac{n+1}{2} < \lambda \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$. *Тогда*

$$b_\lambda(|\xi|) \in M_p^q, \quad \textit{если} \quad (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}_1(\lambda, n); \tag{2}$$

$$b_\lambda(|\xi|) \notin M_p^q, \quad \textit{если} \quad (1/p, 1/q) \in [A, H, O] \cup [A', H', O']. \tag{3}$$

При $\operatorname{Re}\lambda = \frac{n-1}{2}$ *имеем*

$$b_\lambda(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad (1/p, 1/q) \in [O', E, O] \setminus (\{O'\} \cup \{O\}). \tag{4}$$

Если $\operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}$, *то*

$$b_\lambda(|\xi|) \in M_p^q \quad \Leftrightarrow \quad (1/p, 1/q) \in [O', E, O]. \tag{5}$$

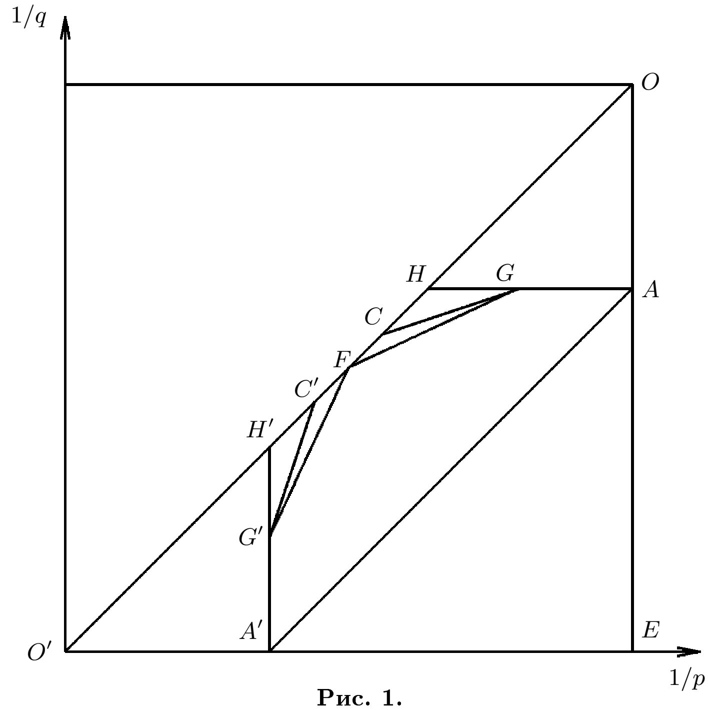

Рис. 1.

