*Владикавказский математический журнал*
*2014, Том 16, Выпуск 4, С. 49–53*

УДК **517.98**

# ОДНОРОДНЫЕ ПОЛИНОМЫ, СРЕДНИЕ СТЕПЕННЫЕ И СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ[1]

**З. А. Кусраева**

Установлена связь однородного полинома со средними степенными и средними геометрическими.

**Ключевые слова:** векторная решетка, степень векторной решетки, однородный полином, линеаризация полинома, среднее степенное, среднее геометрическое.

Пусть $E$ — векторная решетка, $Y$ — произвольное векторное пространство, $s$ — целое число $\geqslant 1$. Отображение $P : E \to Y$ называется *однородным полиномом степени* $s$ (или $s$-*однородным полиномом*), если существует $s$-линейный оператор $\check{P} : E^s \to Y$, именуемый *порождающим оператором* полинома $P$, такой, что

$$P(x) = \check{P}(x, \dots, x) \tag{1}$$

для всех $x \in E$. Равенство (1) показывает, что отображение $P : E \to Y$ является композицией двух отображений

$$E \xrightarrow{\triangle_s} E^s \xrightarrow{\check{P}} Y,$$

где отображение $\check{P}$ $s$-линейно, а $\triangle_s : E \to E^s$ обозначает диагональное отображение

$$\triangle_s(x) = (x, \dots, x) \in E^s.$$

Говорят, что полином $P : E \to Y$ *ортогонально аддитивен* или *ортоаддитивен*, если для любых дизъюнктных $x, y \in E$ выполняется $P(x + y) = P(x) + P(y)$. Напомним, что *дизъюнктность* элементов $x$ и $y$ означает $|x| \wedge |y| = 0$. Однородные ортогонально аддитивные полиномы подробно рассмотрены в [2].

Для любой конечной последовательности $(x_1, \dots, x_N)$ в равномерно полной векторной решетке $E$ выражение вида $\hat{f}(x_1, \dots, x_N)$ может быть корректно определено, если только $f \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^N)$, т. е. $f$ — положительно однородная ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $\lambda \in \mathbb{R}$) непрерывная функция на $\mathbb{R}^N$. Изучение таких выражений называется *однородным функциональным исчислением*, см. [5]. Функциональное исчисление позволяет, в частности, корректно определить в произвольной равномерно полной векторной решетке $E$ суммы $\mathfrak{S}_s$ порядка $s$ и геометрические средние $\mathfrak{G}$.



[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

Для элементов $x_1, \ldots, x_N$ равномерно полной векторной решетки $E$ равенство

$$\mathfrak{S}_s(x_1, \ldots, x_N) := \hat{p}_s(x_1, \ldots, x_N) := \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

корректно определяет *среднее степени* $s$ или *сумму порядка* $s$, если в качестве непрерывной положительно однородной взять $p_s(t_1, \ldots, t_N) = \left(\sum_{i=1}^{N} |t_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ $((t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N)$, так как $p_s \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^N)$. Аналогично вводится *геометрическое среднее*

$$\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_N) := \widehat{q}(x_1, \ldots, x_N) := \left(\prod_{i=1}^{N} |x_i|\right)^{\frac{1}{N}},$$

где функция $q(t_1, \ldots, t_N) = \left(\prod_{i=1}^{N} |t_i|\right)^{\frac{1}{N}}$ $((t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N)$ также непрерывна и положительно однородна.

Основной результат данной статьи устанавливает связь однородного полинома со средними степенными и средним геометрическим. Необходимые сведения из теории векторных решеток имеются в [1] и [6].

