Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 1, С. 5–13

УДК **517.9**

О МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ, ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРАМИ ОДНОСТОРОННЕГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО СДВИГА

О. Г. Авсянкин

А. Г. Кусраеву в связи с шестидесятилетним юбилеем

Рассматриваются многомерные интегральные операторы, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений, возмущенные операторами одностороннего мультипликативного сдвига. Получены критерии обратимости и односторонней обратимости таких операторов в L_p-пространствах.

Ключевые слова: интегральный оператор, однородное ядро, мультипликативный сдвиг, обратимость.

1. Введение

Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами играют заметную роль в математике и в приложениях. В настоящее время для интегральных операторов, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, получены критерии обратимости и нетеровости, описаны порождаемые этими операторами банаховы алгебры, найдены условия применимости проекционного метода (см., например, [1–6] и цитированные в них источники). В работе [5] рассматривалась C^*-алгебра, полученная присоединением к C^*-алгебре операторов с однородными ядрами всех операторов мультипликативного сдвига. Для этой C^*-алгебры было построено символическое исчисление, в терминах которого были получены необходимые и достаточные условия обратимости и нетеровости операторов. В статье [6] некоторые результаты, полученные в [5], были перенесены на случай пространства L_p при $p \neq 2$.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [5] и [6]. В ней рассматривается оператор A вида

$$(A\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (U_{\delta_j}\varphi)(x) + \int\limits_{|y|\leqslant 1} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad |x| \leqslant 1,$$

где U_{δ_j} — оператор одностороннего мультипликативного сдвига, а функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$ и инвариантна относительно всех вращений (ниже эти понятия будут конкретизированы). Для такого оператора в работе определен символ, в терминах которого получены критерии обратимости и односторонней обратимости.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$; $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$; $x'=x/|x|$; $x\cdot y=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$; $\mathbb{B}_n=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leqslant 1\}$; $S_{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$; $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$; $Y_{m\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка m; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m)=(n+2m-2)\frac{(n+m-3)!}{m!(n-2)!};$$

$\widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\xi t}\,dt$ — преобразование Фурье функции f.

2. Предварительные сведения

В пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, рассмотрим оператор одностороннего аддитивного сдвига V_τ ($\tau\in\mathbb{R}$), который задается равенством

$$(V_\tau\psi)(t)=\begin{cases}\psi(t-\tau), & t>\tau,\\ 0, & 0<t<\tau,\end{cases}$$

при $\tau>0$, и формулой $(V_\tau\psi)(t)=\psi(t-\tau)$ при $\tau<0$.

Пусть $h\in L_1(\mathbb{R})$. В пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, рассмотрим интегрально-разностный оператор Винера — Хопфа

$$(C\psi)(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(V_{\tau_j}\psi)(t)+\int\limits_0^{\infty}h(t-s)\psi(s)\,ds,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

в предположении, что $\alpha_j\in\mathbb{C}$ и $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|<\infty$.

Теория интегрально-разностных операторов Винера — Хопфа хорошо известна (см. [7, гл. VII]). Символом оператора C называют функцию

$$c(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e^{i\tau_j\xi}+\widehat{h}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Если

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}}|c(\xi)|>0, \tag{2}$$

то можно определить два числа

$$\gamma=\lim_{\ell\to+\infty}\frac{1}{2\ell}\Delta[\arg\alpha(\xi)]\Big|_{-\ell}^{\ell},\quad \varkappa=\frac{1}{2\pi}\Delta\Big[\arg\big(1+\alpha^{-1}(\xi)\widehat{h}(\xi)\big)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty},$$

где

$$\alpha(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e^{i\tau_j\xi}.$$

Предложение 1 [7, с. 239]. *Для того чтобы оператор C вида (1) был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2). Если условие (2) выполнено, то при $\gamma>0$ оператор C обратим только слева, при $\gamma<0$ оператор C обратим только справа, а при $\gamma=0$ обратимость оператора C согласована с индексом $\varkappa$, т. е. оператор C обратим, обратим только слева, обратим только справа в зависимости от того будет ли индекс $\varkappa$ равным нулю, положительным или отрицательным.*

3. Постановка задачи и основные результаты

1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \tag{3}$$

где функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (здесь и далее предполагается, что $n \geqslant 2$) и удовлетворяет следующим условиям:

1° однородность степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y) \quad (\forall\, \alpha > 0);$$

2° инвариантность относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y) \quad (\forall\, \omega \in SO(n));$$

3° суммируемость, т. е.

$$\kappa := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)|\,|y|^{-n/p}\,dy < \infty, \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$ [1]

Из [1, теорема 6.4] следует, что оператор K ограничен в $L_p(\mathbb{B}_n)$, причем $\|K\| \leqslant \kappa$. Далее, для каждого $\delta > 0$ определим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор одностороннего мультипликативного сдвига U_δ формулой

$$(U_\delta \varphi)(x) = \begin{cases} \delta^{-n/p} \varphi(x/\delta), & |x| < \delta, \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases} \tag{4}$$

если $0 < \delta < 1$, и формулой

$$(U_\delta \varphi)(x) = \delta^{-n/p} \varphi(x/\delta), \tag{5}$$

если $\delta > 1$. Нетрудно видеть, что $\|U_\delta\| = 1$.

