Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 1, С. 57–67

УДК **514.765**

О КРИВИЗНЕ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ[1]

М. С. Чебарыков

В работе получена классификация возможных сигнатур кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на трехмерных группах Ли, являющаяся уточнением некоторых результатов Дж. Милнора. В качестве вспомогательного результата получена классификация трехмерных неунимодулярных метрических алгебр Ли.

Ключевые слова: однородное риманово многообразие, алгебра Ли, группа Ли, трехмерная алгебра Ли, левоинвариантная риманова метрика, кривизна Риччи.

1. Введение и основной результат

При изучении римановых многообразий знание ограничений на их кривизну позволяет получить важную информацию о геометрическом и топологическом строении исследуемых многообразий. Одной из важных характеристик кривизны является кривизна Риччи, и существует целый ряд открытых проблем, связанных с ней (более подробную информацию по этой проблематике можно найти, например, в [3] и [9]). Одной из таких проблем является задача определения возможных значений сигнатуры кривизны Риччи инвариантных метрик на заданном однородном пространстве [6, 7, 13].

Хорошо известен ряд принципиальных результатов в этом направлении [2, 4, 11]. Например, Дж. Милнор в работе [13] определил возможные сигнатуры оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на всех группах Ли размерности, не превышающей трех. В статьях [6, 7] А. Г. Кремлев и Ю. Г. Никоноров получили аналогичный результат для групп Ли размерности четыре.

Левоинвариантные римановы метрики на группах Ли удобно исследовать в терминах соответствующих метрических алгебр Ли (см. подробности в § 1 работы [6] или в [1, 4, 9]), поэтому в дальнейшем будем использовать именно такой вариант изложения. Определения и обсуждение всех необходимых нам в дальнейшем изложении понятий можно найти, например, в работе [6].

Следуя работам [6, 7], под сигнатурой симметрического оператора A, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, мы понимаем упорядоченный набор

$$(\operatorname{sgn}(\lambda_1), \operatorname{sgn}(\lambda_2), \ldots, \operatorname{sgn}(\lambda_n)),$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., соглашение № 8206, а также гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, грант № НШ-921.2012.1.

где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — собственные значения оператора A, а $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Еще в работе Г. Йенсена [12] было доказано, что скалярная кривизна произвольной разрешимой метрической неунимодулярной алгебры Ли неположительна. В теореме 1.5 из работы [13] Дж. Милнор доказал, что скалярная кривизна такой метрической алгебры Ли строго отрицательна. Следовательно, оператор Риччи такой алгебры имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение. Более того, в трехмерном неунимодулярном случае оператор Риччи имеет не менее двух отрицательных собственных значений [13] (аналогичный результат для четырехмерного случая получен в работе [7], а для алгебр размерности $\leqslant 6$ — в работе [10]).

Таблица 1

Алгебра Ли	Ненулевые скобки Ли	Условия на параметры
$3A_1$		
$A_2 \oplus A_1$	$[e_1, e_2] = e_2$	
$A_{3,1}$	$[e_2, e_3] = e_1$	
$A_{3,2}$	$[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$	
$A_{3,3}$	$[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$	
$A_{3,4}$	$[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = -e_2$	
$A_{3,5}^p$	$[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = pe_2$	$0 < \|p\| < 1$
$A_{3,6}$	$[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$	
$A_{3,7}^p$	$[e_1, e_3] = pe_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + pe_2$	$p > 0$
$A_{3,8}$	$[e_1, e_3] = -2e_2$, $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$	
$A_{3,9}$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$	

Отметим, что исследование сигнатуры оператора Риччи трехмерных метрических алгебр Ли в [13] проведено весьма подробно в унимодулярном случае и несколько менее подробно — в неунимодулярном. Информацию о возможности реализации заданной сигнатуры в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на заданной неунимодулярной алгебре Ли при желании можно извлечь из результатов § 4 процитированной работы. Но поскольку это сопряжено с рядом неудобств, автор посчитал возможным и нужным провести более детальное исследование, результаты которого составляют содержание теоремы 1 настоящей работы и являются уточнениями соответствующих результатов Дж. Милнора.