**Теорема.** *Пусть $E$ — равномерно полная векторная решетка, $Y$ — выпуклое борнологическое пространство, $P : E \to Y$ — ортогонально аддитивный ограниченный $s$-однородный полином, $\check{P} : E^s \to Y$ — порождающий его симметричный $s$-линейный оператор. Для любых $x_1, \ldots, x_k \in E_+$, $k = \max\{s, N\}$ имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} P(\mathfrak{S}_s(x_1, \ldots, x_N)) &= P(x_1) + \ldots + P(x_N); \\ P(\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_s)) &= \check{P}(x_1, \ldots, x_s). \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство опирается на понятие степени векторной решетки, введенное в [3, определение 3.1], и установленный в [7, теорема 4] результат о линеаризации ортогонально аддитивных полиномов. Сначала приведем необходимые сведения о степени векторной решетки.

Пусть $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ и $E$ — архимедова векторная решетка. Пара $(E^{s\odot}, \odot_s)$ называется *$s$-ой степенью* равномерно полной векторной решетки $E$, если выполнены следующие условия:

(1) $E^{s\odot}$ — векторная решетка;

(2) $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ — ортосимметричный решеточный $s$-морфизм называемый *каноническим полиморфизмом* или *каноническим $s$-морфизмомом* степени;

(3) для любой (архимедовой) векторной решетки $F$ и любого ортосимметричного решеточного $s$-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $S \circ \odot_s = \varphi$.

В [3] установлены существование степени векторной решетки и ее единственность с точностью до решеточного изоморфизма. В той же работе показано, что в случае, когда $E$ — равномерно полная подрешетка точной $f$-алгербы, степень допускает удобное описание.

Решеточно упорядоченная алгебра $A$ ($xy \in A_+$ для всех $x, y \in A_+$) называется *$f$-алгеброй*, если из того, что $x \perp y$ и $0 \leqslant z \in A$, следует $xz \perp y$ и $zx \perp y$. Напомним, что $f$-алгебрах называтся *точной*, если нуль — ее единственный нильпотентный элемент. Необходимые сведения об $f$-алгебрах приведены в [1].

**Лемма 1.** *Пусть $f$-алгебра $A$ с умножением $\bullet$ точна, а $E$ — подрешетка $A$. Тогда существуют подрешетка $F \subset A$ и изоморфизм $i$ из $E^{s\odot}$ на $F$ такие, что $i(x_1 \odot \ldots \odot x_s) = x_1 \bullet \ldots \bullet x_s$ для всех $x_1, \ldots, x_s \in E$.*

$\lhd$ См. [3, теорема 4.1]. $\rhd$

В частности, $i(x^{s\odot}) = x^s$ и, следовательно, получаем обычную степенную функцию, действующую из $E$ в $F$. В случае равномерно полной векторной решетки $E$ имеем также (см. [3, теорема 4.1]):

$$F = E_{(s)} := \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_s : \ x_i \in E\} = \big\{x|x|^{s-1} : \ x \in E\big\},$$

$$F_+ = \big(E_{(s)}\big)_+ := \{|x|^s : x \in E\}.$$

Нам также потребуется функциональное исчисление в $f$-алгебрах с единицей (см. [5, теорема 4.10]). Будем говорить, что $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ — функция полиномиального роста, если $f \in C(\mathbb{R}^N)$ и существуют $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant M \in \mathbb{R}$, для которых что $|f| \leqslant M(\mathbf{1} + |e_1| + \ldots + |e_N|)^n$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице на $\mathbb{R}^N$. Символом $\mathscr{A}(\mathbb{R}^N)$ обозначим множество всех функций $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ полиномиального роста, для которых существует предел $\lim_{t\downarrow 0} f(tx)t^{-1}$ равномерно на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^N$.

Введем следующие обозначения: пусть $\langle x_1, \ldots, x_N\rangle$ обозначает подрешетку в $E$, порожденную множеством $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset E$, а $\tau_i$ — $k$-ю координатную функцию в $\mathbb{R}^N$, т. е. $\tau_i : (t_1, \ldots, t_N) \mapsto t_i$.