Основным объектом исследования в данной работе является оператор

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j U_{\delta_j} + K, \tag{6}$$

где K — оператор вида (3), U_{δ_j} — операторы вида (4) или (5), а постоянные $a_j \in \mathbb{C}$ таковы, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty. \tag{7}$$

Очевидно, что оператор A ограничен в $L_p(\mathbb{B}_n)$. Наша цель — установить необходимые и достаточные условия обратимости и односторонней обратимости оператора A.

2. Рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ оператор

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} a_j U_{\delta_j}, \tag{8}$$

---

[1] Функция $k(x,y) = |x|^{-\alpha}|x-y|^{\alpha-n}$, где $0 < \alpha < n$, является примером функции, удовлетворяющей условиям 1°, 2° и 3° при $1 < p < n/\alpha$.

предполагая, что выполнено (7). Символом оператора B будем называть *равномерно почти периодическую функцию*

$$b(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-i\xi \ln \delta_j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta_j^{-i\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Лемма 1. *Для того чтобы оператор B был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы его символ $b(\xi)$ удовлетворял условию*

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}} |b(\xi)| > 0. \tag{10}$$

Если условие (10) выполнено, то обратимость оператора B согласована с индексом

$$\nu = \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{2\ell} \Delta[\arg b(\xi)]\Big|_{-\ell}^{\ell}, \tag{11}$$

т. е. оператор B обратим, обратим только слева или обратим только справа в зависимости от того будет ли число ν равным нулю, положительным или отрицательным.

$\lhd$ Для любого $h > 0$ положим $U'_h = U_{e^{-h}}$, где $U_{e^{-h}}$ определяется формулой (4). Нетрудно проверить, что семейство изометрических операторов $\{U'_h\}_{h\geqslant 0}$, где $U'_0 = I$, образует сильно непрерывную полугруппу операторов. Кроме того, очевидно, что выполнены условия:

1) $U'_h(L_p(\mathbb{B}_n)) \neq L_p(\mathbb{B}_n)$ для любого $h > 0$,

2) каждый оператор U'_h имеет левый обратный оператор U'^{-1}_h, причем $U'^{-1}_h = U_{e^h}$, где U_{e^h} определяется формулой (5). Заметим, что семейство обратных операторов также образует сильно непрерывную полугруппу.

Тогда, учитывая вышесказанное и применяя теорему 4.1 главы VII книги [7], получаем требуемый результат. $\rhd$

3. Для того чтобы получить критерий обратимости оператора A вида (6), рассмотрим в $L_p(\mathbb{B}_n)$ уравнение, порожденное этим оператором:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta_j^{-n/p} \varphi(x/\delta_j) + \int_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{12}$$

где согласно формуле (4) предполагается, что $\varphi(x/\delta_j) = 0$, если $|x| > \delta$.

Так как функция $k(x,y)$ удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $k_0(r,\rho,t)$, что $k(x,y) = k_0(|x|^2, |y|^2, x'\cdot y')$ (см. [8, с. 36]). Учитывая это и переходя в уравнении (12) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta_j^{-1/p} \Phi\left(\frac{r}{\delta_j}\sigma\right) + \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right) \Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta = F(r\sigma), \tag{13}$$

где

$$\Phi(r\sigma) = \varphi(r\sigma) r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma) = f(r\sigma) r^{(n-1)/p};$$

$$D(\rho,t) = k_0(1,\rho^2,t)\rho^{(n-1)/p}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 |D(\rho, t)| \rho^{-1/p} (1-t^2)^{(n-3)/2} d\rho\, dt < \infty. \tag{14}$$

Умножая обе части уравнения (13) на $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа — Гекке [8, с. 43], получим бесконечную диагональную систему одномерных уравнений

$$\sum_{j=1}^\infty a_j \delta_j^{-1/p} \Phi_{m\mu}\left(\frac{r}{\delta_j}\right) + \int_0^1 \frac{1}{r} D_m\left(\frac{\rho}{r}\right) \Phi_{m\mu}(\rho)\, d\rho = F_{m\mu}(r), \tag{15}$$