В отличие от [13], в данной статье последовательно рассматриваются все трехмерные неунимодулярные алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с целью определения возможных сигнатур оператора Риччи для различных скалярных произведений на $\mathfrak{g}$. В таблице 1 указаны все возможные алгебры Ли размерности 3 (обозначения алгебр Ли согласованы с обозначениями из работ [6] и [7]), а в таблице 2 указан список возможных сигнатур симметричного оператора в трехмерном евклидовом пространстве. Заметим, что в таблице 1 неунимодулярными являются в точности алгебры $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,5}^p$, $A_{3,7}^p$ и $A_2 \oplus A_1$.

Таблица 2

	Сигнатура		Сигнатура
1	$(-,-,-)$	6	$(-,+,+)$
2	$(-,-,0)$	7	$(0,0,0)$
3	$(-,-,+)$	8	$(0,0,+)$
4	$(-,0,0)$	9	$(0,+,+)$
5	$(-,0,+)$	10	$(+,+,+)$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая неунимодулярная трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ из таблицы 1, s — произвольная сигнатура из таблицы 2. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 3 на пересечении строки, соответствующей алгебре $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».*

Таблица 3

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_2 \oplus A_1$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,2}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,3}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,5}^p$, $p > 0$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,5}^p$, $p < 0$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A_{3,7}^p$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

В следующем параграфе подробно исследуются все неунимодулярные алгебры Ли из таблицы 1, что позволяет в конечном итоге получить доказательство теоремы 1.

Для полноты картины мы приведем результат, аналогичный теореме 1, для трехмерного унимодулярного случая, который получен Дж. Милнором (см. [13, § 4]). Отметим, что в работе [13] были использованы обозначения для алгебр Ли, отличные от тех, что использованы нами в таблице 1.

Дж. Милнор доказал (см. лемму 4.1 и теорему 4.3 в [13]), что для произвольной трехмерной унимодулярной метрической алгебры Ли существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ со следующими коммутациоными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3. \tag{1}$$

Отметим, что знаки чисел λ_1, λ_2 и λ_3 полностью определяют (трехмерную унимодулярную) алгебру Ли. Нужный нам результат Дж. Милнора в терминах настоящей работы звучит следующим образом:

Теорема 2 (Дж. Милнор [13])**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая унимодулярная трехмерная алгебры Ли $\mathfrak{g}$ из таблицы 1, s — произвольная сигнатура из таблицы 2. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора Риччи для некоторого скалярного произведения на*

$\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 4 на пересечении строки, соответствующей алгебре $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».

Таблица 4

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3A_1$	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
$A_{3,1}$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,4}$	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−
$A_{3,6}$	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
$A_{3,8}$	−	−	+	+	−	−	−	−	−	−
$A_{3,9}$	−	−	+	−	−	−	−	+	−	+

Отметим также, что в леммах 1–5 следующего параграфа устанавливается вид удобного ортонормированного базиса для соответствующей неунимодулярной метрической алгебры Ли, т. е. устанавливается некоторая классификация трехмерных неунимодулярных метрических алгебр Ли. Вместе с соотношениями (1) для унимодулярных метрических алгебр Ли это дает удобный инструмент для исследования различных инвариантных структур на трехмерных группах Ли. Аналогичные удобные ортонормированные базисы для четехмерных метрических алгебр Ли были получены в работах [6] и [7] (использование этих базисов см., например, в [5]).

2. Доказательство основной теоремы

Для каждой исследуемой алгебры Ли и произвольного ее базиса $\{f_i\}$ через $c_{i,j}^k$ обозначаются структурные константы алгебры Ли в этом базисе ($[f_i, f_j] = \sum_k c_{i,j}^k f_k$ для всех i, j, k). Матрица оператора Риччи метрической алгебры Ли в заданном ортонормированном базисе находится стандартным образом (см., например, формулу (1) в [6]).

Далее мы для каждой неунимодулярной трехмерной алгебры Ли и произвольного скалярного произведения на ней найдем удобный ортонормированный базис. Матрица оператора Риччи в таком базисе примет простой вид, что и позволит определить его сигнатуру.

1. Алгебра $A_{3,2}$. Для рассматриваемой алгебры справедлива следующая

Лемма 1. *Для произвольного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли $A_{3,2}$ существует $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ со следующими ненулевыми структурными константами:*

$$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \gamma, \quad c_{2,3}^1 = \delta,$$

где $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ и $\delta > 0$. Обратно, для любых вещественных чисел $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ алгебра Ли со структурными константами $c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \gamma$ и $c_{2,3}^1 = \delta$ изоморфна алгебре Ли $A_{3,2}$.