**Лемма 2.** *Пусть $E$ — равномерно полная точная $f$-алгебра. Для любого $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_N) \in E^N$ существует единственный мультипликативный решеточный гомоморфизм*

$$\widehat{\mathbf{x}} : f \mapsto \widehat{\mathbf{x}}(f) := \widehat{f}(x_1, \ldots, x_N) \quad (f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^N)),$$

*отображающий $\mathscr{A}(\mathbb{R}^N)$ в $E$, такой, что $\widehat{\mathbf{x}}(\tau_i) = x_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.*

$\lhd$ См. [5, теорема 4.10]. $\rhd$

**Лемма 3.** *Пусть $A$ — равномерно полная $f$-алгебра, $s, N \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in A^N$. Тогда выполняются равенства:*

$$\mathfrak{S}_s(x_1, \ldots, x_N)^s = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^s \quad (x_1, \ldots, x_N \in A), \tag{3}$$

$$\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_N)^N = \prod_{i=1}^{N} |x_i| \quad (x_1, \ldots, x_N \in A). \tag{4}$$

$\lhd$ В силу леммы 2, $\Phi := \widehat{\mathbf{x}}$ служит мультипликативным решеточным гомомрфизмом из $\mathscr{A}(\mathbb{R}^N)$ в $E$. Если $s > 1$, то функция $\tau_i^s$ входит в $\mathscr{A}(\mathbb{R}^N)$ и $\Phi(|\tau_i|^s) = |\Phi(\tau_i)|^s = |x_i|^s$. Следовательно, учитывая равенство $p_s^s = |\tau_1|^s + \ldots + |\tau_N|^s$, выводим

$$\mathfrak{S}_s(x_1, \ldots, x_N)^s = \Phi(p_s)^s = \Phi(p_s^s) = \Phi(|\tau_1|^s + \ldots + |\tau_N|^s)$$
$$= \Phi(|\tau_1|^s) + \ldots + \Phi(|\tau_N|^s) = \Phi(|\tau_1|)^s + \ldots + \Phi(|\tau_N|)^s = |x_1|^s + \ldots + |x_N|^s.$$

Тем самым установлено (3). Аналогично, используя соотношение $q^N = |\tau_1| \cdot \ldots \cdot |\tau_N|$, приходим к цепочке равенств

$$\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_N)^N = \Phi(q)^N = \Phi(q^N) = \Phi(|\tau_1| \cdot \ldots \cdot |\tau_N|)$$
$$= |\Phi(\tau_1)| \cdot \ldots \cdot |\Phi(\tau_N)| = |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_N|,$$

доказывающей соотношение (4). $\rhd$

**Лемма 4.** *Пусть $E$ — равномерно полная векторная решетка, $s, N \in \mathbb{N}$ и $s \geqslant 2$. Тогда для любых $x_1, \dots, x_N \in E_+$ справедливы представления:*

$$\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)^{s\odot} = x_1^{s\odot} + \ldots + x_N^{s\odot},$$

$$\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N)^{N\odot} = x_1 \odot \ldots \odot x_N.$$

$\lhd$ Пусть $A$ — универсальное расширение $E$, являющееся $f$-алгеброй с умножением $\bullet$. В силу леммы 1, существует решеточный изоморфизм $i_s$ из $E^{s\odot}$ на $F \subset A$ и $i_N$ из $E^{N\odot}$ на $G \subset A$. В то же время, привлекая лемму 3, можем написать следующие равенства:

$$\underbrace{\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N) \bullet \ldots \bullet \mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)}_{s \text{ раз}} = \underbrace{x_1 \bullet \ldots \bullet x_1}_{s \text{ раз}} + \ldots + \underbrace{x_N \bullet \ldots \bullet x_N}_{s \text{ раз}},$$

$$\underbrace{\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N) \bullet \ldots \bullet \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N)}_{N \text{ раз}} = x_1 \bullet \ldots \bullet x_N.$$

Далее, в силу того, что $\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N) \in E$ и $\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N) \in E$, левые части последних равенств входят в $F$ и $G$ соответственно, следовательно, к ним можно применить $i_s^{-1}$ и $i_N^{-1}$. С учетом равенств (см. лемма 1)

$$x_1 \odot \ldots \odot x_N = i_N^{-1}(x_1 \bullet \ldots \bullet x_N),$$

$$x^{s\odot} := \underbrace{x \odot \ldots \odot x}_{s \text{ раз}} = i_s^{-1}(\underbrace{x \bullet \ldots \bullet x}_{s \text{ раз}}),$$

получим требуемое. $\rhd$

Прежде, чем приводить доказательство основного результата, сформулируем теорему о линеаризации ортоаддитивных полиномов.