где $r \in (0,1)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \ldots, d_n(m)$,

$$\Phi_{m\mu}(r) = \int_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma) Y_{m\mu}(\sigma)\, d\sigma, \quad F_{m\mu}(r) = \int_{S_{n-1}} F(r\sigma) Y_{m\mu}(\sigma)\, d\sigma,$$

$$D_m(\rho) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)} \int_{-1}^1 D(\rho, t) P_m(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt. \tag{16}$$

Здесь $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, определяемые равенством

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ \frac{m!(n-3)!}{(m+n-3)!} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geqslant 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

В пространстве $L_p(0,1)$ рассмотрим оператор A_m ($m \in \mathbb{Z}_+$), определяемый левой частью уравнения (15):

$$(A_m g)(r) = \sum_{j=1}^\infty a_j (\mathscr{U}_{\delta_j} g)(r) + \int_0^1 \frac{1}{r} D_m\left(\frac{\rho}{r}\right) g(\rho)\, d\rho, \quad r \in (0,1),$$

где оператор $\mathscr{U}_\delta$ ($\delta > 0$) задается аналогами формул (4) и (5), а именно: если $0 < \delta < 1$, то

$$(\mathscr{U}_\delta g)(r) = \begin{cases} \delta^{-1/p} g(r/\delta), & 0 < r < \delta, \\ 0, & \delta < r < 1, \end{cases}$$

а если $\delta > 1$, то

$$(\mathscr{U}_\delta g)(r) = \delta^{-1/p} g(r/\delta).$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (10). *Тогда найдется такое число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, что для любого $m > m_0$ оператор A_m обратим, обратим только слева, обратим только справа, в зависимости от того будет ли число ν, определенное формулой* (11), *равным нулю, положительным или отрицательным.*

$\lhd$ Положим $A_m = R + K_m$, где операторы R и K_m задаются в пространстве $L_p(0,1)$ равенствами

$$R = \sum_{j=1}^\infty a_j \mathscr{U}_{\delta_j}, \quad (K_m g)(r) = \int_0^1 \frac{1}{r} D_m\left(\frac{\rho}{r}\right) g(\rho)\, d\rho.$$

Так как выполнено условие (10), то оператор R обратим по крайней мере с одной стороны, причем его обратимость согласована с индексом ν. Обозначим через R^{-1} оператор обратный, обратный слева или обратный справа к оператору R (в зависимости от ν).

Далее, хорошо известно (см., например, [1, с. 52]), что

$$\|K_m\| \leqslant \int\limits_0^\infty |D_m(\rho)|\rho^{-1/p}\,d\rho. \tag{17}$$

Из равенства (16) и полноты системы многочленов Лежандра следует, что $\lim_{m\to\infty} D_m(\rho) = 0$ для почти всех $\rho \in \mathbb{R}_+$. Тогда, применяя мажорантную теорему Лебега, с учетом (14) получаем, что интеграл в (17) стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, $\lim_{m\to\infty}\|K_m\| = 0$. Поэтому найдется такое число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, что $\|K_m\| < \|R^{-1}\|^{-1}$ для всех $m > m_0$. Тогда оператор A_m, где $m > m_0$, обратим с той же стороны, что и оператор R, т. е. обратимость оператора A_m согласована с индексом ν. $\triangleright$

4. Определим изоморфизм $W_p\colon L_p(0,1) \to L_p(\mathbb{R}_+)$ формулой

$$(W_p g)(t) = e^{-t/p} g(e^{-t}).$$

Нетрудно проверить, что оператор

$$C_m = W_p A_m W_p^{-1} \tag{18}$$

задается в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ формулой

$$(C_m\psi)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \big(V_{(-\ln\delta_j)}\psi\big)(t) + \int\limits_0^\infty h_m(t-s)\psi(s)\,ds,$$

где

$$h_m(t) = D_m(e^t)\,e^{t/p} \in L_1(\mathbb{R}). \tag{19}$$

Таким образом, C_m — интегрально-разностный оператор Винера — Хопфа, символом которого является функция

$$c_m(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-i\xi\ln\delta_j} + \widehat{h}_m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Далее, рассмотрим на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ функцию

$$\sigma(m,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy,$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра. Назовем *символом* оператора A вида (6) функцию $a(m,\xi)$, заданную на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ равенством $a(m,\xi) = b(\xi) + \sigma(m,\xi)$, где функция $b(\xi)$ определяется формулой (9). Из формул (19) и (16) непосредственно следует, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$a(m,\xi) = c_m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Символ $a(m,\xi)$ назовем невырожденным, если

$$\inf_{\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}} |a(m,\xi)| > 0. \tag{21}$$