$\lhd$ Выберем специальный $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ для алгебры Ли $A_{3,2}$. Потребуем, чтобы $f_1 = \alpha e_2$ при $\alpha > 0$, f_2 лежал в производной алгебре $\mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ алгебры $A_{3,2}$, $f_3 \in \mathrm{Lin}(e_1, e_2, e_3)$. Заменяя при необходимости f_i на $-f_i$, $i \in \{2, 3\}$, можно считать, что матрица A перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$ будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ \beta_2 > 0,\ \gamma_3 > 0. \tag{2}$$

Структурные константы алгебры $A_{3,2}$ в базисе $\{f_i\}$ имеют следующий вид:

$$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \gamma_3 > 0, \quad c^1_{2,3} = \frac{\beta_2}{\alpha}\,\gamma_3 > 0. \tag{3}$$

Положим

$$\gamma = c^1_{1,3} = c^2_{2,3}, \quad \delta = c^1_{2,3}.$$

Ясно, что $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, и мы доказали первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения леммы нам достаточно для любых $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ указать вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0, \gamma_1$, $\gamma_2, \gamma_3 > 0$, для которых выполнены равенства (3). Это будет означать, что базис данной алгебры Ли получается из канонического базиса алгебры Ли $A_{3,2}$ с помощью невырожденной матрицы перехода, что и означает изоморфность двух алгебр Ли. Очевидно, что в качестве подходящих значений констант можно выбрать следующие:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \delta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma. \ \rhd$$

Предложение. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{3,2}$ реализуются только сигнатуры вида $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, т. е. сигнатуры 1, 2, 3 из таблицы 2.*

$\lhd$ Для метрической алгебры Ли $(A_{3,2}; (\cdot,\cdot))$ мы выберем ортонормированный базис $\{f_i\}$, существование которого доказано в лемме 1. Матрица оператора Риччи Ric в этом базисе имеет вид:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta^2 - 2\gamma^2 & -\delta\gamma & 0 \\ -\delta\gamma & -2\gamma^2 - \frac{1}{2}\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma^2 - \frac{1}{2}\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора таковы:

$$\lambda_1 = -2\gamma^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\delta^4 + 4(\gamma\delta)^2}, \quad \lambda_2 = -2\gamma^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta^4 + 4(\gamma\delta)^2}, \quad \lambda_3 = -2\gamma^2 - \frac{1}{2}\,\delta^2.$$

Очевидно, что знак λ_1 может быть произвольным при соответствующем выборе параметров $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, в то время как остальные собственные значения всегда отрицательны. Например, сигнатура $(-,-,0)$ реализуется при $\gamma = 1$, $\delta = \sqrt{2\sqrt{5} - 2}$, сигнатура $(-,-,+)$ — при $\gamma = 1$, $\delta = 2$, сигнатура $(-,-,-)$ — при $\gamma = \delta = 1$. $\rhd$

2. Алгебра $A_{3,3}$. Для рассматриваемой алгебры справедлива следующая

Лемма 2. *Для произвольного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли $A_{3,3}$ существует $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ со следующими ненулевыми структурными константами:*

$$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \gamma,$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Обратно, для любого вещественного числа $\gamma > 0$ алгебра Ли со структурными константами $c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \gamma$ изоморфна алгебре Ли $A_{3,3}$.

$\lhd$ Выберем специальный $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ для алгебры Ли $A_{3,3}$. Потребуем, чтобы $f_1 = \alpha e_2$ при $\alpha > 0$, f_2 лежал в производной алгебре $\mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ алгебры $A_{3,3}$, $f_3 \in \mathrm{Lin}(e_1, e_2, e_3)$. Заменяя при необходимости f_i на $-f_i$, $i \in \{2, 3\}$, можно считать, что матрица A перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$ будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ \beta_2 > 0,\ \gamma_3 > 0. \tag{4}$$

Структурные константы алгебры $A_{3,3}$ в базисе $\{f_i\}$ имеют следующий вид:

$$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \gamma_3 > 0. \tag{5}$$

Положим

$$\gamma = c^1_{1,3} = c^2_{2,3}.$$

Ясно, что $\gamma > 0$, и мы доказали первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения леммы нам достаточно для любого $\gamma > 0$ указать вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$, для которых выполнены равенства (5). Это будет означать, что базис данной алгебры Ли получается из канонического базиса алгебры Ли $A_{3,3}$ с помощью невырожденной матрицы перехода, что и означает изоморфность двух алгебр Ли. Ясно, что в качестве подходящих значений констант можно выбрать следующие:

$$\alpha = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = \gamma. \rhd$$

Предложение 2. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A_{3,3}$ реализуется только сигнатура вида $(-,-,-)$ (сигнатура 1 из таблицы 2).*