**Теорема о линеаризации.** *Пусть $E$ — равномерно полная векторная решетка, $Y$ — выпуклое борнологическое пространство. Тогда любой ортоаддитивный порядково ограниченный $s$-однородный полином $P$ из $E$ в $Y$ может быть представлен в виде*

$$P(x) = S(x^{s\odot}) \quad (x \in E),$$

*где $S : E^{s\odot} \to Y$ — ограниченный линейный оператор.*

$\lhd$ Доказательство основной теоремы. В условиях сформулированной теоремы применима теорема о линеаризации ортоаддитивных полиномов, в силу которой существует единственный ограниченный линейный оператор $S : E^{s\odot} \to Y$ такой, что $P(u) = S(u \odot \ldots \odot u)$ для всех $u \in E$. Подставив в эту формулу $u = \mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)$ и привлекая лемму 4, получим следующее:

$$\begin{gathered} P(\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)) = S(\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N) \odot \ldots \odot \mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)) \\ = S(x_1 \odot \ldots \odot x_1 + \ldots + x_N \odot \ldots \odot x_N) \\ = S(x_1 \odot \ldots \odot x_1) + \ldots + S(x_N \odot \ldots \odot x_N) = P(x_1) + \ldots + P(x_N). \end{gathered}$$

Рассуждая подобным образом и подставляя на этот раз $u := \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N)$, вновь на основе теоремы о линеаризации и леммы 4 заключаем:

$$\begin{gathered} P(\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N)) = S(\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N) \odot \ldots \odot \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N)) \\ = S(x_1 \odot \ldots \odot x_N) = \check{P}(x_1, \dots, x_N). \end{gathered}$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что соотношения $P = S \circ \odot_s \circ \triangle_s$ и $\check{P} = S \circ \odot_s$ равносильны. $\triangleright$

**Следствие.** *Пусть $E$ и $F$ — векторные решетки, причем $E$ равномерно полна. Тогда для любого порядково ограниченного $s$-однородного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ имеют место равенства* (2).

## Литература


1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
2. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
3. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: $f$-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442.
4. *Bu Q., Buskes G., Kusraev A. G.* Bilinear maps on product of vector lattices: A survey // Positivity / Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki.—Basel a. o.: Birkhäuser, 2007.—P. 97–126.
5. *Buskes, G., de Pagter.B., van Rooij. A.* Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N. S.).—1991.—Vol. 4, № 2.—P. 423–436.
6. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—395 p.
7. *Кусраева З. А.* О представлениии ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.


*Статья поступила 6 марта 2014 г.*

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
*научный сотрудник отдела функционального анализа*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `zali13@mail.ru`

## HOMOGENEOUS POLYNOMIALS, ROOT MEAN POWER, AND GEOMETRIC MEANS IN VECTOR LATTICES

Kusraeva Z. A.

It is proved that for a homogeneous orthogonally additive polynomial $P$ of degree $s \in \mathbb{N}$ from a uniformly complete vector lattice $E$ to some convex bornological space the equations $P(\mathfrak{S}_s(x_1, \ldots, x_N)) = P(x_1) + \ldots + P(x_N)$ and $P(\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_s)) = \check{P}(x_1, \ldots, x_s)$ hold for all positive $x_1, \ldots, x_s \in E$, where $\check{P}$ is an $s$-linear operator generating $P$, while $\mathfrak{S}_s(x_1, \ldots, x_N)$ and $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_s)$ stand respectively for root mean power and geometric mean in the sense of homogeneous functional calculus.

**Key words:** vector lattice, homogeneous polynomial, linearization of a polynomial, root mean power, geometric mean.