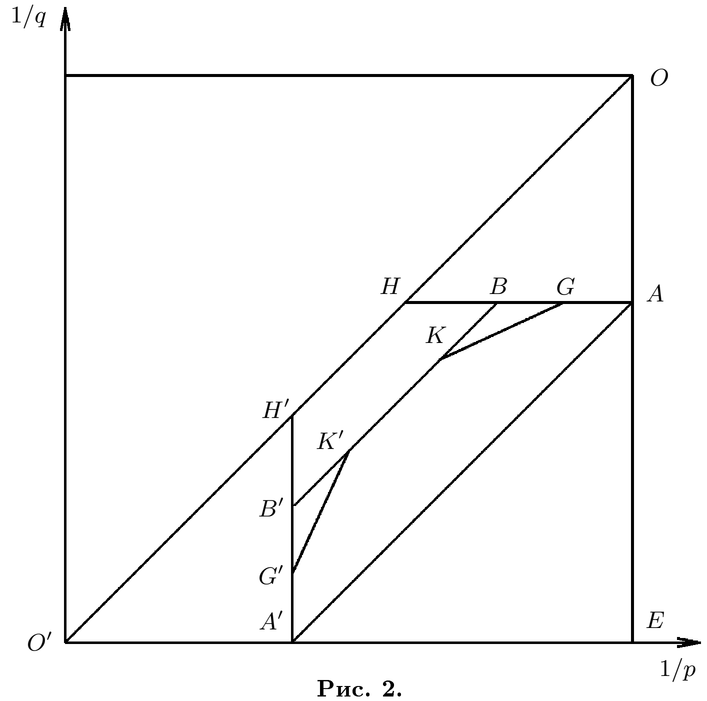

Рис. 2.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

2.1 Обозначения. $\mathscr{R}_0 = \{\varphi : \varphi = Ff, \ f \in L_1\}$ — банахова алгебра преобразований Фурье интегрируемых функций; S — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; L_p^q — класс ядер $k \in S'$ таких, что $\|k * f\|_q \leqslant C\|f\|_p$, где $f \in S$, постоянная $C > 0$ не зависит от f; $M_p^q = F(L_p^q)$ — класс $(p-q)$-мультипликаторов. Классы L_p^q и M_p^q были введены Л. Хермандером в [1].

2.2. Асимптотическое представление для некоторых интегралов, содержащих осциллирующую экспоненту. Пусть $v(r) \in C^\infty(\mathbb{R}^1_+)$, $0 \leqslant v(r) \leqslant 1$, $v(r) = 0$, если $r \leqslant 1$ и $v(r) = 1$, если $r \geqslant 2$. Справедлива следующая

Лемма 2.1 [10]. *Пусть $\beta \in \mathbb{C}$. Для $\varepsilon > 0$ положим*

$$I_{\beta,\varepsilon}(t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_0^\infty v(s) s^{-\beta-1} e^{ist-\varepsilon s}\, ds.$$

Тогда $I_{\beta,\varepsilon}(t)$ равномерно сходится при $\varepsilon \to 0$, если $|t| > \delta$ для любого $\delta > 0$, и для предельной функции $I_\beta(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_{\beta,\varepsilon}(t)$ справедливо равенство

$$I_\beta(t) = \begin{cases} A_\beta (t+i0)^\beta + \tilde{I}_\beta(t), & \beta \notin \mathbb{Z}, \\ t^\beta (A'_\beta + A''_\beta \ln(t+i0)) + \tilde{I}_\beta(t), & \beta \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $\tilde{I}_\beta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $A_\beta = (2\pi)^{-n} e^{-\frac{i\pi\beta}{2}} \Gamma(-\beta)$,

$$A'_\beta = (2\pi)^{-n} \frac{\left(\psi(\beta+1) + i\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{i\pi\beta}{2}}}{\beta!}, \quad A''_\beta = -(2\pi)^{-n} \frac{e^{\frac{i\pi\beta}{2}}}{\beta!},$$

$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ и $I_\beta(t) = O(|t|^{-M})$ при $t \to \infty$, $M > 0$.

В [10] доказано, что $I_\beta \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ и

$$\left| \left(\frac{d}{dt}\right)^j I_\beta(t) \right| \leqslant C|t|^{-M}, \quad t \to \infty,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

для любого $M \in \mathbb{N}$.

2.3. О свойствах символа оператора S^λ. Доказательство теоремы 1.1 основано на использовании свойств символа оператора

$$(S^\lambda \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(|t|) \frac{e^{i|t|}}{|t|^{\frac{n+1}{2}+\lambda}} \varphi(x-t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > -\frac{n+1}{2},$$

где функция $\chi(r) \in C^\infty(0;\infty)$ такова, что $0 \leqslant \chi(r) \leqslant 1$, $\chi(r) = 0$, если $r \leqslant N$ $(N \in \mathbb{N})$, $\chi(r) = 1$, если $r \geqslant 2N$. Обозначим ядро этого оператора через $k^\lambda(|t|)$, а его символ — через $\widehat{k^\lambda}(|\xi|)$.

Анализируя представление для функции $\widehat{k^\lambda}(|\xi|)$ в окрестности единичной сферы, полученное в работе [2], с учетом леммы 2.1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.2. *Пусть $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$. Справедливо представление*

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) = \begin{cases} \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^\lambda \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_k A_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k} (1-|\xi|)^k + J_\lambda(|\xi|), & \lambda \notin \mathbb{Z}, \\ \varkappa(|\xi|)(1-|\xi|)^\lambda \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_k (A'_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} + A''_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} \\ \qquad \times \ln(1-|\xi|+i0)) |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k} (1-|\xi|)^k + J_\lambda(|\xi|), & \lambda \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6}$$

где $J_\lambda(|\xi|) \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n)$ и $|D^\nu J_\lambda(|\xi|)| \leqslant C|\xi|^{-M}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $|\xi| \to \infty$, $M \in \mathbb{N}$. Константы C_k определены в [2].