$\lhd$ Для метрической алгебры Ли $(A_{3,3}; (\cdot,\cdot))$ мы выберем ортонормированный базис $\{f_i\}$, существование которого доказано в лемме 2. Матрица оператора Риччи Ric в этом базисе имеет вид:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -2\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что стоящие на диагонали матрицы собственные значения оператора Риччи всегда отрицательны, независимо от значения $\gamma > 0$. $\rhd$

Замечание. Заметим, что в данном случае $(\cdot,\cdot)$ есть метрика Эйнштейна, поскольку $\mathrm{Ric} = -2\gamma^2 \cdot \mathrm{I}$, иными словами, оператор Риччи Ric пропорционален тождественному оператору I.

3. Алгебра $A^p_{3,5}$. Для рассматриваемой алгебры справедлива следующая

Лемма 3. *Для произвольного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли $A^p_{3,5}$, $0 < |p| < 1$, существует $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ со следующими ненулевыми структурными константами:*

$$c^1_{1,3} = \gamma, \quad c^2_{2,3} = \gamma p, \quad c^1_{2,3} = (1-p)\delta,$$

где $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Обратно, для любых вещественных чисел $\gamma > 0$ и $\delta \neq 0$ алгебра Ли со структурными константами $c^1_{1,3} = \gamma$, $c^2_{2,3} = \gamma p$, $c^1_{2,3} = (1-p)\delta$, изоморфна алгебре Ли $A^p_{3,5}$.

$\lhd$ Выберем специальный $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ для алгебры Ли $A^p_{3,5}$. Потребуем, чтобы $f_1 = \alpha e_2$ при $\alpha > 0$, f_2 лежал в производной алгебре $\mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ алгебры $A^p_{3,5}$, $f_3 \in \mathrm{Lin}(e_1, e_2, e_3)$. Заменяя при необходимости f_i на $-f_i$, $i \in \{2, 3\}$, можно считать, что матрица A перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$ будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ \beta_2 > 0,\ \gamma_3 > 0. \tag{6}$$

Структурные константы алгебры $A^p_{3,5}$ в базисе $\{f_i\}$ имеют следующий вид:

$$c^1_{1,3} = \gamma_3 > 0, \quad c^2_{2,3} = \gamma_3 p, \quad c^1_{2,3} = (1-p)\,\frac{\beta_1}{\alpha}\,\gamma_3. \tag{7}$$

Положим

$$\gamma = c^1_{1,3}, \quad \delta = \frac{c^1_{2,3}}{1-p}.$$

Ясно, что $\gamma > 0$, и мы доказали первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения леммы нам достаточно для любых $\gamma > 0$ и $\delta \neq 0$ указать вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$, для которых выполнены равенства (7). Это будет означать, что базис данной алгебры Ли получается из канонического базиса алгебры Ли $A^p_{3,5}$ с помощью невырожденной матрицы перехода, что и означает изоморфность двух алгебр Ли. Ясно, что в качестве подходящих значений констант можно выбрать следующие:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta_1 = \delta, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma. \ \rhd$$

Предложение 3. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на семействе алгебр Ли* $A^p_{3,5}$ *при* $p > 0$ *реализуются только сигнатуры вида* $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$ (*сигнатуры* 1, 2, 3 *из таблицы* 1), *а при* $p < 0$ *реализуется только сигнатура* $(-,-,+)$ (*сигнатура* 3 *из таблицы* 1).