В этом случае невырожденной будет и его почти периодическая компонента $b(\xi)$ (см. [7, с. 218]), т. е. выполнено условие (10). Это позволяет определить индекс ν формулой (11). Кроме того, введем индексы $\varkappa_m$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$:

$$\varkappa_m = \frac{1}{2\pi}\Delta\Big[\arg\big(1 + b^{-1}(\xi)\,\sigma(m,\xi)\big)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы оператор A вида (6) был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия: неравенство (21), $\nu = 0$ и $\varkappa_m = 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ *Необходимость.* Очевидно, что обратимость оператора A в $L_p(\mathbb{B}_n)$ влечет обратимость в $L_p(0,1)$ всех операторов A_m, где $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда из равенства (18) вытекает обратимость в $L_p(\mathbb{R}_+)$ всех операторов C_m, $m \in \mathbb{Z}_+$. Используя теперь равенство (20) и предложение 1, убеждаемся в справедливости условий теоремы.

Достаточность. Покажем, что оператор A обратим.

В пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)r^{-(n-1)/p} \in L_p(\mathbb{B}_n)\}$ рассмотрим оператор $\widetilde{A}$, определяемый левой частью уравнения (13). Запишем его в виде $\widetilde{A} = \widetilde{B} + \widetilde{K}$, где операторы $\widetilde{K}$ и $\widetilde{B}$ задаются формулами

$$(\widetilde{K}\Phi)(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D\left(\frac{\rho}{r}, \sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta, \quad \widetilde{B} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \widetilde{U}_{\delta_j},$$

здесь $\widetilde{U}_\delta$ — соответствующий аналог оператора U_δ в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n)$:

$$(\widetilde{U}_\delta\Phi)(r\sigma) = \delta^{-1/p}\Phi\left(\frac{r}{\delta}\,\sigma\right), \quad \text{если } \delta > 1,$$

$$(\widetilde{U}_\delta\Phi)(r\sigma) = \begin{cases} \delta^{-1/p}\Phi\left(\frac{r}{\delta}\,\sigma\right), & 0 < r < \delta, \\ 0, & \delta < r < 1, \end{cases} \quad \text{если } 0 < \delta < 1.$$

Очевидно, что оператор A обратим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{A}$ обратим в пространстве $\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n)$.

Определим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n)$ проектор P_N равенством

$$(P_N\Phi)(r\sigma) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \Phi_{m\mu}(r)Y_{m\mu}(\sigma),$$

и обозначим через Q_N дополнительный проектор. С помощью формулы Функа — Гекке непосредственно проверяется, что $P_N\widetilde{K}Q_N = 0$, $Q_N\widetilde{K}P_N = 0$. Кроме того, очевидны равенства $P_N\widetilde{B}Q_N = 0$ и $Q_N\widetilde{B}P_N = 0$. Учитывая это, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} P_N & Q_N \\ Q_N & P_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_N & Q_N \\ Q_N & P_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{B} + P_N\widetilde{K}P_N & 0 \\ 0 & \widetilde{B} + Q_N\widetilde{K}Q_N \end{pmatrix}.$$

Поскольку выполнено условие (21), то, как уже отмечалось выше, выполнено и неравенство (10). При этом по условию теоремы $\nu = 0$. Тогда по лемме 1 оператор B вида (8) обратим в $L_p(\mathbb{B}_n)$, и значит, оператор $\widetilde{B}$ обратим в $\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n)$. Следовательно, оператор $\widetilde{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\widetilde{B} + P_N\widetilde{K}P_N$ и $\widetilde{B} + Q_N\widetilde{K}Q_N$. Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом значении N.

В [1, с. 80–81] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $h_N(\rho, t)$ вида

$$h_N(\rho, t) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sum_{m=0}^{N} d_n(m) h_m(\rho) P_m(t),$$

где $P_m(t)$ — многочлены Лежандра, такая что оператор $\widetilde{H}_N$ вида

$$(\widetilde{H}_N \Phi)(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} h_N\left(\frac{\rho}{r}, \sigma \cdot \theta\right) \Phi(\rho\theta)\, d\rho\, d\theta$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\widetilde{K} - \widetilde{H}_N\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n))} < \varepsilon. \tag{22}$$

При этом всегда можно считать, что $N > m_0$. Непосредственно устанавливается равенство $Q_N \widetilde{H}_N Q_N = 0$, из которого следует, что $\widetilde{B} + Q_N \widetilde{K} Q_N = \widetilde{B} + Q_N(\widetilde{K} - \widetilde{H}_N)Q_N$. Так как оператор $\widetilde{B}$ обратим, то в силу (22) можно добиться выполнения неравенства

$$\left\|Q_N(\widetilde{K} - \widetilde{H}_N)Q_N\right\|_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n))} < \|\widetilde{B}^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(\widetilde{L}_p(\mathbb{B}_n))},$$

из которого вытекает обратимость оператора $\widetilde{B} + Q_N \widetilde{K} Q_N$.