Применяя теоремы 8.1 и 8.2 из [12], получаем, что $J_\lambda(|\xi|) \in \mathscr{R}_0$, следовательно, $J_\lambda(|\xi|) \in M_p^q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

В [2–6] доказано следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть* $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$, *тогда*

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) \in M_p^q, \quad (1/p, 1/q) \in \mathscr{L}_1(\lambda, n). \tag{7}$$

Кроме того,

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) \notin M_p^q, \quad \textit{если}\ (1/p, 1/q) \in [A, H, O] \cup [A', H', O']. \tag{8}$$

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $-\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\lambda < \frac{n-1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Введем вспомогательную функцию

$$P_N(|\xi|) \equiv \sum_{k=0}^{N} C_k A_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} |\xi|^{\frac{1-n}{2}-k}(1-|\xi|)^k.$$

Заметим, что $P_N(|\xi|) \neq 0$ при $|\xi| = 1$. Выберем δ, $0 < \delta < 1$, так, чтобы это соотношение выполнялось для всех ξ таких, что $|1-|\xi|| \leqslant \delta$. Именно это δ фигурирует в определении функций $\varkappa(r)$. Пусть далее функция $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)$ такова, что $0 \leqslant \widetilde{\varkappa}(|\xi|) \leqslant 1$, $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 0$, если $|1-|\xi|| \geqslant \delta$ и $\widetilde{\varkappa}(|\xi|) = 1$, если $|1-|\xi|| \leqslant \delta/2$. Тогда $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)\varkappa(|\xi|) = \varkappa(|\xi|)$.

Из леммы 2.1 получаем

$$b_\lambda(|\xi|) = \widehat{k^\lambda}(|\xi|)\frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{P_N(|\xi|)} - \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)}{P_N(|\xi|)}. \tag{9}$$

Заметим, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)/P_N(|\xi|) \in \mathscr{R}_0 \cap L_1$ с учетом теоремы 8.1 из [12]. Тогда эта функция принадлежит M_p^q, $(1/p, 1/q) \in [O', O, E]$. Используя (7), получаем (2), с учетом того, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)/P_N(|\xi|) \in C_0^\infty$.

Очевидно, что $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p, 1/q) \in [O', O, E] \setminus (\{O'\} \cup \{O\})$, если $\operatorname{Re}\lambda = \frac{n-1}{2}$ и $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p, 1/q) \in [O', O, E]$, если $\operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}$. Поэтому из (9) следует (4) и (5).

Докажем (3). Для этого, в силу соображений выпуклости и двойственности, достаточно показать, что $b_\lambda(|\xi|) \notin M_p^q$, если $(1/p, 1/q) \in [A, H]$. Применяя к функции $r^{\frac{1-n}{2}}$ ($r = |\xi|$) в представлении (6) формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получаем

$$r^{\frac{1-n}{2}} = 1 + \frac{(1-n)(r-1)}{2}\int_0^1 (1-(r-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}dt,$$

откуда

$$\widehat{k^\lambda}(|\xi|) = b_\lambda(|\xi|) + T_\lambda(|\xi|). \tag{10}$$

Здесь

$$T_\lambda(|\xi|) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}\varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\lambda+k} + q_\lambda(|\xi|),$$

где

$$q_\lambda(|\xi|) = J_\lambda(|\xi|) + \frac{1-n}{2}\varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^\lambda \widetilde{\varkappa}(|\xi|)\int_0^1 (1-(|\xi|-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}dt.$$