$\lhd$ Для метрической алгебры Ли $(A^p_{3,5}; (\cdot,\cdot))$ мы выберем ортонормированный базис $\{f_i\}$, существование которого доказано в лемме 3. Матрица оператора Риччи Ric в этом базисе имеет вид:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p-1)^2\delta^2 - \gamma^2(1+p) & \delta\gamma(p-1) & 0 \\ \delta\gamma(p-1) & -\frac{1}{2}(p-1)^2\delta^2 - \gamma^2(1+p)p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1-p)^2\delta^2 - \gamma^2(1+p^2) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственное значение $-\frac{1}{2}(1-p)^2\delta^2 - \gamma^2(1+p^2)$ всегда отрицательное. Рассмотрим (2×2)-матрицу, полученную из матрицы оператора Риччи путем удаления третьей строки и третьего столбца. Обозначим ее Ric_3. След этой матрицы имеет вид $\mathrm{trace}(\mathrm{Ric}_3) = -\gamma^2(1+p)^2$, значит, он отрицателен. Исходя из того, что след матрицы равен сумме ее собственных значений, мы можем сказать, что одно из собственных чисел матрицы Ric_3 отрицательно, а, значит, отрицательно еще одно из собственных значений исходного оператора Ric. Таким образом, как минимум два собственных значения оператора Ric отрицательны.

Оставшееся собственное значение может иметь любой знак при соответствующем выборе $\gamma > 0$ и δ, если $p > 0$. Действительно, достаточно заметить, что (определитель матрицы Ric_3)

$$\det(\mathrm{Ric}_3) = \frac{1}{4}\Big(4(1+p)^2p\gamma^4 - 2(1-p)^2(1+p^2)\gamma^2\delta^2 - (1-p)^4\delta^4\Big)$$

в этом случае может принимать как положительные так и отрицательные (а, следовательно, и нулевое) значения при подходящих $\gamma > 0$ и δ. Если же $p < 0$, то определитель матрицы Ric_3 всегда отрицателен, следовательно, она (и, соответственно, Ric) всегда имеет одно положительное собственное значение (ср. с предложением 12 из работы [7]). $\triangleright$

4. Алгебра $A^p_{3,7}$. Для рассматриваемой алгебры справедлива следующая

Лемма 4. *Для произвольного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли $A^p_{3,7}$, $p > 0$, существует $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ со следующими ненулевыми структурными константами:*

$$c^1_{1,3} = \gamma(p+\beta), \quad c^2_{1,3} = -\gamma\delta, \quad c^2_{2,3} = \gamma(p-\beta), \quad c^1_{2,3} = \frac{\beta^2\gamma}{\delta},$$

где $\gamma, \delta, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ и $\delta > 0$. Обратно, для любых вещественных чисел $\gamma > 0$, β и $\delta > 0$ алгебра Ли со структурными константами $c^1_{1,3} = \gamma(p+\beta)$, $c^2_{1,3} = -\gamma\delta$, $c^2_{2,3} = \gamma(p-\beta)$, $c^1_{2,3} = \frac{\beta^2\gamma}{\delta}$ изоморфна алгебре Ли $A^p_{3,7}$.

$\triangleleft$ Выберем специальный $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{f_i\}$ для алгебры Ли $A^p_{3,5}$. Потребуем, чтобы $f_1 = \alpha e_2$ при $\alpha > 0$, f_2 лежал в производной алгебре $\mathrm{Lin}(e_1, e_2)$ алгебры $A^p_{3,5}$, $f_3 \in \mathrm{Lin}(e_1, e_2, e_3)$. Заменяя при необходимости f_i на $-f_i$, $i \in \{2, 3\}$, можно считать, что матрица A перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$ будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ \beta_2 > 0,\ \gamma_3 > 0. \tag{8}$$

Структурные константы алгебры $A^p_{3,7}$ в базисе $\{f_i\}$ имеют следующий вид:

$$c^1_{1,3} = \gamma_3(p+\beta_1), \quad c^2_{1,3} = -\gamma_3\alpha, \quad c^2_{2,3} = \gamma_3(p-\beta_1), \quad c^1_{2,3} = \frac{\beta_1^2\gamma_3}{\alpha}. \tag{9}$$

С точностью до переобозначений ($\alpha = \delta$, $\gamma_3 = \gamma$, $\beta_1 = \beta$) это и есть указанные в формулировке леммы равенства. Ясно, что $c^1_{2,3} > 0$, $c^2_{1,3} < 0$ и мы доказали первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения леммы нам достаточно для любых $\gamma > 0$, β и $\delta > 0$ указать вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$, для которых выполнены равенства (9). Это будет означать, что базис данной алгебры Ли получается из канонического базиса алгебры Ли $A^p_{3,5}$ с помощью невырожденной матрицы перехода, что и означает изоморфность двух алгебр Ли. Ясно, что в качестве подходящих значений констант можно выбрать следующие:

$$\alpha = \delta, \quad \beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma. \ \triangleright$$