Таким образом, оператор $\widetilde{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\widetilde{B} + P_N \widetilde{K} P_N$. Обратимость последнего, в силу равенства

$$\widetilde{B} + P_N \widetilde{K} P_N = P_N(\widetilde{B} + \widetilde{K})P_N + Q_N \widetilde{B} Q_N,$$

равносильна обратимости оператора $P_N(\widetilde{B} + \widetilde{K})\big|_{\operatorname{Im} P_N}$ (см. [1, с. 6]). Ясно, что уравнение, порождаемое этим оператором сводится к конечной системе вида (15), где $m = 0, 1, \ldots, N$. Таким образом, необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\widetilde{A}$ является обратимость операторов A_m, где $m = 0, 1, \ldots, N$. Учитывая лемму 2, получаем, что оператор A обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы A_m, где $m = 0, 1, \ldots, m_0$.

Если выполнены все условия данной теоремы, то, применяя (20), (18) и предложение 1, получаем, что все операторы A_m, где $m \in \mathbb{Z}_+$, обратимы в $L_p(0,1)$. Тогда оператор A обратим в $L_p(\mathbb{B}_n)$. $\triangleright$

Замечание. В силу леммы 2 достаточно требовать выполнение условий $\varkappa_m = 0$ для значений $m = 0, 1, \ldots, m_0$. Однако, использование в записях «неопределенного» числа m_0 весьма неудобно. Поэтому в теореме 1 мы пишем, что $m \in \mathbb{Z}_+$.

Обратимся теперь к односторонней обратимости оператора A.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор A вида* (6) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ только слева, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие* (21), *а также одно из двух следующих условий:*

1) $\nu > 0$,

2) $\nu = 0$ *и все индексы $\varkappa_m$ неотрицательны, причем среди них есть хотя бы один положительный.*

$\triangleleft$ Рассуждая совершенно аналогично доказательству теоремы 1, получаем, что оператор A обратим в $L_p(\mathbb{B}_n)$ только слева тогда и только тогда, когда обратимы слева в $L_p(0,1)$ все операторы A_m, причем хотя бы один из них обратим только слева. Тогда, применяя (20), (18) и предложение 1, убеждаемся в справедливости теоремы. $\triangleright$

Теорема 3. *Для того чтобы оператор A вида* (6) *был обратим в пространстве $L_p(\mathbb{B}_n)$ только справа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (21), *а также одно из двух следующих условий:*

1) $\nu < 0$,

2) $\nu = 0$ *и все индексы $\varkappa_m$ неположительны, причем среди них есть хотя бы один отрицательный.*

Литература

1. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators.—Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.—427 p.
2. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* Многомерные интегральные операторы с однородными степени $-n$ ядрами // Докл. РАН.—1999.—Т. 368, № 6.—С. 727–729.
3. *Авсянкин О. Г.* Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, вып. 4.—С. 483–493.
4. *Авсянкин О. Г.* О многомерных интегральных операторах с однородными ядрами и осциллирующими радиальными коэффициентами // Диф. уравнения.—2007.—Т. 43, № 9.—С. 1193–1196.
5. *Авсянкин О. Г.* О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 727–728.
6. Авсянкин О. Г. Обратимость многомерных интегральных операторов с однородными ядрами, возмущенных операторами мультипликативного сдвига // Тр. научной школы И. Б. Симоненко. Сб. науч. трудов.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2010.—С. 22–29.
7. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
8. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.

Статья поступила 4 октября 2011 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
профессор каф. дифференциальных и интегральных уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: avsyanki@math.rsu.ru

ON MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL OPERATORS WITH HOMOGENEOUS KERNELS PERTURBATED BY ONE-SIDED MULTIPLICATIVE SHIFT OPERATORS

Avsyankin O. G.

We study the multidimensional integral operators with kernels homogeneous of degree $(-n)$ and invariant under the rotation group, which are perturbated by one-sided multiplicative shift operators. For these operators the invertibility and one-sided invertibility criterions in L_p-space are obtained.

Key words: integral operator, homogeneous kernel, multiplicative translation, one-sided invertibility.