Заметим, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)/|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k} \in C_0^\infty$. С учетом (2), (4), (5) и вложения $\mathscr{L}_1(\lambda-1,n) \supset \mathscr{L}_1(\lambda,n)$, $\operatorname{Re}\lambda > 1$, заключаем, что $\varkappa(|\xi|)(1-|\xi|+i0)^{\lambda+k} \in M_p^q$, $k \geqslant 1$, если $(1/p,1/q) \in [A,H]$. Кроме того, $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)\int\limits_0^1 (1-(|\xi|-1)t)^{-\frac{1+n}{2}}dt \in C_0^\infty$. Отсюда получаем

$$T_\lambda(|\xi|) \in M_p^q, \quad (1/p,1/q) \in [A,H]. \tag{11}$$

На основании (8) и (11), из (10) получаем (3) при $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{Z}$. Введем вспомогательную функцию

$$Q_N(|\xi|) \equiv \sum_{k=0}^{N} C_k(A'_{-\lambda-k-\frac{1}{2}} + A''_{-\lambda-k-\frac{1}{2}}\ln(1-|\xi|+i0))|\xi|^{\frac{1-n}{2}-k}(1-|\xi|)^k.$$

Из леммы 2.1 получаем

$$b_\lambda(|\xi|) = \widehat{k^\lambda}(|\xi|)\frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)}{Q_N(|\xi|)} - \frac{\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)}{Q_N(|\xi|)}. \tag{12}$$

Заметим, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)J_\lambda(|\xi|)/Q_N(|\xi|) \in \mathscr{R}_0 \cap L_1$ с учетом теоремы 8.1 из [12]. Тогда, с учетом того, что $\widetilde{\varkappa}(|\xi|)/Q_N(|\xi|) \in C_0^\infty$ и соотношения (7), получаем (2).

Так как $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p,1/q) \in [O',O,E] \setminus (\{O'\} \cup \{O\})$, если $\operatorname{Re}\lambda = \frac{n-1}{2}$ и $\widehat{k^\lambda}(\xi) \in M_p^q \Leftrightarrow (1/p,1/q) \in [O',O,E]$, если $\operatorname{Re}\lambda > \frac{n-1}{2}$, то из (12) следует (4) и (5) в случае $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Соотношение (3) в случае $\lambda \in \mathbb{Z}$ доказывается аналогично случаю $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Литература

1. *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta Mathematica.—1960.—Vol. 104.—P. 93–140.
2. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003.—Т. 38, вып. 2.—С. 37–62.
3. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$ estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2004.—Vol. 7, № 2.—P. 213–241.
4. *Карасев Д. Н.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 3.—С. 418–420.
5. *Karasev D. N.* $L_p \to L_q$-estimates for some potential-type operators with oscillating kernels // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2002.—Vol. 5, № 2.—P. 131–153.
6. *Karasev D. N., Nogin V. A.* Inversion of some potential-type operators with oscillating kernels in the elliptic and non-elliptic cases. Integral Transforms & Special Functions.—2002.—Vol. 13.—P. 529–545.
7. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Ind. Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, № 2.—P. 225–233.
8. *Sogge C. D.* Eigenfunction and Bochner–Riesz estimates on manifolds with boundary // Math. Res. Lett.—2002.—Vol. 9.—P. 205–216.
9. *Ногин В. А., Рубин Б. С.* Оценки для потенциалов с осциллирующими ядрами, связанных с уравнением Гельмгольца // Диф. уравнения.—1990.—Т. 26, № 9.—С. 1608–1613.
10. *Miyachi A.* On some estimates for the wave equation in L^p and H^p // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA.—1980.—Vol. 27.—P. 331–354.
11. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 274, № 5.—P. 554–574.
12. *Самко С. Г., Костецкая Г. С.* Абсолютная интегрируемость интегралов Фурье // Вестн. РУДН (Математика).—1994.—№ 1.—С. 138–168.
13. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London–N. Y.: Taylor&Frances, 2002.—358+xvii p.—(Ser. Anal. Methods and Special Functions, Vol. 5.).

Статья поступила 1 июля 2014 г.

Гуров Михаил Николаевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: MGurov@inbox.ru

Карасев Денис Николаевич
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
декан факультета компьютерных технологий и информационной безопасности
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 69
E-mail: oscillatingman@mail.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nogin@math.rsu.ru

ON A CERTAIN FOURIER MULTIPLIER

Gurov M. N., Karasev D. N., Nogin V. A.

We study a certain Fourier multiplier which degenerate or have singularities on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$. Necessary and sufficient conditions are obtained for this multiplier to be in the Hörmander class M_p^q.

Key words: multiplier, boundedness, potential.