Предложение 4. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $A^p_{3,7}$ реализуются только сигнатуры вида $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, т. е. сигнатуры 1, 2, 3 из таблицы 2.*

$\triangleleft$ Для метрической алгебры Ли $(A^p_{3,7}; (\cdot,\cdot))$ мы выберем ортонормированный базис $\{f_i\}$, существование которого доказано в лемме 4. Матрица оператора Риччи в этом базисе имеет вид:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac12\gamma^2\delta^2 + \frac12\frac{\beta^4\gamma^2}{\delta^2} - 2\gamma^2 p(p+\beta) & -\frac{\gamma^2\beta^2(\beta+p)}{\delta} - \gamma^2\delta(\beta-p) & 0 \\ -\frac{\gamma^2\beta^2(\beta+p)}{\delta} - \gamma^2\delta(\beta-p) & \frac12\gamma^2\delta^2 - \frac12\frac{\beta^4\gamma^2}{\delta^2} - 2\gamma^2 p(p-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

где

$$A = -\frac{\gamma^2(4p^2\delta^2 + 2\beta^2\delta^2 + \delta^4 + \beta^4)}{2\delta^2}.$$

Понятно, что элемент A матрицы Ric, будучи ее собственным значением, всегда отрицателен. Как и в предыдущем случае, рассмотрим (2×2)-матрицу, полученную из исходной матрицы оператора Риччи путем удаления третьей строки и третьего столбца. Обозначим его Ric_3. След этой матрицы, $\mathrm{trace}(\mathrm{Ric}_3) = -4\gamma^2p^2$, отрицателен. Таким образом, одно из собственных чисел матрицы Ric_3 отрицательно, а, значит, отрицательно еще одно из собственных значений исходного оператора Ric. Третье собственное значение оператора Риччи может иметь любой знак. Проще всего убедиться в этом, показав, что определитель матрицы Ric_3 может иметь произвольный знак. Понятно, что при $\beta = 0$ получаем равенство

$$\det(\mathrm{Ric}_3) = \frac{\gamma^4}{4}(16p^4 - 4p^2\delta^2 - \delta^4).$$

Значит, при различных значениях $\delta > 0$ (и при произвольном фиксированном γ) знак $\det(\mathrm{Ric}_3)$ может быть произвольным, что и требовалось. $\rhd$

5. Алгебра $A_2 \oplus A_1$. Для рассматриваемой алгебры справедлива следующая

Лемма 5. *Для произвольного скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ на разложимой алгебре Ли $A_2 \oplus A_1$ существует $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{e_i\}$ со следующими ненулевыми структурными константами:*

$$c^2_{1,2} = \alpha, \quad c^3_{1,2} = \gamma,$$

где $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Обратно, для любых вещественных чисел $\gamma, \alpha > 0$ алгебра Ли со структурными константами $c^2_{1,2} = \alpha$, $c^3_{1,2} = \gamma$, изоморфна алгебре Ли $A_2 \oplus A_1$.

$\lhd$ Выберем специальный $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис $\{e_i\}$ для алгебры Ли $A_2 \oplus A_1$. Выберем вектор $e_3 \in A_1 = (0,\mathbb{R}) \subset A_2 \oplus A_1$ со свойством $(e_3, e_3) = 1$ и рассмотрим $\mathfrak{p}$ — $(\cdot,\cdot)$-ортогональное дополнение к $\mathbb{R}\cdot e_3 = A_1$ в $A_2 \oplus A_1$. Рассмотрим теперь линейное отображение $L : \mathfrak{p} \to A_2$, являющееся проекцией вдоль $(0,\mathbb{R})$. Ясно, что L — линейный изоморфизм. Определим на алгебре Ли A_2 скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ так, чтобы выполнялось равенство $(X,Y) = \langle L(X), L(Y)\rangle$ для всех $X, Y \in \mathfrak{p}$.

Для метрической алгебры Ли A_2 существует ортонормированный базис $\{f_1, f_2\}$ с коммутационным соотношением $[f_1, f_2] = \alpha f_2$ при некотором вещественном $\alpha > 0$. Для $i = 1,2$ положим $e_i = L^{-1}(f_i)$. Понятно, что $e_1 = f_1 + ke_3$, $e2 = f_2 + le_3$ для некоторых $k, l \in \mathbb{R}$. Ясно также, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют $(\cdot,\cdot)$-ортонормированный базис в $A_2 \oplus A_1$. Ненулевые структурные константы алгебры Ли $A_2 \oplus A_1$ в этом базисе таковы:

$$c^2_{1,2} = \alpha, \quad c^3_{1,2} = -\alpha \cdot l. \tag{10}$$

Положим $\alpha = c^2_{1,2}$, $\gamma = c^3_{1,2}$. Ясно, что $\alpha > 0$, и мы доказали первое утверждение леммы.

Пусть теперь $\mathfrak{s}$ — алгебра Ли, имеющая базис (f_1, f_2, f_3) с единственным нетривиальным коммутатором $[f_1, f_2] = \alpha f_2 + \gamma f_3$, где $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Полагая $e_1 = \frac{1}{\alpha} f_1$, $e_2 = f_2 + \frac{\gamma}{\alpha} f_3$, $e_3 = f_3$, мы получаем новый базис для $\mathfrak{s}$ с единственным нетривиальным коммутационным соотношением $[e_1, e_2] = e_2$. Таким образом, $\mathfrak{s}$ изоморфна алгебре Ли $A_2 \oplus A_1$. $\rhd$

Предложение 5. *В качестве сигнатуры операторов Риччи скалярных произведений на алгебре Ли $\mathfrak{s} = A_2 \oplus A_1$ реализуются только сигнатуры вида $(-,-,0)$, $(-,-,+)$ (сигнатуры 2 и 3 из таблицы 2).*

$\triangleleft$ Для метрической алгебры Ли $\mathfrak{s} = A_2 \oplus A_1$ мы выберем ортонормированный базис $\{f_i\}$, существование которого доказано в лемме 5. Матрица оператора Риччи в этом базисе имеет вид:

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что два из стоящих на диагонали матрицы собственных значения оператора Риччи всегда отрицательны, причем при $\gamma = 0$ реализуется сигнатура $(-,-,0)$, при $\gamma > 0$ — сигнатура $(-,-,+)$, и никаких других сигнатур оператор Риччи иметь не может. $\triangleright$

Понятно, что доказанные выше предложения 1–5 влекут теорему 1.

Автор выражает свою признательность Ю. Г. Никонорову за ценные советы, использованные при написании данной статьи.

Литература

1. *Алексеевский Д. В.* Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Мат. сб.—1975.—Т. 96.—С. 93–117.
2. *Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н.* Структура однородных римановых пространств с нулевой кривизной Риччи // Функциональный анализ и его приложения.—1975.—Т. 9, № 2.—С. 5–11.
3. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
4. *Бессе А. Л.* Многообразия Эйнштейна.—М.: Мир, 1990.—704 с.
5. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 3.—С. 3–16.
6. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 115–147.
7. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
8. *Никитенко Е. В., Никоноров Ю. Г.* Шестимерные эйнштейновы солвмногообразия // Мат. труды.—2005.—Т. 8, № 1.—С. 71–121.
9. *Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия.—2006.—Т. 37.—С. 1–78. Engl. transl.: J. Math. Sci.—2007.—Vol. 146, № 6.—P. 6313–6390.
10. *Чебарыков М. С.* О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли малой размерности // Мат. труды.—2010.—Т. 13, № 1.—С. 186–211.
11. *Dotti Miatello I.* Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups // Math. Zeit.—1982.—Vol. 180.—P. 257–263.
12. *Jensen G.* The scalar curvature of left invariant Riemannian metrics // Indiana Univ. Math. J.—1971.—Vol. 20.—P. 1125–1143.
13. *Milnor J.* Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.

Статья поступила 2 апреля 2013 г.

Чебарыков Михаил Сергеевич
Рубцовский индустриальный институт
Алтайского государственного технического университета
им. И. И. Ползунова
ассистент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6
E-mail: chebarikov@yandex.ru

ON THE RICCI CURVATURE OF THREE-DIMENSIONAL METRIC LIE ALGEBRAS

Chebarikov M. S.

In this paper, we get a classification of possible values of the Ricci curvature signature of left invariant Riemannian metrics on three-dimensional Lie groups, that is a specification of some results of J. Milnor. As an auxiliary problem, we classify three-dimensional nonunimodular metric Lie algebras.

Key words: homogeneous Riemannian manifold, Lie group, metric Lie algebra, three-dimensional Lie group, Ricci operator, eigenvalues of the Ricci operator, Ricci curvature.